



Analyse Mathématique et Numérique  
du Rayonnement Acoustique des Turboréacteurs

**DUPREY Stefan**

**Thèse CIFRE**

**EADS-CCR Suresnes**, Département Modélisation Mathématique  
**INRIA Lorraine**, Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré Nancy 1

## Plan

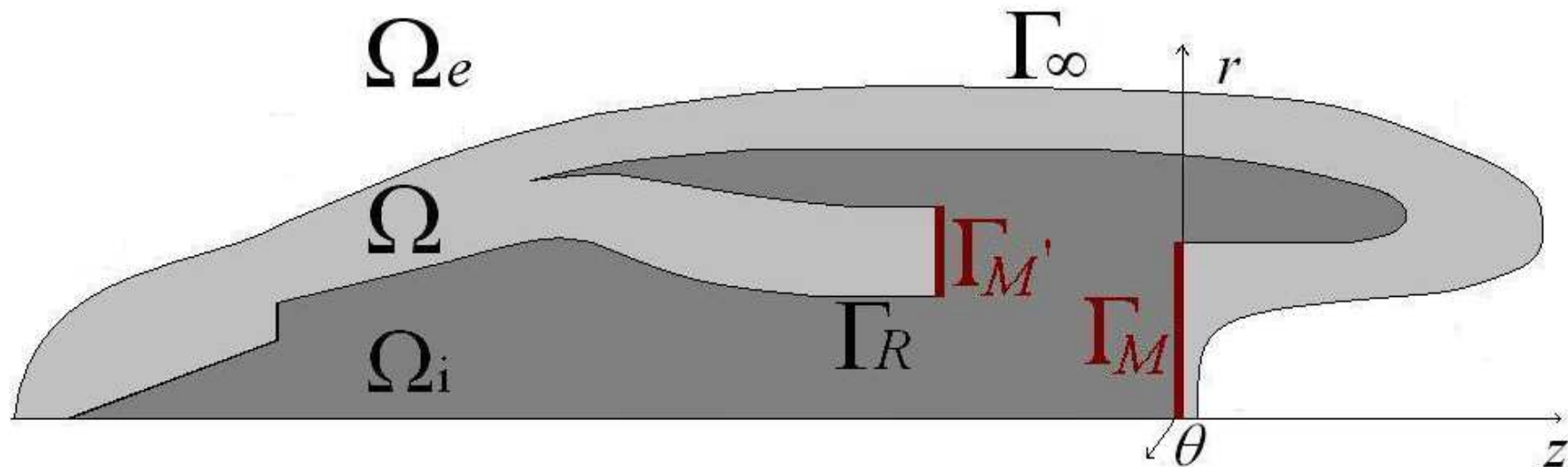
1. Introduction et Enjeux Industriels
2. Théorie du Problème Continu
3. Du Continu au Discret
4. Résultats Numériques
5. Conclusion

## 1. Introduction et Enjeux Industriels

- **Objectif : minimiser le bruit rayonné par les turboréacteurs** : bruit issu du contexte précis du décollage : **pas le bruit aérodynamique**, ni le bruit de jet rayonné à l'arrière, **mais le bruit de raies** (puissant et monofréquentiel) émis par les pales du moteur et **rayonné à l'avant** principalement.
- Différentes techniques utilisées au niveau de la nacelle (traitement des parois de la nacelle, optimisation de sa forme et de la position des traitements...), dont la mise au point est onéreuse : **nécessité du développement d'un code de calcul pour la prévision.**
- **Thématique de décomposition de domaines indispensable** pour un traitement numérique abordable de l'avion entier : on se place dans le **contexte physique précis des équations de Euler linéarisées.**
- **Question débattue et problématique** : influence de la présence d'un écoulement porteur non linéaire par rapport à une propagation acoustique sur un écoulement constant : choix de la position des surfaces rayonnantes.

## Un Contexte Physique Particulier : Euler Linéarisé Potentiel

- On est loin du moteur et les nombres de Mach sont largement subsoniques : pas de non-linéarités dues à des Machs transsoniques. Pas de perturbations aérodynamiques (jet ou couche limite).
- Mécanique des milieux continus : fluide parfait.
- Thermodynamique : gaz parfait adiabatique et isentropique.
- Ecoulement porteur non-linéaire et acoustique linéaire.
- **Hypothèse supplémentaire** : l'écoulement et l'acoustique sont **potentiels**.
- Géométrie **axisymétrique** :



## 2. Théorie du Problème Continu

### Théorie Ecoulement Porteur

- L'écoulement dérive d'un potentiel et son équation est obtenue à l'ordre zéro des équations de l'écoulement total.
- **Conditions de bord simplifiées** : condition glissante+condition de flux.
- Le potentiel vérifie une **EDP non linéaire**. Le régime subsonique (resp. supersonique) détermine le caractère elliptique (resp. hyperbolique) de l'équation (régime transsonique complexe : ondes de choc)

$$\begin{cases} \operatorname{div}(F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\frac{\partial\phi_0}{\partial n} = q & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} = \text{edp du potentiel porteur } \phi_0, \text{ dont}$$

une **solution faible** est cherchée **variationnellement** :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0\nabla\psi \, dx = \int_{\partial\Omega} q\psi \, d\gamma, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \end{cases}$$

- **Les variables de l'écoulement sont adimensionnées** par les constantes de l'écoulement à l'infini ( $a_\infty$ ,  $\rho_\infty$  et  $v_\infty$ ).

## Existence et unicité pour l'Ecoulement Porteur

Le problème restreint au convexe fermé non vide des régimes subsoniques

$K_\delta = \{v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \|\nabla v\|_\infty \leq \delta < c_*\}$  admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_0 \in K_\delta \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} F_\infty(|\nabla \phi_0|^2) \nabla \phi_0 \nabla (\psi - \phi_0) \, dx \geq \int_{\partial\Omega} q (\psi - \phi_0) \, d\gamma, \quad \forall \psi \in K_\delta \end{array} \right.$$

Cette inégalité variationnelle caractérise  $\phi \in K_\delta$  minimum de la fonctionnelle  $K$  sur  $K_\delta$ , où  $K(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} F(|\nabla \phi|) - \int_{\partial\Omega} q\phi \, d\gamma$  avec  $F(x) = - \int_{x^2}^{\infty} F_\infty(s) \, ds$

**Théorème :** Supposons que le problème initial admette une unique solution

$\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ , telle que  $\exists \delta_0 < c_*$  et  $\|\nabla \phi\|_\infty \leq \delta_0 < c_*$ . Alors  $\phi$  est une solution du problème convexifié, pour tout  $\delta \in [\delta_0, c_*[$ . Réciproquement, si  $\phi$  est une solution du problème convexifié pour un certain  $\delta < c_*$ , telle que l'on peut trouver  $\delta_0 < \delta$  et  $\|\nabla \phi\|_\infty \leq \delta_0$  (contrainte de convexité non saturée). Alors  $\phi$  est une solution du problème initial.

**L'Ecoulement Porteur comme Limite d'un Point Fixe**

La fonctionnelle  $K$  est elliptique sur  $K_\delta$  :

$$\exists \alpha > 0, \forall (\phi_0, \psi) \in K_\delta^2, \quad \overrightarrow{\nabla}^2 K(\phi_0)(\psi, \psi) \geq \alpha \|\psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2, \quad (1)$$

ce qui équivaut encore à :

$$\exists \alpha > 0, \forall (\phi, \psi) \in K_\delta^2, \quad \langle \overrightarrow{\nabla} K(\phi) - \overrightarrow{\nabla} K(\psi), \phi - \psi \rangle \geq \alpha \|\phi - \psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \quad (2)$$

**L'ellipticité de la fonctionnelle  $K$  permet de prouver :**

**Théorème :** Pour tout  $\phi \in K_\delta$ , la coercivité de  $B(\phi; \cdot, \cdot)$  (où  $B(\phi; \psi, \xi) = \int_\Omega F_\infty(|\nabla \phi|^2) \nabla \psi \nabla \xi$ ) implique l'existence et l'unicité de la solution de :

$$\forall \phi \in K_\delta, \exists ! \zeta = \zeta(\phi) \in K_\delta \text{ tel que : } \forall \psi \in K_\delta, \quad B(\phi; \zeta, \psi - \zeta) \geq \langle q, \psi - \zeta \rangle$$

**La suite définie par  $\phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  et  $\phi_{n+1} = \zeta(\phi_n)$  converge vers l'unique solution du problème convexifié.**

## Théorie Acoustique

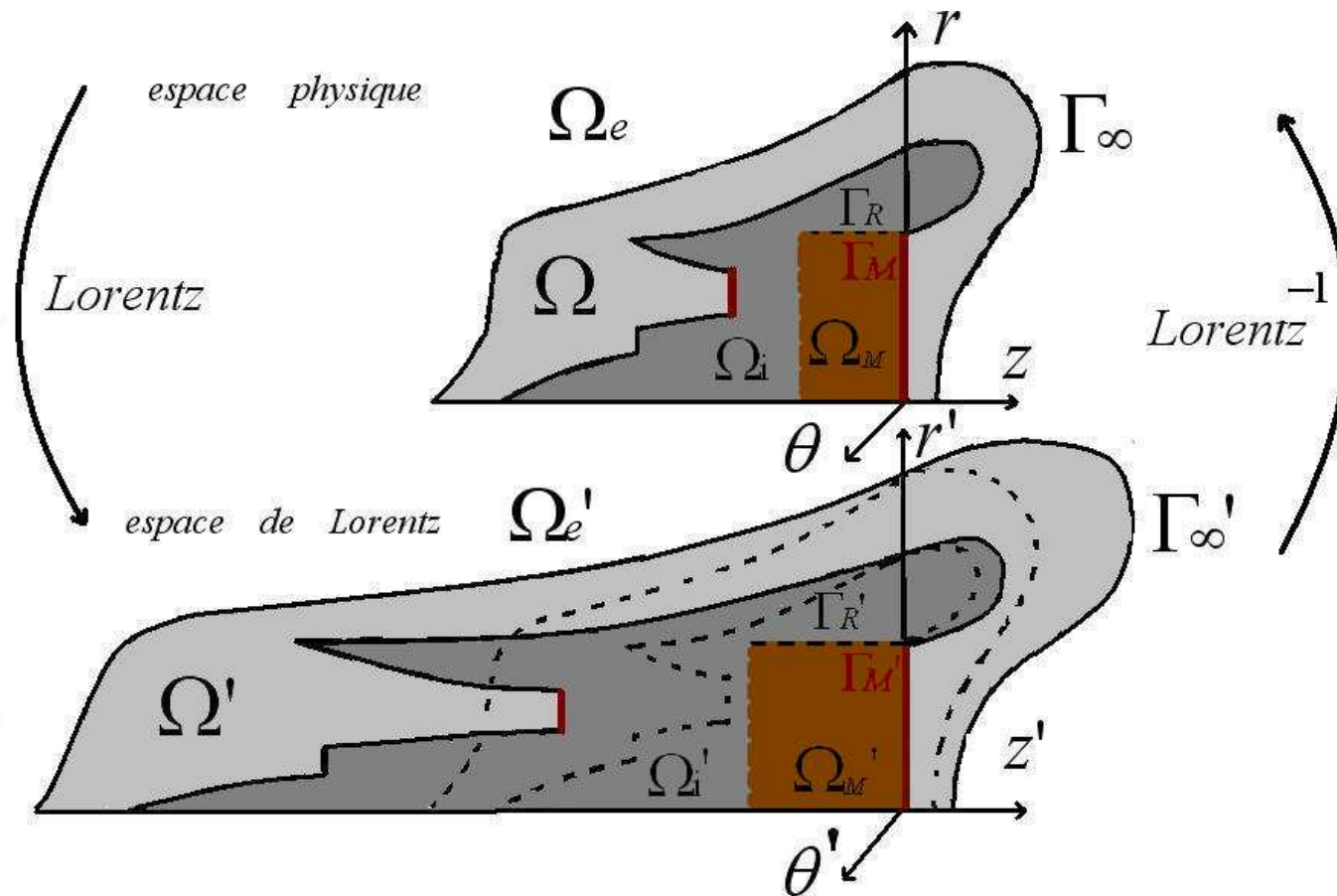
- Le potentiel acoustique est solution de l'**EDP d'ordre 2 à coefficients variables provenant de l'écoulement** suivante :

$$\operatorname{div} \left( \rho_0 \left( I - {}^t \overrightarrow{M_0} \cdot \overrightarrow{M_0} \right) \nabla \phi_a \right) + \rho_0 k_0^2 \phi_a + i k_0 \rho_0 \overrightarrow{M_0} \cdot \nabla \phi_a + \operatorname{div} \left( i k_0 \rho_0 \phi_a \overrightarrow{M_0} \right) = 0$$

- **Réfraction totale** sur les parois rigides.
- **Moteur=guide d'ondes cylindrique en écoulement uniforme.** Source sonore=modes incidents. Condition de rayonnement appropriée permettant la sélection des modes réfléchis pour le potentiel acoustique diffracté. Opérateur Dirichlet-Neumann en écoulement permettant de borner le domaine de calcul.
- **Les modes sont normalisés** : ils ont un flux d'énergie unitaire dans le conduit.
- **Condition de Sommerfeld "convectée" à l'infini** sélectionnant les ondes sortantes et équation intégrale en présence d'écoulement permettant de borner le domaine de calcul.
- **Les variables acoustiques sont adimensionnées** par les valeurs de l'écoulement porteur à l'infini ( $a_\infty$ ,  $\rho_\infty$  et  $v_\infty$ ).



## Existence et Unicité pour l'Acoustique



$$\text{Lorentz fréquentiel} = \text{dilatation axiale} + \widetilde{\phi}_a' = e^{-ik'_\infty M_\infty z'} \widetilde{\phi}_a$$

On note  $A_{Lm}(\phi_{am})$  l'opérateur différentiel appliqué à  $\phi_{am}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \rho_0 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) + \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) \\ - \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho_0 M_{0r} M_{0z} \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 M_{0z} M_{0r} \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) \\ - \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho_0 M_{0z}^2 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho_0 M_{0r}^2 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) \\ + \rho_0 \left( \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - M_{0z}^2) + \frac{ik_0 M_{0z}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} - \frac{M_{0r} M_{0z}}{r \sqrt{1 - M_\infty^2}} \right) \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \\ + \rho_0 \left( -\frac{M_{0r}^2}{r} + ik_0 M_{0r} - \frac{ik_\infty M_\infty M_{0r} M_{0z}}{1 - M_\infty^2} \right) \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \\ + \frac{\partial}{\partial r} (ik_0 \rho_0 M_{0r} \phi_{am}) + \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial (\rho_0 \phi_{am})}{\partial z} - \frac{ik_\infty M_\infty}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 M_{0r} M_{0z} \phi_{am}) \\ + \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 ik_0 M_{0z} \phi_{am}) - \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 M_{0z}^2 \phi_{am}) \\ + \rho_0 \left( -\frac{m^2}{r^2} - \frac{k_\infty^2 M_\infty^2}{(1 - M_\infty^2)^2} (1 - M_{0z}^2) + \frac{ik_0 M_{0r}}{r} \right) \phi_{am} \\ + \rho_0 \left( -ik_\infty \frac{M_{0r} M_{0z} M_\infty}{r (1 - M_\infty^2)} + k_0^2 - \frac{2k_\infty M_\infty k_0 M_{0z}}{(1 - M_\infty^2)} \right) \phi_{am} = 0 \end{array} \right.$$

## Opérateur Dirichlet-Neumann Modal dans l'Espace de Lorentz

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{LMm} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \\ \phi_{am} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{mn}^- (\phi_a, \Xi_{rmn})_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn} \end{array} \right. \quad \text{définit l'opérateur}$$

Dirichlet-Neumann modal dans l'espace de Lorentz, où l'on a noté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{mn}^\pm = i\rho_M (k_M M_M - (1 - M_M^2) \beta_{mn}^\pm) \\ \quad : \text{les coefficients de l'opérateur } T_{LMm} \\ \beta_{mn}^\pm = \frac{k_M M_M \pm \sqrt{k_M^2 - k_{rmn}^2 (1 - M_M^2)}}{1 - M_M^2} \\ \quad : \text{les constantes de propagation axiale dans l'espace physique} \\ \gamma_{mn}^\pm = -k'_\infty M_\infty + \sqrt{1 - M_\infty^2} \beta_{mn}^\pm \\ \quad : \text{les constantes de propagation axiale dans l'espace de Lorentz} \end{array} \right.$$

## Existence et Unicité du Problème Transformé

**Théorème :** • Le potentiel acoustique transformé dans l'espace de Lorentz cylindrique  $(\overline{\Omega \cup \Omega_e}) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)$  est solution de  $A_{Lm}(\phi_{am}) = 0$ , où l'opérateur  $A_{Lm}$  est elliptique.

• Les conditions aux limites du potentiel transformé s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 - & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} M_{0z} \vec{n} \cdot \vec{e}_z + M_{0r} \vec{n} \cdot \vec{e}_r = 0, & \forall x \in \Gamma_R \\ \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n_{A_{Lm}}} = 0, & \forall x \in \Gamma_R \end{cases}, \\
 - & \frac{\partial (\phi_{am} - \phi_{am,inc})}{\partial n_{A_{Lm}}} = T_{LMm} (\phi_{am} - \phi_{am,inc}), \quad \forall x \in \Gamma_M
 \end{aligned}$$

• L'edp se réduit à l'équation de Helmholtz en dehors du domaine perturbé :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \phi_{am} + \frac{\partial^2 \phi_{am}}{\partial z^2} + \frac{k_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \phi_{am} = 0$$

• Le potentiel acoustique transformé vérifiant la condition de Sommerfeld

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n} - i \frac{k_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \phi_{am} \right|^2 d\gamma = 0 \text{ existe et est unique.}$$

## Egalité d'Energie dans l'Espace Transformé

**Lemme :** • On suppose donc la source sonore incidente nulle :  $\phi_{a,inc} = 0$ . Le problème transformé se formule variationnellement dans  $\Omega$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_{am} \in H_a^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a_{Lm}(\phi_{am}, \psi) = \langle T_{LMm}(\phi_{am}), \psi \rangle_{L^2(\Gamma_M)} + \int_{\Gamma_\infty} \vec{\nabla} \phi_{am} \cdot \vec{n} \, \bar{\psi}, \quad \forall \psi \in H_a^1(\Omega) \end{array} \right. ,$$

• La solution du problème transformé vérifie le bilan d'énergie :

$$\sum_{\pm, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \Im m(\mu_{mn}^\pm) |\langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}|^2 \|\Xi_{rmn}\|_{L^2(\Gamma_M)}^2 + \lim_{R \rightarrow +\infty} k'_\infty \|\phi_a\|_{L^2(S_R)} = 0 ,$$

où la somme modale ci-dessus ne se fait que sur les modes propagatifs :

$$\Im m(\mu_{mn}^\pm) = 0 \iff \text{le mode est évanescent}$$

$$\Im m(\mu_{mn}^\pm) < 0 \iff \text{le mode est propagatif incident}$$

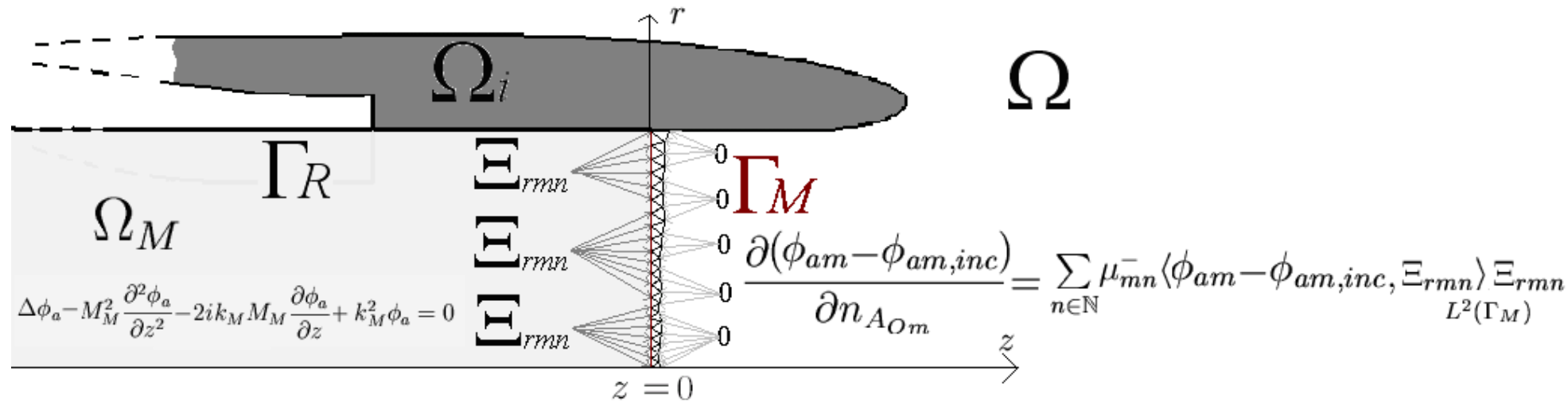
• En l'absence de modes incidents propagatifs à l'entrée de la nacelle ( $\phi_{a,inc} = 0$ ) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \|\phi_a\|_{L^2(S_R)} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \right\|_{L^2(S_R)} = 0$$

### 3. Du Continu au Discret

#### Discrétisation Ecoulement Porteur

- Méthode de point fixe inspirée de la théorie.
- Potentiel calculé à l'étape  $k$  par des éléments finis classiques continus  $H^1$ -conformes d'ordre 1.
- Maillage triangulaire non structuré axisymétrique.
- Poids axisymétrique : quadrature de Lagrange à 10 points.
- Densité et vitesse calculées à l'étape  $k+1$ , constants par éléments.
- Nouvelle matrice assemblée à chaque itération.
- Matrice creuse et symétrique (solveur creux parallèle du CERFACS).
- Assemblage parallélisé.
- Contrainte de convexité estimée sur chaque élément.
- Flux réparti uniformément au niveau du moteur, mais possibilité de prendre un flux inhomogène donné par les motoristes.
- Formulation axisymétrique (seul mode 0 : écoulement indépendant de  $\theta$ )

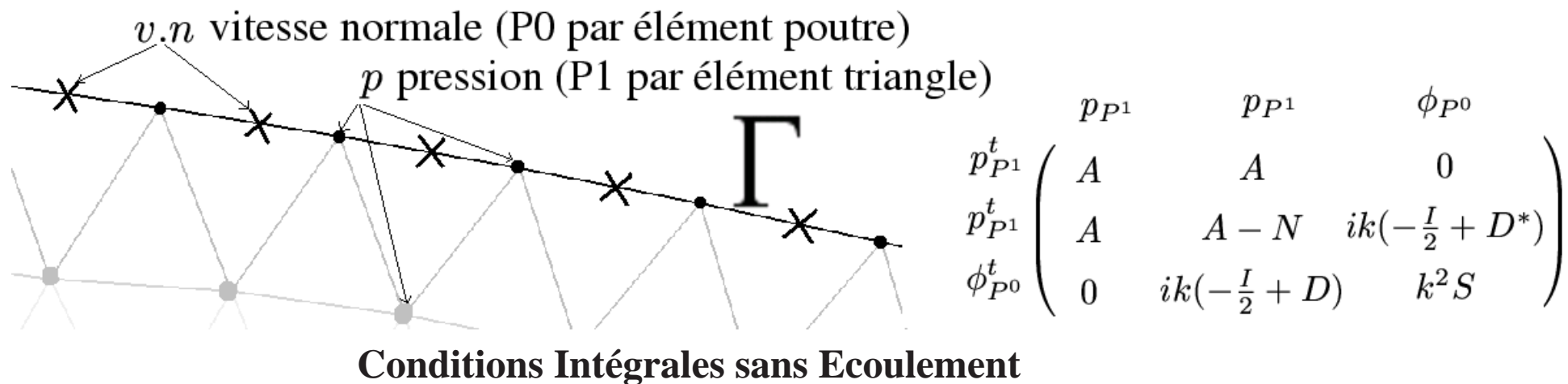


### Couplage Numérique Modal au Moteur

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } (a_{mn}^+)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \text{Trouver } \phi_{am} \in H_{am-\Gamma_M}^1(\Omega) \text{ et } (a_{mn}^-)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tel que :} \\ a_{0m}(\phi_{am}, \psi_m) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m}(\Xi_{rmn}, \psi_m) - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \mu_{mn}^- \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\psi_m} \\ = - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ a_{0m}(\Xi_{rmn}, \psi_m) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ \mu_{mn}^+ \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\psi_m}, \\ \forall \psi_m \in H_{am-mod}^1(\Omega) \end{array} \right.$$

### Conditions Intégrales sans Ecoulement : un Couplage Symétrique

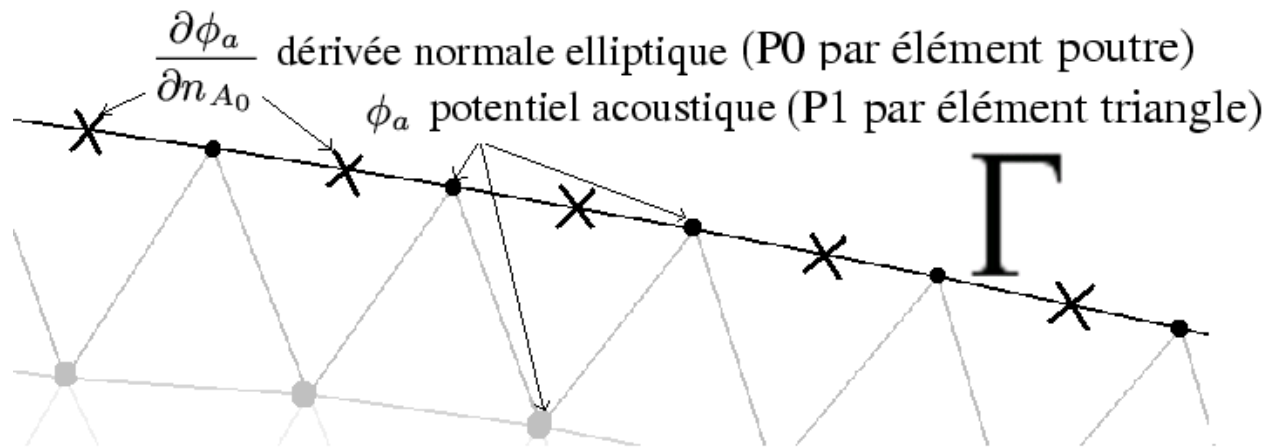
$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \phi = ' v.n') \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} [\vec{\nabla} p \cdot \vec{\nabla} \overline{p^t} - k^2 p \overline{p^t}] = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma} \phi \overline{p^t} - ik \int_{\Gamma} D^* \phi \overline{p^t} + \int_{\Gamma} N p \overline{p^t} \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p \overline{\phi^t} - \int_{\Gamma} D p \cdot \overline{\phi^t} + ik \int_{\Gamma} S \phi \cdot \overline{\phi^t} = 0 \\ \forall (p^t, \phi^t) \in H^1(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \end{array} \right.$$





## Conditions Intégrales avec Ecoulement

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - \left( -ik_\infty \phi_a + \overrightarrow{M_\infty} \cdot \nabla \phi_a \right) \overrightarrow{M_\infty} \cdot \overrightarrow{n} \\ \phi_a \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Lorentz}} \begin{array}{l} \widetilde{\nabla} \widetilde{\phi}_a' \cdot \overrightarrow{n}' \\ \widetilde{\phi}_a' \end{array}$$



$\widetilde{\phi}_a'$  et  $\widetilde{\nabla} \widetilde{\phi}_a' \cdot \overrightarrow{n}'$  sont couplés via la formulation S.

$$\left\{ \begin{array}{l} [\widetilde{\phi}_a']_{\tilde{s}} = e^{-ik'_\infty M_\infty z'} [\phi_a]_s = \widetilde{\Theta}_{\tilde{s}} [\phi_a]_s \\ [\widetilde{\nabla} \widetilde{\phi}_a' \cdot \overrightarrow{n}']_{\tilde{a}} = \frac{\int_{\tilde{a}} e^{-ik'_\infty M_\infty z'} \left[ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} \right]_a}{|\tilde{a}|} = \widetilde{\Theta}_{\tilde{a}} \left[ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} \right]_a \end{array} \right.$$

## Discrétisation Acoustique : Formulation Variationnelle Globale

$$\begin{pmatrix}
 A_{0m} - \overline{{}^t\widetilde{\Theta}_{\widetilde{s}}}\widetilde{N}\widetilde{\Theta}_{\widetilde{s}} & A_{0m}X_{mn} & \overline{{}^t\widetilde{\Theta}_{\widetilde{s}}}(-\frac{\widetilde{I}}{2} + \widetilde{D}^*)\widetilde{\Theta}_{\widetilde{a}} \\
 \overline{X_{mn'}^t}A_{0m} & \overline{X_{mn'}^t}A_{0m}X_{mn} - [\mu_{mn}^-] & 0 \\
 \overline{{}^t\widetilde{\Theta}_{\widetilde{a}}}(-\frac{\widetilde{I}}{2} + \widetilde{D})\widetilde{\Theta}_{\widetilde{s}} & 0 & -\overline{{}^t\widetilde{\Theta}_{\widetilde{a}}}\widetilde{S}\widetilde{\Theta}_{\widetilde{a}}
 \end{pmatrix}
 \times \begin{pmatrix}
 \phi_a(s) \\
 a_{mn}^- \\
 \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_{0m}}}(a)
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 A_{0m}X_{mn'}(a_{mn}^+) \\
 \left(-\overline{X_{mn'}^t}A_{0m}X_{mn'} + [\mu_m^+]\right)(a_{mn}^+) \\
 0
 \end{pmatrix}$$

$\phi_a(s)$  : Potentiel Acoustique au Sommet du Maillage

$a_{mn}^-$  : Coefficients Modaux Réfléchis

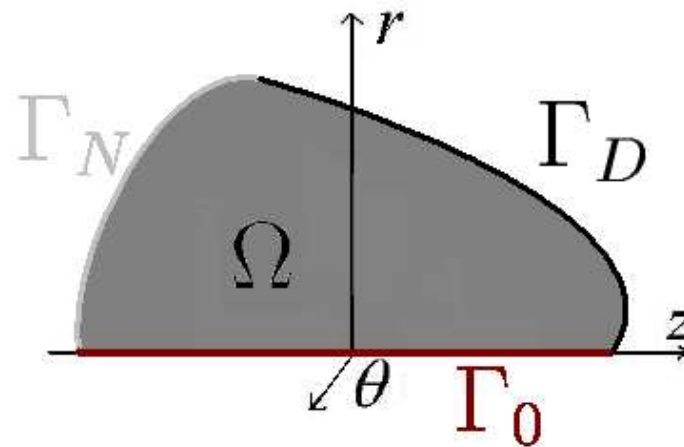
$\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_{0m}}}(a)$  : Dérivées Elliptiques par Arêtes

## Discrétisation Acoustique

- Potentiel acoustique discrétisé en éléments finis classiques continus  $H^1$ -conformes d'ordre 1.
- Maillage triangulaire non structuré.
- Matrices assemblées séparément et parallèlement.
- Condition de Dirichlet nulle sur l'axe (lignes et colonnes des degrés de liberté correspondant supprimés).
- Poids axisymétrique : quadrature de Lagrange à 10 points.
- Résolution directe du système linéaire par un complément de Schur.
- Solveur creux parallèle du CERFACS utilisé pour la matrice volumique creuse.
- Post-traitement et obtention des résultats acoustiques (décibels et SER) à partir du potentiel acoustique et des données de l'écoulement de porteur sur le maillage.

#### 4. Résultats Numériques

##### Singularité axiale : un nouvel élément fini axisymétrique



Le problème du Laplacien axisymétrique est posé dans le domaine transverse  $\Omega$  pour un second membre porté uniquement par le mode azimuthal 1 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{u}{r^2} = f(r, z), & \forall (r, z) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(r, z), & \forall (r, z) \in \Gamma_N \\ u = 0, & \forall (r, z) \in \Gamma_D \end{array} \right.$$

## Espaces Fonctionnels Axisymétriques

Ce problème est naturellement bien posé dans les espaces de Sobolev à poids axisymétrique :

$$L_a^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tel que } u^\vee \in L^2(\Omega)\}.$$

$$H_a^1(\Omega) = \{u \in L_a^2(\Omega), \text{ tel que } u_{\sqrt{\cdot}} \in L^2(\Omega), \vec{\nabla} u \in L_a^2(\Omega)\},$$

où on note  $u_{\sqrt{\cdot}}$  la fonction  $u_{\sqrt{\cdot}}(r, z) \equiv \frac{u(r, z)}{\sqrt{r}}$  et  $u^\vee$  la fonction

$u^\vee(r, z) \equiv \sqrt{r}u(r, z)$ . L'application trace notée  $\gamma_0$ , qui à  $v \in C_a^\infty(\overline{\Omega})$

(l'ensemble des restrictions à  $\Omega$  des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ ) associe ses valeurs au bord  $\gamma_0 v : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de  $H_a^1(\Omega)$  dans  $L_a^2(\partial\Omega, \partial\Omega)$ .

Toute fonction  $u \in H_a^1(\Omega)$  vérifie  $\gamma_0 u = 0$  sur l'axe. On note  $H_{0,a}^1(\Omega)$  l'espace de Hilbert tel que  $\gamma_0 u = 0$  sur  $\Gamma_D$ . Le problème se formule variationnellement :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H_{0,a}^1(\Omega), \text{ tel que : } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_{0,a}^1(\Omega), \\ &_{,a}(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v r dr dz + \int_{\Omega} uv \frac{dr dz}{r} \text{ et } \ell(v) = \int_{\Omega} f v r dr dz + \int_{\Gamma_N} g v r d\gamma. \end{aligned}$$

**Discrétisation conforme**

Nous considérons l'espace discret suivant :

$$X_{\mathcal{T}} = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}), u_{\sqrt{\cdot}}|_K \in P^1, \forall K \in \mathcal{T}^2, u|_{\Gamma_D} = 0 \right\}.$$

Une fonction  $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$  est de la forme :

$$\tilde{u}_{\mathcal{T}}(r, z) = \tilde{\alpha}\sqrt{r} + \tilde{\beta}r\sqrt{r} + \tilde{\gamma}\sqrt{r}z, \forall K \in \mathcal{T}^2,$$

Pour la formulation discrète, l'espace continu  $H_{0,a}^1(\Omega)$  est remplacé par l'espace discret  $X_{\mathcal{T}}$  et nous cherchons  $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$  tel que :

$$a(\tilde{u}_{\mathcal{T}}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in X_{\mathcal{T}}.$$

**Comparaison sur un cas-test analytique**

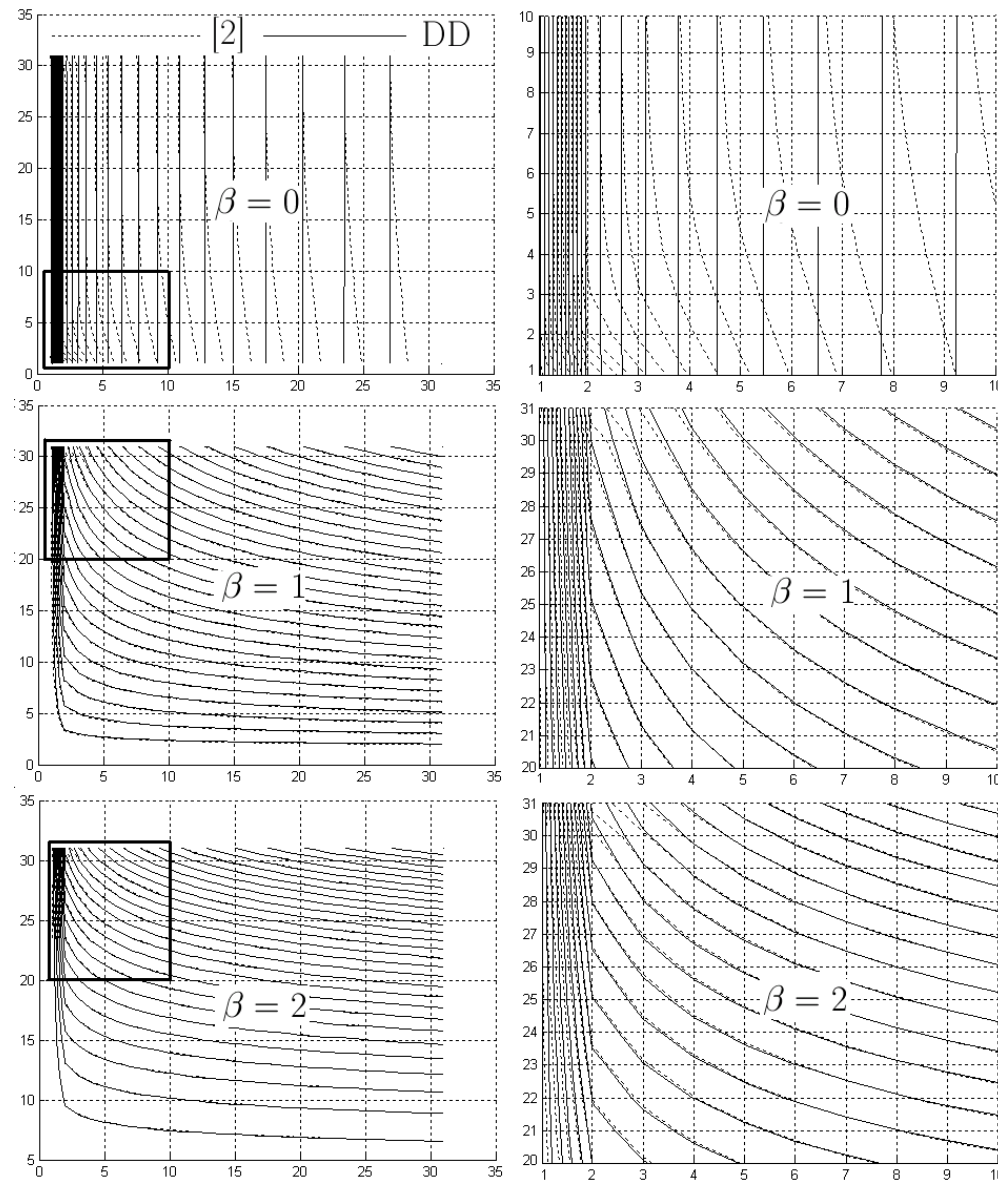
On suppose dans cette partie que  $\Omega = ]0, 1[^2$  et  $\Gamma_D = \emptyset$ . On introduit deux paramètres réels  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , un second membre  $f$  donné par :

$$f(r, z) \equiv r^\alpha \left[ (\alpha^2 - 1) \frac{z^\beta}{r^2} + \beta(\beta - 1)z^{\beta-2} \right].$$

et une donnée de Neumann  $g$  telle que  $g(r, z) = \alpha$  si  $r = 1$ ,  $-\beta r^\alpha z^{\beta-1}$  si  $z = 0$ ,  $\beta r^\alpha$  si  $z = 1$ . La solution du problème modèle s'exprime simplement :  $u(r, z) \equiv r^\alpha z^\beta$ . Nous comparons ici les résultats des deux méthodes (éléments finis  $H_{0,\alpha}^1$ -conformes et éléments finis classiques auxquels on a rajouté une condition de Dirichlet nulle sur l'axe) pour ce cas-test analytique.

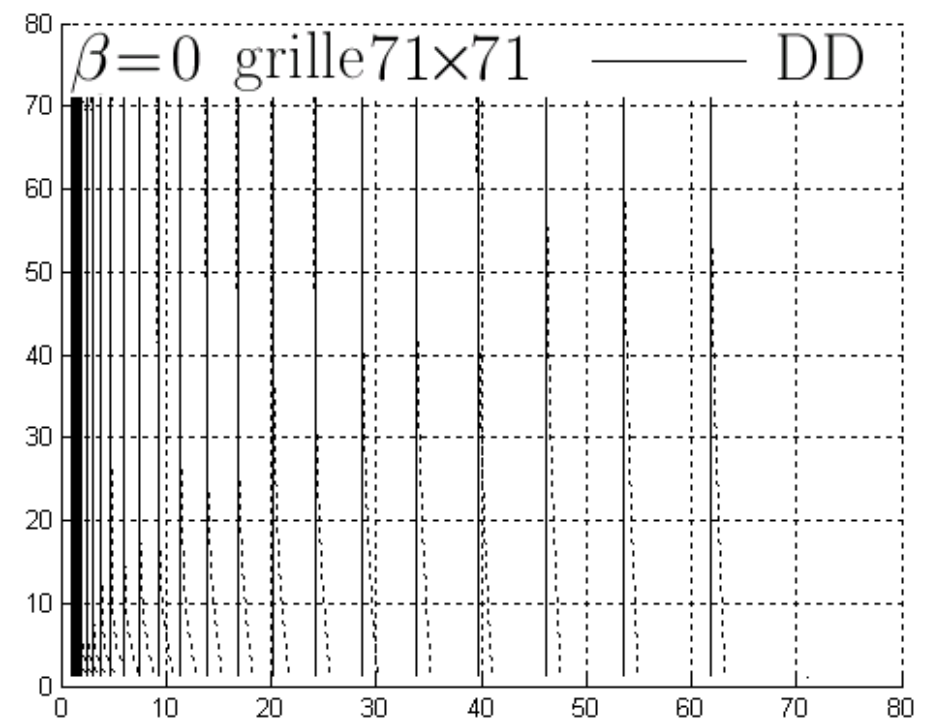
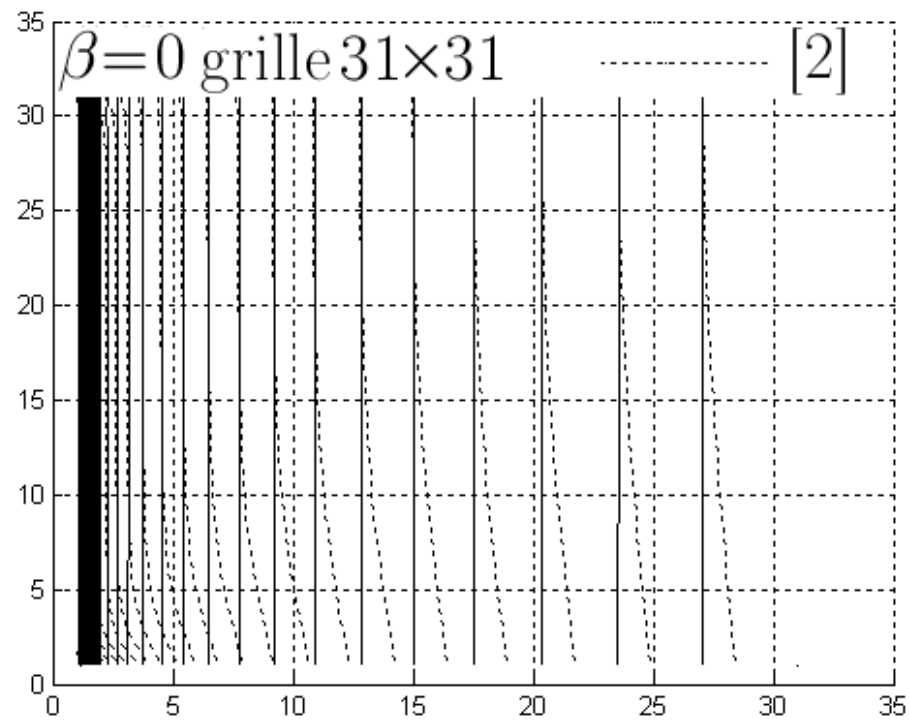
**Isovaleurs et zoom au niveau de l'axe  $u(r, z) = r^{\frac{1}{4}} z^{\beta}$ , nous comparons les isovaleurs de Mercier-Raugel, de notre approche et de la solution analytique**



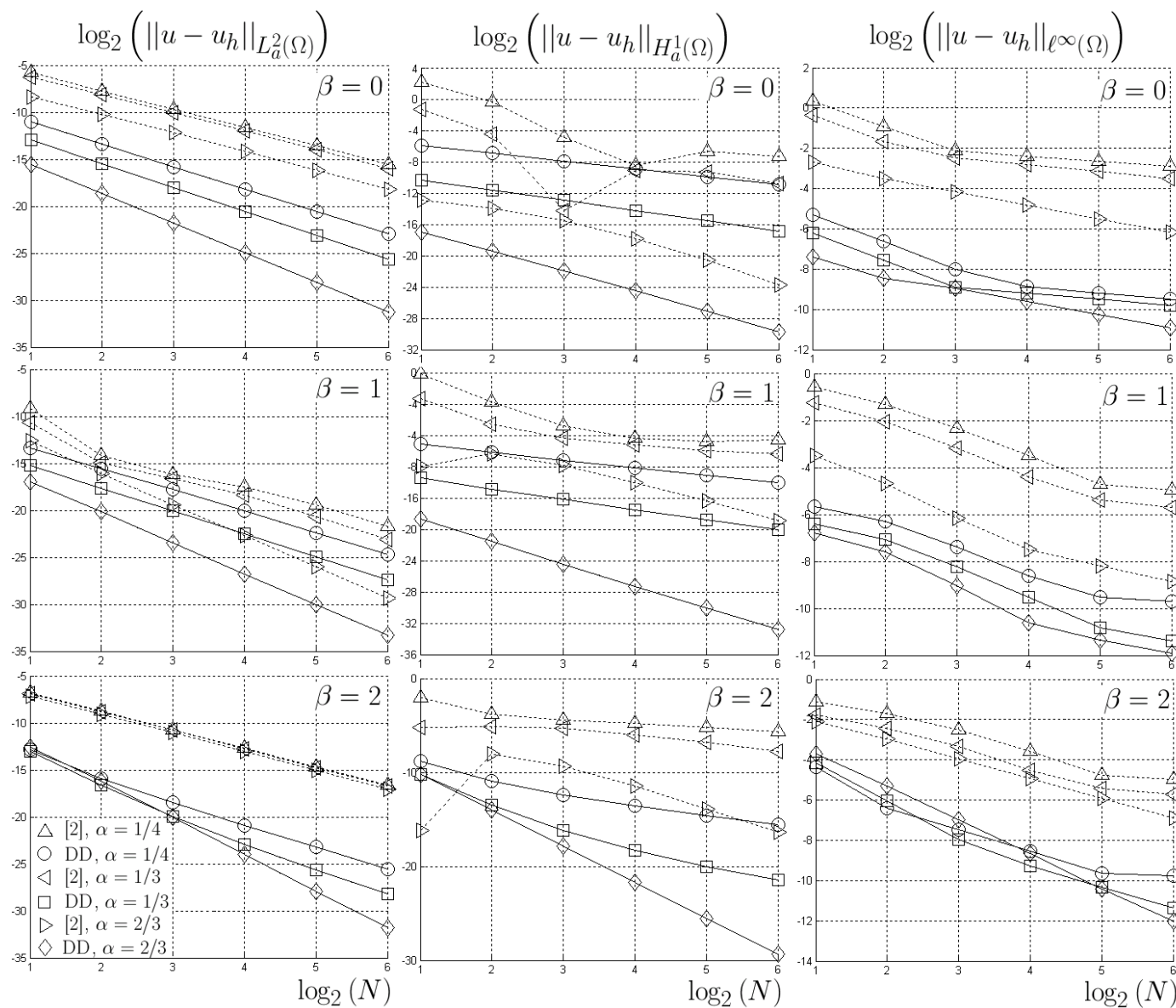


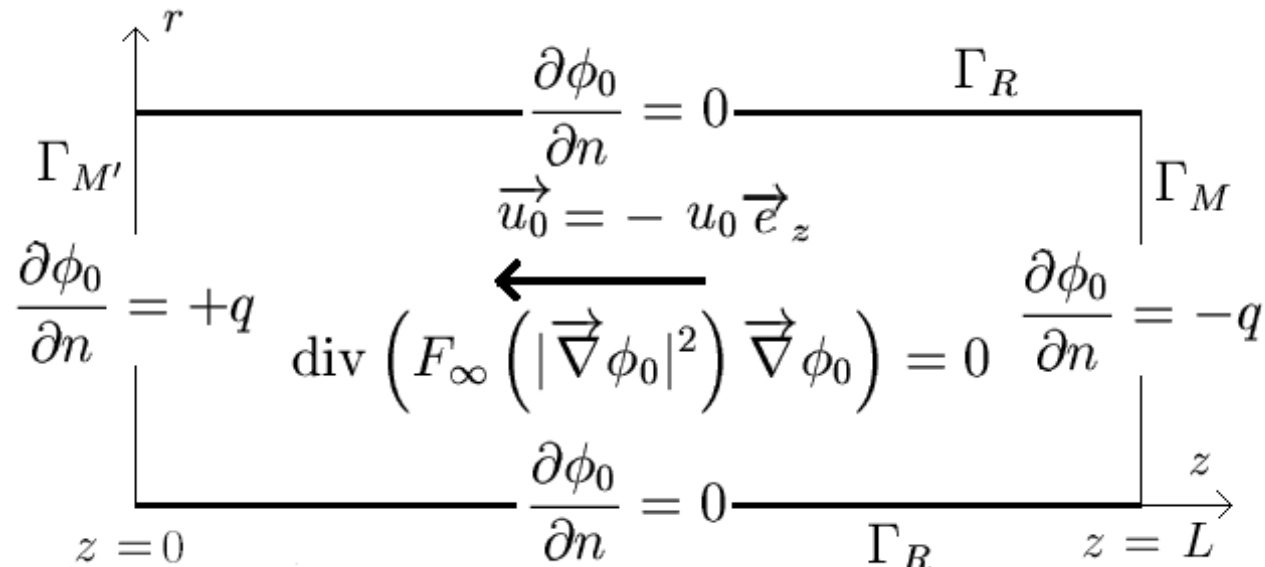
**Convergence en maillage des isovaleurs pour les deux schémas**

**$u(r, z) = r^{1/4}$ , nous comparons les résultats de Mercier-Raugel et de  
notre approche**



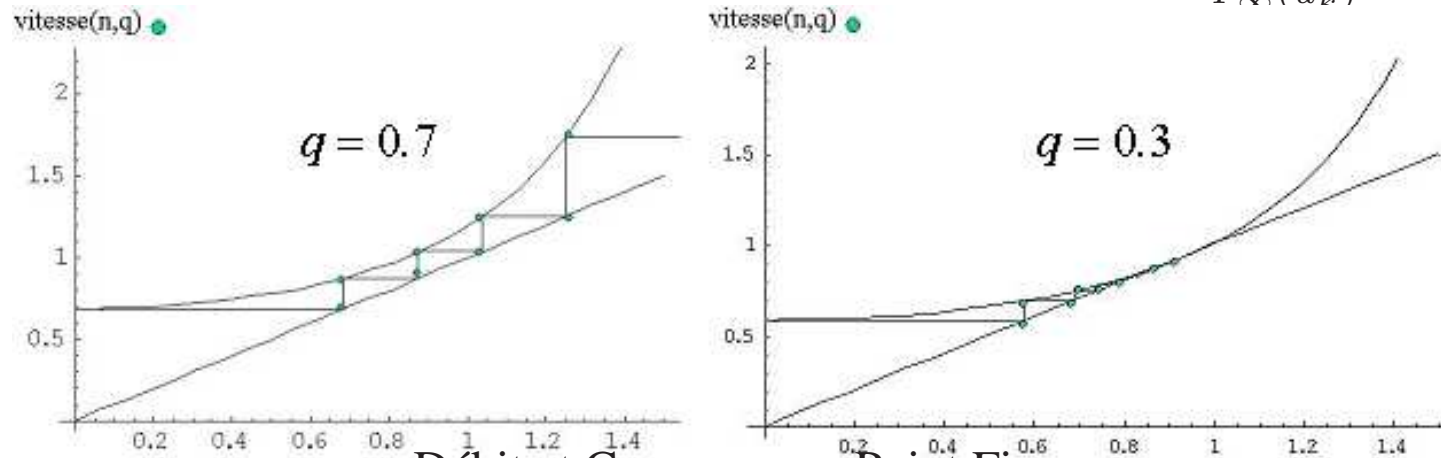
**Courbes de convergence pour diverses normes  $u(r, z) = r^\alpha z^\beta$ , nous comparons les résultats de Mercier-Raugel et notre approche**



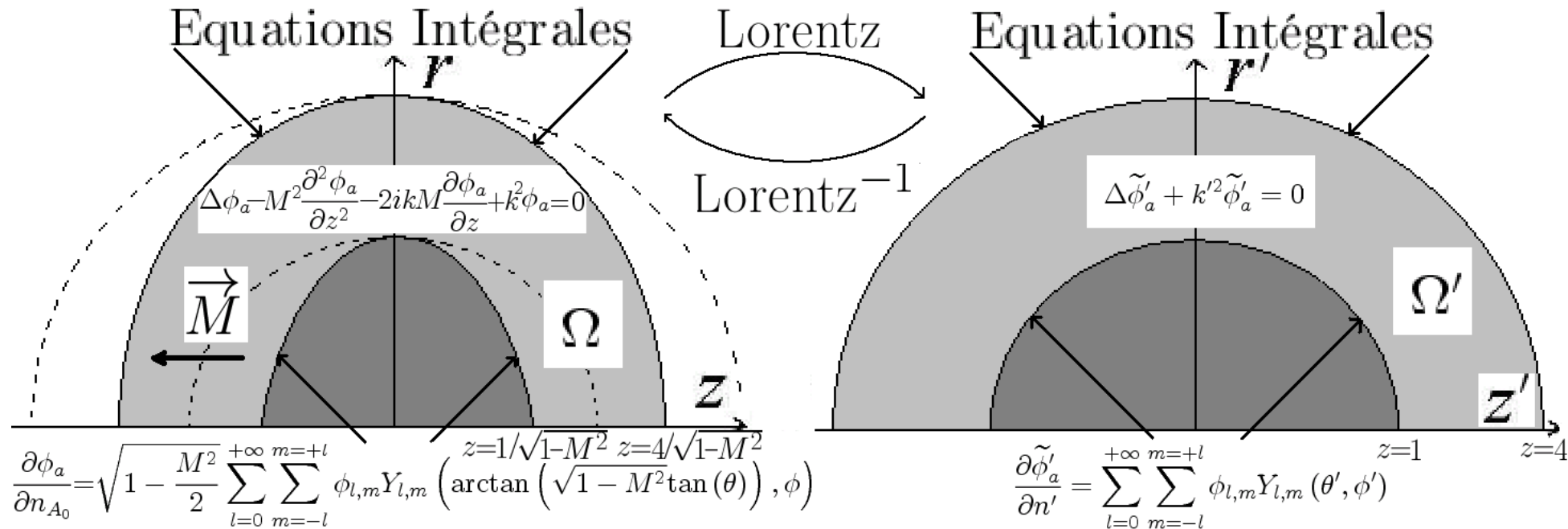


### Cas-Test Ecoulement Porteur : Conduit

Vitesse théorique à l'étape  $k + 1$  par récurrence  $u_0 = 0, u_{k+1} = \frac{q}{F_\infty(u_k)}$ .



Débit et Convergence Point Fixe



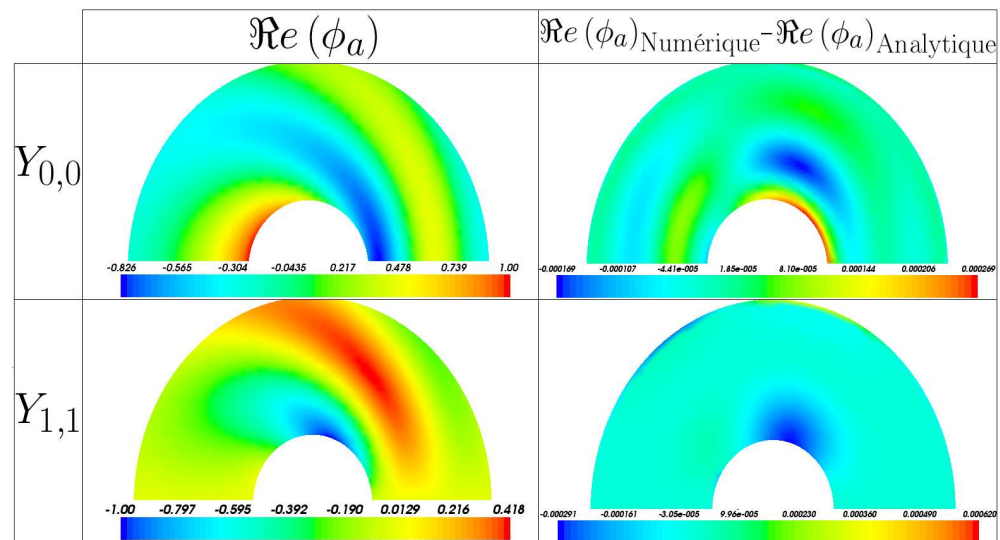
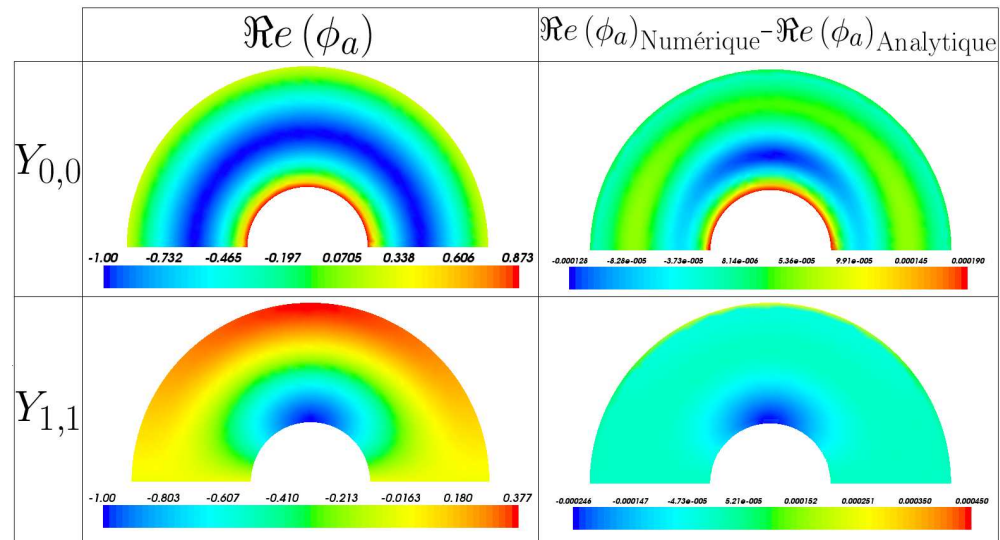
### Validation des Equations Intégrales sans Ecoulement

$$\begin{cases} \Delta \phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0 \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \sqrt{1 - \frac{M^2}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+\infty} \phi_{l,m} Y_{l,m} \left( \arctan \left( \sqrt{1 - M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right) \end{cases}$$

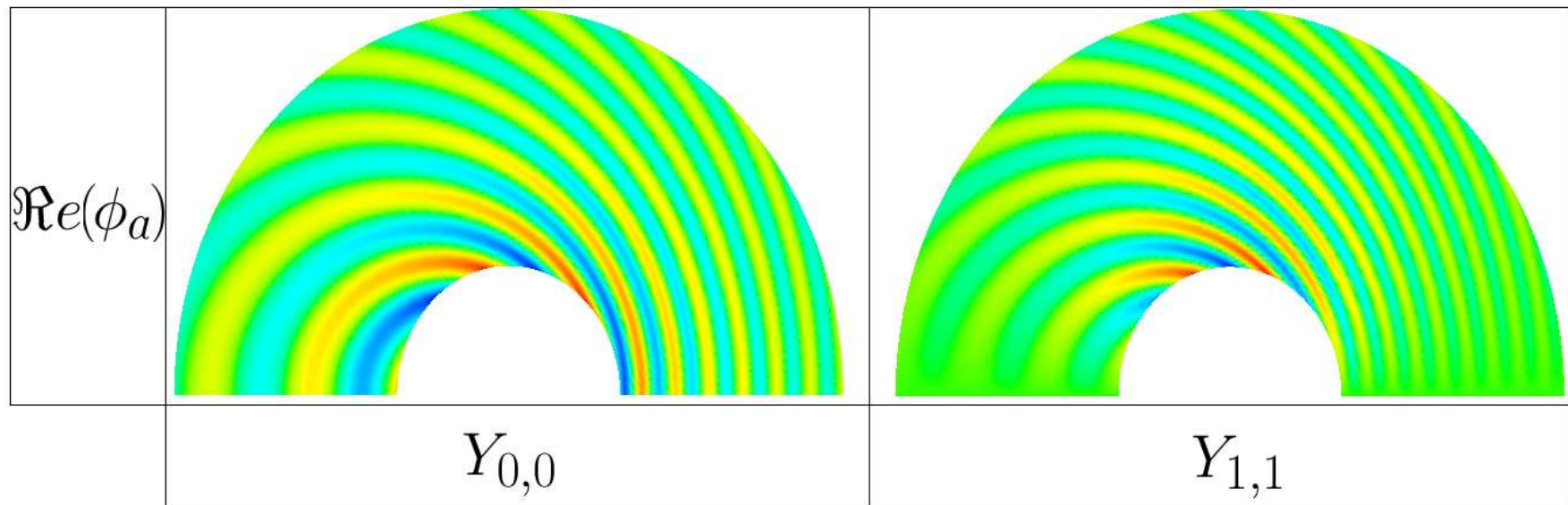
$$\phi_a = \sum_{l,m} \phi_{l,m} \frac{h_l^{(1)}(k' r')}{k' \left[ \frac{d}{dr'} h_l^{(1)} \right] (k')} (r') Y_{l,m} \left( \arctan \left( \sqrt{1 - M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right) e^{\frac{ik' M z}{\sqrt{1 - M^2}}}$$

Nous présentons les résultats (champ de la partie réelle du potentiel acoustique) pour un nombre de Mach nul et constant de 0,3 du cas-test analytique précédent pour  $kR = 2$  et pour les conditions de Neumann  $Y_{0,0}$  et  $Y_{1,1}$ . Les solutions sont renormalisées par leur maximum. L'erreur relative à la solution analytique sur le maillage est exhibée dans chaque cas.





Nous présentons les résultats pour un nombre de Mach constant de 0,3 du cas-test analytique précédent pour  $kR = 15$  et pour les conditions de Neumann  $Y_{0,0}$  et  $Y_{1,1}$ .



# Validation des Conditions Modales : Tube d'Aspirine

$$\frac{\partial (\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n_{A_0}} = T_M (\phi_a - \phi_{a,inc})$$

$$a_{m'n'}^+ = 1$$

$$a_{mn}^-$$

$$\Delta \phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0$$

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ \Delta \phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial (\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n_{A_0}} = T_M (\phi_a - \phi_{a,inc}) \quad \forall x \in \Gamma_M, \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = 0 \quad \forall x \in \Gamma_R \end{array} \right.$$

Le coefficient modal de retour pour un mode  $m'n'$  :  $\beta = e^{2i \frac{\sqrt{k^2 - (1-M^2)k^2_{rm'n'}}}{1-M^2} L}$ .

## Coefficients Modaux Sans Ecoulement

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = L \\ k = \pi \\ f = \frac{a}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \beta = 1.$$

$$THEORIE \quad F(1, 1) = 1.$$

$$PA2R \quad F(1, 1) = 9.99966 \times 10^{-1} - i8.23800 \times 10^{-3}$$

$$ACTI3S \quad F(1, 1) = 1.00056 \times 10^{-1} - i1.63131 \times 10^{-3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 16L \\ k = \frac{\pi}{16} \\ f = \frac{a}{32} \end{array} \right. \Rightarrow \beta = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$THEORIE \quad F(1, 1) = 7.07106 \times 10^{-1} + i7.07106 \times 10^{-1}$$

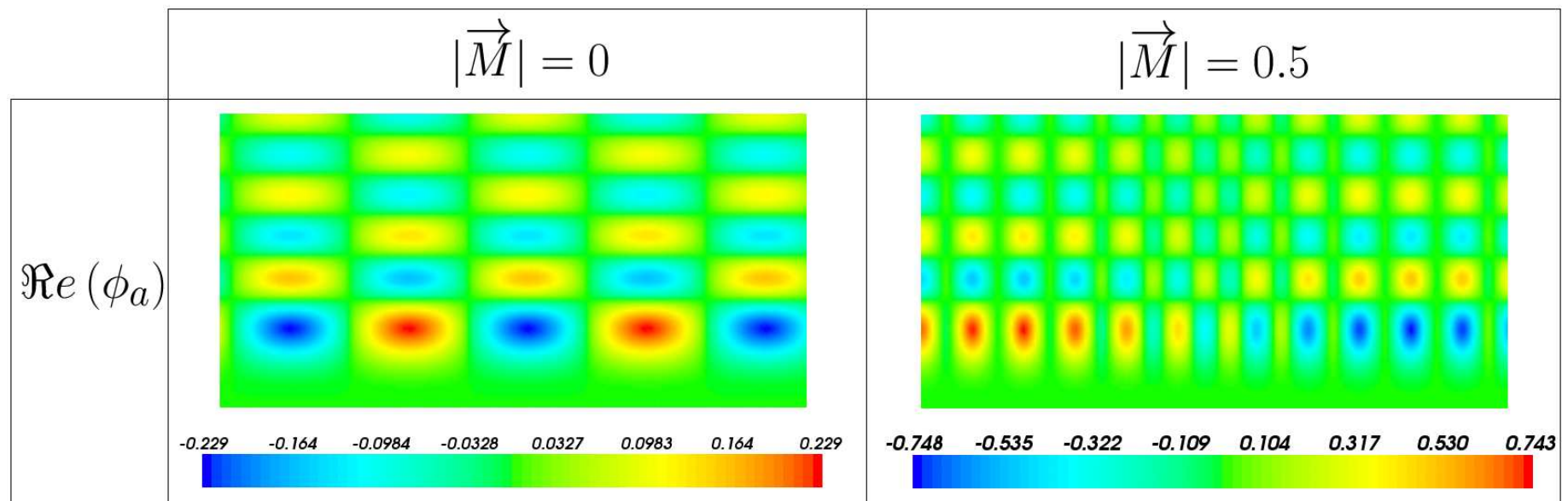
$$PA2R \quad F(1, 1) = 7.07110 \times 10^{-1} + i7.07102 \times 10^{-1}$$

$$ACTI3S \quad F(1, 1) = 7.07520 \times 10^{-1} + i7.07899 \times 10^{-1}$$

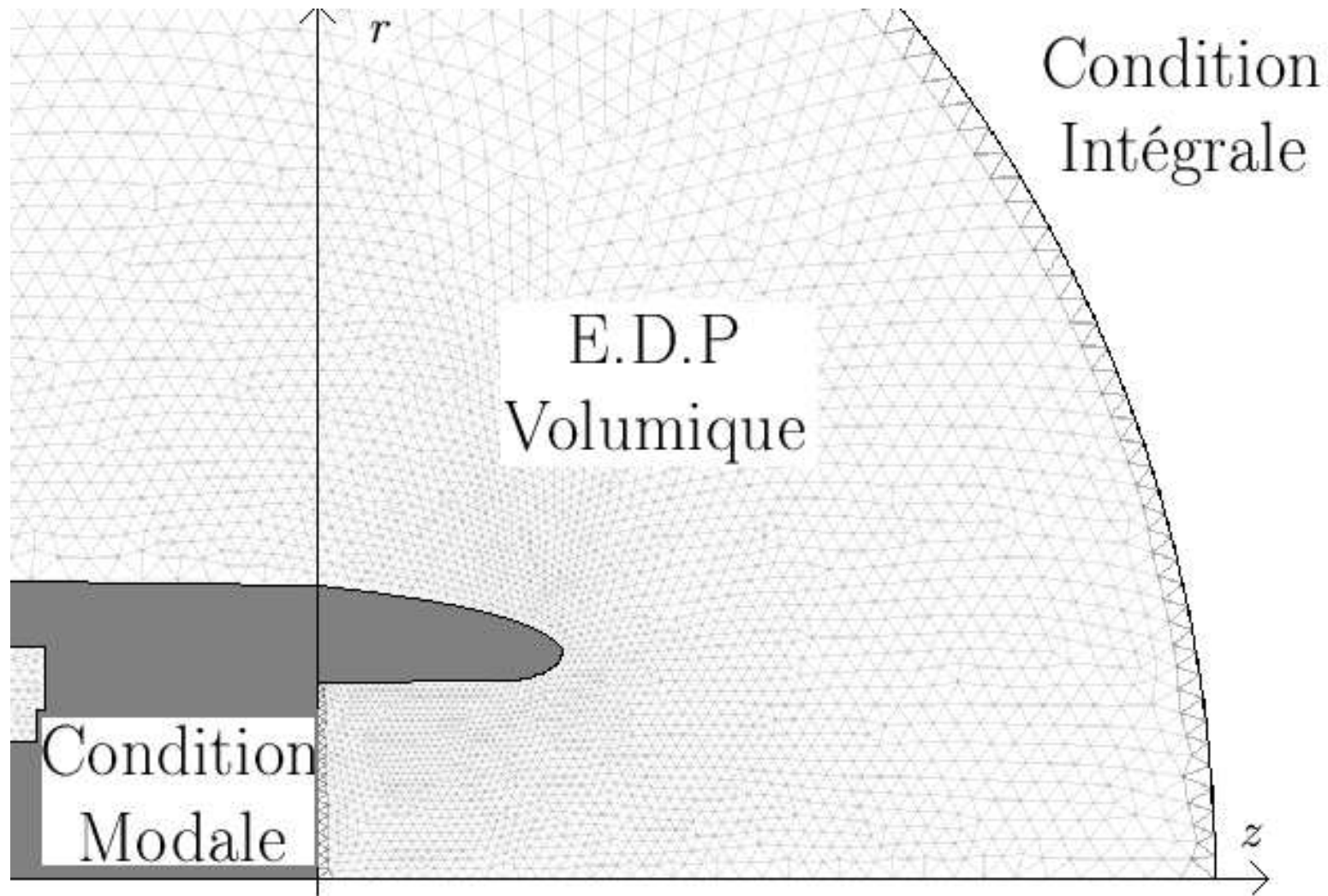
## Coefficients Modaux Avec Ecoulement

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 8L \\ k = \frac{\pi}{8} \\ f = \frac{a}{16} \\ M = 0.1 \end{array} \right. \Rightarrow \beta = e^{i \frac{\pi}{2(1-M^2)}} \\
 \text{THEORIE} \quad F(1, 1) = -1.58659 \times 10^{-2} + i9.998741 \times 10^{-1} \\
 \text{PA2R} \quad F(1, 1) = -1.58658 \times 10^{-2} + i9.998745 \times 10^{-1} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 16L \\ k = \frac{\pi}{16} \\ f = \frac{a}{32} \\ M = 0.1 \end{array} \right. \Rightarrow \beta = e^{i \frac{\pi}{4(1-M^2)}} \\
 \text{THEORIE} \quad F(1, 1) = 7.01474 \times 10^{-1} + i7.12694 \times 10^{-1} \\
 \text{PA2R} \quad F(1, 1) = 7.01479 \times 10^{-1} + i7.12689 \times 10^{-1}
 \end{array}$$

On présente ici les résultats du cas-test précédent (champ de la partie réelle du potentiel acoustique) pour un nombre de Mach nul et constant de 0,3 pour le mode  $m = 5, n = 5$  et pour  $kR = 6\pi$ . Les modes sont renormalisés par leur flux d'énergie.







**Problème Général**

**Validation Comparative Ecoulement Nul**

$$\text{PA2R, m=0, n=0} \left\{ \begin{array}{lll} 6085 & \text{ddls} & -2.00150 \times 10^{-1} - i 9.09183 \times 10^{-2} \\ 23123 & \text{ddls} & -1.99342 \times 10^{-1} - i 9.24564 \times 10^{-2} \\ 86752 & \text{ddls} & -1.99844 \times 10^{-1} - i 9.36297 \times 10^{-2} \end{array} \right.$$

$$\text{ACTI3S, m=0, n=0} \left\{ \begin{array}{lll} 17137 & \text{ddls} & -1.99854 \times 10^{-1} - i 9.35946 \times 10^{-2} \\ 62455 & \text{ddls} & -1.99837 \times 10^{-1} - i 9.36477 \times 10^{-2} \\ 226747 & \text{ddls} & -1.99837 \times 10^{-1} - i 9.36477 \times 10^{-2} \end{array} \right.$$

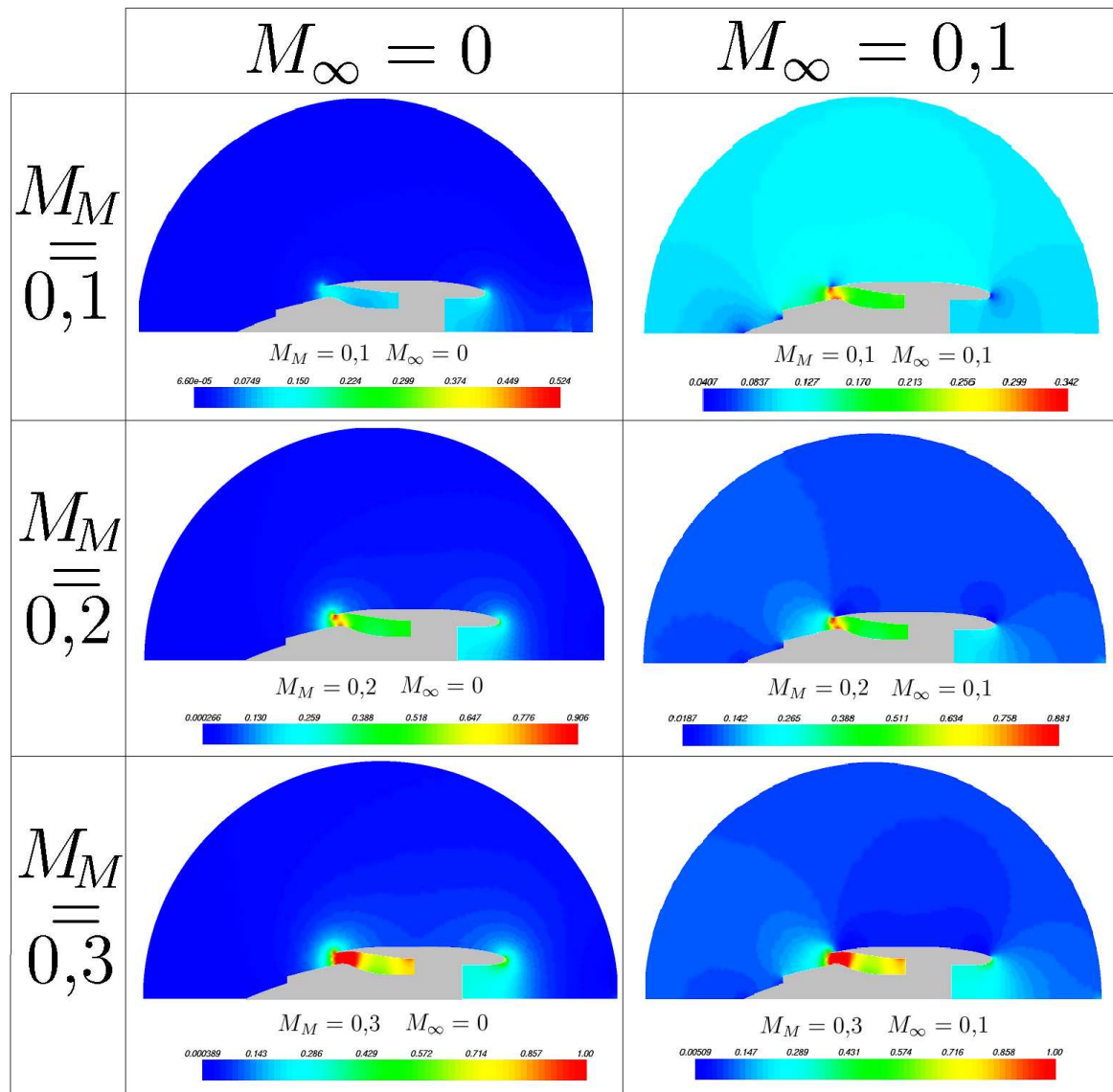
$$\text{PA2R, m=1, n=0} \left\{ \begin{array}{lll} 6085 & \text{ddls} & 6.35537 \times 10^{-1} - i 4.76084 \times 10^{-1} \\ 23123 & \text{ddls} & 6.57412 \times 10^{-1} - i 4.73512 \times 10^{-1} \\ 86752 & \text{ddls} & 6.64245 \times 10^{-1} - i 4.76292 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

$$\text{ACTI3S, m=1, n=0} \left\{ \begin{array}{lll} 17137 & \text{ddls} & 6.29812 \times 10^{-1} - i 4.76084 \times 10^{-1} \\ 62455 & \text{ddls} & 6.64129 \times 10^{-1} - i 4.76151 \times 10^{-1} \\ 226747 & \text{ddls} & 6.65324 \times 10^{-1} - i 4.76121 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

**Validation Comparative Ecoulement Constant  $M = 0.1$** 

PA2R, m=0, n=0	{	6085	ddls	$-1.92695 \times 10^{-1} - i 1.01288 \times 10^{-1}$
		23123	ddls	$-1.92537 \times 10^{-1} - i 1.02264 \times 10^{-1}$
		86752	ddls	$-1.92143 \times 10^{-1} - i 1.02926 \times 10^{-1}$
ACTI3S, m=0, n=0	{	17137	ddls	$-1.92133 \times 10^{-1} - i 1.02915 \times 10^{-1}$
		62455	ddls	$-1.92111 \times 10^{-1} - i 1.02967 \times 10^{-1}$
		226747	ddls	$-1.92111 \times 10^{-1} - i 1.02967 \times 10^{-1}$
PA2R, m=1, n=0	{	6085	ddls	$6.67034 \times 10^{-1} - i 4.08839 \times 10^{-1}$
		23123	ddls	$6.89210 \times 10^{-1} - i 4.08321 \times 10^{-1}$
		86752	ddls	$6.92364 \times 10^{-1} - i 4.09234 \times 10^{-1}$
ACTI3S, m=1, n=0	{	17137	ddls	$6.62946 \times 10^{-1} - i 4.05877 \times 10^{-1}$
		62455	ddls	$6.96835 \times 10^{-1} - i 4.09237 \times 10^{-1}$
		226747	ddls	$6.93515 \times 10^{-1} - i 4.09432 \times 10^{-1}$

Les résultats des nombres de Mach de l'écoulement porteur sont présentés ci-dessus pour deux valeurs du Mach à l'infini :  $M_\infty = 0$  et  $M_\infty = 0,1$  et pour trois valeurs des nombres de Mach au moteur :  $M_M = 0,1$ ,  $M_M = 0,2$  et  $M_M = 0,3$ .

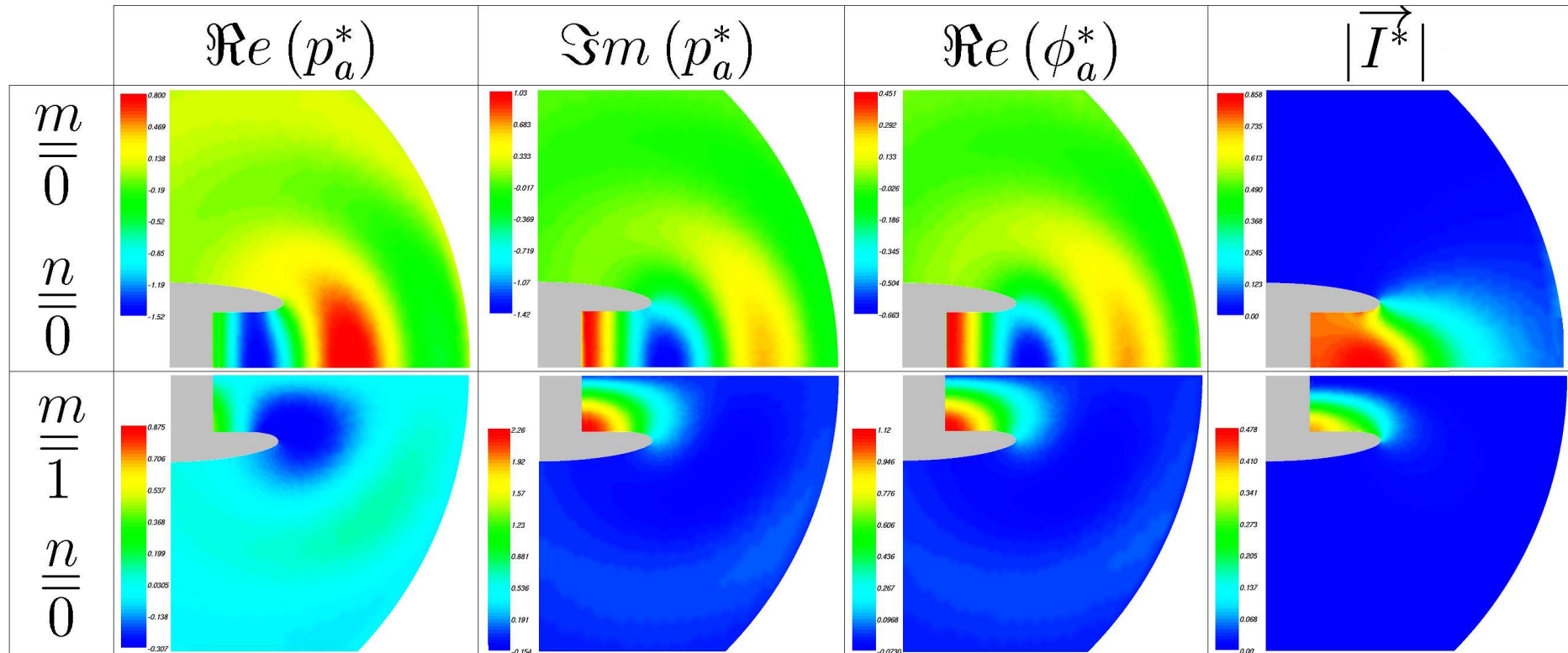


La figure ci-après présente la partie réelle et imaginaire de la pression acoustique adimensionnée ( $\Re(p_a^*)$  et  $\Im(p_a^*)$ ) se propageant sur un écoulement potentiel  $M_M = 0, 1$  et  $M_\infty = 0, 1$ . Les résultats sont présentés pour le mode non singulier  $m = 0, n = 0$  et pour le mode singulier  $m = 1, n = 0$ .

La pression acoustique complexe s'obtient à partir du potentiel acoustique complexe :  $p_a = -\rho_0(-i\omega\phi_a + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}\phi_a)$ .

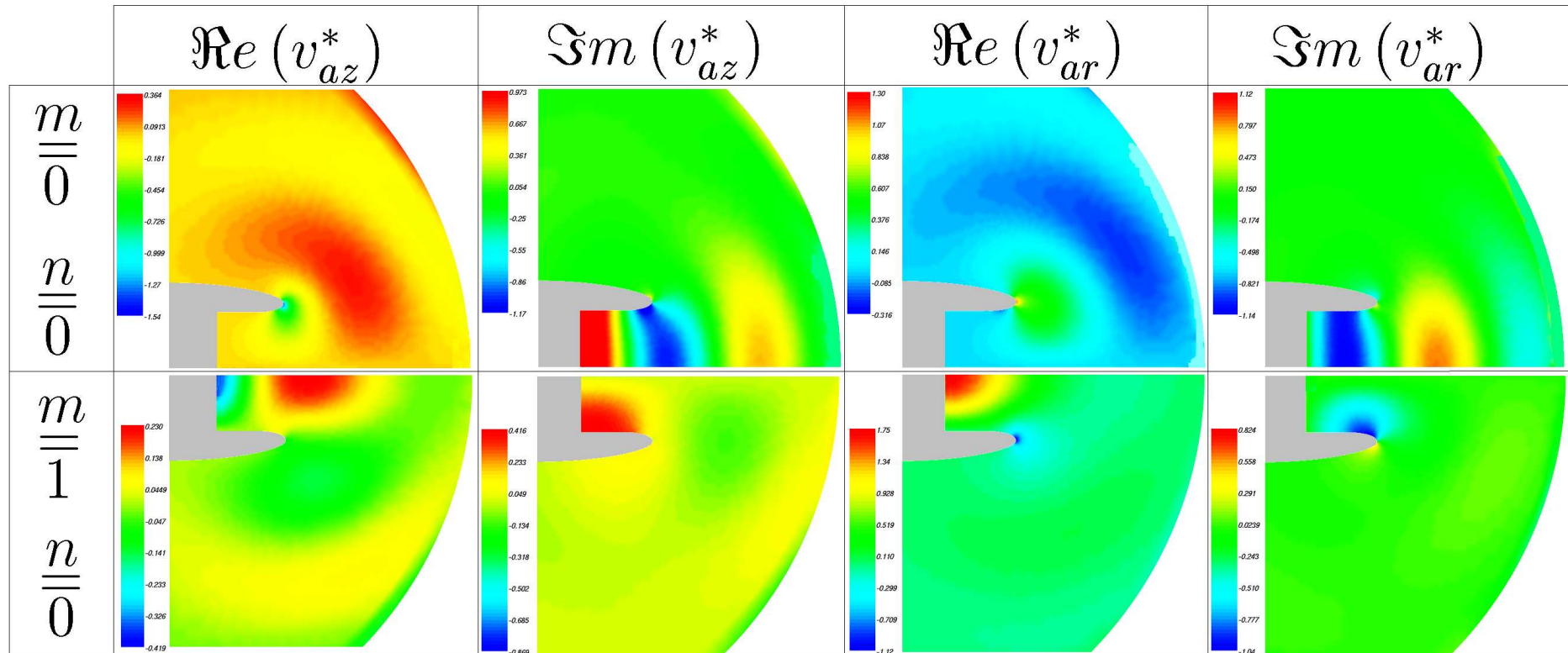
La dernière colonne présente  $|\vec{I}^*|$ , où  $\vec{I}^*$  désigne le vecteur réel :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \rho_0 |\vec{v}_a|^2 + \frac{|p_a|^2}{2\rho_0 a_0^2} \right) \vec{v}_0 + \frac{1}{4} \left( p_a \vec{\overline{v}_a} + \overline{p_a} \vec{v}_a \right)$$

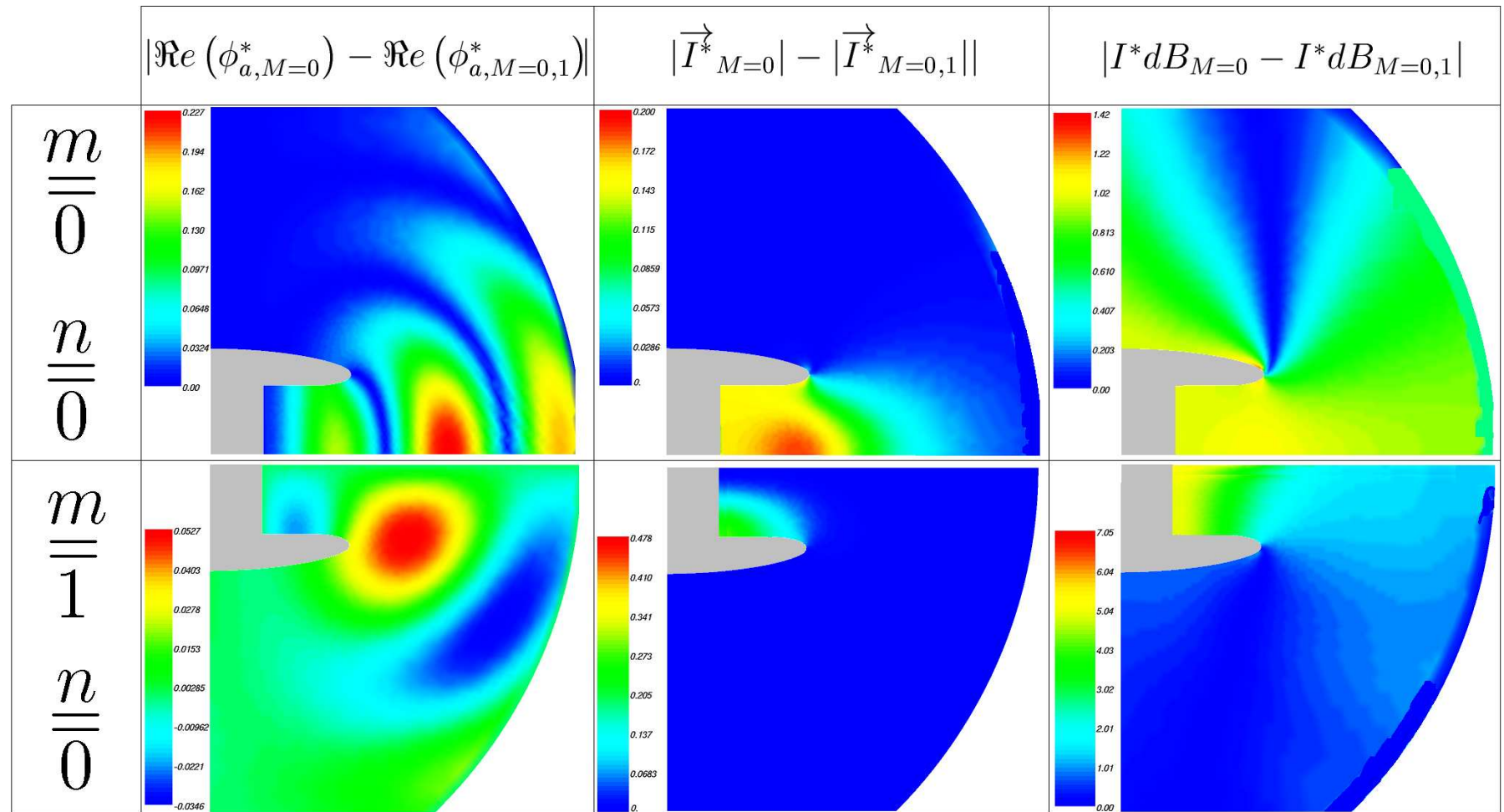


La figure ci-après présente les parties réelles et imaginaires des vitesses acoustiques radiales et axiales ( $\Re(v_{az}^*)$ ,  $\Im(v_{az}^*)$ ,  $\Re(v_{ar}^*)$  et  $\Im(v_{ar}^*)$ ) se propageant sur un écoulement potentiel  $M_M = 0, 1$  et  $M_\infty = 0, 1$ . Les résultats sont présentés pour le mode non singulier  $m = 0, n = 0$  et pour le mode singulier  $m = 1, n = 0$ .





La figure ci-après détaille la comparaison de la propagation acoustique sur un écoulement porteur nul et la propagation acoustique sur un écoulement porteur de Mach constant 0, 1. Les résultats sont présentés pour le mode non singulier  $m = 0, n = 0$  et pour le mode singulier  $m = 1, n = 0$ .

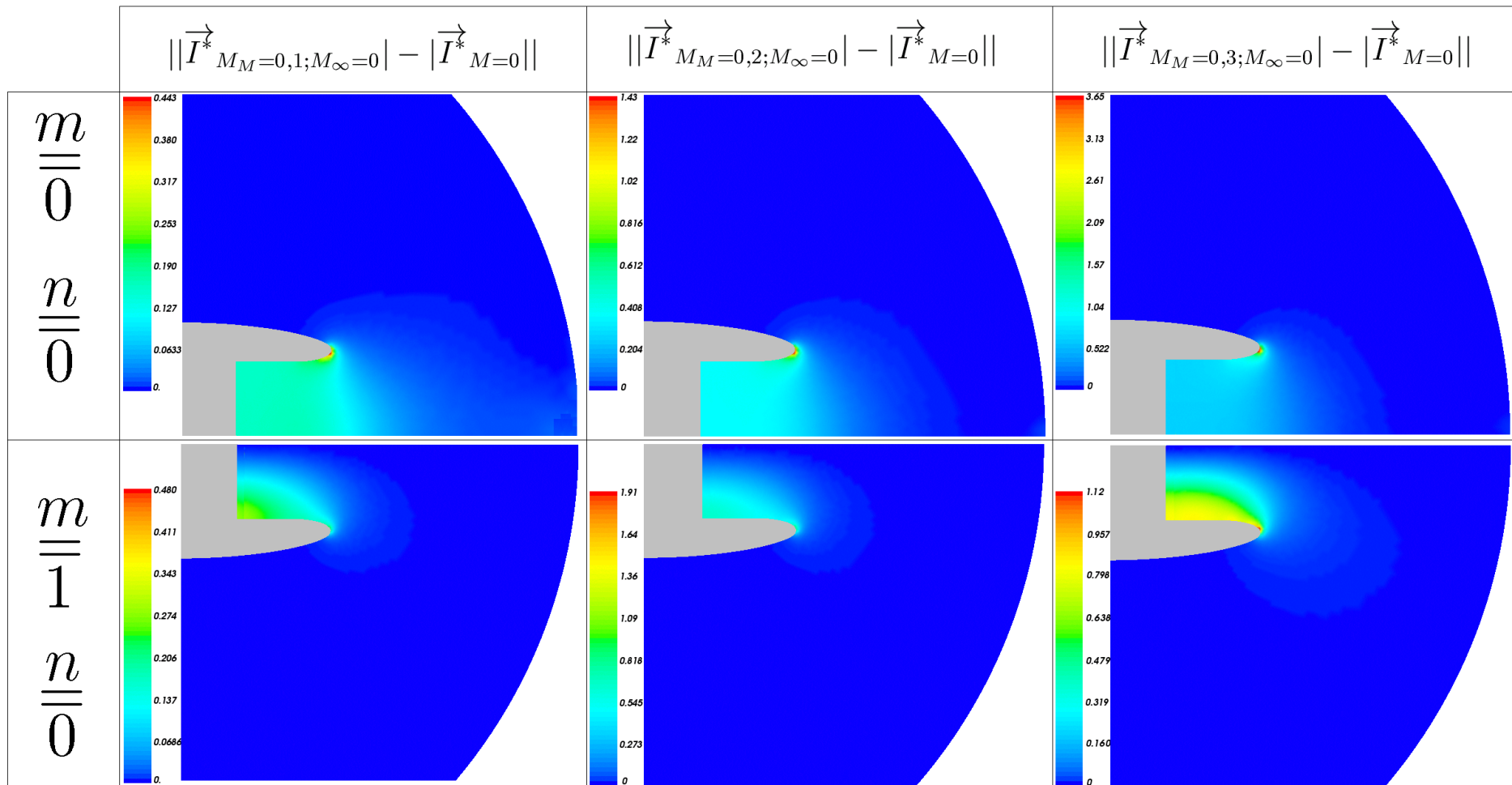


Les figures ci-après détaillent les effets de l'écoulement potentiel et son accélération à la nacelle sur la propagation de l'intensité du bruit. Les comparaisons s'effectuent par rapport à la référence canonique de l'écoulement constant égal au Mach à l'infini.

Les comparaisons sont réalisés pour un Mach à l'infini nul et égal à 0,1 ; et pour un Mach au moteur de 0,1-0,2-0,3.

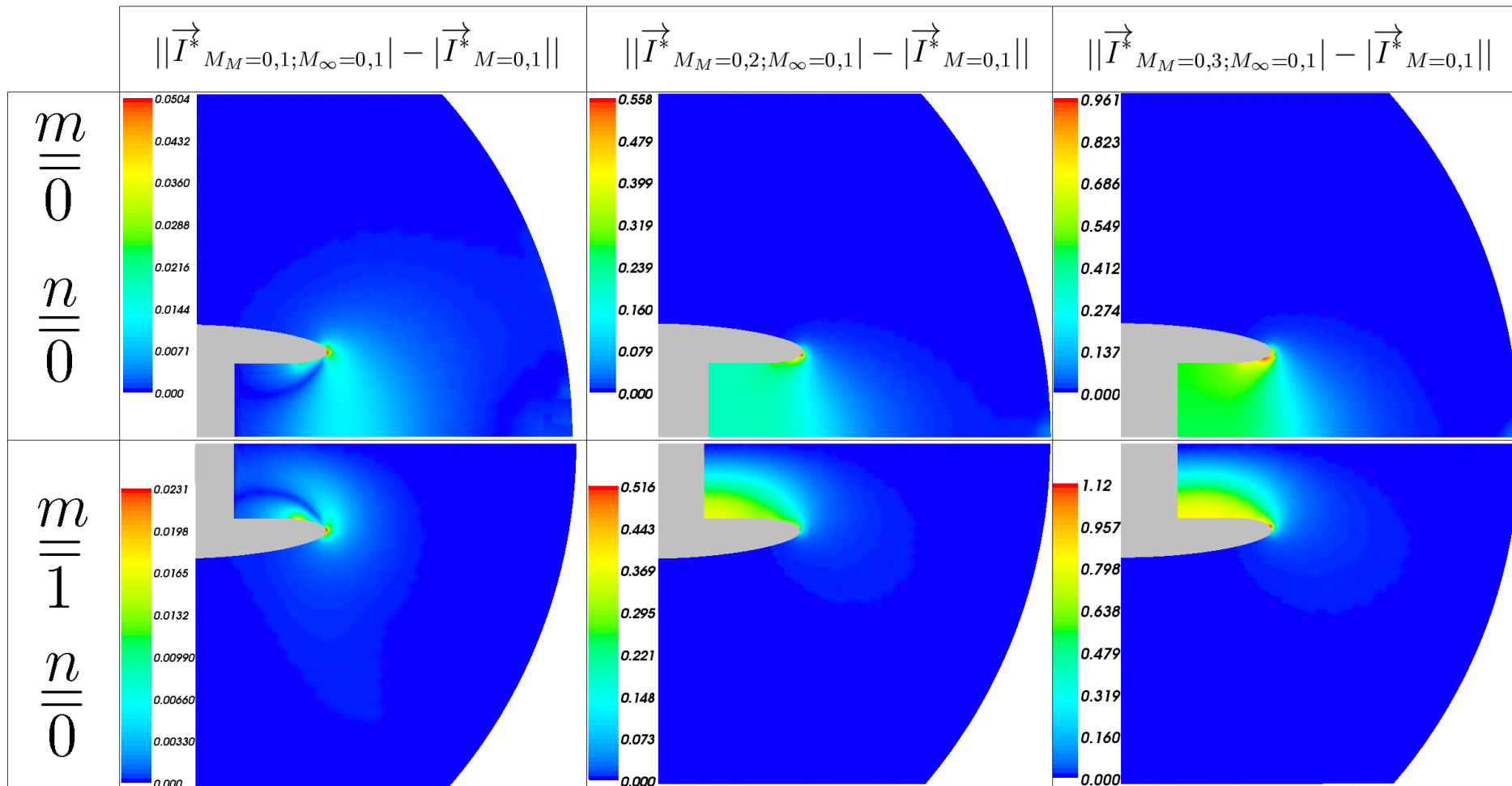
Les résultats sont présentés pour le mode non singulier  $m = 0, n = 0$  et pour le mode singulier  $m = 1, n = 0$ .

L'intensité physique adimensionnée est comparée dans un premier temps, puis les résultats sont transcrits en décibels (quantité physique pertinente pour l'être humain).

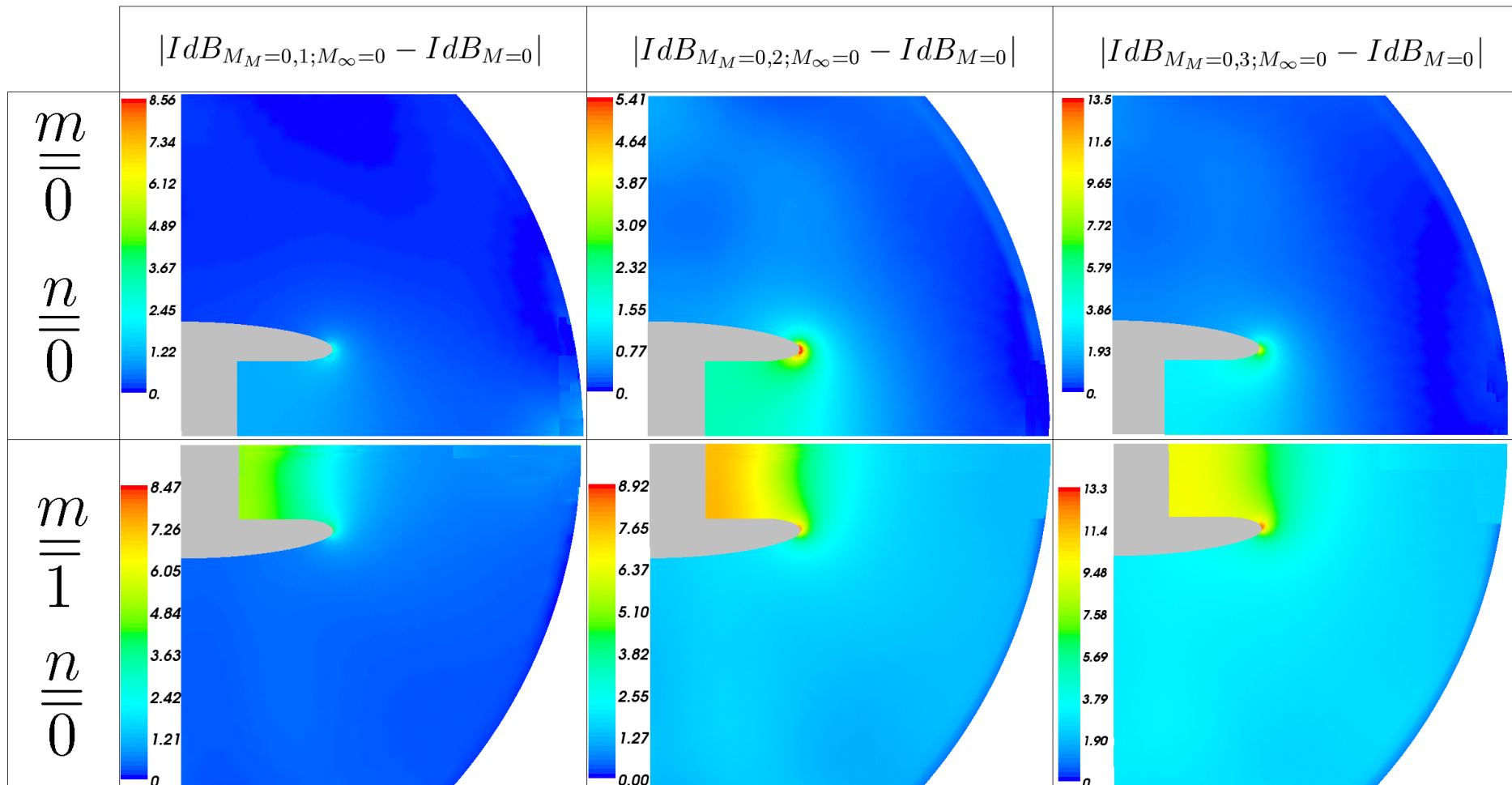


Intensité adimensionnée,  $M_\infty = 0$

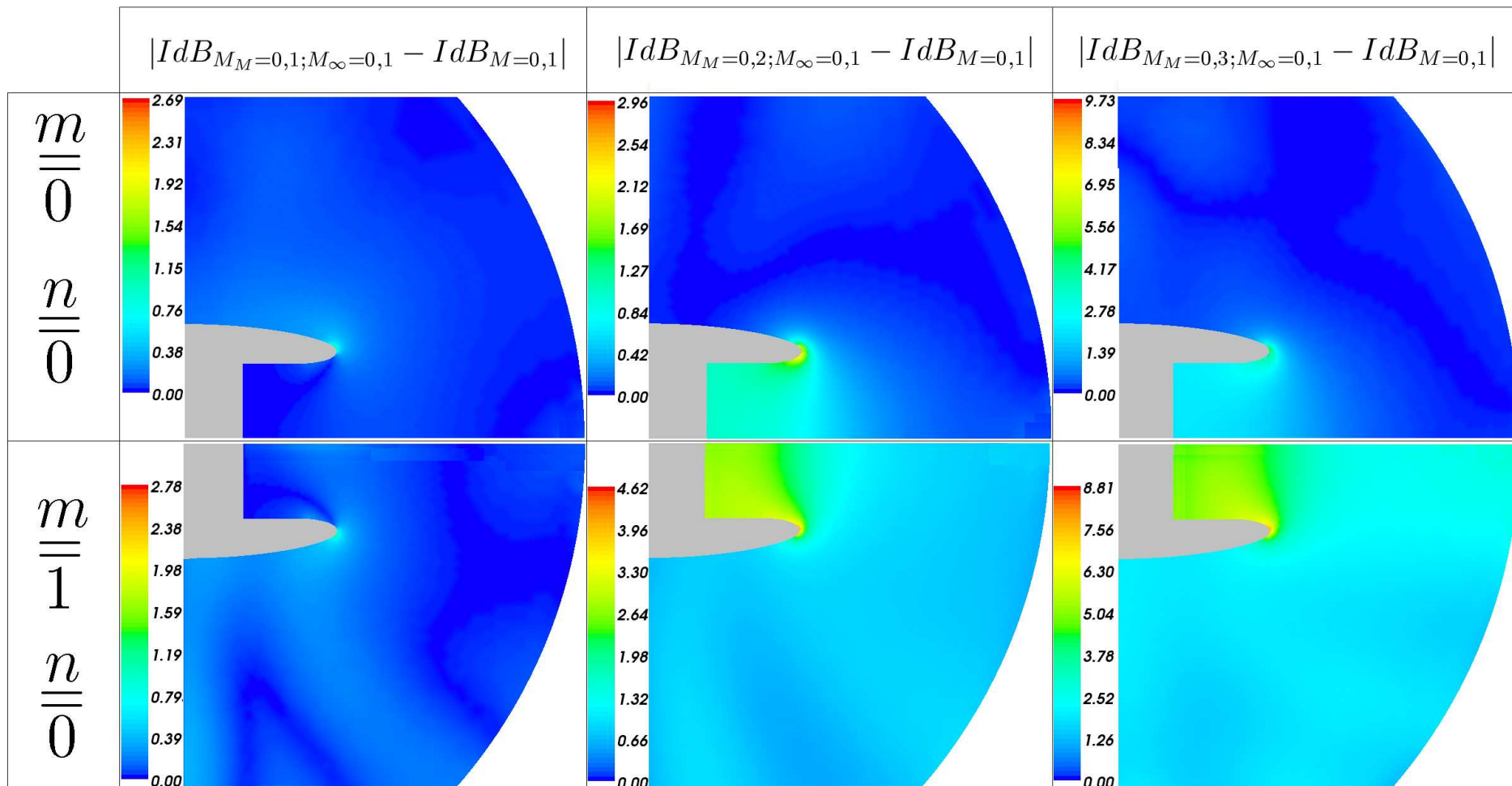




Intensité adimensionnée,  $M_\infty = 0, 1$



Intensité en décibels,  $M_\infty = 0$



Intensité en décibels,  $M_\infty = 0, 1$



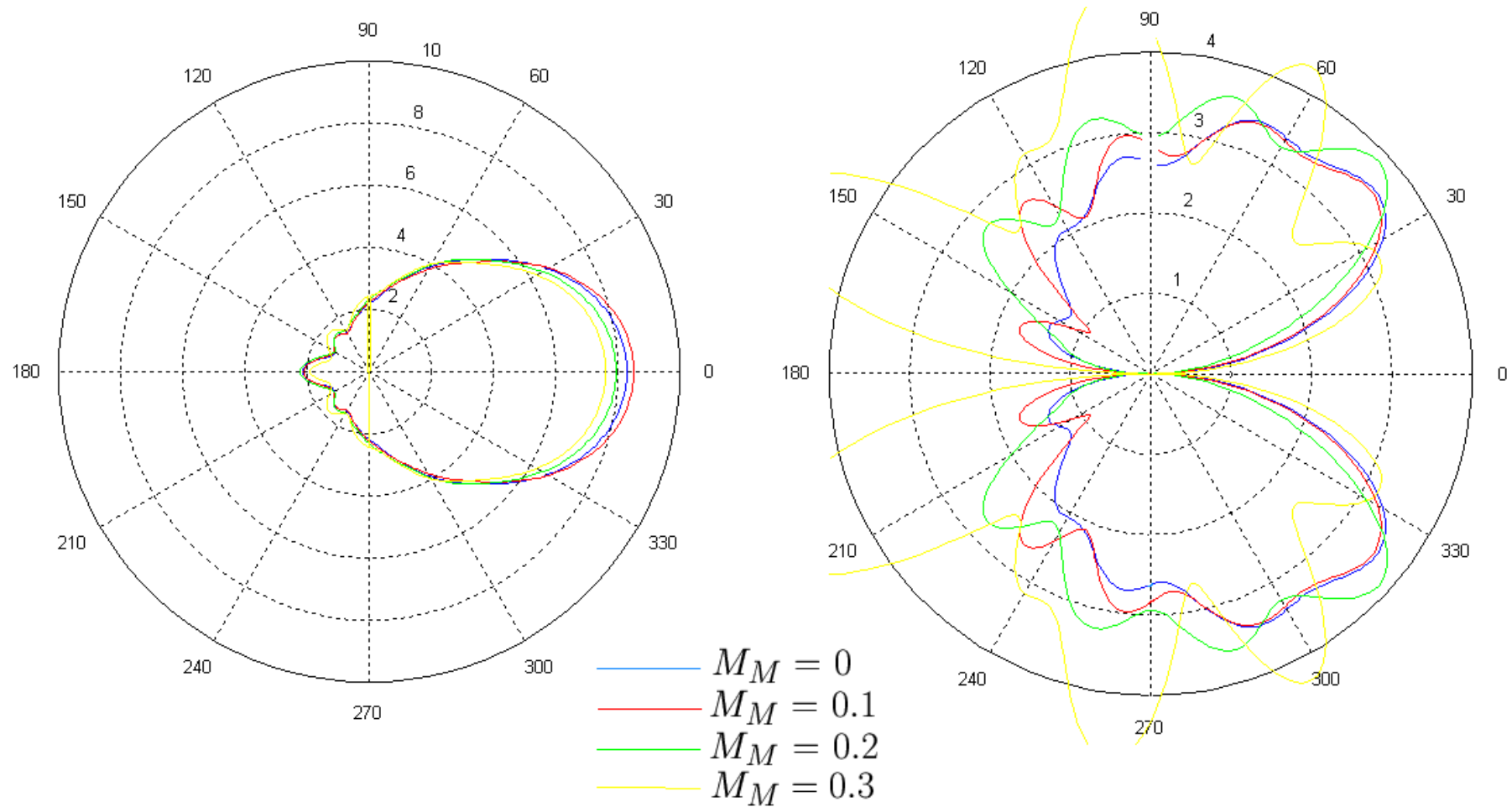
Nous présentons ci-après les diagrammes de rayonnement, qui détaillent l'effet de l'écoulement potentiel sur la directivité du son à une longue distance de l'avion.

Ces diagrammes sont présentés dans le référentiel galiléen de l'avion.

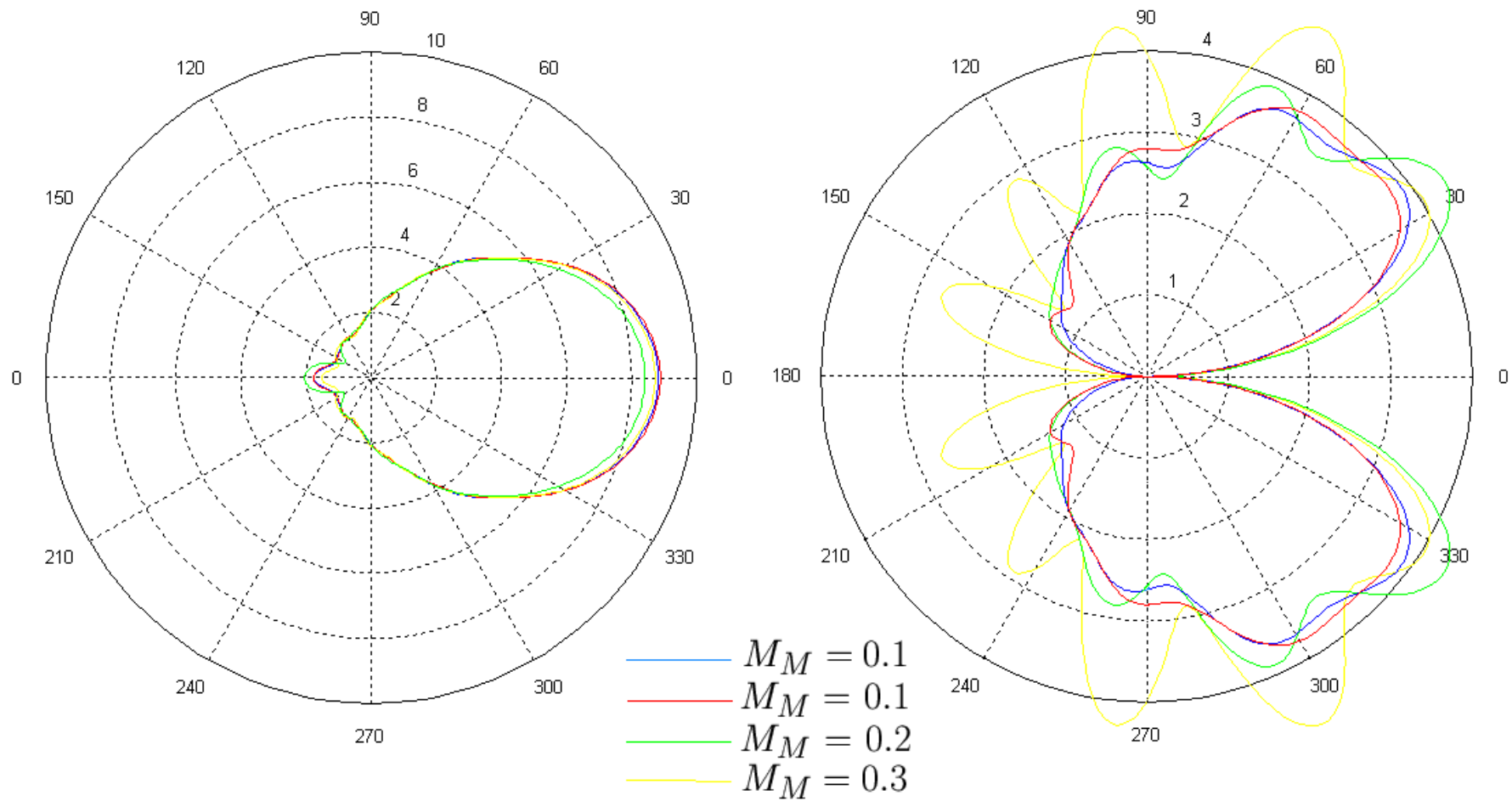
Le rayonnement de l'avion dans un référentiel fixe se déduit *via* une transformation algébrique de Galilée (effet Doppler).

Les résultats sont présentés sous forme de courbe polaire du module  $|A(\theta)|$  en fonction de  $\theta$ .

On ne présente pas la classique SER du fait de l'adimensionnement des variables physiques : seul la différence du logarithme des courbes présentées pour un même Mach infini peut s'interpréter en vrais décibels physiques.

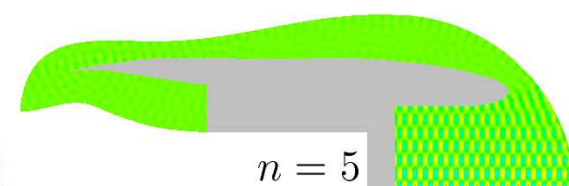
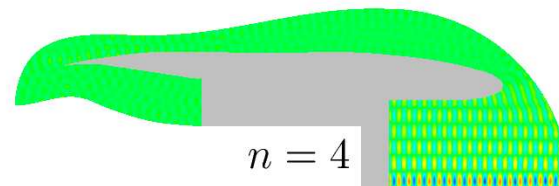
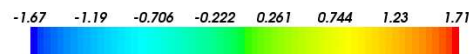
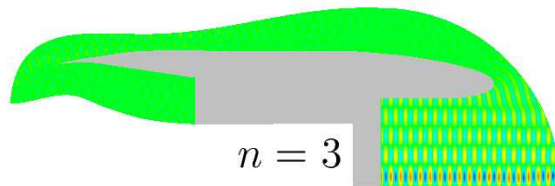
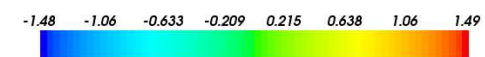
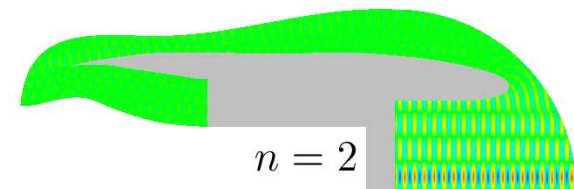
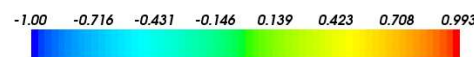
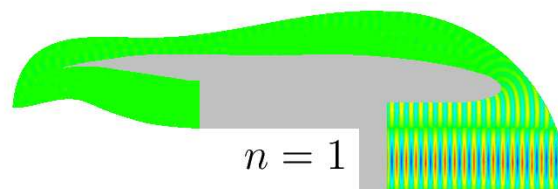
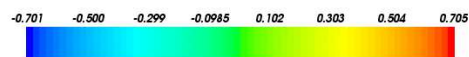
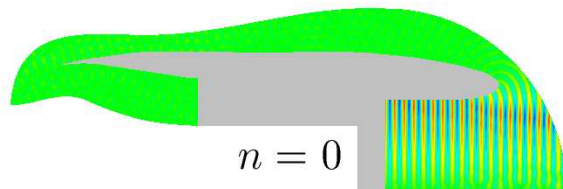
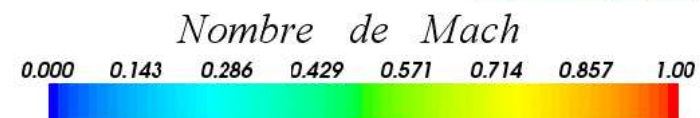
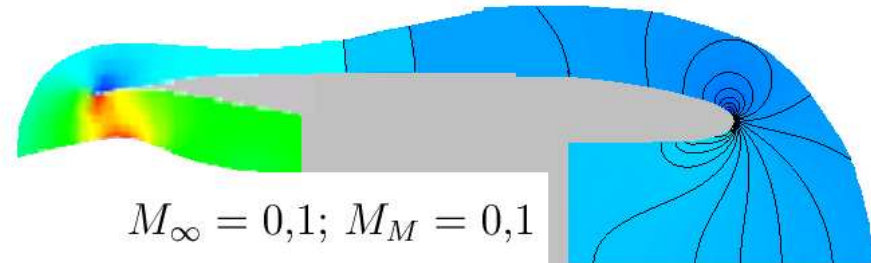
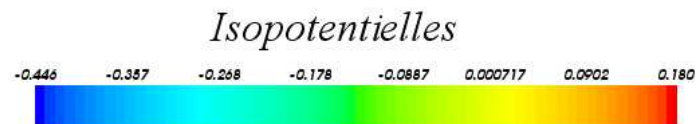
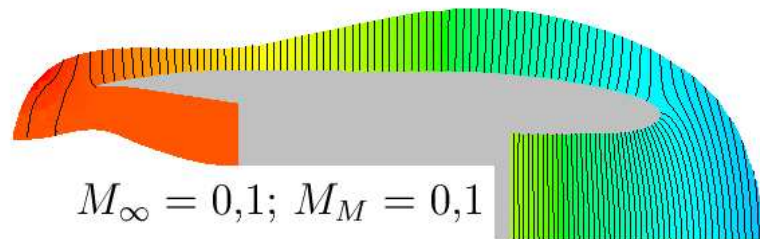


**Champ Lointain,  $M_\infty = 0$**



**Champ Lointain,  $M_\infty = 0, 1$**

Les figures ci-après présentent les isopotentielle et les nombres de Mach d'un écoulement potentiel de même Mach moteur et infini égal à 0, 1, ainsi que les champ acoustiques de la partie réelle du potentiel se propageant sur l'écoulement précédent  $M_M = M_\infty = 0, 1$  pour les modes  $m = 1$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  et pour un nombre d'ondes  $kR = 60$  et sur un maillage raffiné de 300 000 degrés de liberté.



**5. Conclusion**

- **Mise à jour de méthodes numériques alternatives** à d'autres méthodes (élément fini axisymétrique, point fixe pour l'écoulement subsonique).
- **Originalité principal : couplage intégral en présence d'écoulement.**
- **Avantages et inconvénients** du couplage intégral en écoulement par rapport aux méthodes type éléments infinis et couche limite absorbante :
  - Inconvénient : **matrice surfacique pleine.**
  - Avantage : surface fictive rayonnante adaptable pour **coller au mieux à l'hétérogénéité de l'écoulement** (gain d'inconnues par rapport à la limite sphérique (resp. rectangulaire) imposée pour les éléments infinis (les couches limites)) et possibilité de l'utilisation des multipôles.
- **Nécessité de la prise en compte des non-linéarités** de l'écoulement pour le rayonnement du bruit des turboréacteurs.
- **Perspective** : l'approche potentielle simplifie la propagation volumique, mais nécessité de la **mise à jour des conditions de raccord avec les méthodes de propagation volumique linéaire complètes** Euler linéarisée (Galerkin discontinu, différences finies).