华罗庚协会讨论班题目

华仔

1 第一周

1.1 课上题目

1.1: 设 $a, b \in \mathbb{N}^+, \frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{Z}$，证明：

$$(a, b) \leq \sqrt{a+b}$$

wzl 供题

1.2：$a, b \in \mathbb{N}^+, (a, b) = 1$, 证明：$(a+b, a^2+b^2)$ 为 1 或者 2

wzl 供题

1.3: $n \geq m > 0$，证明 a 为正整数, 其中

$$a = \frac{(m, n)}{n} \cdot C_n^m$$

wzl 供题

1.4：p, q 为素数，$q = p + 2$，证明：$p + q | p^q + q^p$

wzl 供题

1.5：$m, n \in \mathbb{N}^+, m > n$, 证明：

$$[m, n] + [m+1, n+1] > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}$$

wzl 供题

1.6：试证明：任意大于 2 的偶数，可以写成两个无平方因子数之和.

学长供题

1.2 未讲完的题目

1.0: 证明不等式 $[\sqrt{\alpha}] + [\sqrt{\alpha+\beta}] + [\sqrt{\beta}] \geq [\sqrt{2\alpha}] + [\sqrt{2\beta}]$ 对任意不小于 1 的实数 α 和 β 成立

wzl 供题

1.1：设 a, b, c, d 为整数，$(a-c)|(ab+cd)$, 则：

$$(a-c)|(ad+bc)$$

wzl 供题

1.2：设 a, b 都是正整数，$a^2 + ab + 1$ 被 $b^2 + ab + 1$ 整除，证明:

$$a = b$$

wzl 供题

1.3：证明存在无穷多个正整数 n, 使得

$$n|(2^n+2),(n-1)|(2^n+1)$$

wzl 供题

1.4：设 p 是素数，$x,y,z\in\mathbb{Z}$ 满足 $0<x<y<z<p$，$x^3\equiv y^3\equiv z^3(modp)$, 证明：

$$(x+y+z)|(x^2+y^2+z^2)$$

wzl 供题

1.5：给定 $C>0$, 对 $n=\prod_{i=1}^{n}P_i^{\alpha_i}$，定义 $\mho(n)=\sum_{p_i>C}\alpha_i$, 求：$\Phi:z\rightarrow z$ 使得对于 $\forall a,b\in\mathbb{N}^+,a>b$ 有：

$$\mho(\Phi(a)-\Phi(b))\leq\mho(a-b)$$

学长供题