Laboratorio de Macroeconomía II: Notas sobre el Consumo

Samuel D. Restrepo

Índice

Índice de figuras

Consumo

Consumo bajo certidumbre: Hipótesis del ingreso permanente

Supuestos

- T periodos.
- Previsión perfecta.
- Función de utilidad:

$$U = \sum_{t=1}^{T} u(C_t) \tag{1}$$

  El parámetro β es el factor de descuento subjetivo y mide la impaciencia del individuo por consumir. Si $\beta \to 1$, la persona es muy paciente: ella valora el consumo futuro casi tanto como el consumo actual. i.e. ella no "descuenta"la utilidad del consumo en el futuro *mucho* porque ella es indiferente entre consumir 'hoy' y 'mañana' (podemos expresar β en términos de la *tasa de descuento*: $\beta = \frac{1}{1+\rho}$). Para nuestros propósitos, asumimos que el factor de descuento es igual 1, además, asumimos que la función de utilidad del período sigue las preferencias neoclásicas tradicionales: $u(C_t)$ es estrictamente creciente, cóncava, y dos veces diferenciable con derivadas $u'(\bullet) > 0, u''(\bullet) < 0$

- Restricción presupuestaria, asumiendo r=0 y ρ=0 (recordar que ρ=0 si y solo si β=1):

$$\sum_{t=1}^{T} C_t \leq A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t \tag{2}$$

- $u'(\bullet) > 0 \Rightarrow$ R.P se cumple con igualdad

Problema del consumidor

- Agente Resuelve:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} u(C_t) + \lambda(A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t - \sum_{t=1}^{T} C_t)$$

- C.P.O.:

$$u'(C_t) = \lambda$$

  λ es constante $\forall t$

$$\Rightarrow u'(C_i) = u'(C_j)$$
$$\Rightarrow C_i = C_j;$$

  $C_1 = C_2 = ... = C_T$

- Sustituimos en la Restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{T} C_t =& A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t \\ TC_t =& A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t \\ C_t =& \frac{1}{T}(A_0 + \sum_{t=1}^{T} Y_t), \forall t \end{aligned}$$

⇒El individuo distribuye los recursos de los que dispondrá a lo largo de su vida en la misma cantidad para cada período.

Implicaciones

Hipótesis del Ingreso Permanente[1]

- El consumo de un período se determina por el ingreso de toda su vida (ingreso permanente) y no por su ingreso corriente.
- Por ejemplo, si tenemos una ganancia inesperada en t igual a Z:
  - El ingreso corriente de t aumenta en Z
  - El ingreso permanente aumenta en sólo $\frac{Z}{T}$
    ⇒ Si T es lo suficientemente grande, el impacto de un mayor ingreso corriente en el consumo es pequeño.
- Aunque el comportamiento del ingreso no es importante para el consumo, sí lo es para el ahorro:

$$\begin{aligned} S_t =& Y_t - C_t \\ =& (Y_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t) - \frac{1}{T} A_0 \end{aligned}$$

  Donde,

$$Y_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t = IngresoCorriente - IngresoPermanente = IngresoTransitorio$$

  - $Y_t < \bar{Y}^P$ ⇒ Ahorro es negativo(deuda)
  - $Y_t > \bar{Y}^P$ ⇒ Ahorro es positivo

  ⇒ El agente utiliza el ahorro y la deuda para suavizar su consumo en el tiempo.
- Distribución del ingreso entre consumo y ahorro se determina por las preferencias entre consumo presente y futuro (β) y por la información que se tenga sobre las expectativas del consumo futuro (r).
- El ahorro se determina por la trayectoria del ingreso en el tiempo

Aplicaciones Empíricas

- Keynes(1936): el consumo es determinado por el ingreso corriente disponible. El consumo agregado depende del ingreso agregado en una relación estable. A mayor ingreso, mayor proporción del ingreso ahorrado. Hay tres casos por considerar:
  - A) Con datos de corte transversal se cumple el postulado de Keynes
  - B) En el tiempo y en términos agregados la relación es esencialmente proporcional
  - C) Al distinguir entre grupos sociales se encuentra la misma relación proporcional entre, por ejemplo, negros y blancos, pero con interceptos distintos.
- Los tres casos anteriores (A, B y C) tienen explicación bajo la HIP.

[1] Friedman(1957)

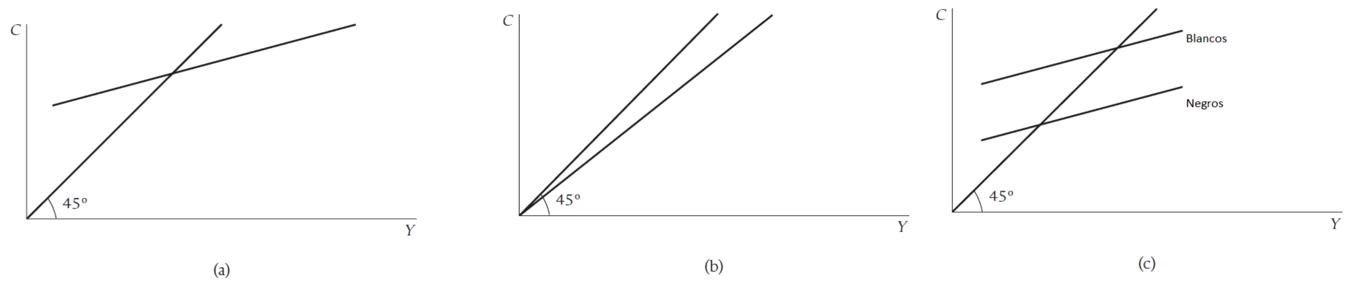

Figura 1: Algunas relaciones diferentes entre el ingreso corriente y el consumo

- Supongamos que $C = Y^P$, $Y = Y^P + Y^T$

$$Y^T = Y - Y^P$$

Lo anterior expresa las desviaciones del ingreso corriente con respecto al ingreso permanente

$$E(Y^T) = 0$$

$$cov(Y^P, Y^T) = 0$$

- Considerando la regresión:

$$\begin{aligned} C_i =& a + bY_i + u_i \\ \hat{b} =& \frac{cov(Y_i, C_i)}{var(Y_i)} = \frac{cov(Y_i^P + Y_i^T, Y_i^P)}{var(Y_i^P + Y_i^T)} \\ \hat{b} =& \frac{var(Y_i^P)}{var(Y_i^P) + var(Y_i^T)} = \frac{1}{1 + \frac{var(Y^T)}{var(Y^P)}} \\ \hat{a} =& \bar{C} - \hat{b}\bar{Y} = \bar{Y}^P - \hat{b}(\bar{Y}^P + \bar{Y}^T) \end{aligned}$$

Recordar que la media del ingreso transitorio es cero, entonces:

$$\hat{a} = (1 - \hat{b})\bar{Y}^P$$

$\Rightarrow$ El determinante esencial de la pendiente de la función de consumo estimada, $\hat{b}$, es la variación relativa en el ingreso permanente y transitorio.

- Un incremento en el ingreso corriente se asocia con un aumento en consumo sólo en la medida en que se refleja en un aumento en el ingreso permanente.

- Cuando la variación del ingreso permanente es relativamente mayor a la del ingreso transitorio, casi todas las diferencias en el ingreso corriente se reflejan en el ingreso permanente; el consumo se incrementa casi 1 a 1 con el ingreso corriente.

$$\frac{var(Y^T)}{var(Y^P)} \to 0$$

$$\Rightarrow \hat{b} \to 1$$

- Cuando $var(Y^P) < var(Y^T)$, las variaciones del ingreso corriente poco se deben a variaciones del ingreso permanente, entonces el consumo incrementa poco ante incrementos en el ingreso corriente
  - *Corte transversal:* ΔY reflejan factores como el desempleo o diferentes estados del ciclo vital $\Rightarrow \hat{b}<1$
  - *Serie de tiempo:* Se reflejan factores de largo plazo con efecto permanente, aumento permanente de recursos $\Rightarrow \hat{b}\to 1$, $\hat{a} \to 0$.

Consumo con incertidumbre: Hipótesis de la caminata aleatoria

Supuestos

- Incertidumbre con respecto a ingresos futuros
- r=ρ=0
- Función de utilidad instantánea cuadrática:

$$u(C_t) = C_t - \frac{a}{2}C_t^2$$

  con $u'(C_t) = 1 - aC_t$, a>0

- Restricción Presupuestaria

$$\sum_{t=1}^{T} E_1(C_t) = A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t)$$

Problema del consumidor

- Ecuación de Euler:

$$1 - aC_1 = E_1(1 - aC_t), \forall t = 2, ..., T$$

  La ecuación anterior muestra que si el individuo está optimizando y renuncia a utilidad marginal en t=1(lado izquierdo de la ecuación), entonces el agente consume el valor esperado de la utilidad marginal a la que renunció en t(lado derecho).

$$\begin{aligned} 1 - aC_1 &= E_1(1 - aC_t) \\ \cancel{1} - \cancel{a}C_1 &= \cancel{1} - \cancel{a}E_1(C_t) \\ C_1 &= E_1(C_t), \forall t = 2, ..., T \end{aligned} \tag{3}$$

- Otra forma de resolver el problema:

$$\mathcal{L} = E_1\Big[\sum_{t=1}^{T}(C_t - \frac{a}{2}C_t^2)\Big] - \lambda E_1\Big[\sum_{t=1}^{T} C_t - A_0 - \sum_{t=1}^{T} Y_t\Big]$$

  C.P.O:

$$\begin{aligned} C_1^* : E_1[1 - aC_1] - \lambda =& 0 \\ C_t^* : E_1[1 - aC_t] - \lambda =& 0, \forall t = 2, ..., T \\ E_1[1 - aC_1] =& E_1[1 - aC_t] \\ \cancel{1} - \cancel{a}C_1 =& \cancel{1} - \cancel{a}E_1(C_t) \end{aligned}$$

$$C_1 = E_1(C_t), \forall t = 2, ..., T \tag{4}$$

- Sustituimos en la Restricción Presupuestaria:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} E_1(C_t) =& A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t) \\
\sum_{t=1}^{T} C_1 =& A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t) \\
TC_1 =& A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t)
\end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{1}{T}\Big(A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1(Y_t)\Big) \tag{5}$$

- Una función de utilidad cuadrática implica que la utilidad marginal sea lineal en C_t

$$u'(C_t) lineal \Rightarrow u'''(\bullet) = 0$$

- Como supuesto, tomamos únicamente la parte de la función en que $u'(\bullet) > 0$, $u''(\bullet) < 0$
- $u'''(\bullet)$ es el ritmo de crecimiento de la utilidad marginal.
- Todos los elementos anteriores implican que:

$$\begin{aligned}
u'(E[C_t]) =& E[u'(C_t)] \\
u'(C_1) =& E[1 - aC_t] \\
\cancel{1} - \cancel{a} C_1 =& \cancel{1} - \cancel{a} E_1(C_t) \\
C_1 =& E_1(C_t), \forall t = 2, ..., T
\end{aligned}$$

Implicaciones

- De (3) podemos concluir que el consumo de cada periodo es igual al consumo esperado de consumos futuros, para todos los periodos. O equivalentemente, el consumo en valor esperado en el período t es igual al consumo cierto del período 1.

  Esto implica que:

$$C_t = E_{t-1}(C_t) + e_t$$

  donde e_t es una variable tal que $E_{t-1}(e_t)$

- Si consideramos que $C_{t-1} = E_{t-1}(C_t)$

$$C_t = C_{t-1} + e_t \Rightarrow C_{t+1} = C_t + e_{t+1} \tag{6}$$

  Es decir, según Hall (1978), el consumo sigue una *caminata aleatoria*. Esto quiere decir que las variaciones en el cosumo son impredecibles. Sólo los cambios no anticipados en el ingreso pueden alterar el ingreso permanente y, por lo tanto, el consumo. En otras palabras, Dado que el valor esperado ha sido tomando en consideración toda la información disponible en t, el único origen de desviaciones serán shocks inesperados al consumo.

- La característica importante de este proceso (6) es que todos los shocks al consumo tienen efectos permanentes; es decir, no se deshacen.
- Además, teniendo en cuenta lo anterior (6), podemos señalar que el mejor predictor del consumo futuro es el consumo presente.
- De (5) decimos que se cumple el *equivalente cierto:* el agente consume la cantidad que consumiría si sus ingresos futuros fueran igual a sus medias con certeza, i.e.la incertidumbre sobre el ingreso futuro no impacta el consumo.
- El consumidor se comparta como si en el periodo fuera dotado con el valor promedio del ingreso corriente.
- Como conclusión importante recordar que un individuo que en ausencia de incertidumbre tendría su consumo parejo (Sección anterior); bajo incertidumbre el cambio de consumo de período a período no es predecible por cuanto sólo cambia como resultado de las noticias que se reciben en cada período, y estos cambios son permanentes.
- Podemos analizar qué determina los cambios en el consumo, e_t:

$$\begin{aligned}
C_2 =& \frac{1}{T-1}\Big(A_1 + \sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t]\Big) \\
A_1 =& A_0 - Y_1 - C_1 \\
C_2 =& \frac{1}{T-1}\Big(A_0 + Y_1 - C_1 + \sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t]\Big)
\end{aligned}$$

Sumando y restando $\sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]$:

$$= \frac{1}{T-1}\left(A_0 + Y_1 - C_1 + \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t] + \Big(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\Big)\right)$$

Agregando Y_1 a la sumatoria de $E_1[\bullet]$:

$$= \frac{1}{T-1}\left(A_0 - C_1 + \sum_{t=1}^{T} E_1[Y_t] + \Big(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\Big)\right)$$

Recordar que $C_1 = \frac{1}{T}\Big(A_0 + \sum_{t=1}^{T} E_1[Y_t]\Big)$

$$\begin{aligned}
C_2 =& \frac{1}{T-1}\left(TC_1 - C_1 + \Big(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\Big)\right) \\
C_2 =& \frac{1}{T-1}\left(C_1(T-1) + \Big(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\Big)\right) \\
=& C_1 + \frac{1}{T-1}\left(\sum_{t=2}^{T} E_2[Y_t] - \sum_{t=2}^{T} E_1[Y_t]\right) = C_1 + e_2
\end{aligned}$$

Generalizando:

$$C_t = C_{t-1} + \frac{1}{T-(t-1)}\Big(\sum_{i=t}^{T} E_t[Y_i] - \sum_{i=t}^{T} E_{t-1}[Y_i]\Big) = C_{t-1} + e_t$$

- Los cambios en el consumo sólo pueden ser explicados por cambios en la estimación que el agente hace de sus recursos vitales divididos entre los periodos de vida restantes.

¿Qué pasa si u"'>0?

$\Rightarrow$ La utilidad marginal desciende cada vez más lentamente a medida que el consumo se eleva

$\Rightarrow u'(C)$ es una función convexa en C

$\Rightarrow E(u'(C)) > u'(E(C))$

Recordar que $C_t = E_t(C_{t+1})$

$\Rightarrow E_t(u'(C_{t+1})) > u'(C_t)$

$\Rightarrow C_{t+1} < C_t$

- De esta manera, una reducción en C_t incrementa la utilidad esperada del individuo.
- Por lo tanto, la combinación de u"'>0 e incertidumbre sobre los ingresos futuros reduce el consumo presente e incrementa el ahorro.
- Esto es conocido como **ahorro precautorio**
- Un agente racional que maximiza satisface la ecuación de Euler con igualdad. Por tanto, el individuo reducirá su consumo presente, dándole mayor utilidad en el futuro.

  Impacto de la incertidumbre con u"'>0
- $\uparrow C_H \Rightarrow$ u'(C) cae relativamente poco
- Si además $\downarrow C_L \Rightarrow$ se magnifica el aumento en la utilidad marginal
- Por lo tanto, el incremento de la incertidumbre incrementa la utilidad marginal esperada.
- De esta manera, el incremento de la incertidumbre incrementa el incentivo a ahorrar, disminuyendo el consumo presente.

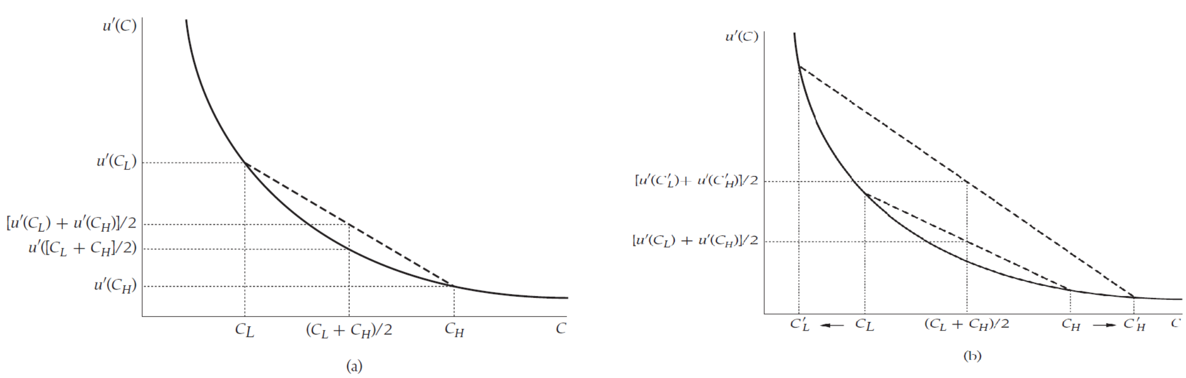

Figura 2: Los efectos de una tercera derivada positiva de la función de utilidad sobre la utilidad marginal esperada del consumo

Aplicación empírica: Pruebas de la hipótesis de la caminata aleatoria

Hay dos visiones sobre la trayectoria del consumo:

1. *Exceso de sensibilidad del consumo:*

- Flavin (1981)
- Visión tradicional: Consumo responde a cambios esperados en el ingreso (ciclo económico).

2. *Hipótesis de la caminata aleatoria:*

- Hall (1981)
- Extensión de la Hipótesis del Ingreso Permanente.
- Sólo cambios inesperados en el ingreso que sean de carácter permanente generan cambios en el consumo $\Rightarrow$ si el consumo cae, no se espera una recuperación.

  $\Rightarrow$ No se pueden predecir cambios en el consumo.

Algunas investigaciones en contra de la HIP: Campbell, Mankiw(1989); Shea(1995).

Campbell, Mankiw(1989): Análisis con variables instrumentales; divide población en una parte que gasta todo su ingreso corriente (λ) y otra que consume de acuerdo a la HIP (1-λ)

- A nivel agregado:

  $$C_t - C_{t-1} = \lambda(Y_t - Y_{t-1}) + (1-\lambda)e_t = \lambda Z_t + V_t$$

  Donde e_t es el cambio en estimación del ingreso permanente y se espera que $\lambda = 0$ para probar la HIP.

  Z_t y V_t están correlacionados $\Rightarrow$ sobreestimación.

- *Resultado:* Consumo agregado aumenta aproximadamente 50 centavos ante un aum ento de 1 dólar en Y (λ=0.42 usando 3 rezagos, λ=0.52 usando 5 rezagos)

  $\Rightarrow$ Consumo es predecible $\Rightarrow$ Se rechaza HIP.

Shea (1995): Estudio a nivel hogar con datos panel. Se analizan hogares con trabajadores con contratos salariales $\Rightarrow$ poder predictivo de los ingresos.

- Se rechaza la HIP
- Esto podría deberse a restricciones de liquidez $\Rightarrow$ Divisón en dos grupos: con activos (se cumple HIP) y sin activos (No se cumple HIP)

  Resultado: El efecto de ΔY_t esperado en cosumo es el mismo en ambos grupos $\Rightarrow$ Se rechaza la HIP
- Analizando sectores de bajos recursos con hogares con expectativas de ingresos decrecientes (HIP predice ahorro).
- Se encuentra que estos hogares tienen un efecto del ingreso de 2.24 sobre el consumo $\Rightarrow$ Se rechaza HIP

Investigaciones que apoyan la HIP se centran en movimienos grandes y predecibles:

- Paxson(1993) y Browning, Collado(2001) analizan fluctuaciones estacionales de los ingresos laborales.
- Hsieh(2003) analiza los pagos anuales a los residentes de Alaska por regalías de petróleo.

Tasa de interés y ahorro

- Efecto de la tasa de interés en el consumo
- Supuestos: r,$\rho \neq$0
- Consumidor resuelve:

$$\max_{Ct} E_0[U] = E_0\Big[\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(C_t)\Big]$$
$$s.a : E_0\left[\sum_{t=0}^{T}\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t C_t\right] = E_0\left[A_0 + \sum_{t=0}^{T}\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t Y_t\right]$$

$\rightarrow$ Ecuación de Euler:

$$u'(C_t) = \beta(1+r)E_t[u'(C_{t+1})]$$

$\rightarrow$ Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = E_0\left[\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(C_t) - \lambda\sum_{t=0}^{T}\left(\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t (C_t - Y_t) - A_0\right)\right]$$

C.P.O:

$$C_t^* : \beta^t u'(C_t) - \lambda\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^t = 0$$
$$C_{t+1}^* : \beta^{t+1}E_t[u'(C_{t+1})] - \lambda\Big(\frac{1}{1+r}\Big)^{t+1} = 0$$
$$\frac{\cancel{\beta^t} u'(C_t)}{\cancel{\beta^{t+1}} E_t[u'(C_{t+1})]} = \frac{\cancel{\lambda\left(\frac{1}{1+r}\right)^t}}{\cancel{\lambda\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t+1}}}$$
$$\frac{u'(C_t)}{\beta E_t[u'(C_{t+1})]} = \frac{1}{\frac{1}{1+r}}$$
$$\frac{u'(C_t)}{\beta E_t[u'(C_{t+1})]} = 1 + r$$

Tenemos tres casos:

$$1)\beta(1+r) = \frac{1+r}{1+\rho} = 1$$
$$\Rightarrow u'(C_t) = E_t[u'(C_{t+1})]$$
$$\Rightarrow C_t = E_t[C_{t+1}]$$
$$2)\beta(1+r) = \frac{1+r}{1+\rho} > 1$$
$$\Rightarrow u'(C_t) > E_t[u'(C_{t+1})]$$
$$\Rightarrow C_t < E_t[C_{t+1}]$$
$$3)\beta(1+r) = \frac{1+r}{1+\rho} < 1$$
$$\Rightarrow u'(C_t) < E_t[u'(C_{t+1})]$$
$$\Rightarrow C_t > E_t[C_{t+1}]$$

$\therefore$ r>ρ $\Rightarrow\uparrow$C y r<$\rho\downarrow$C. Si dejamos de asumir r=ρ, el consumo deja de ser una camina aleatoria.

- Caso específico: función de utilidad CRRA

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\theta}}{1-\theta}$$

Donde θ es el coeficiente de aversión relativa al riesgo.

$$\Rightarrow u'(C_t) = C_t^{-\theta}$$

- Con certidumbre, la ecuación de Euler:

$$C_t^{-\theta} = \beta(1+r)C_{t+1}^{-\theta}$$
$$\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\theta} = \beta(1+r)$$
$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \Big[\beta(1+r)\Big]^{\frac{1}{\theta}} = \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

- Variaciones en la tasa de interés llevan a variaciones en el componente predecible del consumo.
- La evidencia muestra que esta respuesta es pequeña, lo que sugiere una elasticidad de sustitución intertemporal muy baja (θ alto).
- En el caso de dos periodos: $(A_0 = 0)$

$$Y_1 - C_1 = S$$

La anterior ecuación es la restricción presupuestaria para t=1.

$$C_2 = Y_2 + (1+r)(Y_1 - C_1)$$

La anterior ecuación es la restricción para t=2.

$$\Rightarrow C_2 - Y_2 = (1+r)(Y_1 - C_1)$$
$$\frac{C_2 - Y_2}{1+r} = Y_1 - C_1$$
$$C_1 + \frac{C_2}{1+r} = Y_1 + \frac{Y_2}{1+r}$$
$$\Rightarrow C_2 = Y_2 + (1+r)(Y_1 - C_1)$$

$\Rightarrow$ Renunciar a 1 unidad de consumo en t=1 permite consumir (1+r) más en t=2.

$\uparrow$r$\Rightarrow\uparrow$pendiente de RP y es más inclinada.

- Analizando cambios en r:

  Cuando Δr se producen dos efectos:

  - *Efecto sustitución*: Costo de oportunidad (mismo para todos los agentes).
  - *Efecto renta*: Cambio en riqueza (depende de si el agente es ahorrador, deudor o neutral)

$\Rightarrow$ Efecto de Δr en ΔC depende del efecto total (ET= ES + ER)

Efecto del aumento en la tasa de interés para los distintos agentes

Agente Neutral:

- ER=0 y ↑r ⇒ ↑S ↑C con $\downarrow C_1$ y $\uparrow C_2$ ∴ Aumenta el ahorro.

Agente Ahorrador:

- ER>0 y ↑r ⇒ S>0 ⇒ Tenemos dos casos, si ER>ES ⇒ ↓ S; por otra parte, si ER<ES ⇒ ↑ S ∴ ¡El efecto es ambiguo!.

Agente Deudor:

- ER<0 y ↑r ⇒ S<0 ⇒ ER ⇒ ↑ S y ES ⇒ ↑ S ∴ ¡Aumenta el ahorro!.

- Tanto para el caso de agentes neutros como para deudores, un aumento en la tasa de interés lleva a aumentos en el ahorro (y en el consumo en el tiempo)

- Pero en el caso de un ahorrador el efecto total es ambiguo

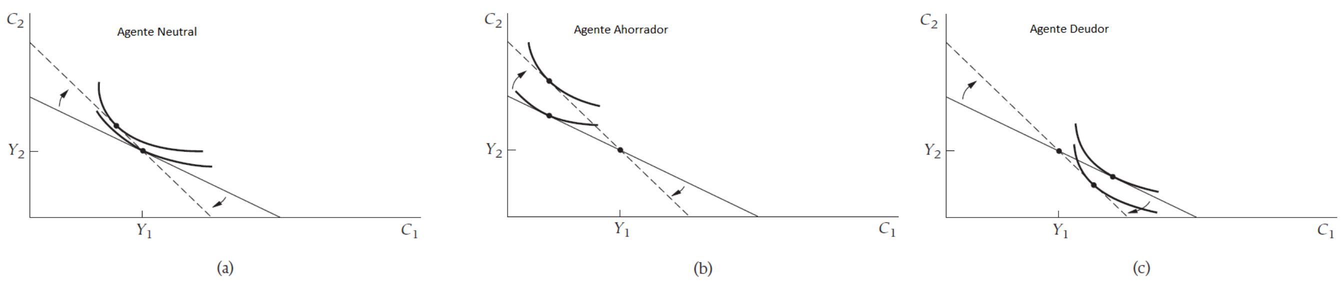

Figura 3: La tasa de interés y las elecciones de consumo en el caso de dos períodos

Consumo y activos de riesgo

- Derivado de un problema de maximización de utilidad:

$$u'(C_t)P_t^i = E_t\Big[\sum_{k=1}^{\infty}\beta^k u'(C_{t+k})D_{t+k}^i\Big] \tag{7}$$

  Donde P_t^i y D_{t+k}^i son el precio del activo i en t y el payoff del activo i en t+k.

- Definiendo$R_{t+k}^i = 1 + r_{t+k}^i = \frac{D_{t+k}^i}{P_t^i}$ y con T=1:

$$u'(C_t) = \beta E_t\Big[(1 + r_{t+1}^i)u'(C_{t+1})\Big], \forall i$$

$$\Rightarrow u'(C_t) = \beta\Big[E_t(1 + r_{t+1}^i)E_t u'(C_{t+1}) + cov\big(1 + r_{t+1}^i, u'(C_{t+1})\big)\Big], \forall i$$

- Suponer u(C_t)= C_t - $\frac{a}{2}$ C_t^2

$$\Rightarrow u'(C_t) = 1 - aC_t$$

  sustituyendo en $cov(\bullet)$:

$$u'(C_t) = \beta\Big[E_t(1 + r_{t+1}^i)E_t\big(u'(C_{t+1})\big) - acov\big(1 + r_{t+1}^i, C_{t+1}\big)\Big] \tag{8}$$

- El individuo no tiene en cuenta qué tan riesgoso es un activo (varianza) cuando decide si lo adquirirá.
- Intuitivamente incrementar marginalmente la tenencia de un activo riesgoso, no incrementa la varianza en el consumo del agente.
- Al evaluar un incremento marginal en la cantidad acumulada de un activo, el individuo sólo se fija en el rendimiento esperado del activo y su relación con el consumo.
- Si la remuneración de un activo es alta cuando el consumo es bajo (u'(C_t) es alta), comprar una unidad más de este activo eleva la utilidad esperada más que comprar una unidad del activo libre de riesgo.
- A medida que el individuo invierte más en dicho activo, su consumo pasa a depender cada vez más de la renumeración de este

  $\Rightarrow$ Para optimizar la composición del portafolio es crucial compensar los riegos.

Tenemos tres casos posibles

- 1) $cov\big(1 + r_{t+1}^i, u'(C_{t+1})\big) > 0$: alto rendimiento cuando la utilidad marginal es alta (i.e cuando el consumo es bajo)

  Ejemplo: Seguro o algún activo contingente.

- 2) $cov\big(1 + r_{t+1}^i, u'(C_{t+1})\big) < 0$: alto rendimiento cuando la utilidad marginal es baja (i.e cuando el consumo es alto)

  Ejemplo: activo riesgoso (acción) 'cuando el consumo le va bien, al activo le va bien'.

- 3) $cov\big(1 + r_{t+1}^i, u'(C_{t+1})\big) = 0$: rendimiento y consumo no están correlacionados

  Ejemplo: activo libre de riesgo (r_t estocástica)

Anexo: Obteniendo la Restricción Presupuestaria para muchos períodos(Caso General)

El primer paso para ver la restricción presupuestaria de los individuos es examinar sus ingresos. Los ingresos totales, antes de impuestos, tienen dos orígenes: ingresos del trabajo (Y_t) e ingresos financieros. Si a principios del período t el individuo tiene activos netos (depósitos en el banco, acciones, plata debajo del colchón, etcétera, menos deudas), representados por A_t, y estos activos le pagan en promedio una tasa de interés r, los ingresos financieros serán rA_t. En consecuencia, los ingresos totales ($Y_{totales}$) en el período t son:

$$Y_{totales} = Y_t + rA_t$$

Por otra parte, el individuo gasta en consumo (C), paga impuestos(T), y acumula activos. La acumulación de activos $A_{t+1} - A_t$, es decir, parte con A_t, y si sus ingresos totales son mayores que el gasto en consumo más el pago de impuestos, estará acumulando activos: $A_{t+1} > A_t$. *La acumulación de activos es el ahorro del individuo.* Considerando que el ingreso total debe ser igual al gasto total, incluyendo la acumulación de activos, tenemos que:

$$Y_t + rA_t = C_t + T_t + A_{t+1} - A_t$$

Si reescribimos esta ecuaci´on, corresponde a:

$$A_{t+1} = Y_t + A_t(1 + r)C_t - T_t$$

La que se cumple para todo t. Se debe notar que todas las restricciones presupuestarias están ligadas entre sí. A_t aparece en dos restricciones, en una en compañía de A_{t-1} y en la otra con A_{t+1}. Esto genera una relación recursiva que relaciona todos los períodos. Por otra parte, como pensaremos que los individuos miran al futuro para realizar sus decisiones de gasto, resolveremos esta ecuación "hacia delante", donde todo el pasado a t está resumido en A_t. Los activos en t proveen toda la información relevante del pasado para el futuro. Podríamos resolver esta ecuación también hacia atrás, pero ello sería irrelevante, pues habríamos explicado cómo se llegó a A_t, la variable que resume completamente el pasado. Además, lo que interesa es la planificación futura que hace el individuo de sus gastos —y, después, las empresas de sus inversiones—, y para ello hay que mirar su restricción presupuestaria en el futuro.

Reemplazando la última ecuación recursivamente —es decir, la escribimos para A_{t+2} y reemplazamos A_{t+1}—, llegamos a:

$$(1 + r)A_t = C_t + T_t - Y_t + \frac{C_{t+1} + T_{t+1} - Y_{t+1}}{1 + r} + \frac{A_{t+2}}{1 + r}$$

En esta ecuación podemos seguir sustituyendo A_{t+2}, luego A_{t+3}, y así sucesivamente, para llegar a:

$$(1 + r)A_t = \sum_{s=0}^{T} \frac{C_{t+s} + T_{t+s} - Y_{t+s}}{(1 + r)^s} + \frac{A_{t+T+1}}{(1 + r)^T}$$

Si la gente se muere en el perÍodo T, no tiene sentido que A_{t+T+1} sea distinto de 0; es decir, no tiene sentido guardar activos para el comienzo del período siguiente a la muerte, pues obviamente conviene más consumirlos antes. Esto no es más que el principio de la no saciación en teoría del consumidor. Entonces asumimos que $\frac{A_{t+T+1}}{(1+r)^T} = 0$ Esto dice formalmente que, en valor presente, al final de la vida no quedan activos, aunque en valor corriente de dicho per´ıodo estos no sean 0. Finalmente, con este último supuesto, llegamos a:

$$\sum_{s=0}^{T} \frac{C_{t+s}}{(1 + r)^s} = \sum_{s=0}^{T} \frac{Y_{t+s} - T_{t+s}}{(1 + r)^s} + (1 + r)A_t$$