

华罗庚协会讨论班题目

华仔

1 第一周

1.0: 证明不等式 $[\sqrt{\alpha}] + [\sqrt{\alpha + \beta}] + [\sqrt{\beta}] \geq [\sqrt{2\alpha}] + [\sqrt{2\beta}]$ 对任意不小于 1 的实数 α 和 β 成立

wzl 供题

1.1: 设 a, b, c, d 为整数, $(a - c)|(ab + cd)$, 则:

$$(a - c)|(ad + bc)$$

wzl 供题

1.2: 设 a, b 都是正整数, $a^2 + ab + 1$ 被 $b^2 + ab + 1$ 整除, 证明:

$$a = b$$

wzl 供题

1.3: 证明存在无穷多个正整数 n , 使得

$$n|(2^n + 2), (n - 1)|(2^n + 1)$$

wzl 供题

1.4: 设 p 是素数, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 满足 $0 < x < y < z < p$, $x^3 \equiv y^3 \equiv z^3 \pmod{p}$, 证明:

$$(x + y + z)|(x^2 + y^2 + z^2)$$

wzl 供题

1.5: 试证明: 任意大于 2 的偶数, 可以写成两个无平方因子数之和.

学长供题

1.6: 给定 $C > 0$, 对 $n = \prod_{i=1}^n P_i^{\alpha_i}$, 定义 $\mathcal{U}(n) = \sum_{p_i > C} \alpha_i$, 求: $\Phi: z \rightarrow z$ 使得对于 $\forall a, b \in \mathbb{N}^+, a > b$ 有:

$$\mathcal{U}(\Phi(a) - \Phi(b)) \leq \mathcal{U}(a - b)$$

学长供题