华罗庚协会讨论班题目

华仔

1　第一周

1.1　课上题目

1.1: 设 $a, b \in \mathbb{N}^+, \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{Z}$，证明：

$$(a, b) \le \sqrt{a+b}$$

wzl 供题

1.2：$a, b \in \mathbb{N}^+, (a, b) = 1$, 证明：$(a+b, a^2+b^2)$ 为 1 或者 2

wzl 供题

1.3: $n \ge m > 0$，证明 a 为正整数, 其中

$$a = \frac{(m, n)}{n} \cdot C_n^m$$

wzl 供题

1.4：p, q 为素数，$q = p+2$，证明：$p+q | p^q + q^p$

wzl 供题

1.5：$m, n \in \mathbb{N}^+, m > n$, 证明：

$$[m, n] + [m+1, n+1] > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}$$

wzl 供题

1.6：试证明：任意大于 2 的偶数，可以写成两个无平方因子数之和.

学长供题

1.2　未讲完的题目

1.0: 证明不等式 $[\sqrt{\alpha}] + [\sqrt{\alpha+\beta}] + [\sqrt{\beta}] \ge [\sqrt{2\alpha}] + [\sqrt{2\beta}]$ 对任意不小于 1 的实数 α 和 β 成立

wzl 供题

1.1：设 a, b, c, d 为整数，$(a-c)|(ab+cd)$, 则：

$$(a-c)|(ad+bc)$$

wzl 供题

1.2：设 a, b 都是正整数，a^2+ab+1 被 b^2+ab+1 整除，证明:

$$a = b$$

wzl 供题

1.3：证明存在无穷多个正整数 n, 使得

$$n|(2^n + 2), (n-1)|(2^n + 1)$$

wzl 供题

1.4：设 p 是素数，$x, y, z \in \mathbb{Z}$ 满足 $0 < x < y < z < p$，$x^3 \equiv y^3 \equiv z^3 (modp)$, 证明：

$$(x + y + z)|(x^2 + y^2 + z^2)$$

wzl 供题

1.5：给定 $C > 0$, 对 $n = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$，定义 $\mho(n) = \sum_{p_i > C} \alpha_i$, 求：$\Phi : z \to z$ 使得对于 $\forall a, b \in \mathbb{N}^+, a > b$ 有：

$$\mho(\Phi(a) - \Phi(b)) \leq \mho(a - b)$$

学长供题