

Линейная Алгебра ДЗ 3

Шорин Сергей, БКНАД211

29 сентября 2021 г.

1.а

Если матрицу 3x4 умножить справа на

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, то первый столбец, умноженный на 3, прибавится к 3 столбцу.

1.б

Если матрицу 3x4 умножить слева на

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, то вторая строка, умноженная на 4, будет вычтена из второй строки.

1.в

Если матрицу 3x4 умножить справа на

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, то первый столбец поменяется местами с четвертым столбцом.

1.г

Если матрицу 3x4 умножить слева на

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, то вторая строка умножится на -2.

2.а

Чтобы вторая строка поменялась с четвертой, нужно домножить матрицу А слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.б

Чтобы третий столбец домножить на 2, нужно домножить матрицу А справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.в

Чтобы прибавить третью строку к первой с коэффициентом -5, нужно домножить матрицу А слева на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.г

Чтобы прибавить второй столбец к первому с коэффициентом 15, нужно домножить матрицу А справа на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.а

Найти обратную матрицу к

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 4 & 11 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}_{II-I*4} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -4 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 4 & -1 \end{pmatrix} \approx \\ \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -11 & 3 \\ 0 & 1 & | & 4 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

0.1 Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3.б

Найти обратную матрицу к

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & | & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & | & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & | & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -9 & 29 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 & 18 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

0.2 Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

3.в

Найти обратную матрицу к

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 & 3 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

0.3 Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4.a

Представьте в виде произведения матриц элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.б

Представьте в виде произведения матриц элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.a

Решим матричное уравнение:

$$X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right)$$

Домножим равенство на эту матрицу справа:

$$X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = X$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix} = X$$

0.4 Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$$

4.6

Решим матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -20 & 15 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & -4 \end{array} \right)$$

Домножим равенство слева на эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$