Матанализ ДЗ 3

Шорин Сергей, БКНАД211

29 сентября 2021 г.

2.a

Исследовать на сходимость последовательность $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$

Предположим, что $\frac{1}{2} <= a_n <= 1$. Для a_1 это верно.

Заметим, что на рассматриваемом промежутке минимум у функции $f(x) = 1 - \frac{1}{4x}$ находится в точке $x = \frac{1}{2}$ и равен $\frac{1}{2}$, а максимум находится в точке $x = 1$ и равен $\frac{3}{4}$, а на рассматриваемом промежутке функция монотонна. Возьмем полученные максимум и минимум и подставим в функцию как аргумент. Так как $\frac{1}{2} <= f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} <= f(1) = \frac{3}{4} <= 1$, значения функции из отрезка $\frac{1}{2} <= a_n <= 1$ будут попадать в этот же отрезок: $\frac{1}{2} <= f(x) <= 1 : x \in (\frac{1}{2}, 1)$

Сравним a_n и a_{n+1} на промежутке $\frac{1}{2} <= a_n <= 1$:

$$a_n - a_{n+1} \overset{?}{>} 0$$

$$a_n - 1 + \frac{1}{4a_n} \overset{?}{>} 0, a_n > 0$$

$$4a_n^2 - 4a_n + 1 \overset{?}{>} 0, a_n > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 + -\sqrt{0}}{8}$$

Это парабола, значения которой всегда неотрицательны. Таким образом, последовательность не возрастающая, ограниченная и, следовательно, у нее есть предел.

Заменим a_n на предел A.

$$A = 1 - \frac{1}{4A}$$

Это квадратное уравнение мы уже решали выше, $A = \frac{1}{2}$.

Ответ:

Предел равен $\frac{1}{2}$.

2.б

Исследовать на сходимость последовательность $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$

Заметим, что $a_n = \sqrt{5 + \sqrt{a_{n-1}}}, a_{n+1} = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{a_{n-1}}}}$ - то есть последовательность является возрастающей.

Докажем по индукции, что для любого n $|a_n| < 5$.

$$a_2 = \sqrt{6} < 5$$
$$a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$$

Так как a_n меньше 5, заменим a_n на 5.

$$a_{n+1} <= \sqrt{5+5} = \sqrt{10} < 5$$

Следовательно, последовательность ограничена и возрастает - следовательно, у нее есть предел.

Перейдем к пределу в обеих частях равенства:

$$A = \sqrt{5 + A}, A > 0$$
$$A^2 - A - 5 = 0$$
$$A = \frac{1\sqrt{21}}{2} = 2.7913$$

Ответ

$$A = \frac{1\sqrt{21}}{2} = 2.7913$$

2.в

Исследовать на сходимость последовательность $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - a_n^2$

Предположим, что $\frac{1}{3} <= a_n <= \frac{1}{2}$. Для a_1 это верно.

Посмотрим, в каких точках функция $f(x) = \frac{4}{3}x - x^2$ принимает значения вне диапазона $\frac{1}{3} <= y <= \frac{1}{2}$ Эта парабола с максимумом у точке (0.(6), 0.(4))(точка перегиба), с корнями в точках 0 и $\frac{4}{3}$. $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$ Таким образом, $\frac{1}{3} <= \frac{4}{3}x - x^2 <= \frac{1}{2}$ при $x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. (на этом отрезке парабола монотонна)

Следовательно, последовательность ограничена (предположение оказалось верным).

Рассмотрим, в каком диапазоне последовательность не возрастает:

$$\frac{4}{3}a_n - a_n^2$$
$$a_n(\frac{4}{3} - a_n) <= a_n$$
$$a_n(\frac{1}{3} - a_n) <= 0$$

Это парабола, направленная вниз, с корнями в точках 0 и $\frac{1}{3}$. Следовательно, на промежутке $[\frac{1}{3}, \infty)$ последовательность не возрастает.

Так как последовательность ограничена и не возрастает, у нее есть предел.

Заменим a_n на предел A.

$$A(\frac{4}{3} - A) = A$$

$$A_1 = 0, A_2 = \frac{1}{3}, A_2 \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$$

Следовательно, предел равен $\frac{1}{3}$.

Ответ:

Предел равен $\frac{1}{3}$.