Линейная Алгебра ДЗ 2

Шорин Сергей, БКНАД211

21 сентября 2021 г.

1

Вычислим выражение:

$$3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

разобьём на части:
А)

$$3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\\ 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 6\\ 12 & 9\\ 3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

Б)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1*1+0*0+1*0 & 1*0+0*1+1*0\\ 1*1+2*0+0*0 & 1*0+2*1+0*0\\ 2*1+1*0+0*0 & 2*0+1*1+0*0\\ 1*1+3*0+2*0 & 1*0+3*1+2*0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

В)

$$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix}$$

Итого:

$$\begin{pmatrix}3 & 6\\ 12 & 9\\ 3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 6\\ 4 & 8\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3+1-1 & 6+0-2\\ 12+1-2 & 9+2-4\\ 3+2-3 & 3+1-6\\ 3+1-4 & -3+3-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 4\\ 11 & 7\\ 2 & -2\\ 0 & -8\end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix}3 & 4\\ 11 & 7\\ 2 & -2\\ 0 & -8\end{pmatrix}$$

2

Вычислим максимально рациональным способом:
tr((A + B)(X + Y) - XA - XB - YB) =
= tr(AX + AY + BX + BY - XA - XB - YB) =
= tr(AX) + tr(AY) + tr(BX) + tr(BY) - tr(XA) - tr(XB) - tr(YB) =
= tr(AX) + tr(AY) + tr(BX) + tr(BY) - tr(AX) - tr(BX) - tr(BY) =
= tr(AY)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AY = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$tr(AY) = tr \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 12 + 1 - 2 = 11$$

Ответ: 11

3

Найдем все матрицы, перестановочные с матрицей А:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = XA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} & a_{13} + a_{23} \\ a_{21} + a_{31} & a_{22} + a_{32} & a_{23} + a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} + a_{12} & a_{12} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + a_{21} & a_{23} + a_{22} \\ a_{31} & a_{32} + a_{31} & a_{33} + a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{21} = 0 \\ a_{11} = a_{22} \\ a_{23} = a_{12} \\ a_{31} = 0 \\ a_{32} = a_{21} \\ a_{33} = a_{22} \\ a_{31} = 0 \\ a_{32} = 0 \end{cases} = \begin{cases} a_{21} = 0 \\ a_{11} = a_{22} = a_{33} \\ a_{23} = a_{12} \\ a_{31} = 0 \\ a_{21} = 0 \\ a_{31} = 0 \\ a_{32} = 0 \end{cases}$$

Ответ

$$X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

4

При каких λ найдутся матрицы X, Y, такие что XY - YX $= \lambda E$?

$$XY - YX = \lambda E$$

Посмотрим на след матрицы λE: по определению след единичной матрицы размера n равен n. $tr(\lambda E) = \lambda n$ (по свойству следа). Рассмотрим след выражения

$$tr(XY - YX)$$

$$tr(XY) - tr(YX)$$

$$tr(XY) - tr(XY)$$

$$tr(XY) - tr(XY) = 0$$

Следовательно, $0 = \lambda n, n \neq 0$. Отсюда $\lambda = 0$

Ответ

$$\lambda = 0$$

5

Найдите все матрицы A размера nxn, что для любой матрицы B того же размера выполнено $AB = BA$.

Рассмотрим первый столбец и первую сточку такой матрицы. Пусть строка будет (a, b, c, d, ...), а столбец - (a, x, y, z, ...).

Обозначим строки и столбцы матрицы B как $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, ...)$ и $(a_{11}, a_{21}, a_{31}, ...)$

Тогда первый элемент матрицы AB (или BA) должен быть равен $a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + ... = a_{11}a + a_{21}x + a_{31}y + ...$

Так как матрица B может быть любая, все ее элементы не зависят друг от друга - например, на место x_{21} можно поставить элемент $x_{21} + 1$. Следовательно, элементы матрицы A кроме (a) в этих столбцах и строчках будут равняться 0. Получается матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Но при умножении на матрицу B слева элемент (c) будет увеличивать последний столбец матрицы B в (c) раз, а при умножении права - будет увеличивать последнюю строчку в (c) раз. Таким образом матрица AB будет равна BA только если все элементы на диагонали равны (последняя строчка умноженная в (c) раз - это то же самое, что последние элементы всех столбцов, умноженных на (c).

Ответ

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$