

第1章 hoge

第2章 Transverse Ising Chain

2.1 Symmetries and the Critical Point

2.1.1 Duality Symmetry of the Transverse Ising Model

The duality transformation.

$$\tau_j^x = S_j^z S_{j+1}^z \quad (2.1)$$

$$\tau_j^z = \prod_{k \leq j} S_k^x. \quad (2.2)$$

(反) 交換関係を確認する。

$$\begin{aligned} \{\tau_i^x, \tau_i^z\} &= S_i^z S_{i+1}^z \left(\prod_{k \leq i} S_k^x \right) + \left(\prod_{k \leq i} S_k^x \right) S_i^z S_{i+1}^z \\ &= S_i^z S_i^x S_{i+1}^z \left(\prod_{k < i} S_k^x \right) + \left(\prod_{k < i} S_k^x \right) S_i^x S_i^z S_{i+1}^z \\ &= -S_i^x S_i^z S_{i+1}^z \left(\prod_{k < i} S_k^x \right) + \left(\prod_{k < i} S_k^x \right) S_i^x S_i^z S_{i+1}^z = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

3 番目の等号は S_i^x, S_i^z についての反交換関係を使った。

交換関係については、 τ_i^x, τ_j^z 内それぞれに同じ site の spin が含まれなければ明らかに交換する。 $i \neq j$ であり、かつ、同じ site の spin が含まれている場合 $i < j$ を考える。

$$\begin{aligned} [\tau_i^x, \tau_j^z] &= \left[S_i^z S_{i+1}^z, \prod_{k < j} S_k^x \right] \\ &= S_1^x \cdots S_{i-1}^x [S_i^z S_{i+1}^z, S_i^x S_{i+1}^x] S_{i+2}^x \cdots S_{j-1}^x. \end{aligned} \quad (2.4)$$

この中で注意しなければならないのは、 $k = i$ となる場合の連続する $k, k+1$ 番目についてである。

$$\begin{aligned} [S_i^z S_{i+1}^z, S_i^x S_{i+1}^x] &= S_i^z S_{i+1}^z S_i^x S_{i+1}^x - S_i^x S_{i+1}^x S_i^z S_{i+1}^z \\ &= S_i^z S_i^x S_{i+1}^z S_{i+1}^x - S_i^x S_i^z S_{i+1}^x S_{i+1}^z \\ &= S_i^z S_i^x S_{i+1}^z S_{i+1}^x - S_i^z S_i^x S_{i+1}^x S_{i+1}^z \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$