

Дискретная математика дз 5

Шорин Сергей, БКНАД211

13 октября 2021 г.

1

В дереве на 10 вершинах ровно три вершины имеют степень один. Сколько вершин имеют степень три?

Рассмотрим дерево на 9 вершин, в котором ровно 2 вершины имеют степень один. В нем только два листа, следовательно, остальные 8 вершин будут располагаться на между ними (на пути между ними). Такой граф можно нарисовать в виде линии.

Добавим вершину степени 1. Ее можно добавить либо к крайним вершинам (тогда будет всего 2 вершины степени 1, условие не выполняется), или добавить к любой вершине степени 2 - тогда в графе будет 3 вершины степени 1 и 1 вершина степени 3.

(Альтернативное решение - составить уравнение. Дерево имеет 9 ребер - следовательно, сумма степеней вершин равна 18. Так как всего 3 вершины степени 1, не может быть вершин со степенью больше 3. Составим уравнение: $18 = 3 * 1 + n * 3 + (10 - 3 - n) * 2$, где n - количество вершин степени 3. $n = 1$)

Ответ

В графе одна такая вершина.

2

Найдите наибольшее количество вершин в связном графе, сумма степеней вершин в котором равна 20.

В связанном графе на n вершинах должно быть не менее $n - 1$ ребро.

Так как в заданном графе сумма степеней вершин равна 20, в этом графе 10 ребер.

Из 10 ребер можно построить максимум связанный граф на 11 вершинах (линия) - при добавлении любой новой вершины граф перестает быть связанным.

Ответ

В графе может быть максимум 11 вершин.

3

В связном графе на n вершинах нет мостов. Какое наименьшее число ребер может быть в таком графе?

Допустим, в графе n ребер. Тогда можно построить циклический связанный граф, в котором все вершины будут иметь степень 2 - в таком графе нет мостов.

Уберем одну вершину и посчитаем, какие степени могут быть у вершин.

Сумма степеней графа - $2n$. Всего $n - 1$ вершин. Следовательно, хотя одна(хоть две) вершина должна иметь степень 1 - то есть соединяться с основной частью графа мостом.

Следовательно, в графе с $n-1$ ребром обязательно будут мосты.

Ответ

Минимум n ребер

4

Существует ли связный граф, что степени всех его вершин чётные и в графе есть мост?

Если в графе есть мост, то при его удалении в графе появится минимум 2 компоненты связности. В каждой такой компоненте сумма степеней вершин будет равна $2n$, где n - количество ребер в компоненте.

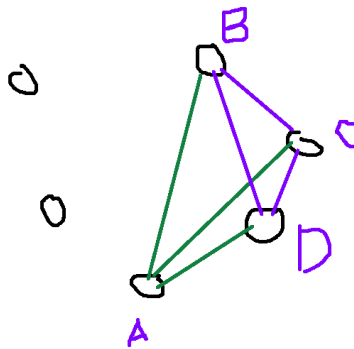
Вернем мост на место. В таком случае сумма степеней вершин в этой компоненте связности станет равна $2n + 1$, что очевидно не чётно - следовательно, в этом графе есть вершины с нечётной степенью.

Ответ

Такой граф не существует.

5

Докажите, что если в графе есть не менее 6 вершин, то либо он сам, либо его дополнение содержит цикл длины три.



Рассмотрим вершину A. Кроме нее в графе 5 вершин - значит, либо в этом графе, либо в его дополнении эта вершина соединена с 3 другими вершинами (или большим количеством). Если вершина A соединена с другими

вершинами в дополнении графа - далее будем рассматривать дополнение как оригинальный граф.

Пусть это вершины B, C, D . Допустим, между ними нет ребер. Тогда в графе -дополнении они образуют цикл длиной 3 (BCD). Иначе в текущем графе есть хоть одно ребро между вершинами BCD . Допустим, это ребро MN ($M, N \in [B, C, D]$). Тогда в графе образуется цикл длиной 3 (AMN). В любом случае в графе образуется цикл длины 3, что и требовалось доказать.