Дискретная математика дз 3

Шорин Сергей, БКНАД211

1 октября 2021 г.

1.a

Сколько существует чётных шестизначных натуральных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна цифра 7?

Рассмотрим, сколько всего есть шестизначных четных чисел. На первом месте могут стоять числа 1..9, в середине 0..9, в конце - 0, 2, 4, 6, 8.

$$9 * 10 * 10 * 10 * 10 * 5 = 450000$$

Рассмотрим, сколько существует четных шестизначных чисел, в записи которых нет цифры 7:

$$8 * 9 * 9 * 9 * 9 * 5 = 262440$$

Следовательно, всего есть $450000 - 262440 = 187560$ четных шестизначных чисел, в записи которых есть хоть одна цифра 7.

Ответ:

Таких чисел всего 187560.

1.b

Сколько существует чётных шестизначных натуральных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна цифра 8?

Рассмотрим, сколько всего есть шестизначных четных чисел. На первом месте могут стоять числа 1..9, в середине 0..9, в конце - 0, 2, 4, 6, 8.

$$9 * 10 * 10 * 10 * 10 * 5 = 450000$$

Рассмотрим, сколько существует четных шестизначных чисел, в записи которых нет цифры 8:

$$8 * 9 * 9 * 9 * 9 * 4 = 209952$$

Следовательно, всего есть $450000 - 209952 = 240048$ четных шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна цифра 8.

Ответ:

Таких чисел всего 240048.

2

Покажите, что для любых множеств A_1, A_2, B_1, B_2 выполнено:

$$(A_1 \setminus A_2) \star (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \star B_1) \setminus (A_2 \star B_2)$$

$$(A_1 \setminus A_2) \star (B_1 \setminus B_2) = ((x \in A_1) \wedge \neg(x \in A_2)) \wedge ((y \in B_1) \wedge \neg(y \in B_2))$$

$$(A_1 \star B_1) \setminus (A_2 \star B_2) = ((x \in A_1) \wedge (y \in B_1)) \wedge \neg((x \in A_2) \wedge (y \in B_2)) =$$

$$= ((x \in A_1) \wedge (y \in B_1)) \wedge (\neg(x \in A_2) \vee \neg(y \in B_2))$$

Теперь сравним множества:

$$((x \in A_1)\wedge\neg(x \in A_2))\wedge((y \in B_1)\wedge\neg(y \in B_2)) \stackrel{?}{\subseteq} ((x \in A_1)\wedge(y \in B_1))\wedge(\neg(x \in A_2)\vee\neg(y \in B_2))$$

Уберем $(x \in A_1) \wedge (y \in B_1))$ из обоих частей:

$$\neg(x \in A_2) \wedge \neg(y \in B_2) \stackrel{?}{\subseteq} \neg(x \in A_2) \vee \neg(y \in B_2)$$

Так как для левого множеств требуется и отсутствие x в A_2, и отсутствие y в B_2, а правое множество требует выполнения только одного из этих условий - мощность левого множества меньше или равна правому множеству, что и требовалось доказать.

3

Сколько существует слов длины n в алфавите a, b, c, в которых присутствует каждая из букв a, b, c?

Пусть A - множество всех слов, в которых есть буква a, B - множество всех слов, в которых есть буква b, C - множество всех слов, в которых есть буква c.

Тогда:

$$|A \setminus B \setminus C| = 1(aa..a)$$
$$|B \setminus A \setminus C| = 1(bb..b)$$
$$|C \setminus B \setminus A| = 1(cc..c)$$

$$|(A \cup B) \setminus C| = 2^n$$

(Для B и C аналогично)

$$|A \cup B \cup C| = 3_n$$

Тогда:

$$|A\cap B\cap C| = |A\cup B\cup C| - |(A\cup B)\setminus C| - |(B\cup C)\setminus A| - |(C\cup A)\setminus B| + |A\setminus B\setminus C| + |B\setminus A\setminus C| + |C\setminus B\setminus A|$$

$$|A \cap B \cap C| = 3^n - 3 * 2^n + 3$$

Ответ

$$3^n - 3 * 2^n + 3$$

4

Сколько существует целых чисел от 1 до 10^6 **включительно** , которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвёртой степенью?

Найдем мощность множества чисел, для которых не выполняются заданные условия.

Воспользуемся формулой включения-исключения для трех множеств:

Пусть A - множество целых чисел, которые являются полным квадратом, B - множество целых чисел, которые являются полным кубом, C - множество целых чисел, которые являются четвертой степенью некоторого числа.

Тогда:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |B \cap C \cap A|$$

$$|A| = |1^2, 2^2, 3^2, ..., 1000^2| = 1000$$

$$|B| = |1^3, 2^3, 3^3, ..., 100^3| = 100$$

$$|C| = |1^4, 2^4, 3^4, ..., 31^4| = 31$$

Если целое число является и полным квадратом, и полным кубом, то оно является шестой степенью:

$$|A \cap B| = |1^6, ...10^6| = 10$$

Любое число, являющееся четвертой степенью, так же является полным квадратом:, и , то оно является четвертой степенью:

$$|A \cap C| = |1^4, 2^4, 3^4, ..., 31^4| = 31$$

Если целое число является и полным кубом, и четвертой степенью, то оно является двенадцатой степенью степенью:

$$|B \cap C| = |1^{12}, 2^{12}, 3^{12}| = 3$$

Если целое число является и полным квадратом, и полным кубом, и четвертой степенью, то оно является двенадцатой степенью степенью:

$$|A \cap B \cap C| = |1^{12}, 2^{12}, 3^{12}| = 3$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |B \cap C \cap A| = 1000 + 100 + 31 - 10 - 31 - 3 + 3 = 1090$$

Всего чисел, удовлетворяющих условию задачи: $1000000 - 1090 = 998910$

Ответ

998910

5

Сколько существует целых чисел от 1 до 33000, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 11?

Найдем мощность множества чисел, для которых не выполняются заданные условия.

Воспользуемся формулой включения-исключения для трех множеств:

Пусть A - множество целых чисел, которые не делятся на 3, B - множество целых чисел, которые не делятся на 5, C - множество целых чисел, не делятся на 11.

Тогда:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |B \cap C \cap A|$$

$$|A| = |3 * 1, 3 * 2, ..., 3 * 11000| = 11000$$

$$|B| = |5 * 1, 5 * 2, ..., 5 * 6600| = 6600$$

$$|C| = |11 * 1, 11 * 2, ..., 11 * 3000| = 3000$$

$$|A \cap B| = |15 * 1, ...15 * 2200| = 2200$$

$$|A \cap C| = |33 * 1, 33 * 2, ..., 33 * 1000| = 1000$$

$$|B \cap C| = |55 * 1, 55 * 600| = 600$$

$$|A \cap B \cap C| = |165 * 1, 165 * 200| = 200$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |B \cap C \cap A| = 11000 + 6600 + 3000 - 2200 - 1000 - 600 + 200 =$$

Всего чисел, удовлетворяющих условию задачи: $33000 - 17000 = 16000$

Ответ

$$16000$$