Линейная алгебра

Sergey

5 октября 2021 г.

1 Лекция 1 Метод Гаусса

$x_1....x_n$ - переменные Линейное ураванение: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, a_i, b_i - известные числа

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

a_{ij} - клэффициенты уравнений b_n - правые части

Определение:
Если решение есть - то система называется совместной
Если решений нет - называется не совместной
Если решение есть и единственное - система называется опрделеленной

Пример:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

В таком случае пытаемся выразить одну переменную через другую.
Ответ: y - любое, x = $\frac{4-3y}{2}$

Определение: Матрица - это прямоугольная таблица, заполненная числами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}...a_{1n} \\ .... \\ a_{m1}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Матрица коэффициентов системы линейых уравнений(СЛУ)

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11}...a_{1n}b_1 \\ .... \\ a_{m1}...a_{mn}b_m \end{pmatrix}$$

- Расширеная матрица коэффициентов СЛУ

План решения СЛУ: 1) Ввести элементарные преобразования СЛУ (матриты A_2), которые не меняют множества решений СЛУ 2) Привести этими элементарными пребразрованиями к некому "хорошему"виду 3) Решить конечную систему в этом "хорошем"виде

Определение: Две СЛУ называются эквивалентными, если множества решений совпадают.

I тип элементарного преобразования: i-е уравнение, умноженное на число λ, прибавляем к j уравнению (прибавляем левую часть к левой, а правую часть к правой. (i-е уравнение не меняем)

Пример: умножим первую строчку на 2 и прибавим к 3 строчке

$$\begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 6,7,8,9,10 \\ 2,1,2,1,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5 \\ 6,7,8,9,10 \\ 4,5,8,9,10 \end{pmatrix}$$

II тип элементарного преобразования:
Берем i и j строчки и меняем их местами

III тип элементарного преобразования:
i строчку умножаем на $\lambda, \lambda \neq 0$

Теорема: Элементарные преобразования преодят СЛУ в эквивалентную.

Доказательство:
(отложили на конец лекции, основная идея - есть обратные преобразования)

Что такое "хороший"вид: Определение: "Лидер строки"(ведущий элемент) строки матрицы - самое левое не нулевое число

$$\begin{pmatrix} 3,0,2,4 \\ 0,0,1,2 \\ 0,4,3,0 \end{pmatrix}$$

Определение: Матрица имеет ступенчатый вид, если: - Все нулевые строчки находятся снизу - Номера столбцов лидеров образуют возрастающую последовательность если все нулевые строчки находятся снизу

$$\begin{pmatrix} 3,0,2,4 \\ 0,0,1,2 \\ 0,0,0,1 \\ 0,0,0,0 \end{pmatrix}$$

Нужно привести матрицу A_2 к ступенчатуму виду. 1. Берем столбцы, пока не находим не нулевой столбец i 2. Ставим строчку с элементом первым не нулевым элементом (a_{ij}) в столбце i на верх через преобразование 2 типа 3. за счет элементарного преобразования 1 типа обнуляем все элементы кроме a_{ij} 4. Переходим к матрице ниже на одну строчку и правее на один столбец.

Определене: Улучшенный ступенчатый вид - это ступунчатый вид, все лидеры строк - единицы, над лидерами строк находятся нули

Алгоритм приведения к Уучшенному ступенчатому виду: 1. Умножим каждую строчку на $\frac{1}{a}$, где а - значение лидера строки 2. Идем по строкам снизу, обнуляем все элементы над лидерами строк

Определение: Прямой ход метода Гаууса (метод Гаусса) - Приведение к (улучшенному) ступенчатому виду по алгоритму сверху.

Определение: Обратный ход метода Гаусса: - Идем снизу верх 1. Смотрим на последнюю строку

Определение: экзотическое уравнение:

$0x + ... + 0x_n = b, b \neq 0$

Теорема: для любого набора значений свободных переменных существует единственное значение главных переменных, дополняющих до решения

Преобразования I типа не меняют множество решений:
В результате сложения двух равенств получается верное равенство -> множество решений не уменьшилось.
При элементарном преобразовании 1 типа множество решений не меньше чем множество решений в исходной СЛУ.
Так как для любого преобразования 1 типа можно подобрать обратное преобразование 1 типа, Множество решений измененной системы не увеличивается

2 Лекция 2 Действия с матрицами

A - матрица m на n

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda x_1 1 & .. & \lambda x_1 n \\ \lambda x_m 1 & .. & \lambda x_m n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 1 & .. & a_1 n \\ a_m 1 & .. & a_m n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 1 & .. & b_1 n \\ b_m 1 & .. & b_m n \end{pmatrix}$$

Сложение матриц: $A, B \in Mat_{nxm}$.
$A + B = C \in Mat_{nxm}$
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Свойство введенных операций.
1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ - Ассоциативность
($(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$

1.1) Обобщенная ассоциативность:
$A_1 + A_2 + ... + A_k$ - результат одинаковый при любой расстановке скобок

2) $\alpha(\lambda A) = \lambda(\alpha A)$
3) $(\alpha + \lambda)A = \lambda A + \alpha A$
4) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
5) $1A = A$
6)

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & .. & 0 \\ 0 & .. & 0 \end{pmatrix},$$

7) $A + B = B + A$
8) $-A : A + (-A) = 0$

Умножение матриц:

$$A_{mxn} B_{nxk} = C_{mxk}$$

$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} btj$

Свойства умножения матриц:
1) $(A * B) * C = A * (B * C)$

$$AB = J$$

$$d_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} btj$$

$$(AB)C = F$$

$$f_{pq} = \sum_{s=1}^{k} d_{ps} c_{sq} = \sum_{s=1}^{k} \sum_{t=1}^{n} a_{pt} b_{ts} c_{sq}$$

Для $A(BC) = L$ Сумма аналогична, поэтому $L = F$.

1.1) Общая ассоциативность: $A_1A_2..A_n$ - Не завистит от расстановки скобок.

2) A(B + C) = AB + AC Дистрибутивность.

3) $(A+B)C = AC + BC$

4) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

5) Единичная матрица: $1A = A$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & .. & 0 \\ 0 & .. & 1 \end{pmatrix},$$

....

....

....

Тнаспонирование матриц:

$$A_{mn} - > B_{nm} = A^T$$

$$a_{ij} = b_{ji}$$

$$(PQ)^T = Q^T P^T$$

След матрицы - сумма ее диагональных элементов.

$$tr(A) = a11 + a22 + a33 + ... + ann$$

Теорема:

$$tr(PQ) = tr(QP)$$

Лекция 6. Перестановки

Опр. Перестановка длины n - переупорядоченный набор от 1 до n.

Например (2, 3, 7, 4, 6, 1, 7) - перестанока длинны 7.

Подстановка длинны n - это отображение (биекция) $\sigma : 1, 2, 3, 4, 5, ..n/to1, 2, 3, 4, 5, ..n$

Пример:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Существует биекция между подстановками и перестановками.

Всего $n!$ престановок.

Произведение подстановок:

$$\gamma = \delta\dot{\sigma}$$

$$\gamma(i) = \delta \cdot \sigma(i) = \delta(\sigma(i))$$

При перемножении начинаем с перестановки справа:

$$\sigma\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$1 \to 2 \to 4$$

$$2 \to 1 \to 3$$

Произведение перестановок не коммуникативно!

$$\sigma\delta \neq \delta\sigma$$

Произведение перестановок ассоциативно.

$$(\sigma\delta)\gamma = \sigma(\delta\gamma)$$

$$(\sigma\delta)\gamma(x) = (\sigma\delta)(\gamma(x)) = \sigma(\delta(\gamma(x)))) =$$
$$= \sigma(\delta\gamma)(x) = \sigma(\delta\gamma(x)) = \sigma(\delta(\gamma(x))))$$

Тождественная перестановка id (единичная перестановка):

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Обратная перстановка : σ^{-1}. Так как σ - биекция, такая перестановка единственна.

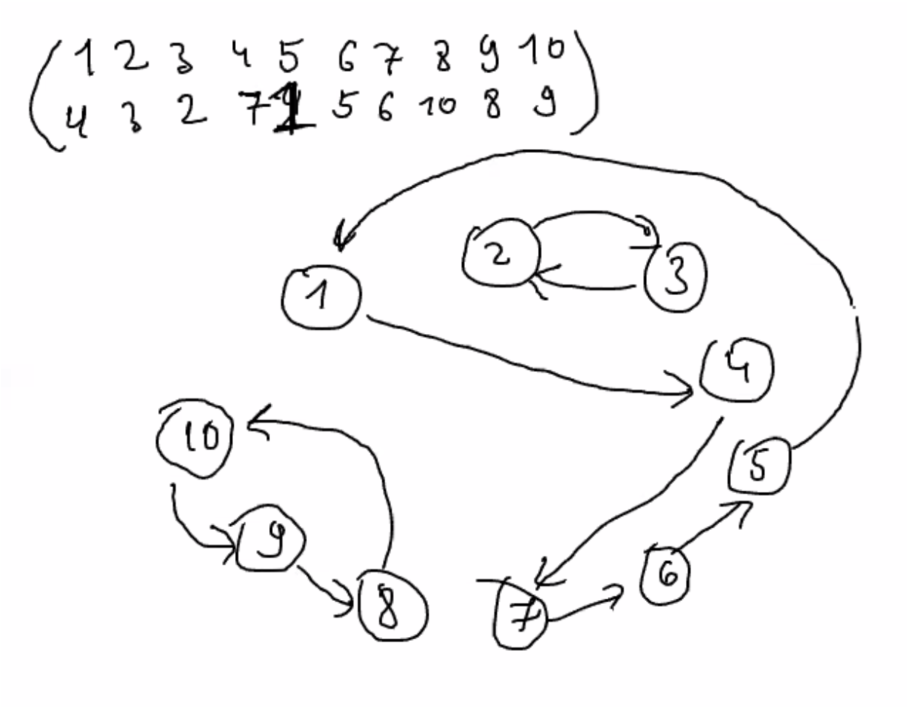
(просто меняем местами верхний и нижний элемент)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma\sigma^{-1} = id$$

Разложение в независимые циклы



Лемма:ориентироанный граф, построенный по подстановке - это объединение нескольких не пересекающихся циклов.

Доказательство:из любой вершины выходит одна стрелка и входит одна стрелка.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 1 & 5 & 6 & 10 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Возведение в степень

$$\begin{cases} pass \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} pass \end{pmatrix}$$