Матанализ

Sergey

14 сентября 2021 г.

Оценка:

вещественные числа

Считаем что все свойства чисел из N и множества Q известно со школы

опр1 $a \in Q = m/n, m \in Z,$

Из обыкновенного прямоугольново треугольника с катетами 1 слежует, что что рациональных чисел недостаточно Пусть $x^2 = 2$ $x = p/q \in Q$ - решение $p^2/q^2 -> p^2 = 2q^2 -> p^2 --> p = 2k$

Определение : Будем говорить, что множество чисел В правее мноэества чисел А, если $a <= bAA$

Сечение Дедекинда (существует два множества рациональных чисел, прилегающих друг другу в плотную, и между которыми нет рациональных чисел)

$A = a : a > 0, a^2 <= 2, B = b : b > 0, b^2 >= 2B, 0 <$

опр3 Будем говорить что для множества чисел выполняется принцип полноты, если для любых его произвольных не пустых подмножеств А и В таких что А левее В, найдется разделюящи их элемент

для рациональных чисел принцип полноты не выполняется

(школьный материал)

Любое рациональное число может быть представлено периодической десятичной дробью

(не будем рассматривать десятичные дроби с периодом 9) 0.(9) = x 9.(9) = 10x 9 = 9x

Множесто иррациональных(дейсвительных) чисел: бесконечные не переодические десятичные дроби

Множество вещественных чисел отождествялется со всеми бесконечными десятичными дробями (в том числе и переодические) вида$+-a_0, a_1, a_2, a_0 \in N_o, \in 0, 1, ..., 9, 9$ в периоде запрещено. 0.0000(0) - ноль множества действительных чисел, совпадающих с нулем

R - обозначение этого множества(иррациональных чисел)

Не нулевое число положительно, если в такой его записи стоит знак +, и отрицательным, если в его записи стоит знак -

На множестве R определены операции сложения и умножения, причем выполняются все естественные свойства этих операций -> множество вещественных чисел является полем

Вещественные числа можно сравинивать (на множестве вещественных чисел введено отнощение порядка) Для положительных чисел: $_{0,1,2} <= b_0, b_1, b_2 a_0, a_1, a_2 == b_0, b_1, b_2, k, a_0 = b_0, a_1 = b_1, ..., a_k < b_k$

Для любого $a \in R|a| = a, a >= 0,$

Для любых действительных чисел выполнено неравенство треугольника: $|a + b| <= |a| + |b|$.

Используя равенство $|x| = maxx, -x, ||a| - |b|| <= |a + b|$ Упражнение: вывести из неравенства треугольника

Теорема 1: на множестве вещественных чисел выполнен принцип полноты.

Пусть А и В - не пустые множества чисел, причем А левее В. Если А состоит из всех чисел a, таких что a <= 0, а В состоит из чисел >= 0, то 0 разделяет А и В. Пусть существует a принадлеэащее А, такое что ...

Лекция 2. Пределы

Сформулировав принцип полноты, мы можем сформулировать сложение, умножене и другие операции для действительных чисел.

Пусть $a = a_1 a_2 a_2 a_4, b = b_1 b_2 b_3 b_4$ $a+b$ =? Определеим множество Н$a_0 + b_0, a_{01} + b01, a_{012} + b_{012}$

А множество В$a_0 + 1 + b_0, a_{01} + 0.1 + b01, a_{012} + 0.01 + b_{012}$

А левее В -> по принципу полноты сучществует С, разделяющее А и В. Докажем от противного: ... По определению: С = А + В

Предел последовательности

Определение: Последовательность - это функция натурального аргумента. Если любому n из множества натуральных чисел поставлено соответствие некоторое число a_n, то говорят что задана числовая последовательность ${a_n}_{n=1}^{\propto}$.

Последовтельность всегда бесконечна, но она вся может быть задана одним числом. Последовательность можно задать через формулу, рекурентно и т.д.

Предел последовательности рациональных может быть иррациональным. Последовательости рациональных чисел приближают иррациональное число.

Определения 2: Окресностью числа а называется любой интервал, содержащий это число

Определение: Эпсилон- окресностью при $\epsilon > 0$ на зывается интервал $a = \epsilon, a + \epsilon]$

Определение: проколотой ϵ окрестностью числа а называется $[\epsilon, a) + (a, a + \epsilon]$

Определение 3: Число А большое назаыается пределом последовательности ${a_n}_{n=1}^{\propto}$, если для любой окресности точки А, что при всех n > N a_n лежит в этой окрестности.

Дадим экивалентное определение: Говорят, что последовательность ${a_n}_{n=1}^{\propto}$ сходится к числу А, если для всякого числа $\epsilon > 0$ существует такое натуральное число N, зависящее от ϵ, что для любого n > N(ϵ) | А - a_n | < ϵ.

$A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$

Пример 1:

$$a_n = \frac{1}{n} \lim a_n = 0$$

$|\frac{1}{n} - 0| \to$ Если $N(\epsilon) = [\frac{1}{\epsilon} + 1 > \frac{1}{\epsilon} //$

$|\frac{1}{n} - 0| \to \frac{1}{n} = n > \frac{1}{\epsilon} \to N(\epsilon) = [\frac{1}{\epsilon} + 1 > \frac{1}{\epsilon} \to n > N(\epsilon) > \frac{1}{\epsilon}$

2) Докажем, что у последовательности $a = \lim(-1)^n$.

От противного: при достаточно больших n $|a - a_n| < \frac{1}{2}$ и $|a - a_{n+1}| < \frac{1}{2} - > ...$

Если последовательность имеет предел, то он единственный. Докажем от противного: пусть $\lim a_n = a, \lim a_n = b, a \neq b. |a - b| > \epsilon$. Но по определению существует $\epsilon > 0$