Матанализ ДЗ 3

Шорин Сергей, БКНАД211

27 сентября 2021 г.

2.а

Исследовать на сходимость последовательность $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$

2.б

Исследовать на сходимость последовательность $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$

Заметим, что $a_n = \sqrt{5 + \sqrt{a_{n-1}}}, a_{n+1} = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{a_{n-1}}}}$ - то есть последовательность является возрастающей.

Докажем по индукции, что для любого n $|a_n| < 5$.

$$a_2 = \sqrt{6} < 5$$

$$a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$$

Так как a_n меньше 5, заменим a_n на 5.

$$a_{n+1} <= \sqrt{5 + 5} = \sqrt{10} < 5$$

Следовательно, последовательность ограничена и возрастает - следовательно, у нее есть предел.

Перейдем к пределу в обеих частях равенства:

$$A = \sqrt{5 + A}, A > 0$$

$$A^2 - A - 5 = 0$$

$$A = \frac{1\sqrt{21}}{2} = 2.7913$$

Ответ

$$A = \frac{1\sqrt{21}}{2} = 2.7913$$

2.в

Исследовать на сходимость последовательность $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - a_n^2$

1 4.a

Найти предел, используя определение: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{n^2+3n-1}{3n^2-2n+2}$

$$|\frac{n^2+3n-1}{3n^2-2n+2} - \frac{1}{3}| < \epsilon$$

$$\frac{3n^2+9n-3-3n^2+2n-2}{9n^2-6n+6} < \epsilon$$

$$\frac{11n-n}{9n^2+n^2} < \frac{11n-5}{9n^2-6n+6} < \epsilon$$

$$\frac{10n}{10n^2} < \epsilon$$

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

$$N = \frac{1}{\epsilon} + 1$$

2 4.б

Найти предел, используя определение: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\log_a n}{n}$

$$\frac{\log_a n}{n} < \epsilon$$

$$\log_a n < \epsilon n$$

$$\frac{\ln n}{\ln a} < \epsilon n$$

$$1 < \ln n < \epsilon n \ln a$$

$$1 < \epsilon n \ln a$$

$$\frac{1}{\epsilon \ln a} < n$$

$$\frac{1}{\epsilon \ln a} < n$$

$$N = \frac{1}{\epsilon \ln a} + 1$$

3 4.в

Найти предел, используя определение: $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[n]{n}$

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \epsilon$$

$$\sqrt[n]{n} < \epsilon + 1$$

$$n < (1 + \epsilon)^n$$

Заметим, что правую часть неравенства можно разложить по биному Ньютона.

$$n < 1 + n\epsilon + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + ...$$

(НЕ РЕШЕНО)

4 1.а

Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sqrt{n(n-1)}$

Домножим на $\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n-1)}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(n+1)(n+2) - n(n-1)}{\sqrt{(n+1)(n+2)} + \sqrt{n(n-1)}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{n^2 + 3n + 2 - n^2 + n}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 - n)}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4n + 2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 - n)}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

При $x \to \infty$ $\frac{1}{n} \to 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4 + (0)}{\sqrt{1 + (0) + (0)} + \sqrt{1 - (0)}} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: $\lim = 2$