Матанализ ДЗ 1

Шорин Сергей, БКНАД211

8 сентября 2021 г.

1

а) Доказать иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$

Предположим, что это выражение равно рациональному числу $\frac{p}{q}$. Тогда:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=\frac{p}{q}$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{p}{q}-\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\frac{p}{q}-\sqrt{5})^2$$

$$5+2\sqrt{6}=\frac{p^2}{q^2}+5-2\sqrt{5}\frac{p}{q}$$

$$(2\sqrt{6}+2\sqrt{5}\frac{p}{q})^2=\frac{p^4}{q^4}$$

$$24+20\frac{p^2}{q^2}+8\sqrt{30}\frac{p}{q}=\frac{p^4}{q^4}$$

$$8\sqrt{30}\frac{p}{q}=\frac{p^4}{q^4}-24-20\frac{p^2}{q^2}$$

$$8\sqrt{30}=\frac{p^3}{q^3}-24\frac{q}{p}-20\frac{p}{q}$$

Очевидно, что если $\frac{p}{q}$ рациональное число, то $\frac{p^3}{q^3}-24\frac{q}{p}-20\frac{p}{q}$ - тоже рациональное число. Заменим $\frac{p^3}{q^3}-24\frac{q}{p}-20\frac{p}{q}$ на $8\frac{p_1}{q_1}$

$$\sqrt{30}=\frac{p_1}{q_1}$$

Тогда

$$30=\frac{p_1^2}{q_1^2}$$

$$30p_1^2=q_1^2$$

Следовательно, q_1 делится на 30, значит, q_1 - четное. Заменим q_1 на 2k.

$$30p_1^2=(2k)^2$$

$$15p_1^2=2k^2$$

Следовательно, p_1 - четное. Но так быть не может, ведь $\frac{p_1}{q_1}$ - рациональное число, то есть несократимая дробь. Следовательно, $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ - иррациональное число.

б) Доказать иррациональность числа $\log_2 19$

Предположим, что это выражение равно рациональному числу $\frac{p}{q}$. Тогда:

$$\log_2 19 = \frac{p}{q}$$

$$2^{\frac{p}{q}} = 19$$

$$2^p = 19^q, q \neq 0$$

Так как 19 не делится на 2, не существует таких целых p и q, при которых это равенство верно. Следовательно, $\frac{p}{q}$ - не рациональное число. Поэтому $\log_2 19$ - иррациональное число.

2

а) Найти сумму: $\sum_{k=1}^{99} k \cdot k!$

Преобразуем:

$$k \cdot k! \Rightarrow$$

$$(k+1-1) \cdot k! \Rightarrow$$

$$(k+1) \cdot k! - k! \Rightarrow$$

$$-k! + (k+1)!$$

$$\sum_{k=1}^{99} k \cdot k! = \sum_{k=2}^{100} k! - \sum_{k=1}^{99} k! = 100! - 1$$

б) Найти сумму $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n}$

Обозначим искомую сумму за S:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n} = S \tag{1}$$

Домножим обе части уравнения на 2:

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^{n-1}} = 2S$$

$$1 + \frac{3}{2} + (\frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^2}) + (\frac{2}{2^3} + \frac{5}{2^3}) + ... + (\frac{2}{2^{n-1}} + \frac{2n-3}{2^{n-1}}) = 2S$$

$$(2 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2}) + (\frac{1}{2^2} + \frac{5}{2^3}) + ... + (\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{2n-3}{2^{n-1}}) = 2S$$

Вычтем равенство (1):

$$2 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2^2}) + ... + (\frac{1}{2^{n-2}}) + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = S$$

Применим функцию суммы геометрической прогрессии:

$$2 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2^2}) + ... + (\frac{1}{2^{n-2}}) = S$$

$$2 + (\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2^n} - 1)}{-\frac{1}{2}}) = S$$

$$2 - (\frac{1}{2^n} - 1) = S = 3$$

3

а) Доказать, используя индукцию: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$
В качестве базы индукции возьмем число 2:

$$1 + 8 = (\frac{2(2+1)}{2})^2 = 3^2 = 9$$

Добавим к обоим частям уравнения $(n+1)^3$:

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 + (n+1)^3$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = (\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$$

Что и требовалось доказать.

б) Доказать, используя индукцию: $\sqrt{n} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}, n \geqslant 2$

База индукции, n = 2:

$$\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$$

$$2 < \sqrt{2} + 1 < 4$$

$$2 < 2.4142... < 4$$

При $n = 2$ неравенство верно. Теперь докажем, что если при n неравенство верно, то и при $n + 1$ неравенство верно.

$$\sqrt{n+1} \overset{?}{<} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{<} 2\sqrt{n+1} \tag{2}$$

Вычтем исходное неравенство. Так как из второго элемента неравенства мы вычтем большее значение, чем из первого(а из третьего - еще большее), то в дальнейшем мы будем доказывать более сильное утверждение. Если в новом неравенстве отношения будут ... < ... < ..., то следовательно, в неравенстве (2) они будут такие же.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \overset{?}{<} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{<} 2\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \tag{3}$$

Домножим на $\sqrt{n+1}$:

$$n + 1 - \sqrt{n^2+n} \overset{?}{<} 1 \overset{?}{<} 2n + 2 - 2\sqrt{n^2+n} \tag{4}$$

Рассмотрим неравенство $n + 1 - \sqrt{n^2 + n} \overset{?}{<} 1$:

$$n \overset{?}{<} \sqrt{n^2 + n}$$

Так как обе части больше 0, возведем в квадрат:

$$n^2 \overset{?}{<} n^2 + n$$

$$0 < n$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим второе неравенство $1 \overset{?}{<} 2n + 2 - 2\sqrt{n^2 + n}$:

$$2\sqrt{n^2 + n} \overset{?}{<} 2n + 1$$

$$4n^2 + 4n \overset{?}{<} 4n^2 + 4n + 1$$

$$0 < 1$$

Что и требовалось доказать.