Processus autorégressifs composés
Modèle affine de crédit
Application à l'analyse du risque de crédit

DUPREY Stéfan

Rapport d'économétrie

Master Finance de marché

Conservatoire Nationnal des Arts et Métiers - Paris

Plan

1. Introduction générale
2. Etat de l'art industriel de la modélisation du risque de crédit
3. Processus autorégressifs composés : analyse mathématique
4. Application "FTD Basket", "Cycle effect" et "Loss given Default"
5. Conclusion

1. Introduction générale

Objectif : proposer un modèle de risque de crédit se voulant une alternative fiable, robuste et plus complète que l'état de l'art "industriel"

• Dans un premier temps, nous élaborons un état de l'art des différentes techniques utilisées par l'industrie banquaire et les instances régulatrices pour analyser les risques de crédit.
• Fort de cette vision, nous introduisons la modélisation autorégressive affine de crédit, discutons ces avantages et inconvénient et proposons l'application à des case concrets.
• Nous analysons ensuite plus précisément les propriétés mathématiques des processus autorégressifs composés.
• Nous finissons en exposant des cas de calcul concret implémentés à l'aide du logiciel R. Nous présentons la décomposition du spread des paniers first-to-default, la prise en compte d'effet de cycle et enfin un calcul original : le rendement d'obligations d'entreprises risquées avec taux de recouvrement.

2. Etat de l’art industriel de la modélisation du risque de crédit

Les différents modèles les plus courants

3. Processus autorégressifs composés : analyse mathématique

Log-Laplace transformée conditionnelle : fonction affine des valeurs passées du processus

Définition :

Soit $(Y_t, t \geq 0)$ un processus à n dimensions et notons $\underline{Y_{t-1}}$ l'ensemble des informations jusqu'à et incluant $t-1$. Le processus Y est un processus autorégressif d'ordre p **CAR(p)** si et seulement si la distribution conditionnelle de Y_t sachant $\underline{Y_{t-1}}$ admet une transformée de Laplace conditionnelle du type :

$$E\left[exp(u'Y_t)|\underline{Y_{t-1}}\right] = exp\left[-a_1'(u)Y_{t-1} - ... - a_p'(u)Y_{t-p} + b(u)\right] \quad (1)$$

, où $a_p \neq 0$.

Equivalence CAR(p) et CAR(1)

Proposition :

Le processus $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus $CAR(p)$ si et seulement si le processus $\widetilde{Y}_t = \left(Y_t', Y_{t-1}', \ldots, Y_{t-p}'\right)$ est un processus $CAR(1)$.

$$a(v) = \begin{pmatrix} a_1(v_1) + v_2 \\ \vdots \\ a_{p-1}(v_1) + v_p \\ a_p(v_1) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Processus autorégressifs composés à valeurs entières et thématique de file d'attente :

$Y_t = Z_t + \epsilon_t$ avec $Z_t = \rho Y_{t-1}$. Problème Z_t pas entier !

$$Y_t = \sum_{i=1}^{Y_{t-1}} Z_{i,t} + \epsilon_t \tag{3}$$

, où les variables $Z_{i,t}$ suivent une loi de Bernouilli $\mathbb{B}(1, \rho)$. Dans ce cas :

$$E[exp(-uY_t)|Y^{t-1}] = exp(-a(u)Y_{t-1} + b(u))$$

Processus autorégressifs composés à valeurs positives

On donne une condition nécessaire et suffisante sur la transformée de Laplace d'une variable aléatoire pour qu'elle soit positive.

$$\forall j \in \mathbb{N}, (-1)^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}u^j} [exp(b(u))] \geq 0 \tag{4}$$

Distribution invariante, prévision et stationnarité

Proposition :
La distribution invariante $E[\exp\left(-u'Y_t\right)|\underline{Y}_{t-1}] = \exp[c(u)]$ vérifie :

$$b(u) = c(u) - c(a(u))$$

Un processus stochastique CAR(1) vérifie :

$$E[exp(-uY_{t+h})|Y^t] = exp(-a^{oh}(u)Y_t + \sum_{k=0}^{h-1} b(a^{ok}(u))) \tag{5}$$

Soit un processus CAR(1) admettant une log-Laplace transformée invariante c. La transformée de Laplace conditionnelle tend vers une limite indépendante de la variable conditionnante si et seulement si :

$$\lim_{h\to\infty} a^{oh}(u) = 0, \ \forall u. \tag{6}$$

Réversibilité temporelle d'un processus autorégressif composé

Proposition :
Le processus CAR(1) est réversible si et seulement si la fonction $\psi(u, v) = c(a(u) + v) + c(u) - c(a(u))$ est une fonction symétrique de u et v. La démonstration est immédiate en exprimant la symétrie de la transformée de Laplace de la distribution jointe de (Y_t, Y_{t-1}) par la propriété de Markov. Quand le processus Y_t est réversible :

$$i)a(u) = \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u}\right)^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u}(u) - \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u}(0)\right) + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u}(0)\right]$$

ii) La fonction $\gamma(u) = \frac{\mathrm{d}^2c}{\mathrm{d}u^2}o(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u})^{-1}$ est quadratique.

Opérateur espérance conditionnelle

Proposition :

$$E[Y_t^n|Y_{t-1}] = P_n(Y_{t-1}) \tag{7}$$

, où P_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de plus haut degré est $[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)]^n$. Considérons l'opérateur d'espérance conditionnelle $\psi \to T\psi$ défini par :

$$T\psi(y) = E[\psi(Y_t)|Y_{t-1} = y] \tag{8}$$

Cet opérateur admet les valeurs propres réels $\lambda_n = [\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)]^n$, $n \geq 0$ et pour fonctions propres associées des polynômes P_n de degré n.

Expression des densités conditionnelles dans le cas de la réversibilité

Proposition :
Supposons $|\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)| < 1$. Pour un processus CAR(1) stationnaire et réversible, les fonctions propres P_n, $n \geq 0$, de l'opérateur espérance conditionnelle sont orthogonales pour le produit scalaire associé à la distribution invariante f. De plus :

$$f\left(y_t | y_{t-1}\right) = f(y_t)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)\right]^n P_n(y_t) P_n(y_{t-1})\right] \qquad (9)$$

, où P_n est la base orthogonale des fonctions polynômiales propre de l'opérateur conditionnel d'espérance.

$$f_h\left(y_t | y_{t-h}\right) = f(y_t)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)\right]^{hn} P_n(y_t) P_n(y_{t-h})\right] \qquad (10)$$

Représentation espace-états, filtrage et lissage

$$Y_t = Z_t + \epsilon_t \tag{11}$$

$$Z_t = \alpha(Y_{t-1}, \eta_t) \tag{12}$$

Proposition :

1. Les variables Z_t, t variant, sont indépendants conditionnellement au processus observable.
2. La distribution conditionnelle de Z_t sachant toutes les valeurs de Y_t coïncide avec la distribution conditionnelle de Z_t sachant Y_{t-1} et Y_t seulement (réversibilité et propriété de Markov). Cette distribution filtrante est donnée par :
$$l(z_t|y_{t-1}, y_t) = \frac{g(z_t|y_{t-1})h(y_t - z_t)}{\int g(z|y_{t-1})h(y_t - z)\mathrm{d}z} \tag{13}$$
3. La distribution lissante de ϵ_t suit directement puisque $\epsilon_t = y_t - z_t$.

Les différents processus CAR réversibles classés selon l'équation caractéristique $\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ associé à l'équation de Ricatti

• $\beta_1 = \beta_2 = 0$: les processus de Poisson composés

• $\beta_2 = 0$: les processus gaussiens autorégressifs.

• $\beta_2 \neq 0$ et $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 = 0$: les processus γ-composés.

• $\beta_2 \neq 0$ et $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 > 0$: les processus de Bernouilli à régime changeant.

• $\beta_2 \neq 0$ et $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 < 0$: processus à γ fonction quadratique et racines complexes conjuguées.

Inférence statistique : modèle contraint

$$E[\exp(-uY_t)|Y_{t-1}] = L^o(u,y) = \exp(-a(u)y + b(u)) \qquad (14)$$

Proposition :

$$\left[\hat{a}_T(u), \hat{b}_T(u)\right] = \; arg \; \min_{a,b} \sum_{t=1}^{T} \left[\exp(-uy_t) - \exp(ay_{t-1} + b)\right]^2, \qquad (15)$$

Sous les hypothèses de régularité standards et sous la condition que le processus CAR(1) soit bien défini, l'estimateur $\left[\hat{a}_T(u), \hat{b}_T(u)\right]'$ est asymptotiquement normal et tel que :

$$\sqrt{T}\left(\begin{pmatrix} \hat{a}_T(u) \\ \hat{b}_T(u) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(u) \\ b(u) \end{pmatrix}\right) \to N\left(0, \Omega(u)\right), \qquad (16)$$

où $\Omega(u) = J^{-1}(u)I(u)J^{-1}(u)$

Inférence statistique : modèle non contraint

Proposition :

La transformée de Laplace non contrainte peut être estimée par l'estimateur de Nadaraya-Watson :

$$\hat{L}_T(u,y) = \frac{\sum_{t=2}^{T} \exp(-uy_t) K_{h_T}(y_{t-1}-y)}{\sum_{t=2}^{T} K_{h_T}(y_{t-1}-y)}, \quad u \in I, y\ variant, \tag{17}$$

L'estimateur est consistent et asymptotiquement normal

$$\sqrt{Th_T}\left[\hat{L}_T(u,y) - L(u,y)\right] \to N(0, \Sigma(u,y)), \tag{18}$$

où :

$$\Sigma(u,y) = \frac{1}{f(y)} \int K^2(v)dv V\left[\exp(-uY_t)|Y_{t-1}=y\right] \tag{19}$$

$$\frac{L(2u,y) - [L(u,y)]^2}{f(y)} \int K^2(v)dv$$

La qualité de l'estimation peut alors être évaluée en considérant le résidu fonctionnel de $\hat{L}_T(u,y) - \hat{L}_T^0(u,y)$, u et y variant.

4. Application "FTD Basket", "Cycle effect" et "Loss given Default"

Les processus γ-composés

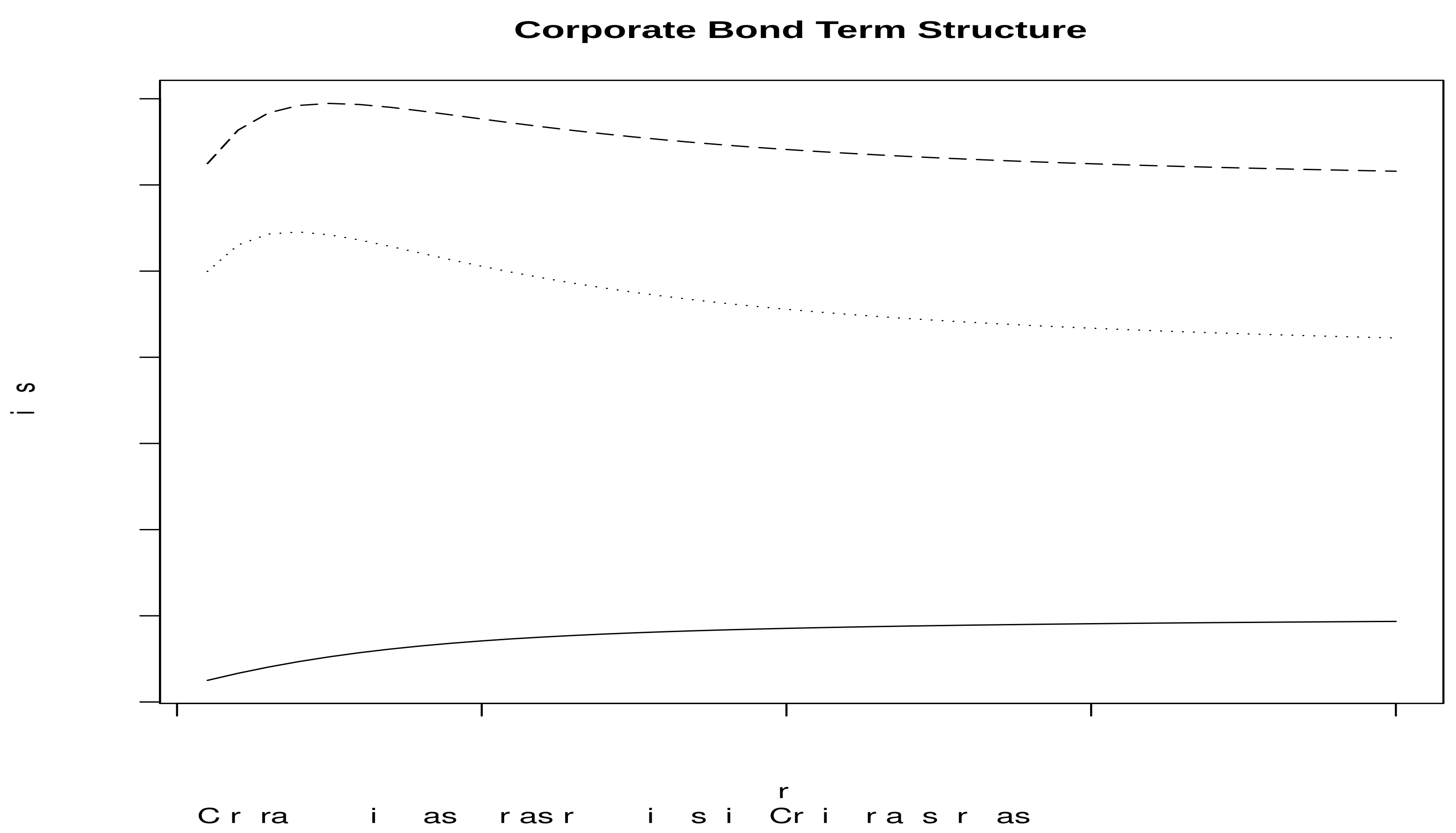
On peut démontrer que la log-transformée de Laplace de ce processus s'écrit :

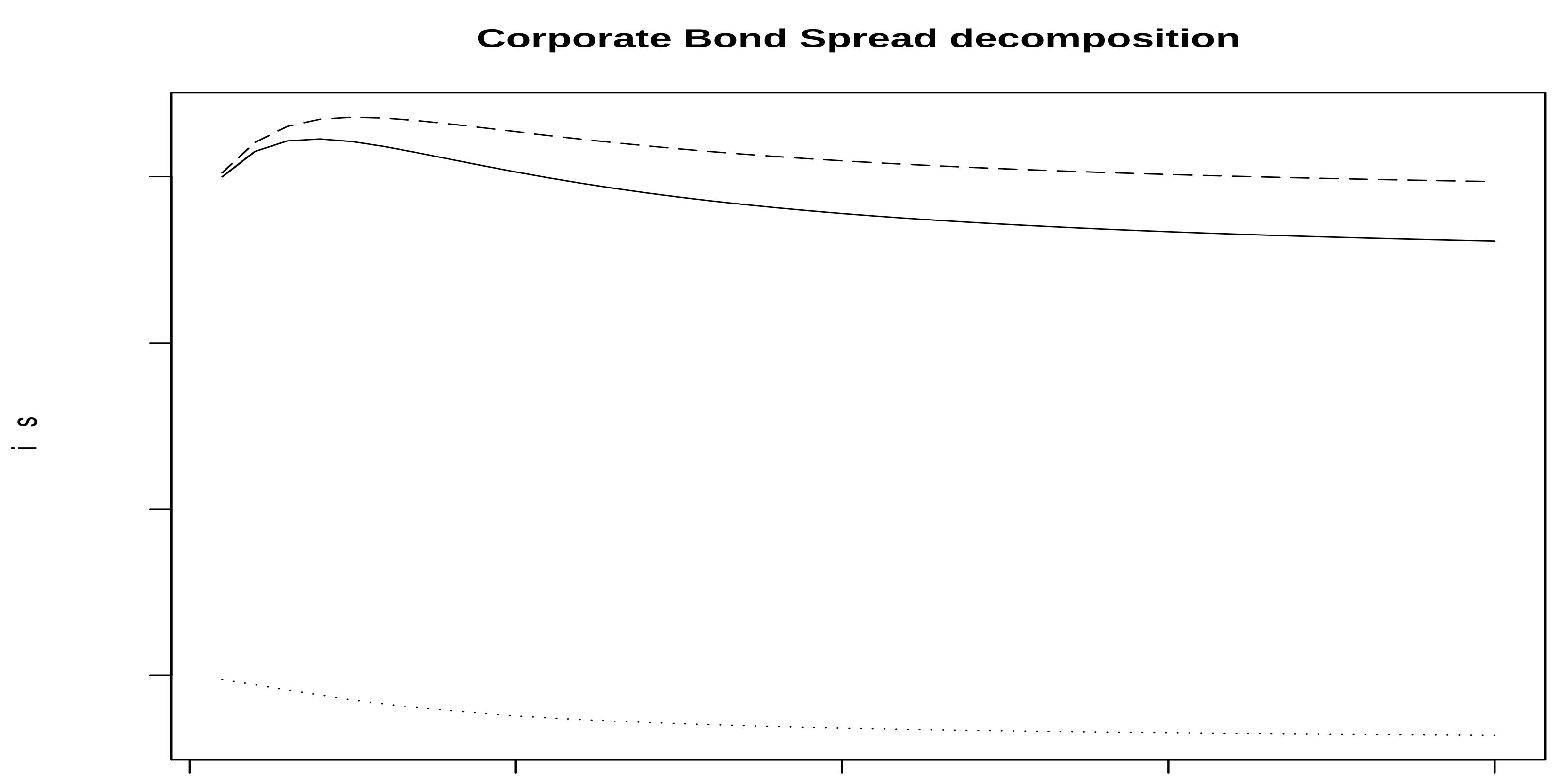
$$E_{t-1}\left[\exp(uY_t)\right] = (1-uc_t)^{-\delta} \exp\left(\frac{c_t u}{1-c_t u}\beta_t Y_{t-1}\right). \qquad (20)$$

La log-transformée de Laplace vérifie donc l'hypothèse affine avec pour fonction $a(u) = \frac{c_t u}{1-c_t u}\beta_t$ et $b(u) = -\delta \log(1-c_t u)$.
Dans le cadre où c, δ et γ sont des constantes, la prévision de Y à l'ordre h est donné par la formule analytique suivante :

$$E_t\left[\exp(uY_{t+h})\right] = \exp\left(Y_t \frac{\rho^h u}{1-uc\frac{1-\rho^h}{1-\rho}} - \delta \log\left(1-uc\frac{1-\rho^h}{1-\rho}\right)\right) \qquad (21)$$

Résultats Corporate Bonds

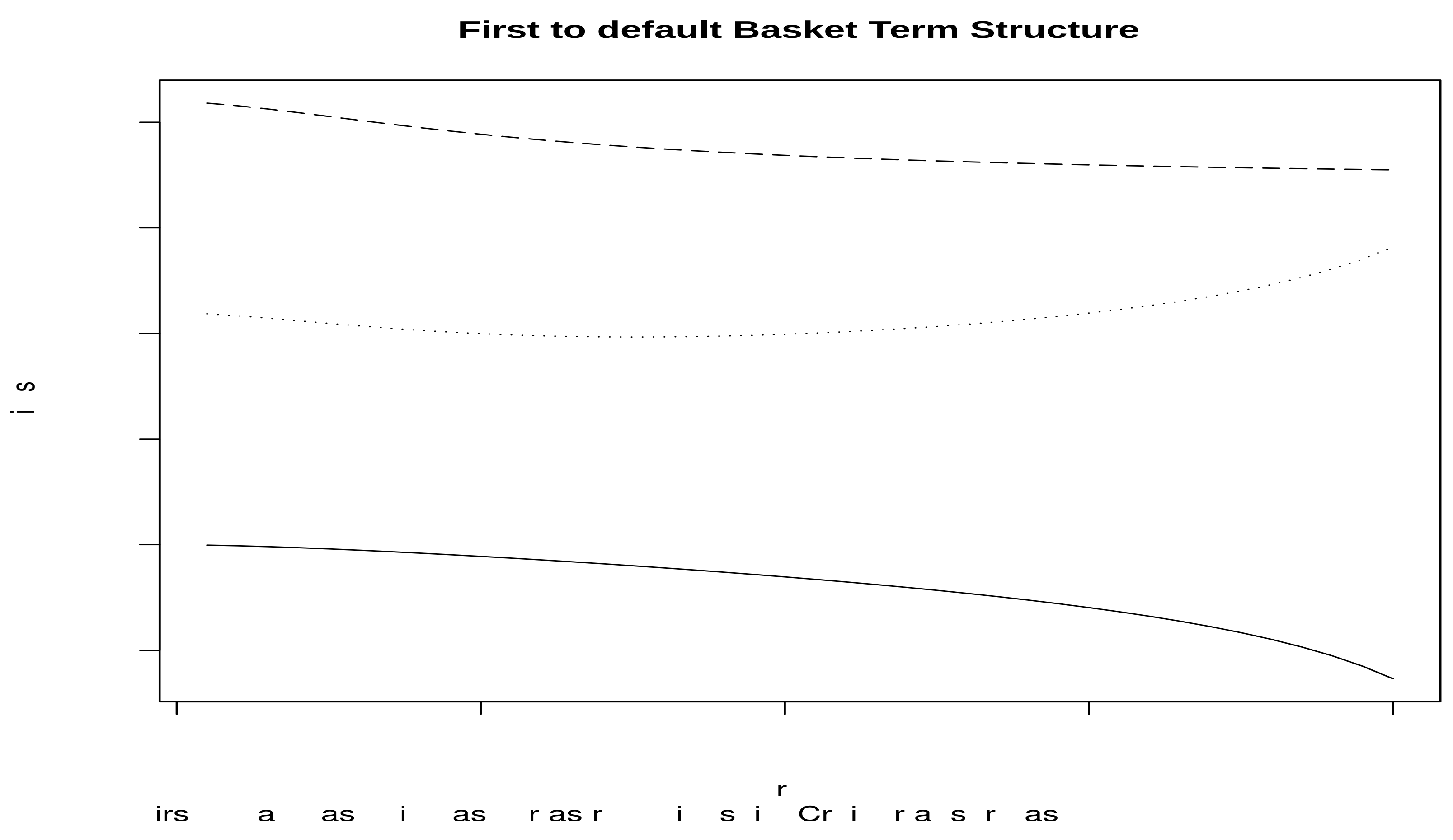


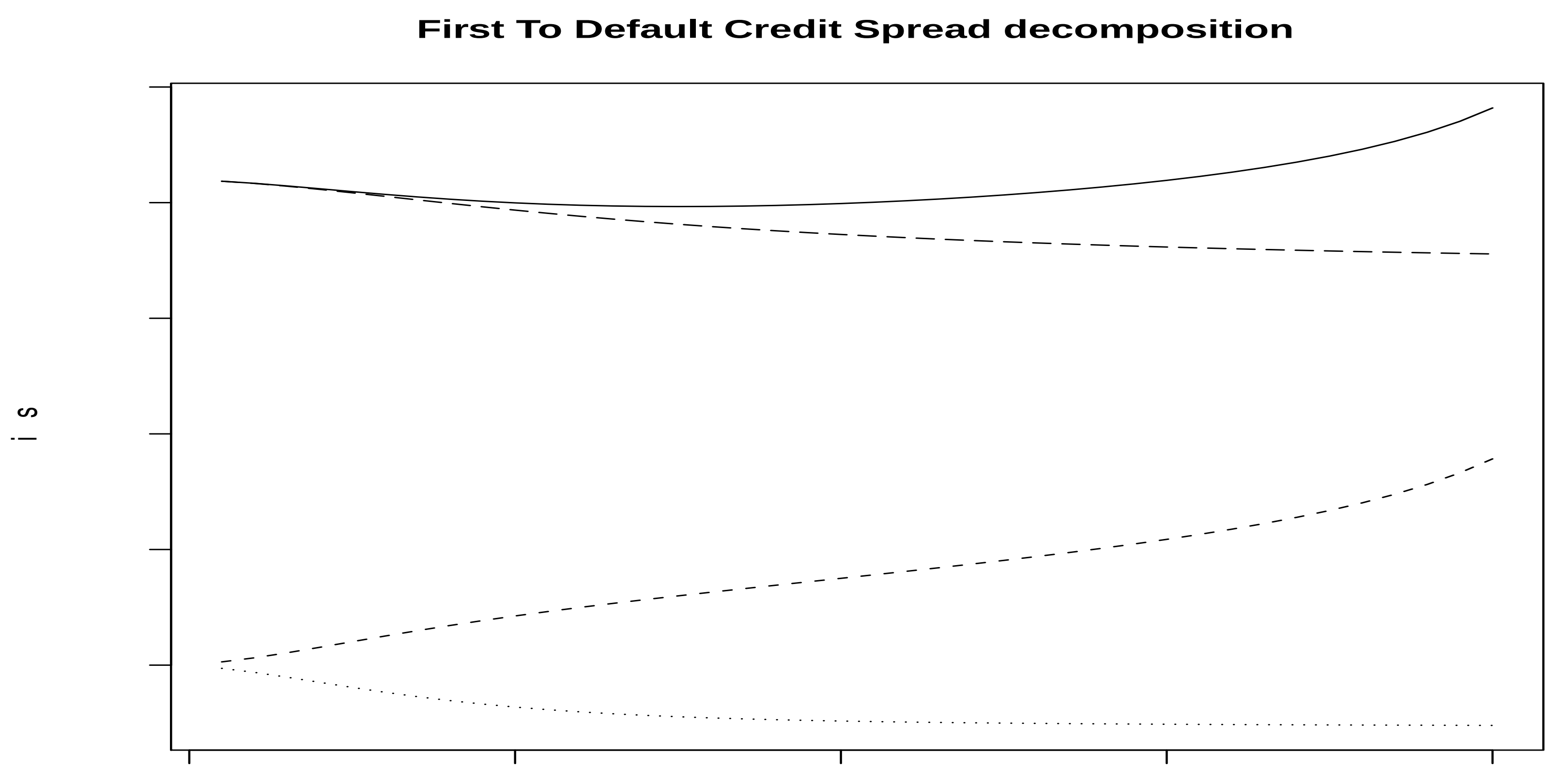


a rr a i s r as a r as Cr i r a s i

$$s_i(t, t+h) - \pi_i(t, t+h) = -\log \left\{ 1 + \frac{Cov_t(M_{t,t+1} 1_{\tau_i > t+1})}{E_t(M_{t,t+1}) E_t(1_{\tau_i > t+1})} \right\}$$

Résultats First-To-Default basket

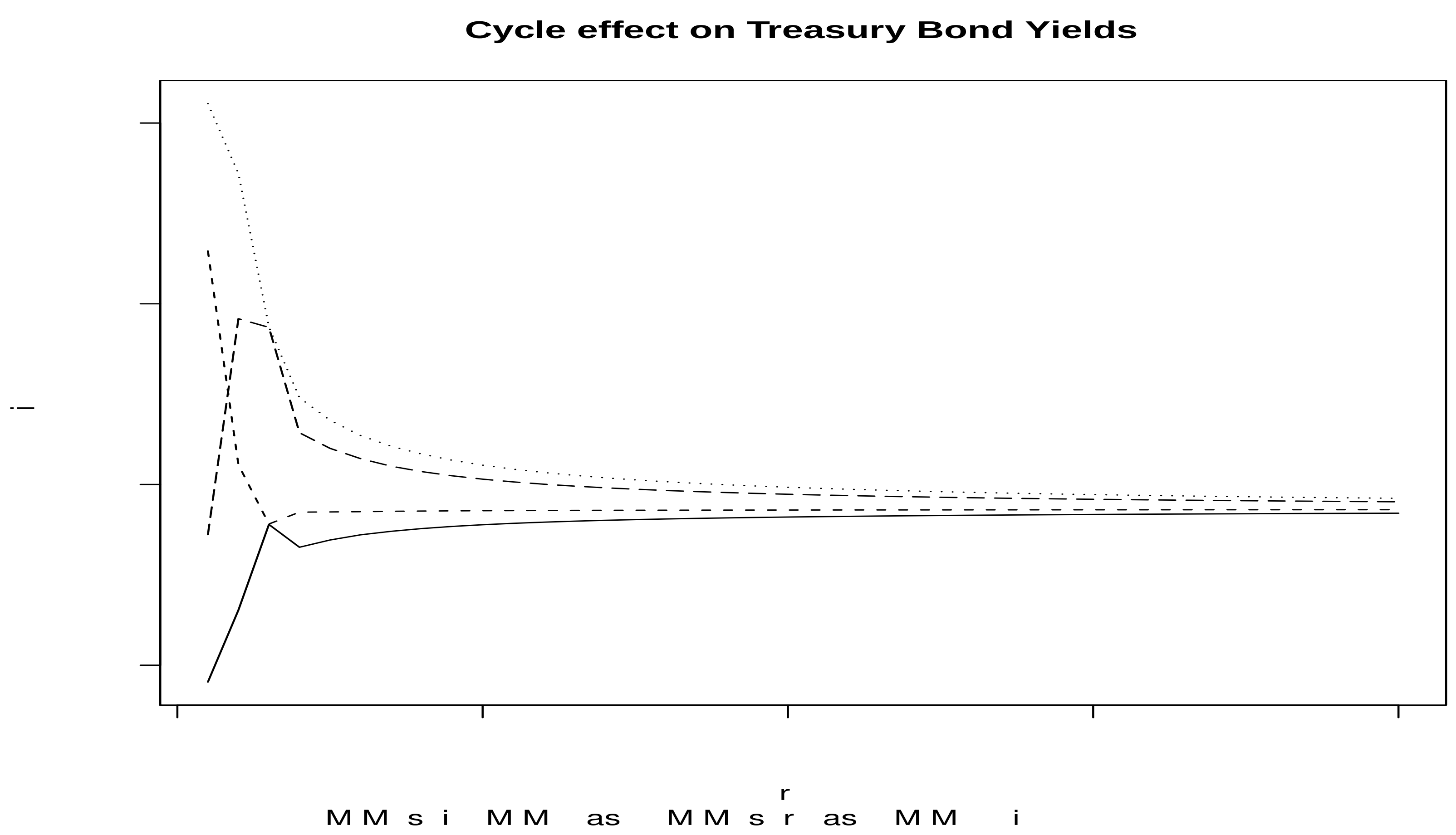




r
r a s i Mar i a a as a s rr a i s r as a rr a i i

$$s(t, t+h) = \pi * (t, t+h) + (\pi(t, t+h) - \pi * (t, t+h)) + (s(t, t+h) - \pi(t, t+h))$$

Résultats Cycle effects



Modélisation du taux de recouvrement

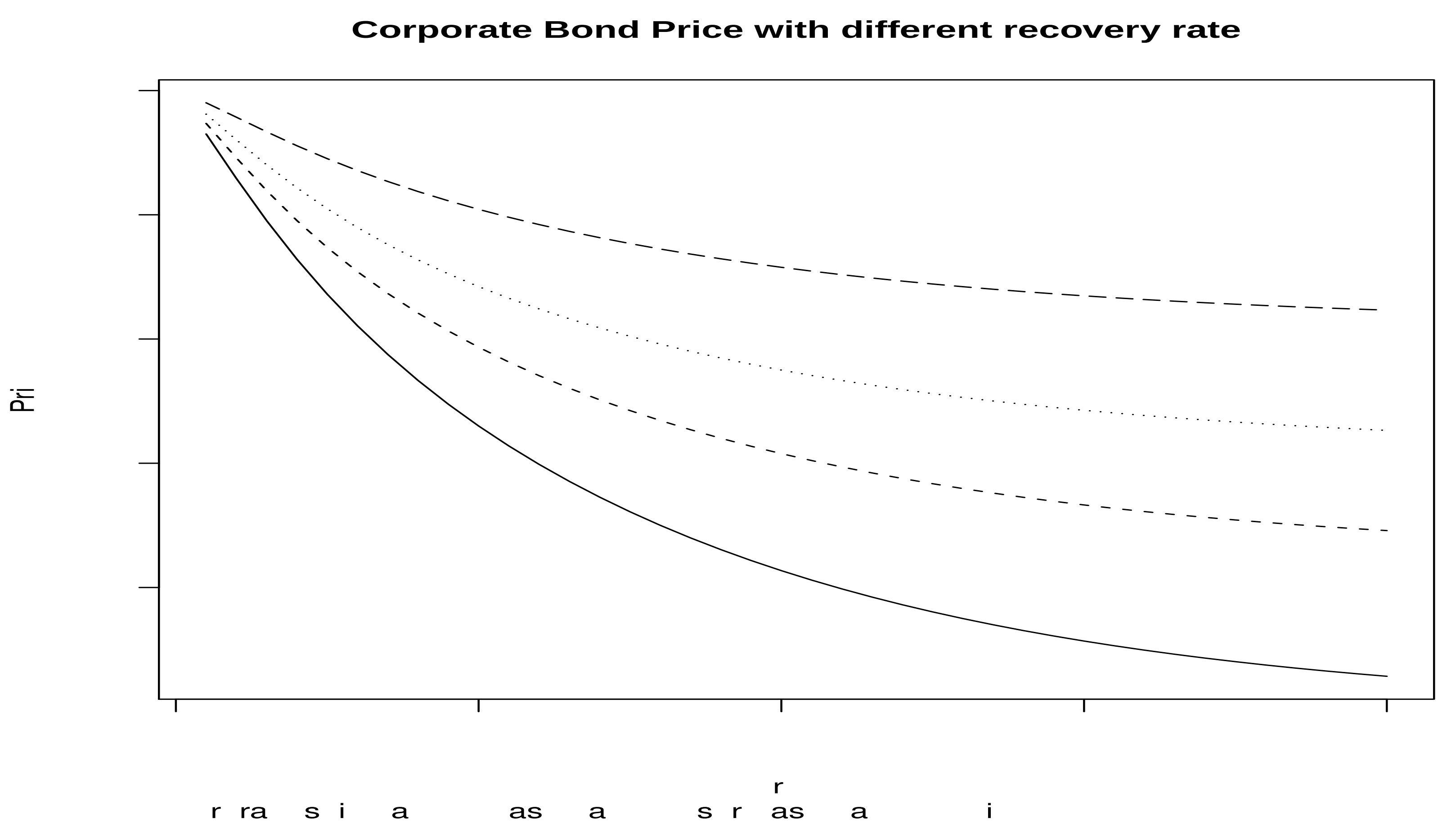
$$C*_i(t, t+h) = \sum_{k=1}^{h} E_t \left\{ \Pi_{j=0}^{k-2} M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1} M_{t+k-1,t+k} \left(1 - \pi_{t+k-1,t+k}\right) R_{t+k-1,t+k} \right\}$$
$$+ E_t \left\{ \Pi_{j=0}^{h-1} (M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1}) \right\},$$

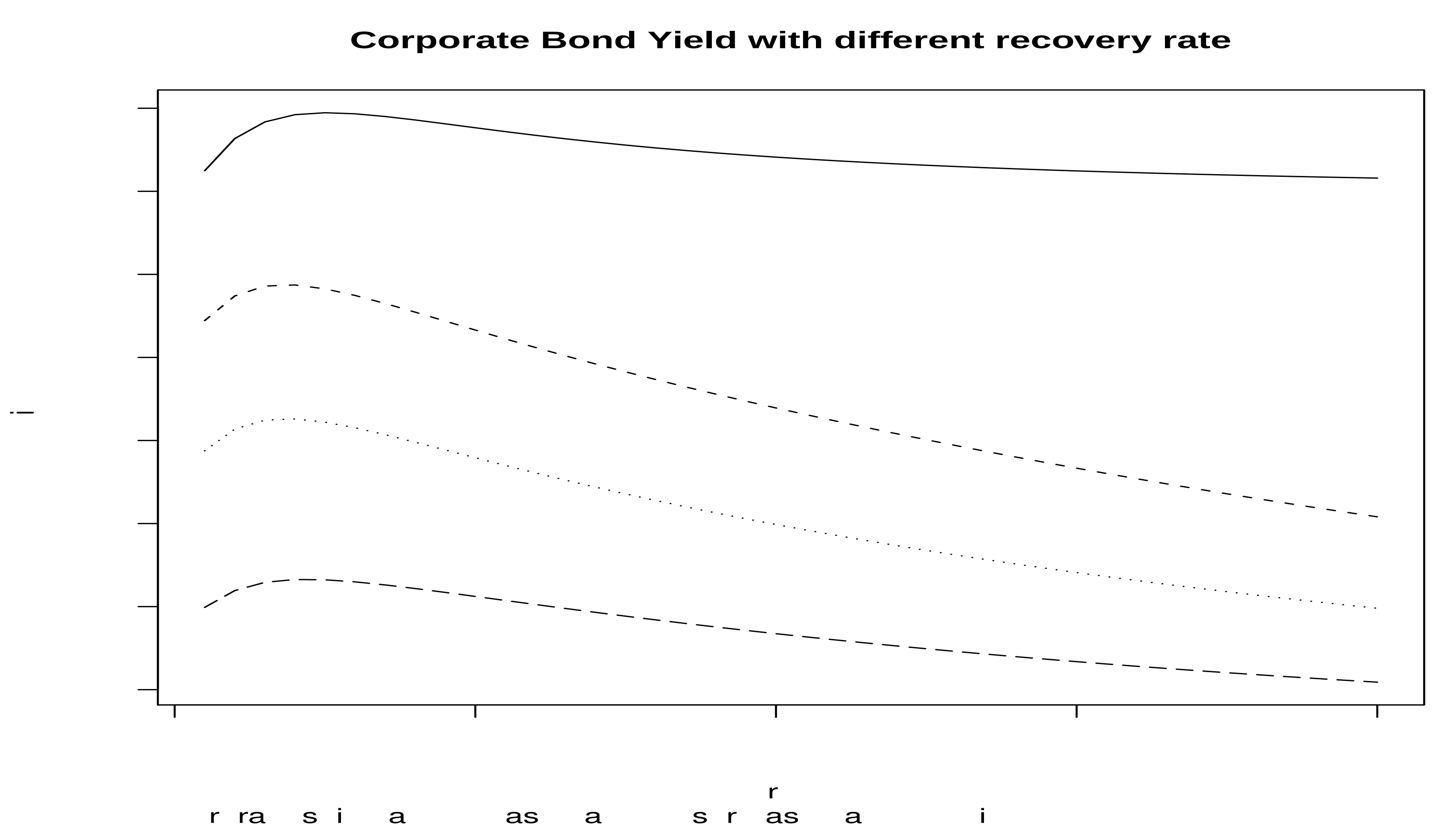
Hyopthèse : Les taux de recouvrement pour les différentes entreprises sont indépendants conditionnellement aux facteurs Z et Z_i. Le taux de recouvrement pour l'entreprise i est tel que :

$$R_{t+j,t+j+1} = \exp(-(\delta_{t+1} + \epsilon'_{t+1} Z_{t+1} + \theta'_{t+1} Zi_{t+1})) = \exp(-\omega'_t), \qquad (22)$$

où $\omega'_t = \delta_t + \epsilon'_t Z_t + \theta'_t Zi_t$ est l'intensité de recouvrement et δ_t, ϵ'_t , θ'_t des fonctions de l'information contenue dans les facteurs Z_t et Z_i. Ce sont aussi des paramètres de sensibilités pour le recouvrement. Les taux de recouvrement étant compris entre 0 et 1, les sensibilités de recouvrement doivent vérifier comme les intensités de survie : $\omega'_t \geq 0$.

Résultats Loss Given Default




Corporate Bond Yield with different recovery rate

5. Conclusion