Laboratorio de Macroeconomía II: Notas sobre el Consumo

Samuel D. Restrepo

Índice

Índice de figuras

Consumo

Consumo bajo certidumbre: Hipótesis del ingreso permanente

Supuestos

- T periodos.
- Previsión perfecta.
- Función de utilidad:
$$U = \sum_{t=1}^{T} u(C_t) \tag{1}$$
El parámetro β es el factor de descuento subjetivo y mide la impaciencia del individuo por consumir. Si $\beta \to 1$, la persona es muy paciente: ella valora el consumo futuro casi tanto como el consumo actual. i.e. ella no "descuenta"la utilidad del consumo en el futuro *mucho* porque ella es indiferente entre consumir 'hoy' y 'mañana' (podemos expresar β en términos de la *tasa de descuento*: $\beta = \frac{1}{1+\rho}$). Para nuestros propósitos, asumimos que el factor de descuento es igual 1, además, asumimos que la función de utilidad del período sigue las preferencias neoclásicas tradicionales: $u(C_t)$ es estrictamente creciente, cóncava, y dos veces diferenciable con derivadas $u'(\bullet) > 0, u''(\bullet) < 0$
- Restricción presupuestaria, asumiendo r=0 y ρ=0 (recordar que ρ=0 si y solo si β=1):
$$\sum_{t=1}^{T} C_t \leq A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t \tag{2}$$
- $u'(\bullet) > 0 \Rightarrow$ R.P se cumple con igualdad

Problema del consumidor

- Agente Resuelve:
$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} u(C_t) + \lambda(A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t - \sum_{t=1}^{T} C_t)$$
- C.P.O.:
$$u'(C_t) = \lambda$$
λ es constante $\forall t$
$$\Rightarrow u'(C_i) = u'(C_j)$$
$$\Rightarrow C_i = C_j;$$
$C_1 = C_2 = ... = C_T$
- Sustituimos en la Restricción presupuestaria:
$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{T} C_t &= A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t \\ TC_t &= A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t \\ C_t &= \frac{1}{T}(A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t), \forall t\end{aligned}$$

$\Rightarrow$El individuo distribuye los recursos de los que dispondrá a lo largo de su vida en la misma cantidad para cada período.

Implicaciones

Hipótesis del Ingreso Permanente[1]

- El consumo de un período se determina por el ingreso de toda su vida (ingreso permanente) y no por su ingreso corriente.
- Por ejemplo, si tenemos una ganancia inesperada en t igual a Z:
  - El ingreso corriente de t aumenta en Z
  - El ingreso permanente aumenta en sólo $\frac{Z}{T}$
    $\Rightarrow$ Si T es lo suficientemente grande, el impacto de un mayor ingreso corriente en el consumo es pequeño.
- Aunque el comportamiento del ingreso no es importante para el consumo, sí lo es para el ahorro:

$$\begin{aligned} S_t =& Y_t - C_t \\ =& (Y_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t) - \frac{1}{T} A_0 \end{aligned}$$

  Donde,

$$Y_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t = IngresoCorriente - IngresoPermanente = IngresoTransitorio$$

  - $Y_t < \bar{Y}^P \Rightarrow$ Ahorro es negativo(deuda)
  - $Y_t > \bar{Y}^P \Rightarrow$ Ahorro es positivo

  $\Rightarrow$ El agente utiliza el ahorro y la deuda para suavizar su consumo en el tiempo.
- Distribución del ingreso entre consumo y ahorro se determina por las preferencias entre consumo presente y futuro (β) y por la información que se tenga sobre las expectativas del consumo futuro (r).
- El ahorro se determina por la trayectoria del ingreso en el tiempo

Aplicaciones Empíricas

- Keynes(1936): el consumo es determinado por el ingreso corriente disponible. El consumo agregado depende del ingreso agregado en una relación estable. A mayor ingreso, mayor proporción del ingreso ahorrado. Hay tres casos por considerar:
  - A) Con datos de corte transversal se cumple el postulado de Keynes
  - B) En el tiempo y en términos agregados la relación es esencialmente proporcional
  - C) Al distinguir entre grupos sociales se encuentra la misma relación proporcional entre, por ejemplo, negros y blancos, pero con interceptos distintos.
- Los tres casos anteriores (A, B y C) tienen explicación bajo la HIP.

[1] Friedman(1957)

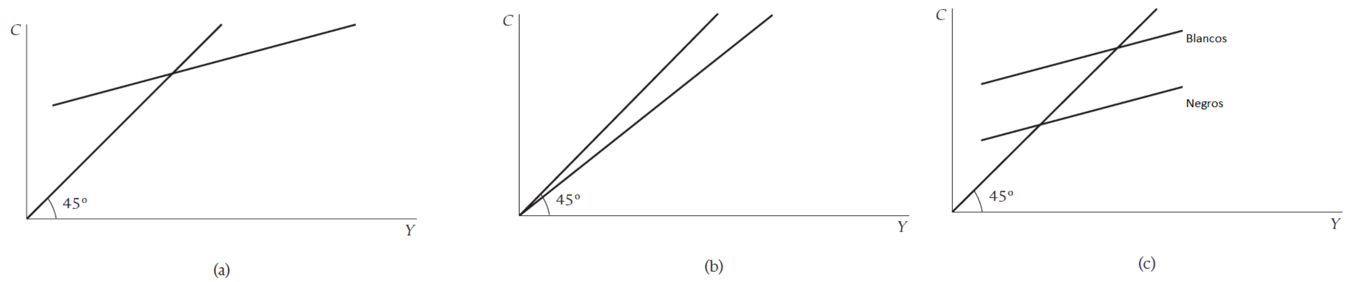

Figura 1: Algunas relaciones diferentes entre el ingreso corriente y el consumo

- Supongamos que $C = Y^P$, $Y = Y^P + Y^T$

$$Y^T = Y - Y^P$$

Lo anterior expresa las desviaciones del ingreso corriente con respecto al ingreso permanente

$$E(Y^T) = 0$$
$$cov(Y^P, Y^T) = 0$$

- Considerando la regresión:

$$\begin{aligned} C_i =& a + bY_i + u_i \\ \hat{b} =& \frac{cov(Y_i, C_i)}{var(Y_i)} = \frac{cov(Y_i^P + Y_i^T, Y_i^P)}{var(Y_i^P + Y_i^T)} \\ \hat{b} =& \frac{var(Y_i^P)}{var(Y_i^P) + var(Y_i^T)} = \frac{1}{1 + \frac{var(Y^T)}{var(Y^P)}} \\ \hat{a} =& \bar{C} - \hat{b}\bar{Y} = \bar{Y}^P - \hat{b}(\bar{Y}^P + \bar{Y}^T) \end{aligned}$$

Recordar que la media del ingreso transitorio es cero, entonces:

$$\hat{a} =(1 - \hat{b})\bar{Y}^P$$

$\Rightarrow$ El determinante esencial de la pendiente de la función de consumo estimada, $\hat{b}$, es la variación relativa en el ingreso permanente y transitorio.

- Un incremento en el ingreso corriente se asocia con un aumento en consumo sólo en la medida en que se refleja en un aumento en el ingreso permanente.

- Cuando la variación del ingreso permanente es relativamente mayor a la del ingreso transitorio, casi todas las diferencias en el ingreso corriente se reflejan en el ingreso permanente; el consumo se incrementa casi 1 a 1 con el ingreso corriente.

$$\frac{var(Y^T)}{var(Y^P)} \to 0$$
$$\Rightarrow \hat{b} \to 1$$

- Cuando $var(Y^P) < var(Y^T)$, las variaciones del ingreso corriente poco se deben a variaciones del ingreso permanente, entonces el consumo incrementa poco ante incrementos en el ingreso corriente
  - *Corte transversal:* ΔY reflejan factores como el desempleo o diferentes estados del ciclo vital $\Rightarrow \hat{b}<1$
  - *Serie de tiempo:* Se reflejan factores de largo plazo con efecto permanente, aumento permanente de recursos $\Rightarrow \hat{b} \to 1$, $\hat{a} \to 0$.

Consumo con incertidumbre: Hipótesis de la caminata aleatoria

Supuestos

- Incertidumbre con respecto a ingresos futuros
- r=ρ=0
- Función de utilidad instantánea cuadrática:

$$u(C_t) = C_t - \frac{a}{2}C_t^2$$

  con $u'(C_t) = 1 - aC_t$, a>0
- Restricción Presupuestaria

$$\sum_{t=1}^{T} E_1(C_t) = A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t)$$

Problema del consumidor

- Ecuación de Euler:

$$1 - aC_1 = E_1(1 - aC_t), \forall t = 2, ..., T$$

  La ecuación anterior muestra que si el individuo está optimizando y renuncia a utilidad marginal en t=1(lado izquierdo de la ecuación), entonces el agente consume el valor esperado de la utilidad marginal a la que renunció en t(lado derecho).

$$\begin{aligned} 1 - aC_1 &= E_1(1 - aC_t) \\ \cancel{1} - \cancel{a}C_1 &= \cancel{1} - \cancel{a}E_1(C_t) \\ C_1 &= E_1(C_t), \forall t = 2, ..., T \end{aligned} \tag{3}$$

- Otra forma de resolver el problema:

$$\mathcal{L} = E_1\Big[\sum_{t=1}^{T}(C_t - \frac{a}{2}C_t^2)\Big] - \lambda E_1\Big[\sum_{t=1}^{T} C_t - A_0 - \sum_{t=1}^{T} Y_t\Big]$$

  C.P.O:

$$\begin{aligned} C_1^* : E_1[1 - aC_1] - \lambda &= 0 \\ C_t^* : E_1[1 - aC_t] - \lambda &= 0, \forall t = 2, ..., T \\ E_1[1 - aC_1] &= E_1[1 - aC_t] \\ \cancel{1} - \cancel{a}C_1 &= \cancel{1} - \cancel{a}E_1(C_t) \end{aligned}$$

$$C_1 = E_1(C_t), \forall t = 2, ..., T \tag{4}$$

- Sustituimos en la Restricción Presupuestaria:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} E_1(C_t) =& A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t) \\
\sum_{t=1}^{T} C_1 =& A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t) \\
TC_1 =& A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t)
\end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{1}{T}\Big(A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t)\Big) \tag{5}$$

- Una función de utilidad cuadrática implica que la utilidad marginal sea lineal en C_t

$$u'(C_t) lineal \Rightarrow u'''(\bullet) = 0$$

- Como supuesto, tomamos únicamente la parte de la función en que $u'(\bullet) > 0$, $u''(\bullet) < 0$
- $u'''(\bullet)$ es el ritmo de crecimiento de la utilidad marginal.
- Todos los elementos anteriores implican que:

$$\begin{aligned}
u'(E[C_t]) =& E[u'(C_t)] \\
u'(C_1) =& E[1 - aC_t] \\
\cancel{1} - \cancel{a}C_1 =& \cancel{1} - \cancel{a}E_1(C_t) \\
C_1 =& E_1(C_t), \forall t = 2, ..., T
\end{aligned}$$

Implicaciones

- De (3) podemos concluir que el consumo de cada periodo es igual al consumo esperado de consumos futuros, para todos los periodos. O equivalentemente, el consumo en valor esperado en el período t es igual al consumo cierto del período 1.

  Esto implica que:

$$C_t = E_{t-1}(C_t) + e_t$$

  donde e_t es una variable tal que $E_{t-1}(e_t)$

- Si consideramos que $C_{t-1} = E_{t-1}(C_t)$

$$C_t = C_{t-1} + e_t \Rightarrow C_{t+1} = C_t + e_{t+1} \tag{6}$$

  Es decir, según Hall (1978), el consumo sigue una *caminata aleatoria*. Esto quiere decir que las variaciones en el cosumo son impredecibles. Sólo los cambios no anticipados en el ingreso pueden alterar el ingreso permanente y, por lo tanto, el consumo. En otras palabras, Dado que el valor esperado ha sido tomando en consideración toda la información disponible en t, el único origen de desviaciones serán shocks inesperados al consumo.

- La característica importante de este proceso (6) es que todos los shocks al consumo tienen efectos permanentes; es decir, no se deshacen.
- Además, teniendo en cuenta lo anterior (6), podemos señalar que el mejor predictor del consumo futuro es el consumo presente.
- De (5) decimos que se cumple el *equivalente cierto:* el agente consume la cantidad que consumiría si sus ingresos futuros fueran igual a sus medias con certeza, i.e.la incertidumbre sobre el ingreso futuro no impacta el consumo.
- El consumidor se comparta como si en el periodo fuera dotado con el valor promedio del ingreso corriente.
- Como conclusión importante recordar que un individuo que en ausencia de incertidumbre tendría su consumo parejo (sección anterior); bajo incertidumbre el cambio de consumo de período a período no es predecible por cuanto sólo cambia como resultado de las noticias que se reciben en cada período, y estos cambios son permanentes.
- Podemos analizar qué determina los cambios en el consumo, e_t:

$$
\begin{aligned}
C_2 =& \frac{1}{T-1}\Big(A_1 + \sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t]\Big) \\
A_1 =& A_0 - Y_1 - C_1 \\
C_2 =& \frac{1}{T-1}\Big(A_0 + Y_1 - C_1 + \sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t]\Big)
\end{aligned}
$$

Sumando y restando $\sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]$:

$$= \frac{1}{T-1}\left(A_0 + Y_1 - C_1 + \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t] + \Big(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\Big)\right)$$

Agregando Y_1 a la sumatoria de $E_1[\bullet]$:

$$= \frac{1}{T-1}\left(A_0 - C_1 + \sum_{t=1}^{T} E_1[Y_t] + \Big(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\Big)\right)$$

Recordar que $C_1 = \frac{1}{T}\Big(A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1[Y_t]\Big)$

$$
\begin{aligned}
C_2 =& \frac{1}{T-1}\left(TC_1 - C_1 + \Big(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\Big)\right) \\
C_2 =& \frac{1}{T-1}\left(C_1(T-1) + \Big(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\Big)\right) \\
=& C_1 + \frac{1}{T-1}\left(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\right) = C_1 + e_2
\end{aligned}
$$

Generalizando:

$$C_t = C_{t-1} + \frac{1}{T-(t-1)}\Big(\sum_{i=t}^{T} E_t[Y_i] - \sum_{i=t}^{T} E_{t-1}[Y_i]\Big) = C_{t-1} + e_t$$

- Los cambios en el consumo sólo pueden ser explicados por cambios en la estimación que el agente hace de sus recursos vitales divididos entre los periodos de vida restantes.

¿Qué pasa si u”’>0?

$\Rightarrow$ La utilidad marginal desciende cada vez más lentamente a medida que el consumo se eleva

$\Rightarrow u'(C)$ es una función convexa en C

$\Rightarrow E(u'(C)) > u'(E(C))$

Recordar que si $C_t = E_t(C_{t+1})$

$\Rightarrow E_t(u'(C_{t+1})) > u'(C_t)$

$\Rightarrow C_{t+1} < C_t$

> Si la utilidad es cuadrática, la utilidad marginal es lineal, y $E_t[u'(C_{t+1})] = u'(E_t[C_{t+1}])$. Por lo tanto, en este caso, la ecuación de Euler se reduce a $C_t = E_t[C_{t+1}]$. Pero si u”’ ($\bullet$) es positiva, entonces u’(C) es una función convexa de C. En este caso, $E_t[u'(C_{t+1})]$ excede $u'(E_t[C_{t+1}])$. Pero esto significa que si C_t y $E_t[C_{t+1}]$ son iguales, $E_t[u'(C_{t+1})]$ es mayor que $u'(C_t)$, y de esta manera una reducción marginal en C_t incrementa la utilidad esperada.

- De esta manera, una reducción marginal en C_t incrementa la utilidad esperada del individuo.
- Por lo tanto, la combinación de u”’>0 e incertidumbre sobre los ingresos futuros reduce el consumo presente e incrementa el ahorro.
- Esto es conocido como **ahorro precautorio**
- Un agente racional que maximiza satisface la ecuación de Euler con igualdad. Por tanto, el individuo reducirá su consumo presente, dándole mayor utilidad en el futuro.

  Impacto de la incertidumbre con u”’>0 (Ejemplo)
- $\uparrow C_H \Rightarrow$ u’(C) cae relativamente poco
- Si además $\downarrow C_L \Rightarrow$ se magnifica el aumento en la utilidad marginal
- Por lo tanto, el incremento de la incertidumbre incrementa la utilidad marginal esperada.
- De esta manera, el incremento de la incertidumbre incrementa el incentivo a ahorrar, disminuyendo el consumo presente.

Aplicación empírica: Pruebas de la hipótesis de la caminata aleatoria

Hay dos visiones sobre la trayectoria del consumo:

1. *Exceso de sensibilidad del consumo:*

- Flavin (1981)
- Visión tradicional: Consumo responde a cambios esperados en el ingreso (ciclo económico).

2. *Hipótesis de la caminata aleatoria:*

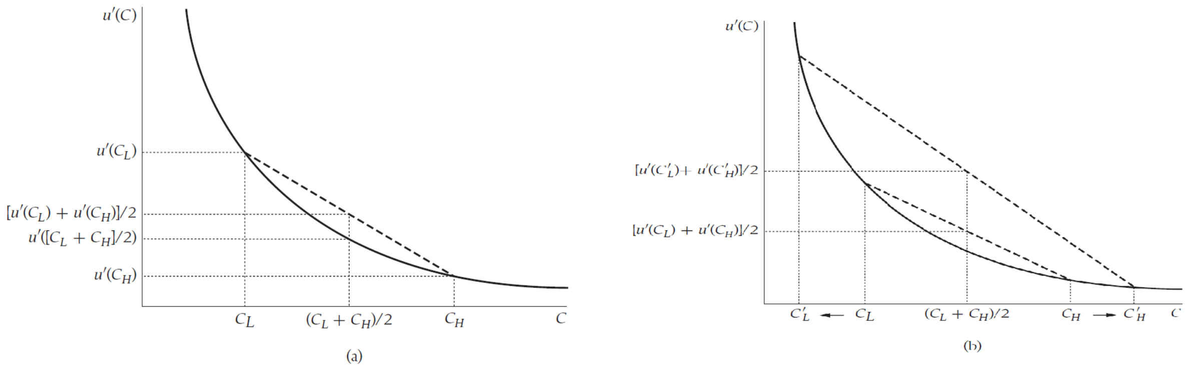

Figura 2: Los efectos de una tercera derivada positiva de la función de utilidad sobre la utilidad marginal esperada del consumo

- Hall (1981)
- Extensión de la Hipótesis del Ingreso Permanente.
- Sólo cambios inesperados en el ingreso que sean de carácter permanente generan cambios en el consumo $\Rightarrow$ si el consumo cae, no se espera una recuperación.

  $\Rightarrow$ No se pueden predecir cambios en el consumo.

Algunas investigaciones en contra de la HIP: Campbell, Mankiw(1989); Shea(1995).

Campbell, Mankiw(1989): Análisis con variables instrumentales; divide población en una parte que gasta todo su ingreso corriente (λ) y otra que consume de acuerdo a la HIP (1-λ)

- A nivel agregado:
$$C_t - C_{t-1} = \lambda(Y_t - Y_{t-1}) + (1-\lambda)e_t = \lambda Z_t + V_t$$

  Donde e_t es el cambio en estimación del ingreso permanente y se espera que $\lambda = 0$ para probar la HIP.

  Z_t y V_t están correlacionados $\Rightarrow$ sobreestimación.

- *Resultado:* Consumo agregado aumenta aproximadamente 50 centavos ante un aumento de 1 dólar en Y (λ=0.42 usando 3 rezagos, λ=0.52 usando 5 rezagos)

  $\Rightarrow$ Consumo es predecible $\Rightarrow$ Se rechaza HIP.

Shea (1995): Estudio a nivel hogar con datos panel. Se analizan hogares con trabajadores con contratos salariales $\Rightarrow$ poder predictivo de los ingresos.

- Se rechaza la HIP
- Esto podría deberse a restricciones de liquidez $\Rightarrow$ Divisón en dos grupos: con activos (se cumple HIP) y sin activos (No se cumple HIP)

  Resultado: El efecto de ΔY_t esperado en cosumo es el mismo en ambos grupos $\Rightarrow$ Se rechaza la HIP
- Analizando sectores de bajos recursos con hogares con expectativas de ingresos decrecientes (HIP predice ahorro).
- Se encuentra que estos hogares tienen un efecto del ingreso de 2.24 sobre el consumo $\Rightarrow$ Se rechaza HIP

Investigaciones que apoyan la HIP se centran en movimienos grandes y predecibles:

- Paxson(1993) y Browning, Collado(2001) analizan fluctuaciones estacionales de los ingresos laborales.
- Hsieh(2003) analiza los pagos anuales a los residentes de Alaska por regalías de petróleo.

Tasa de interés y ahorro

- Efecto de la tasa de interés en el consumo
- Supuestos: r,$\rho \neq$0
- Consumidor resuelve:

$$\max_{Ct} E_0[U] = E_0\Big[\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(C_t)\Big]$$
$$s.a : E_0\left[\sum_{t=0}^{T}\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t C_t\right] = E_0\left[A_0 + \sum_{t=0}^{T}\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t Y_t\right]$$

$\rightarrow$ Ecuación de Euler:

$$u'(C_t) = \beta(1+r)E_t[u'(C_{t+1})]$$

$\rightarrow$ Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = E_0\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(C_t) - \lambda\sum_{t=0}^{T}\left(\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t (C_t - Y_t) - A_0\right)\right]$$

C.P.O:

$$C_t^* : \beta^t u'(C_t) - \lambda\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t = 0$$
$$C_{t+1}^* : \beta^{t+1}E_t[u'(C_{t+1})] - \lambda\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^{t+1} = 0$$
$$\frac{\cancel{\beta^t}u'(C_t)}{\cancel{\beta^{t+1}}E_t[u'(C_{t+1})]} = \cancel{\frac{\lambda\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t}{\lambda\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^{t+1}}}$$
$$\frac{u'(C_t)}{\beta E_t[u'(C_{t+1})]} = \frac{1}{\frac{1}{1+r}}$$
$$\frac{u'(C_t)}{\beta E_t[u'(C_{t+1})]} = 1+r$$

Tenemos tres casos:

$$1)\beta(1+r) = \frac{1+r}{1+\rho} = 1$$
$$\Rightarrow u'(C_t) = E_t[u'(C_{t+1})]$$
$$\Rightarrow C_t = E_t[C_{t+1}]$$
$$2)\beta(1+r) = \frac{1+r}{1+\rho} > 1$$
$$\Rightarrow u'(C_t) > E_t[u'(C_{t+1})]$$
$$\Rightarrow C_t < E_t[C_{t+1}]$$
$$3)\beta(1+r) = \frac{1+r}{1+\rho} < 1$$
$$\Rightarrow u'(C_t) < E_t[u'(C_{t+1})]$$
$$\Rightarrow C_t > E_t[C_{t+1}]$$

$\therefore$ r>ρ $\Rightarrow$$\uparrow$C y r<$\rho$$\downarrow$C. Si dejamos de asumir r=ρ, el consumo deja de ser una camina aleatoria. If $\beta < \frac{1}{1+r}$, the consumer is sufficiently impatient, then and the desired consumption path tilts downwards. If $\beta > \frac{1}{1+r}$, the consumer is sufficiently patient, then and the desired consumption path tilts upwards.

- Caso específico: función de utilidad CRRA

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta}$$

  Donde θ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo.

$$\Rightarrow u'(C_t) = C_t^{-\theta}$$

- Con certidumbre, la ecuación de Euler:

$$C_t^{-\theta} = \beta(1+r)C_{t+1}^{-\theta}$$

$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\theta} = \beta(1+r)$$

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \Big[\beta(1+r)\Big]^{\frac{1}{\theta}} = \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

- Variaciones en la tasa de interés llevan a variaciones en el componente predecible del consumo.
- La evidencia muestra que esta respuesta es pequeña, lo que sugiere una elasticidad de sustitución intertemporal muy baja (θ alto).
- En el caso de dos periodos: ($A_0 = 0$)

$$Y_1 - C_1 = S$$

La anterior ecuación es la restricción presupuestaria para t=1.

$$C_2 = Y_2 + (1+r)(Y_1 - C_1)$$

La anterior ecuación es la restricción para t=2.

$$\Rightarrow C_2 - Y_2 = (1+r)(Y_1 - C_1)$$

$$\frac{C_2 - Y_2}{1+r} = Y_1 - C_1$$

$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}$$

$$\Rightarrow C_2 = Y_2 + (1+r)(Y_1 - C_1)$$

$\Rightarrow$ Renunciar a 1 unidad de consumo en t=1 permite consumir (1+r) más en t=2.

$\uparrow$r$\Rightarrow$$\uparrow$pendiente de RP y es más inclinada.

- Analizando cambios en r:

  Cuando Δr se producen dos efectos:

  - *Efecto sustitución*: Costo de oportunidad (mismo para todos los agentes).
  - *Efecto renta*: Cambio en riqueza (depende de si el agente es ahorrador, deudor o neutral)

$\Rightarrow$ Efecto de Δr en ΔC depende del efecto total (ET= ES + ER)

Efecto del aumento en la tasa de interés para los distintos agentes

Agente Neutral:

- ER=0 y ↑r ⇒ ↑S ↑C con ↓C_1 y ↑C_2 ∴ Aumenta el ahorro.

Agente Ahorrador:

- ER>0 y ↑r ⇒ S>0 ⇒ Tenemos dos casos, si ER>ES ⇒ ↓ S; por otra parte, si ER<ES ⇒ ↑ S ∴ ¡El efecto es ambiguo!

Agente Deudor:

- ER<0 y ↑r ⇒ S<0 ⇒ ER ⇒ ↑ S y ES ⇒ ↑ S ∴ ¡Aumenta el ahorro!.

- Tanto para el caso de agentes neutros como para deudores, un aumento en la tasa de interés lleva a aumentos en el ahorro (y en el consumo en el tiempo)
- Pero en el caso de un ahorrador el efecto total es ambiguo

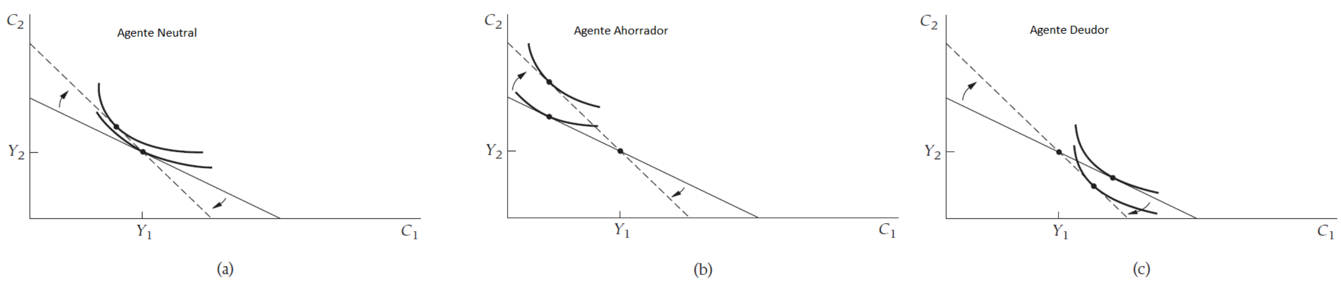

Figura 3: La tasa de interés y las elecciones de consumo en el caso de dos períodos

Desarrollando la intuición de un cambio del precio relativo: la tasa de interés

Note que la tasa de interés es un precio relativo. En la restricción presupuestaria para dos bienes, cada bien está ponderado por su precio. En este caso 1/(1 + r) es el precio relativo del consumo en el período 2 en términos del bien del período 1 (en la restricción presupuestaria, C_1 aparece con un precio unitario), lo que equivale a que 1 + r es el precio del consumo presente respecto del consumo futuro. Si 1/(1+r) baja, es decir, la tasa de interés sube, el presente se hace relativamente más caro que el futuro (trasladar una unidad de presente a futuro produce 1 + r en el futuro), y por tanto conviene trasladar consumo al futuro. Eso se hace ahorrando. Por eso se estima en general que un aumento en la tasa de interés incentiva el ahorro. Sin embargo, esta conclusión no es completa, pues es necesario considerar la presencia de efectos ingreso. La evidencia empírica ha concluido en general —aunque siempre hay quienes discrepan de esta evidencia— que los efectos de las tasas de interés sobre el ahorro son más bien débiles. En términos de la figura, un cambio en la tasa de interés corresponde a un cambio en la pendiente de la restricción presupuestaria. Cuando r sube, la restricción gira, aumentando su pendiente.

La restricción de presupuesto sigue pasando por el punto (Y1, Y2), pero se hace más empinada. Como se desprenderá de la figura, hay efectos sustitución e ingresos que hacen incierta una respuesta definitiva.

El efecto ingreso depende de si el individuo es deudor (S <0) o ahorrador (S >0), también llamado acreedor. Si un individuo no ahorra ni pide prestado —es decir, su óptimo se ubica en (Y1, Y2)—, solo opera el efecto sustitución, con lo cual un aumento en la tasa de interés lo lleva a ahorrar, desplazando ingreso hacia el futuro. Ahora bien, si el individuo es deudor, el efecto ingreso también lo lleva a aumentar el ahorro (reducir deuda) cuando la tasa de interés sube. Piense en el caso extremo en que solo hay ingreso en el segundo per´ıodo; el hecho de que en el segundo per´ıodo deber´a pagar m´as intereses para un ingreso dado, lo lleva a reducir su endeudamiento en el período 1.

Si el individuo es ahorrador, el aumento en la tasa de interés tiene dos efectos contrapuestos. El efecto sustitución lo lleva a desplazar consumo al período 2, pero para que ocurra este desplazamiento el individuo podría ahorrar menos, ya que los retornos por el ahorro han aumentado.

Consumo y activos de riesgo

- Derivado de un problema de maximización de utilidad:

$$u'(C_t)P_t^i = E_t\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k u'(C_{t+k})D_{t+k}^i\Big] \tag{7}$$

  Donde P_t^i y D_{t+k}^i son el precio del activo i en t y el payoff del activo i en t+k.

- DefiniendoR_{t+k}^i = 1 +r_{t+k}^i= $\frac{D_{t+k}^i}{P_t^i}$ y con T=1:

$$u'(C_t) = \beta E_t\Big[(1+r_{t+1}^i)u'(C_{t+1})\Big], \forall i$$

$$\Rightarrow u'(C_t) = \beta\Big[E_t(1+r_{t+1}^i)E_t u'(C_{t+1}) + cov\big(1+r_{t+1}^i, u'(C_{t+1})\big)\Big], \forall i$$

- Suponer u(C_t)= C_t - $\frac{a}{2}$ C_t^2

$$\Rightarrow u'(C_t) = 1 - aC_t$$

  sustituyendo en $cov(\bullet)$:

$$u'(C_t) = \beta\Big[E_t(1+r_{t+1}^i)E_t\big(u'(C_{t+1})\big) - acov\big(1+r_{t+1}^i, C_{t+1}\big)\Big] \tag{8}$$

  Implicaciones:

- El individuo no tiene en cuenta qué tan riesgoso es un activo (varianza) cuando decide si lo adquirirá.
- Intuitivamente incrementar marginalmente la tenencia de un activo riesgoso, no incrementa la varianza en el consumo del agente.
- Al evaluar un incremento marginal en la cantidad acumulada de un activo, el individuo sólo se fija en el rendimiento esperado del activo y su relación con el consumo.
- Si la remuneración de un activo es alta cuando el consumo es bajo (u'(C_t) es alta), comprar una unidad más de este activo eleva la utilidad esperada más que comprar una unidad del activo libre de riesgo.
- A medida que el individuo invierte más en dicho activo, su consumo pasa a depender cada vez más de la renumeración de este

  $\Rightarrow$ Para optimizar la composición del portafolio es crucial compensar los riesgos (*risk hedging*).

Tenemos tres casos posibles

- 1) $cov\big(1+r_{t+1}^i, u'(C_{t+1})\big) > 0$: alto rendimiento cuando la utilidad marginal es alta (i.e cuando el consumo es bajo)

  Ejemplo: Seguro o algún activo contingente.

- 2) $cov\big(1+r_{t+1}^i, u'(C_{t+1})\big) < 0$: alto rendimiento cuando la utilidad marginal es baja (i.e cuando el consumo es alto)

  Ejemplo: activo riesgoso (acción) 'cuando el consumo le va bien, al activo le va bien'.

- 3) $cov\big(1+r_{t+1}^i, u'(C_{t+1})\big) = 0$: rendimiento y consumo no están correlacionados.

  Ejemplo: activo libre de riesgo (r_t no estocástica)

CAPM con consumo

- Despejando para $E_t(1+r^i_{t+1})$:

$$E_t(1+r^i_{t+1}) = \frac{1}{E_t(u'(C_{t+1}))}\Big[\frac{1}{\beta}u'(C_t) - cov\big(1+r^i_{t+1}, u'(C_{t+1})\big)\Big] \tag{9}$$

  $\Rightarrow$ Rendimiento del activo depende negativamente de la relación del rendimiento con la utilidad marginal (i.e. positivamente con el consumo).

  $\Rightarrow$ Activo con $cov(\bullet) > 0$ (seguro) tiene un menor rendimiento esperado.

  $\Rightarrow$ Activo con $cov(\bullet) < 0$ (acción) tiene un mayor rendimiento esperado.

- Especialmente con función cuadrática:

$$E_t(1+r^i_{t+1}) = \frac{1}{E_t(u'(C_{t+1}))}\Big[\frac{1}{\beta}u'(C_t) + acov\big(1+r^i_{t+1}, C_{t+1}\big)\Big]$$

- De la ecuación de Euler:

$$P^i_t = E_t\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k\frac{u'(C_{t+k})}{u'(C_t)}D^i_{t+k}\Big]$$

  $\Rightarrow$ Precio de un activo es igual al valor esperado de su payoff descontado por el factor de descuento estocástico, i.e. la valoración de futuros payoffs.

- Retomando el análisis de los rendimientos esperados según el activo y considerando un activo libre de riesgo:

$$1+\bar{r}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\frac{u'(C_t)}{E_t[u'(C_{t+1})]} \tag{10}$$

- Restando (10) de (9):

$$E_t[r^i_{t+1}] - \bar{r}_{t+1} = -\frac{cov(1+r^i_{t+1}, u'(C_{t+1}))}{E_t[u'(C_{t+1})]}$$

  Donde la resta del lado izquiero de la ecuación anterior es la prima de riesgo.

  $\Rightarrow$ Prima de riesgo es proporcional a la covarianza del rendimiento con el consumo.

Acertijo de la prima de riesgo

- Suponer CRRA

  $\Rightarrow$ Ecuación de Euler:

$$C_t^{-\theta} = \beta E_t\Big[(1+r^i_{t+1})C_{t+1}^{-\theta}\Big]$$

$$\frac{1}{\beta} = E_t\Big[(1+r_{t+1})\Big(\frac{C_{t+1}}{C_t}\Big)^{-\theta}\Big]$$

- Sustituyendo $g^c_{t+1} = \frac{C_{t+1}}{C_t} - 1$ (g^c_{t+1} denota la tasa de crecimiento del consumo desde t hasta t+1)

$$\frac{1}{\beta} = E_t\Big[(1+r^i_{t+1})\Big(1+g^c_{t+1}\Big)^{-\theta}\Big] \tag{11}$$

- Tomando aproximación de Taylor de segundo orden alrededor de r=g=0

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(\bullet)}{\partial y}(y-y_0) + ...$$
$$... + \frac{\partial^2 f(\bullet)}{\partial x \partial x}\frac{(x-x_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 f(\bullet)}{\partial y \partial y}\frac{(y-y_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 f(\bullet)}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0)$$

$$(1+r)(1+g)^{-\theta} \simeq (1+0)(1+0)^{-\theta} + (1+0)^{-1}(1+0)^{-\theta}(r-0) + (1+0)(-\theta)(1+0)^{-1-\theta}(g-0)...$$
$$... + \frac{1}{2}(0)(r-0)^2 + \frac{1}{2}\theta(1+\theta)(1+0)(1+0)^{-(2+\theta)}(g-0)^2 + (-\theta)(1+0)^{-1}(1+0)^{-(1+\theta)}(r-0)(g-0)$$
$$\simeq 1 + r - \theta g + \frac{1}{2}\theta(1+\theta)g^2 - \theta r g$$

$$\frac{\partial f(r,g)}{\partial r} = (1+r)^0(1+g)^{-\theta} = (1+g)^{-\theta}$$
$$\frac{\partial^2 f(r,g)}{\partial r \partial r} = 0$$
$$\frac{\partial f(r,g)}{\partial g} = -\theta(1+r)(1+g)^{-1-\theta}$$

$$\frac{\partial f(r,g)}{\partial g \partial g} = (-\theta)(-1-\theta)(1+r)(1+g)^{-2-\theta} = \theta(1+\theta)(1+r)(1+g)^{-(2+\theta)}$$
$$\frac{\partial f(\bullet)}{\partial g \partial r} = \frac{\partial f(\bullet)}{\partial r \partial g} = -\theta(1+r)^{-1}(1+g)^{-(1+\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \simeq E[r^i] - \theta E[g^c] - \theta\{E[r^i]E[g^c] + cov(r^i,g^c)\} + \frac{1}{2}\theta(\theta+1)\Big\{\big(E[g^c]\big)^2 + var(g^c)\Big\}$$

- Con periodos de tiempo cortos, $E[r^i]E[g^c]$ y $\Big(E[g^c]\Big)^2$ son pequeños relativamente en los otros términos, entoces:

$$E[r^i] \simeq \frac{1}{\beta} + \theta E[g^c] + \theta cov(r^i,g^c) + \frac{1}{2}\theta(1+\theta)var(g^c)$$
$$\Rightarrow E[r^i] - E[r^j] = \theta cov(r^i,g^c) - \theta cov(r^j,g^c) = \theta cov(r^i - r^j, g^c)$$

Puzzle: La evidencia empírica (Mankiw & Zeldes, 1991) muestra grandes diferenciales de rendimientos con bajas covarianzas implicando una aversión al riesgo extremadamente alta (inconsistente).

Lógica de la valuación de opciones (Apartado tomado del repositorio del curso)

Entonces, partiendo de la ecuación fundamental de la valuación, el siguiente proceso describe la lógica de 'aproximar' o 'modelar' el valor de una opción suponiendo que conocemos el valor del activo subyacente:

1. Es el 2018 y imagino que de reaprobarse el TLC/aprobarse el T-MEC, Nemak va a subir de precio de 45 a 55 un año después. Los analistas piensan que eso sólo va a suceder con una probabilidad de 60 % y que si eso no sucediera el precio bajaría a 40, pero yo estoy más optimista que los demás y quiero comprar opciones que me paguen un peso si eso sucede.

2. Leo sobre el tema y averiguo que las opciones Call pagan $(S-K)^+$ donde K el precio de ejercicio, en este caso 45 y S es el precio que llegue a tener el subyacente, en este caso la acción de Nemak, en un tiempo predeterminado T. Si la acción llegase a valer 55 al momento T, mis Calls me pagarian diez pesos cada uno, si llegase a valer 60 por ejemplo, me pagarían quince pesos cada uno y si valiera 45 o menos no me pagarían nada.

3. Voy al MexDer(el mercado mexicano de derivados) y reviso cuanto valen los Calls de Nemak con precio de ejercicio 45 a un año. Me los ofrecen a cinco pesos cada uno, y, sabiamente, decido hacer un cálculo para saber si es un buen precio o no.

4. El cálculo que puedo hacer está basado en los supuestos anteriores y algunos más y la lógica es modelar porqué el precio de Nemak hoy es 45 y una vez establecido ese modelo aplicárselo a la opción para ver cuanto debería valer con el mismo modelo:

   - El precio de $P_0 = 45$ debe ser tal que $P_0 = E^q[P_1]$, es decir que si pensamos que los dos eventos posibles son que se aprueba(A) o no(N) el nuevo TLC, $45 = (q_A(55) + q_b(40))/R^{LR}$.
   - Suponiendo que la tasa de interés es 5 % concluimos que $45(1{,}05) = (55-40)q_A + 40$ y por tanto que $q_A = \frac{45(1{,}05)-40}{55-40} = 0{,}4833$ y que $q_B = 0{,}5167$
   - Si estos son los valores de las probabilidades subjetivas, entonces la opción debería de valer $O_t = (q_A(55-45) + q_b(0))/R^{LR} = (0{,}4833(10))/1{,}05 = 4{,}60$.
   - Concluyo que las opciones están sólo ligéramente por encima del precio que corresponde a la acción y sus posibles valores futuros, y la compro (!!!!).
   - Además, me doy cuenta que aunque la probabilidad objetiva del evento A es 0.60, la probabilidad subjetiva es 0.48, es decir, los retornos que uno pueda obtener llegado ese evento son relativamente poco valorados el día de hoy, y que la probabilidad subjetiva del evento B es 0.5166 a pesar de que su probabilidad objetiva es 0.40, es decir, los retornos que uno obtenga en ese evento se valoran relativamente alto desde el punto del vista del día de hoy.
   - Me doy cuenta que el resultado anterior es función de que en evento A la utlidad márginal del consumo va a ser baja, pues dada la aprobación del nuevo TLC, el país va a ser relativamente rico, mientras que si se diera el evento B, la utilidad marginal del consumo sería relativamente alta, pues el país sería relativamente pobre.

Anexo: Obteniendo la Restricción Presupuestaria para muchos períodos(Caso General)

El primer paso para ver la restricción presupuestaria de los individuos es examinar sus ingresos. Los ingresos totales, antes de impuestos, tienen dos orígenes: ingresos del trabajo (Y_t) e ingresos financieros. Si a principios del período t el individuo tiene activos netos (depósitos en el banco, acciones, plata debajo del colchón, etcétera, menos deudas), representados por A_t, y estos activos le pagan en promedio una tasa de interés r, los ingresos financieros serán rA_t. En consecuencia, los ingresos totales ($Y_{totales}$) en el período t son:

$$Y_{totales} = Y_t + rA_t$$

Por otra parte, el individuo gasta en consumo (C), paga impuestos(T), y acumula activos. La acumulación de activos $A_{t+1} - A_t$, es decir, parte con A_t, y si sus ingresos totales son mayores que el gasto en consumo más el pago de impuestos, estará acumulando activos: $A_{t+1} > A_t$. *La acumulación de activos es el ahorro del individuo.* Considerando que el ingreso total debe ser igual al gasto total, incluyendo la acumulación de activos, tenemos que:

$$Y_t + rA_t = C_t + T_t + A_{t+1} - A_t$$

Si reescribimos esta ecuaci´on, corresponde a:

$$A_{t+1} = Y_t + A_t(1+r)C_t - T_t$$

La que se cumple para todo t. Se debe notar que todas las restricciones presupuestarias están ligadas entre sí. A_t aparece en dos restricciones, en una en compañía de A_{t-1} y en la otra con A_{t+1}. Esto genera una relación recursiva que relaciona todos los períodos. Por otra parte, como pensaremos que los individuos miran al futuro para realizar sus decisiones de gasto, resolveremos esta ecuación “hacia delante”, donde todo el pasado a t está resumido en A_t. Los activos en t proveen toda la información relevante del pasado para el futuro. Podríamos resolver esta ecuación también hacia atrás, pero ello sería irrelevante, pues habríamos explicado cómo se llegó a A_t, la variable que resume completamente el pasado. Además, lo que interesa es la planificación futura que hace el individuo de sus gastos —y, después, las empresas de sus inversiones—, y para ello hay que mirar su restricción presupuestaria en el futuro.

Reemplazando la última ecuación recursivamente —es decir, la escribimos para A_{t+2} y reemplazamos A_{t+1}—, llegamos a:

$$(1+r)A_t = C_t + T_t - Y_t + \frac{C_{t+1} + T_{t+1} - Y_{t+1}}{1+r} + \frac{A_{t+2}}{1+r}$$

En esta ecuación podemos seguir sustituyendo A_{t+2}, luego A_{t+3}, y así sucesivamente, para llegar a:

$$(1+r)A_t = \sum_{s=0}^{T} \frac{C_{t+s} + T_{t+s} - Y_{t+s}}{(1+r)^s} + \frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^T}$$

Si la gente se muere en el perÍodo T, no tiene sentido que A_{t+T+1} sea distinto de 0; es decir, no tiene sentido guardar activos para el comienzo del período siguiente a la muerte, pues obviamente conviene más consumirlos antes. Esto no es más que el principio de la no saciación en teoría del consumidor. Entonces asumimos que $\frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^T} = 0$ Esto dice formalmente que, en valor presente, al final de la vida no quedan activos, aunque en valor corriente de dicho per´ıodo estos no sean 0. Finalmente, con este último supuesto, llegamos a:

$$\sum_{s=0}^{T} \frac{C_{t+s}}{(1+r)^s} = \sum_{s=0}^{T} \frac{Y_{t+s} - T_{t+s}}{(1+r)^s} + (1+r)A_t$$