Листок 2

1. Вычислить пределы:
а) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n-3n^4-n^3}{\sqrt[3]{5n^{12}+3^{\frac{1}{n}}}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-10}{1+n\cdot 1{,}1^n}$; г) $\sqrt[n]{2^n n^2+2n-1}$.

2. Доказать сходимость последовательностей: а) $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k\sqrt{k}}$; б) $a_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{3n-2}$.

3. Исследовать на сходимость следующие рекуррентно заданные последовательности:
а) $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$; б) $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$; в) $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{2}{a_n^2}\right)$;
г)* $a_1=a>0, a_{n+1}=\frac{a}{2+a_n}$.

4. Пусть $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, а $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Доказать, что a_n не возрастает, а b_n не убывает и $a_k\le b_m$ при всех натуральных k и m, а также доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

5. Пусть $a_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, а $b_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$. Доказать, что a_n не возрастает, а b_n не убывает и $a_k\le b_m$ при всех натуральных k и m, а также доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

6. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. а) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a$; б) если $a_n>0, n\in\mathbb{N}$, то и $\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}=a$.

Домашнее задание 2.

1. Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{n(n-1)}\right)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{7+5^n+3^n}{3+2^n}}$.

2. Исследовать на сходимость следующие рекуррентно заданные последовательности:
а) $a_1=1, a_{n+1}=1-\frac{1}{4a_n}$; б) $a_1=0, a_{n+1}=\sqrt{5+a_n}$; в) $a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\frac{4}{3}a_n-a_n^2$.

3. Доказать неравенство $\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

4. Пусть $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$, а $b_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$. Доказать, что a_n не возрастает, а b_n не убывает и $a_k\le b_m$ при всех натуральных k и m, а также доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

5*. Доказать, что: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e$; б) $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\alpha_n}{n\cdot n!}, 0<\alpha_n<1$;
в) число e иррационально.

6*. а) **(Теорема Штольца.)** Пусть $y_{n+1}>y_n>0$ при всех натуральных n и $\lim\limits_{n\to\infty}=+\infty$, а также $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$;
б) найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})$; в) найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot a+2\cdot a^2+\ldots+n\cdot a^n}{n\cdot a^{n+1}}, a>1$.