

# Линейная алгебра

Sergey

15 сентября 2021 г.

# 1 Лекция 1 Метод Гаусса

$x_1 \dots x_n$  - переменные  
Линейное уравнение:  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ,  $a_i$ ,  $b_i$  - известные числа

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$a_{ij}$  - коэффициенты уравнений  $b_n$  - правые части

Определение:

Если решение есть - то система называется совместной

Если решений нет - называется не совместной

Если решение есть и единственное - система называется определенной

Пример:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

В таком случае пытаемся выразить одну переменную через другую.

Ответ:  $y$  - любое,  $x = \frac{4-3y}{2}$

Определение: Матрица - это прямоугольная таблица, заполненная числами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Матрица коэффициентов системы линейных уравнений (СЛУ)

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} b_1 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} b_m \end{pmatrix}$$

- Расширенная матрица коэффициентов СЛУ

План решения СЛУ: 1) Ввести элементарные преобразования СЛУ (матрицы  $A_2$ ), которые не меняют множества решений СЛУ 2) Привести этими элементарными преобразованиями к некому "хорошему" виду 3) Решить конечную систему в этом "хорошем" виде

Определение: Две СЛУ называются эквивалентными, если множества решений совпадают.

Тип элементарного преобразования:  $i$ -е уравнение, умноженное на число  $\lambda$ , прибавляем к  $j$  уравнению (прибавляем левую часть к левой, а правую часть к правой. ( $i$ -е уравнение не меняем)

Пример: умножим первую строчку на 2 и прибавим к 3 строчке

$$\begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 6, 7, 8, 9, 10 \\ 2, 1, 2, 1, 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 2, 3, 4, 5 \\ 6, 7, 8, 9, 10 \\ 4, 5, 8, 9, 10 \end{pmatrix}$$

II тип элементарного преобразования:

Берем  $i$  и  $j$  строчки и меняем их местами

III тип элементарного преобразования:

$i$  строчку умножаем на  $\lambda, \lambda \neq 0$

Теорема: Элементарные преобразования преодят СЛУ в эквивалентную.

Доказательство:

(отложили на конец лекции, основная идея - есть обратные преобразования)

Что такое "хороший" вид: Определение: "Лидер строки" (ведущий элемент) строки матрицы - самое левое не нулевое число

$$\begin{pmatrix} 3, 0, 2, 4 \\ 0, 0, 1, 2 \\ 0, 4, 3, 0 \end{pmatrix}$$

Определение: Матрица имеет ступенчатый вид, если: - Все нулевые строчки находятся снизу - Номера столбцов лидеров образуют возрастающую последовательность если все нулевые строчки находятся снизу

$$\begin{pmatrix} 3, 0, 2, 4 \\ 0, 0, 1, 2 \\ 0, 0, 0, 1 \\ 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix}$$

Нужно привести матрицу  $A_2$  к ступенчатому виду. 1. Берем столбцы, пока не находим не нулевой столбец  $i$  2. Ставим строчку с элементом первым не нулевым элементом ( $a_{ij}$ ) в столбце  $i$  на верх через преобразование 2 типа 3. за счет элементарного преобразования 1 типа обнуляем все элементы кроме  $a_{ij}$  4. Переходим к матрице ниже на одну строчку и правее на один столбец.

Определение: Улучшенный ступенчатый вид - это ступенчатый вид, все лидеры строк - единицы, над лидерами строк находятся нули

Алгоритм приведения к Улучшенному ступенчатому виду: 1. Умножим каждую строчку на  $\frac{1}{a}$ , где  $a$  - значение лидера строки 2. Идем по строкам снизу, обнуляем все элементы над лидерами строк

Определение: Прямой ход метода Гаусса (метод Гаусса) - Приведение к (улучшенному) ступенчатому виду по алгоритму сверху.

Определение: Обратный ход метода Гаусса: - Идем снизу вверх 1. Смотрим на последнюю строчку

Определение: экзотическое уравнение:

$$0x + \dots + 0x_n = b, b \neq 0$$

Теорема: для любого набора значений свободных переменных существует единственное значение главных переменных, дополняющих до решения

Преобразования I типа не меняют множество решений:

В результате сложения двух равенств получается верное равенство -> множество решений не уменьшилось.

При элементарном преобразовании 1 типа множество решений не меньше чем множество решений в исходной СЛУ.

Так как для любого преобразования 1 типа можно подобрать обратное преобразование 1 типа, Множество решений измененной системы не увеличивается

## 2 Лекция 2 Действия с матрицами

A - матрица m на n

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda x_1 1 & \dots & \lambda x_1 n \\ \lambda x_m 1 & \dots & \lambda x_m n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 1 & \dots & a_1 n \\ a_m 1 & \dots & a_m n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 1 & \dots & b_1 n \\ b_m 1 & \dots & b_m n \end{pmatrix}$$

Сложение матриц:  $A, B \in Mat_{n \times m}$ .

$$A + B = C \in Mat_{n \times m}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Свойство введенных операций.

1)  $(A + B) + C = A + (B + C)$  - Ассоциативность

$$((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))$$

1.1) Обобщенная ассоциативность:

$A_1 + A_2 + \dots + A_k$  - результат одинаковый при любой расстановке скобок

$$2) \alpha(\lambda A) = \lambda(\alpha A)$$

$$3) (\alpha + \lambda)A = \lambda A + \alpha A$$

$$4) \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$5) 1A = A$$

$$6)$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$7) A + B = B + A$$

$$8) -A : A + (-A) = 0$$

Умножение матриц:

$$A_{m \times n} B_{n \times k} = C_{m \times k}$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$$

Свойства умножения матриц:

$$1) (A * B) * C = A * (B * C)$$

$$AB = J$$

$$d_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$$

$$(AB)C = F$$

$$f_{pq} = \sum_{s=1}^k d_{ps} c_{sq} = \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^n a_{pt} b_{ts} c_{sq}$$

Для  $A(BC) = L$  Сумма аналогична, поэтому  $L = F$ .

1.1) Общая ассоциативность:  $A_1 A_2 \dots A_n$  - Не зависит от расстановки скобок.

2)  $A(B + C) = AB + AC$  Дистрибутивность.

3)  $(A + B)C = AC + BC$

4)  $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

5) Единичная матрица:  $1A = A$ .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

....

....

....

Транспонирование матриц:

$$A_{mn} \rightarrow B_{nm} = A^T$$

$$a_{ij} = b_{ji}$$

$$(PQ)^T = Q^T P^T$$

След матрицы - сумма ее диагональных элементов.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

Теорема:

$$tr(PQ) = tr(QP)$$

$$\{pass$$

$$A = (pass)$$