Матанализ ДЗ 4

Шорин Сергей, БКНАД211

4 октября 2021 г.

1.a

Исследовать на сходимость с помощью критерия Коши $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n)}{n^2}$

$$a_i = \sum_{n=1}^{i} \frac{\cos(2^n)}{n^2}$$

$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon$$

$$\frac{\cos 2^{(n+1)}}{(n+1)^2} + \frac{\cos 2^{(n+2)}}{(n+2)^2} ... + \frac{\cos 2^{(n+p)}}{(n+p)^2} < \epsilon$$

$$\frac{\cos 2^{(n+1)}}{(n+1)^2} + \frac{\cos 2^{(n+2)}}{(n+2)^2} ... + \frac{\cos 2^{(n+p)}}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} ... + \frac{1}{(n+p)^2} < \sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^2} < \epsilon$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{i} \frac{1}{n^2}$ сходится, исходный ряд так же сходится.

2.a

Исследовать ряд на сходимость и найти сумму в случае сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Так как каждый элемент ряда a_n строго меньше элемента b_n сходящейся последовательности $B = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (и больше 0), ряд сходится. Найдем его сумму:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1 + (n+1) - (n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n+2}{n(n+1)(n+2)} - \frac{n+1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} - \frac{1+n-n}{n(n+2)} = \frac{1+n}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} - \frac{1+n}{n(n+2)} + \frac{n}{n(n+2)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} - \frac{1+n}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)} =$$

Разделим последовательность на 2 и рассмотрим 1 подпоследовательность:

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)} = (\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+2)})$$

При $n \in [1, \infty]$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{(1+1)} + \frac{1}{1+1} - \frac{1}{(1+2)} + ... + \frac{1}{(n \to \infty)} = 1$$

Рассмотрим 2 подпоследовательность:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+3)} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{(n+4)} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{(n+5)} + ... + \frac{1}{(n \to \infty)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n \to \infty)}$$

При $n \in [1, \infty]$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Ответ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

2.b

Исследовать ряды на сходимость и найти суммы в случае сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} > \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Так как ряд $\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, исходный ряд так же расходится.

Ответ:

Данный ряд расходится.

2.b

Исследовать ряды на сходимость и найти суммы в случае сходимости: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$

Рассмотрим случай x = 0: в таком случае ряд сходится, так как каждый его элемент равен 0, и сумма ряда равна 0: $\sin(0)+\sin(0)+\sin(0)+\sin(0)+... = 0+0+0+0+... = 0$

Рассмотрим случай $x \neq 0$:

Тогда для любого $N(\epsilon)$ найдется такое p, зависящее от N, что $|a_n - a_{n+p}| > \epsilon$.

Допустим, $p_1 = \frac{\pi}{x}, p_2 = \frac{\pi}{2x}$. Тогда для p_1:

$$\sin((n+\frac{\pi}{x})x) = \sin(nx+\pi)$$

$|\sin(nx) - \sin(nx+\pi)|$ меньше ϵ только в случае, когда остаток от деления на 2π приближается к π или к 0, но в таком случае $|\sin((n+\frac{\pi}{2x})x) - \sin(nx)| > \epsilon$ при достаточно малых ϵ.

Следовательно, данный ряд расходится.

Ответ:

Ряд расходится.