Линейная Алгебра ДЗ 1

Шорин Сергей, БКНАД211

13 сентября 2021 г.

1.A

Составим матрицу СЛУ:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 7 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ -15 & -11 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)_{III-=II*5} \approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 7 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -33 & 22 & 11 \end{array}\right)_{I-=II*2} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 9 & -6 & -3 \\ 3 & 2 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -33 & 22 & 11 \end{array}\right)_{II-=I*3} \approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 9 & -6 & -3 \\ 0 & -1 & -33 & 22 & 11 \\ 0 & -1 & -33 & 22 & 11 \end{array}\right)_{I-=II} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -24 & 16 & 8 \\ 0 & -1 & -33 & 22 & 11 \\ 0 & -1 & -33 & 22 & 11 \end{array}\right)$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x_3 - 16x_4 + 8 \\ -33x_3 + 22x_4 - 11 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

1.B

Составим матрицу СЛУ:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 18 \end{array}\right)_{II-=I*3} \approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -8 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 18 \end{array}\right)_{III-=I*2} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & -17 & 8 \end{array}\right)_{I=I*\frac{3}{8}} \approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & -\frac{5}{8} & 2 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -8 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & -\frac{5}{16} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-17}{8} & 1 \end{array}\right)$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{16}x_4 + 1 \\ x_2 \\ \frac{17}{8}x_4 + 1 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2

Составим матрицу СЛУ и вычтем из 2,3 и 4 строчек певую

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 12 & 7 & \lambda & 9 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda - 8 & -3 \end{array}\right)_{IV-=3II} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 8 & 0 \end{array}\right)$$

При $\lambda = 8$ x_4 - свободная переменная. Тогда ответ принимает вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x_2 - x_4 + 2 \\ x_2 \\ -1 \\ x_4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

При $\lambda \neq 8$ $x_4 = 0$
Ответ:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}x_2 + 2 \\ x_2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{cases} a0^3 + b0^2 + c0 + d = 2 \\ a1^3 + b1^2 + c1 + d = 3 \\ a2^3 + b2^2 + c2 + d = 1 \\ a3^3 + b3^2 + c3 + d = -7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & -7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & -1 \\ 27 & 9 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 0 & -9 \\ 0 & -18 & -24 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)_{II-=III} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)_{III-=3II} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx$$

Искомое уравнение: $-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 2$

4

Найдем точку P:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдем точку Q:

$$\begin{cases} 2x + -y = 4 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем коэффициенты прямой $x = ay + b$.

$$\begin{cases} 2a + b = 10a + b = 2 \end{cases}$$

Вычтем второе равенство из первого:

$$\begin{cases} 2a = -1b = 2 \end{cases}$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид $-\frac{1}{2}y + 2 = x$

5.A

Приведем пример неопределенной системы, у которой есть только одно целое решение: Предположим, что x_2 - свободная переменная в этой системе, а $x_1 = 1 + (x_2 - 1)\sqrt{2}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (x_2 - 1)\sqrt{2} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Так как при умножении любого целого числа на $\sqrt{2}$ получается иррациональное число, x_1 будет целым только при $x_2 = 1$. Поэтому у этого уравнения есть только одно целое решение, в котором $x_1 = 0, x_2 = 1$.

5.Б

Если в СЛУ используются только целые коэффициенты, в ответе могут появиться рациональные числа (в результате применения III типа преобразования). Напишем пример такой системы:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p_0}{q_0} + \frac{p}{q}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{qp_0}{qq_0} + \frac{q_0px_2}{qq_0} \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{qp_0+q_0px_2}{qq_0} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Допустим, это уравнение имеет только одно решение в целых числах при $x_2 = a$. Но тогда у этого уравнения будет еще одно целое решение при $x_2 = a + nqq_0$, где n - любое целое число:

$$\frac{qp_0 + q_0p(a + nqq_0)}{qq_0} == \frac{qp_0 + q_0pa}{qq_0} + nq_0p$$

Если в уравнении больше одной свободной переменной, можно повторить подобные размышления для каждой переменной и приравнять все свободные переменные одному числу, равному произведению $n_1q_1q_{01} * n_2q_2q_{02} * \ldots * n_mq_mq_{0m}$ Следовательно, у уравнения не может быть одно и только одно решение в целых числах.

6

Рассмотрим используемые преобразования в алгоритме Гаусса для приведения к ступенчатому виду:

Преобразования I не влияют на другие преобразования, поэтому их можно свободно перемещать: например, заранее расставить строки в нужном порядке до использования преобразований II и III типа.

Допустим, в процессе решения мы в начале применили преобразование III вида (добавив к строчке i строчку j, домноженную на n), а затем применили преобразование II вида(умножив строчку j на m). Но мы можем поменять местами эти преобразования, если а начале домножим строчку j на m, а затем добавив к строчке i строчку j, домноженную на $\frac{n}{m}$.

Если на m умножили вначале строчку i, то при преобразовании III вида нужно умножать строчку на m*n. Эти перестановки не влияют на алгоритм Гаусса: все элементы в столбце кроме ведущего будут обнулены.

Таким образом, любую цепочку элементарных преобразований можно преобразить в вид n преобразований I -> m преобразований II -> c преобразований III.