



Processus autorégressifs composés  
Modèle affine de crédit  
Application à l'analyse du risque de crédit

**KENFACK Donald et DUPREY Stéfan**  
Rapport d'économétrie  
Master Finance de marché  
Conservatoire National des Arts et Métiers - Paris

## **Plan**

1. Introduction générale
2. Etat de l'art industriel de la modélisation du risque de crédit
3. Processus autorégressifs composés : analyse mathématique
4. Application "FTD Basket", "Cycle effect" et "Loss given Default"
5. Conclusion

## 1. Introduction générale

**Objectif : proposer un modèle de risque de crédit se voulant une alternative fiable, robuste et plus complète que l'état de l'art "industriel"**

- Dans un premier temps, nous élaborons un état de l'art des différentes techniques utilisées par l'industrie bancaire et les instances régulatrices pour analyser les risques de crédit.
- Fort de cette vision, nous introduisons la modélisation autorégressive affine de crédit, discutons ces avantages et inconvénient et proposons l'application à des cas concrets.
- Nous analysons ensuite plus précisément les propriétés mathématiques des processus autorégressifs composés.
- Nous finissons en exposant des cas de calcul concret implémentés à l'aide du logiciel R. Nous présentons la décomposition du spread des paniers first-to-default, la prise en compte d'effet de cycle et enfin un calcul original : le rendement d'obligations d'entreprises risquées avec taux de recouvrement.

## 2. Etat de l'art industriel de la modélisation du risque de crédit

### Les différents modèles les plus courants

**Modèle KMV**

### 3. Processus autorégressifs composés : analyse mathématique

#### Log-Laplace transformée conditionnelle : fonction affine des valeurs passées du processus

##### Définition :

Soit  $(Y_t, t \geq 0)$  un processus à  $n$  dimensions et notons  $\underline{Y_{t-1}}$  l'ensemble des informations jusqu'à et incluant  $t - 1$ . Le processus  $Y$  est un processus autorégressif d'ordre  $p$  **CAR(p)** si et seulement si la distribution conditionnelle de  $Y_t$  sachant  $\underline{Y_{t-1}}$  admet une transformée de Laplace conditionnelle du type :

$$E \left[ \exp(u' Y_t) | \underline{Y_{t-1}} \right] = \exp \left[ -a'_1(u) Y_{t-1} - \dots - a'_p(u) Y_{t-p} + b(u) \right] \quad (1)$$

, où  $a_p \neq 0$ .

**Equivalence CAR(p) et CAR(1)****Proposition :**

Le processus  $(Y_t, t \geq 0)$  est un processus  $CAR(p)$  si et seulement si le processus  $\tilde{Y}_t = (Y'_t, Y'_{t-1}, \dots, Y'_{t-p})$  est un processus  $CAR(1)$ .

$$a(v) = \begin{pmatrix} a_1(v_1) + v_2 \\ \vdots \\ a_{p-1}(v_1) + v_p \\ a_p(v_1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

### Processus autorégressifs composés à valeurs entières et thématique de file d'attente :

$Y_t = Z_t + \epsilon_t$  avec  $Z_t = \rho Y_{t-1}$ . Problème  $Z_t$  pas entier !

$$Y_t = \sum_{i=1}^{Y_{t-1}} Z_{i,t} + \epsilon_t \quad (3)$$

, où les variables  $Z_{i,t}$  suivent une loi de Bernouilli  $\mathbb{B}(1, \rho)$ . Dans ce cas :

$$E[\exp(-uY_t)|Y^{t-1}] = \exp(-a(u)Y_{t-1} + b(u))$$

### Processus autorégressifs composés à valeurs positives

On donne une condition nécessaire et suffisante sur la transformée de Laplace d'une variable aléatoire pour qu'elle soit positive.

$$\forall j \in \mathbb{N}, (-1)^j \frac{d^j}{du^j} [\exp(b(u))] \geq 0 \quad (4)$$



### Distribution invariante, prévision et stationnarité

**Proposition :**

La distribution invariante  $E[\exp(-u'Y_t) | \underline{Y}_{t-1}] = \exp[c(u)]$  vérifie :

$$b(u) = c(u) - c(a(u))$$

Un processus stochastique CAR(1) vérifie :

$$E[\exp(-uY_{t+h}) | Y^t] = \exp(-a^{oh}(u)Y_t + \sum_{k=0}^{h-1} b(a^{ok}(u))) \quad (5)$$

Soit un processus CAR(1) admettant une log-Laplace transformée invariante  $c$ . La transformée de Laplace conditionnelle tend vers une limite indépendante de la variable conditionnante si et seulement si :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} a^{oh}(u) = 0, \forall u. \quad (6)$$

### Réversibilité temporelle d'un processus autorégressif composé

**Proposition :**

Le processus CAR(1) est réversible si et seulement si la fonction  $\psi(u, v) = c(a(u) + v) + c(u) - c(a(u))$  est une fonction symétrique de  $u$  et  $v$ . La démonstration est immédiate en exprimant la symétrie de la transformée de Laplace de la distribution jointe de  $(Y_t, Y_{t-1})$  par la propriété de Markov. Quand le processus  $Y_t$  est réversible :

$$i) a(u) = \left( \frac{dc}{du} \right)^{-1} \left[ \frac{da}{du}(0) \left( \frac{dc}{du}(u) - \frac{dc}{du}(0) \right) + \frac{dc}{du}(0) \right]$$

ii) La fonction  $\gamma(u) = \frac{d^2c}{du^2} o(\frac{dc}{du})^{-1}$  est quadratique.

## Opérateur espérance conditionnelle

**Proposition :**

$$E[Y_t^n | Y_{t-1}] = P_n(Y_{t-1}) \quad (7)$$

, où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$  dont le coefficient de plus haut degré est  $[\frac{da}{du}(0)]^n$ . Considérons l'opérateur d'espérance conditionnelle  $\psi \rightarrow T\psi$  défini par :

$$T\psi(y) = E[\psi(Y_t) | Y_{t-1} = y] \quad (8)$$

Cet opérateur admet les valeurs propres réels  $\lambda_n = [\frac{da}{du}(0)]^n$ ,  $n \geq 0$  et pour fonctions propres associées des polynômes  $P_n$  de degré  $n$ .

### Expression des densités conditionnelles dans le cas de la réversibilité

**Proposition :**

Supposons  $|\frac{da}{du}(0)| < 1$ . Pour un processus CAR(1) stationnaire et réversible, les fonctions propres  $P_n$ ,  $n \geq 0$ , de l'opérateur espérance conditionnelle sont orthogonales pour le produit scalaire associé à la distribution invariante  $f$ . De plus :

$$f(y_t|y_{t-1}) = f(y_t) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{da}{du}(0) \right]^n P_n(y_t) P_n(y_{t-1}) \right] \quad (9)$$

, où  $P_n$  est la base orthogonale des fonctions polynômiales propre de l'opérateur conditionnel d'espérance.

$$f_h(y_t|y_{t-h}) = f(y_t) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{da}{du}(0) \right]^{hn} P_n(y_t) P_n(y_{t-h}) \right] \quad (10)$$

### Représentation espace-états, filtrage et lissage

$$Y_t = Z_t + \epsilon_t \quad (11)$$

$$Z_t = \alpha(Y_{t-1}, \eta_t) \quad (12)$$

#### Proposition :

1. Les variables  $Z_t$ ,  $t$  variant, sont indépendants conditionnellement au processus observable.
2. La distribution conditionnelle de  $Z_t$  sachant toutes les valeurs de  $Y_t$  coïncide avec la distribution conditionnelle de  $Z_t$  sachant  $Y_{t-1}$  et  $Y_t$  seulement (réversibilité et propriété de Markov). Cette distribution filtrante est donnée par :

$$l(z_t|y_{t-1}, y_t) = \frac{g(z_t|y_{t-1})h(y_t - z_t)}{\int g(z|y_{t-1})h(y_t - z)dz} \quad (13)$$

3. La distribution lissante de  $\epsilon_t$  suit directement puisque  $\epsilon_t = y_t - z_t$ .

**Les différents processus CAR réversibles classés selon l'équation caractéristique  $\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$  associé à l'équation de Ricatti**

- $\beta_1 = \beta_2 = 0$  : les processus de Poisson composés
- $\beta_2 = 0$  : les processus gaussiens autorégressifs.
- $\beta_2 \neq 0$  et  $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 = 0$  : les processus  $\gamma$ -composés.
- $\beta_2 \neq 0$  et  $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 > 0$  : les processus de Bernouilli à régime changeant.
- $\beta_2 \neq 0$  et  $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 < 0$  : processus à  $\gamma$  fonction quadratique et racines complexes conjuguées.

**Inférence statistique : modèle contraint**

$$E[\exp(-uY_t)|Y_{t-1}] = L^o(u, y) = \exp(-a(u)y + b(u)) \quad (14)$$

**Proposition :**

$$\left[ \hat{a}_T(u), \hat{b}_T(u) \right] = \arg \min_{a,b} \sum_{t=1}^T [\exp(-uy_t) - \exp(ay_{t-1} + b)]^2, \quad (15)$$

Sous les hypothèses de régularité standards et sous la condition que le processus CAR(1) soit bien défini, l'estimateur  $\left[ \hat{a}_T(u), \hat{b}_T(u) \right]'$  est asymptotiquement normal et tel que :

$$\sqrt{T} \left( \begin{pmatrix} \hat{a}_T(u) \\ \hat{b}_T(u) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(u) \\ b(u) \end{pmatrix} \right) \rightarrow N(0, \Omega(u)), \quad (16)$$

où  $\Omega(u) = J^{-1}(u)I(u)J^{-1}(u)$

**Inférence statistique : modèle non contraint****Proposition :**

La transformée de Laplace non contrainte peut être estimée par l'estimateur de Nadaraya-Watson :

$$\hat{L}_T(u, y) = \frac{\sum_{t=2}^T \exp(-uy_t) K_{h_T}(y_{t-1} - y)}{\sum_{t=2}^T K_{h_T}(y_{t-1} - y)}, \quad u \in I, y \text{ variant}, \quad (17)$$

L'estimateur est consistant et asymptotiquement normal

$$\sqrt{Th_T} \left[ \hat{L}_T(u, y) - L(u, y) \right] \rightarrow N(0, \Sigma(u, y)), \quad (18)$$

où :

$$\Sigma(u, y) = \frac{1}{f(y)} \int K^2(v) dv V[\exp(-uY_t) | Y_{t-1} = y] \quad (19)$$

$$\frac{L(2u, y) - [L(u, y)]^2}{f(y)} \int K^2(v) dv$$

La qualité de l'estimation peut alors être évaluée en considérant le résidu fonctionnel de  $\hat{L}_T(u, y) - \hat{L}_T^0(u, y)$ , u et y variant.



#### 4. Application "FTD Basket", "Cycle effect" et "Loss given Default"

##### Les processus $\gamma$ -composés

On peut démontrer que la log-transformée de Laplace de ce processus s'écrit :

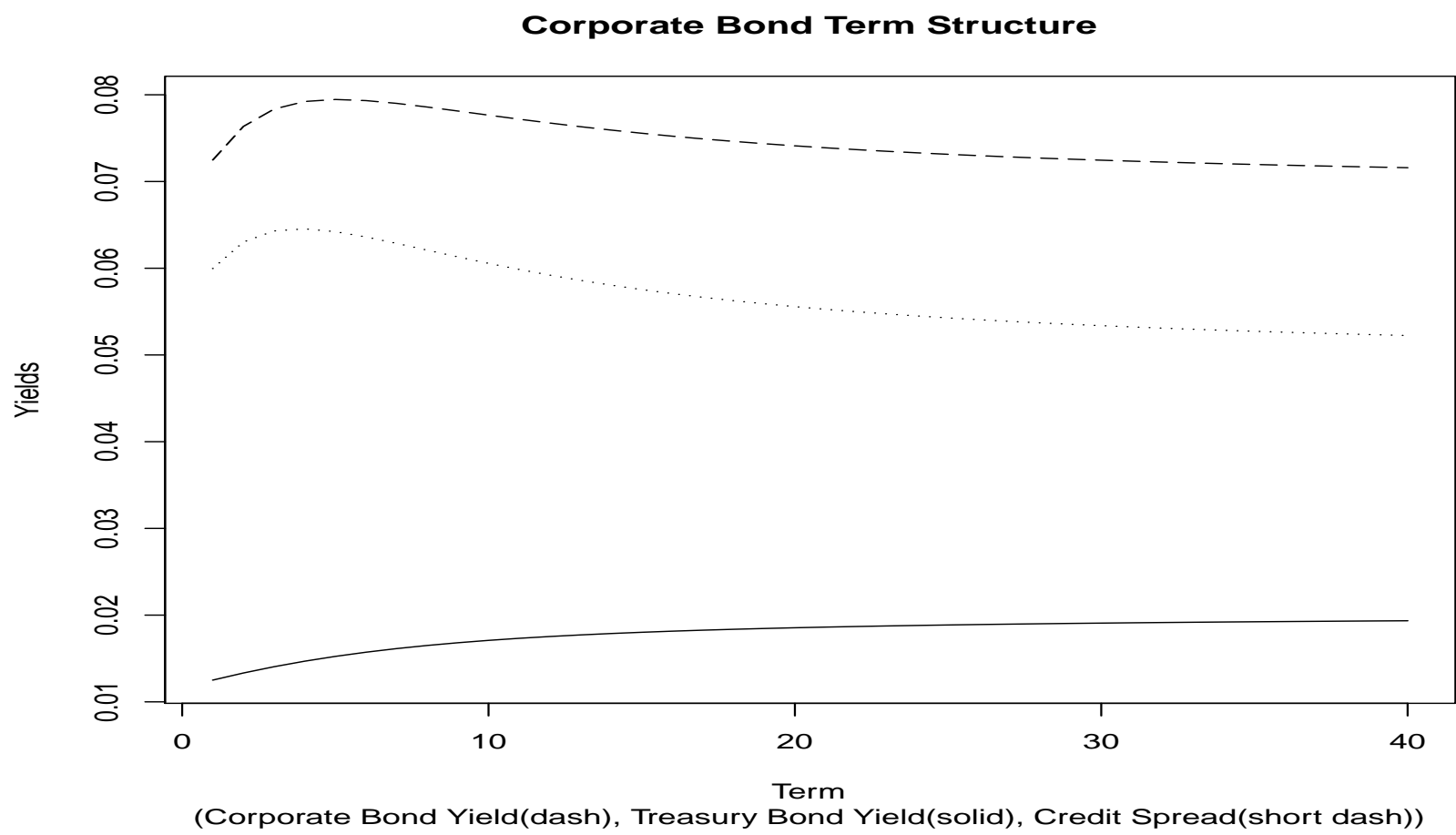
$$E_{t-1} [\exp(uY_t)] = (1 - uc_t)^{-\delta} \exp \left( \frac{c_t u}{1 - c_t u} \beta_t Y_{t-1} \right). \quad (20)$$

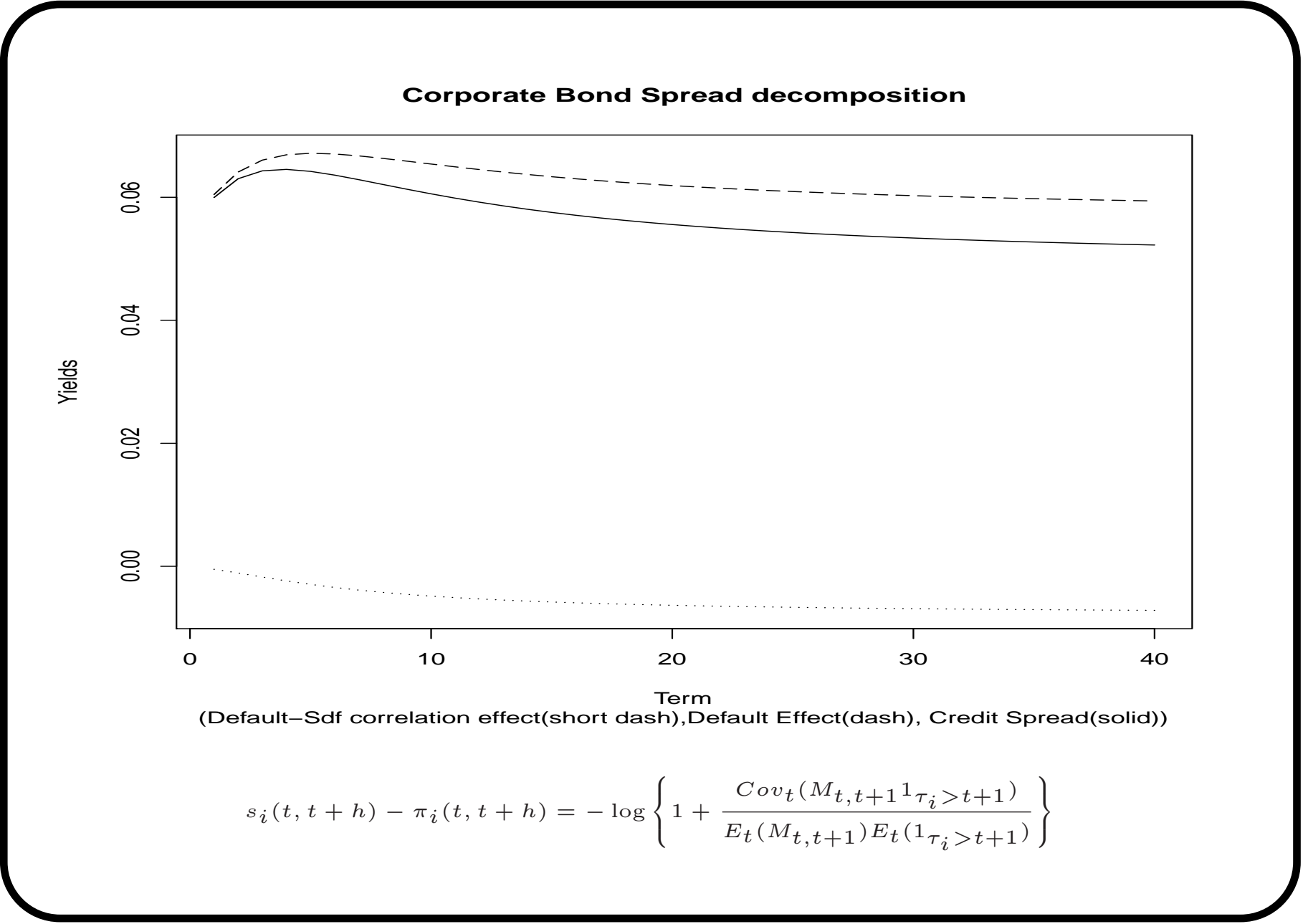
La log-transformée de Laplace vérifie donc l'hypothèse affine avec pour fonction  $a(u) = \frac{c_t u}{1 - c_t u} \beta_t$  et  $b(u) = -\delta \log(1 - c_t u)$ .

Dans le cadre où  $c$ ,  $\delta$  et  $\gamma$  sont des constantes, la prévision de Y à l'ordre h est donné par la formule analytique suivante :

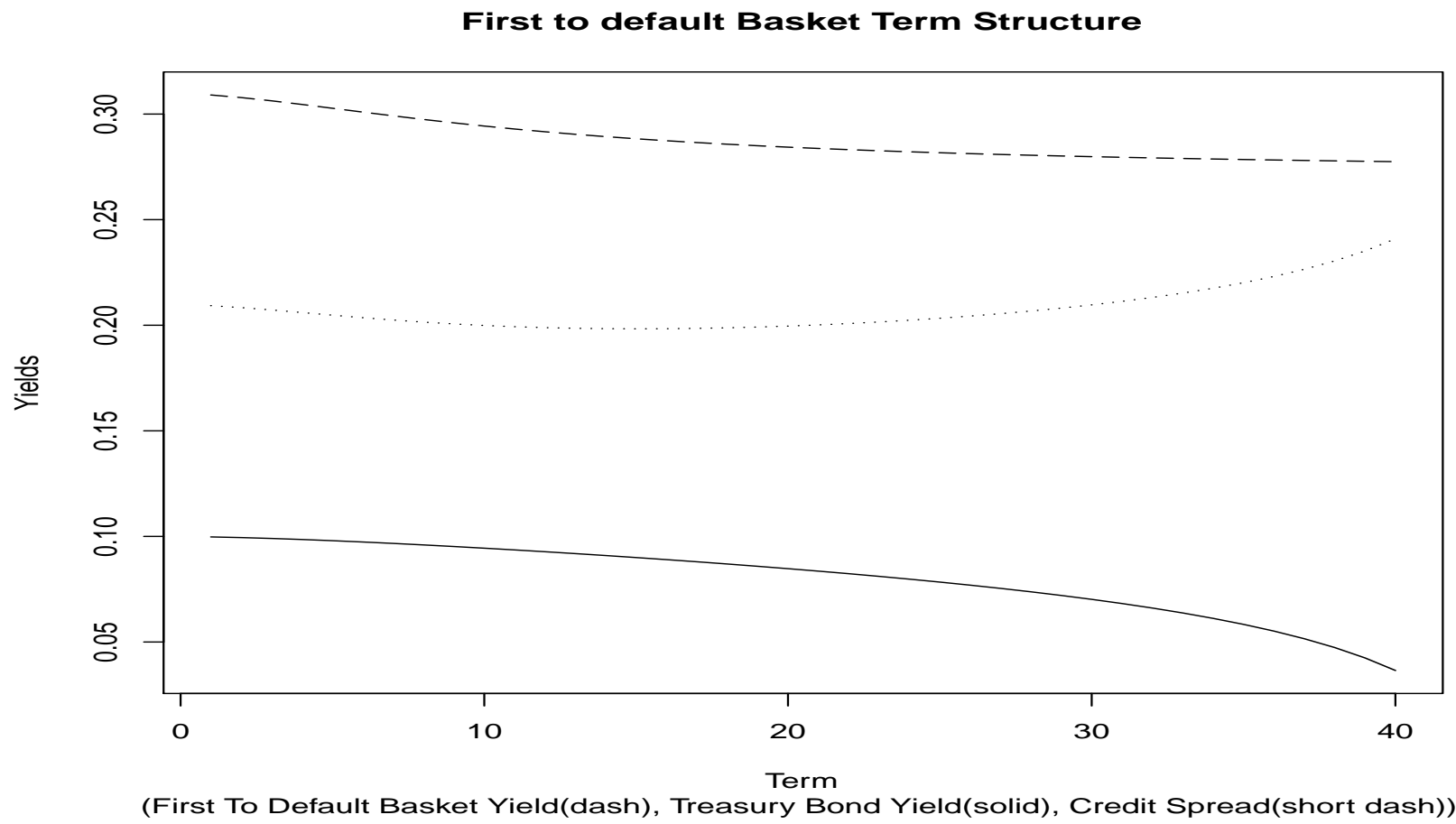
$$E_t [\exp(uY_{t+h})] = \exp \left( Y_t \frac{\rho^h u}{1 - uc \frac{1 - \rho^h}{1 - \rho}} - \delta \log \left( 1 - uc \frac{1 - \rho^h}{1 - \rho} \right) \right) \quad (21)$$

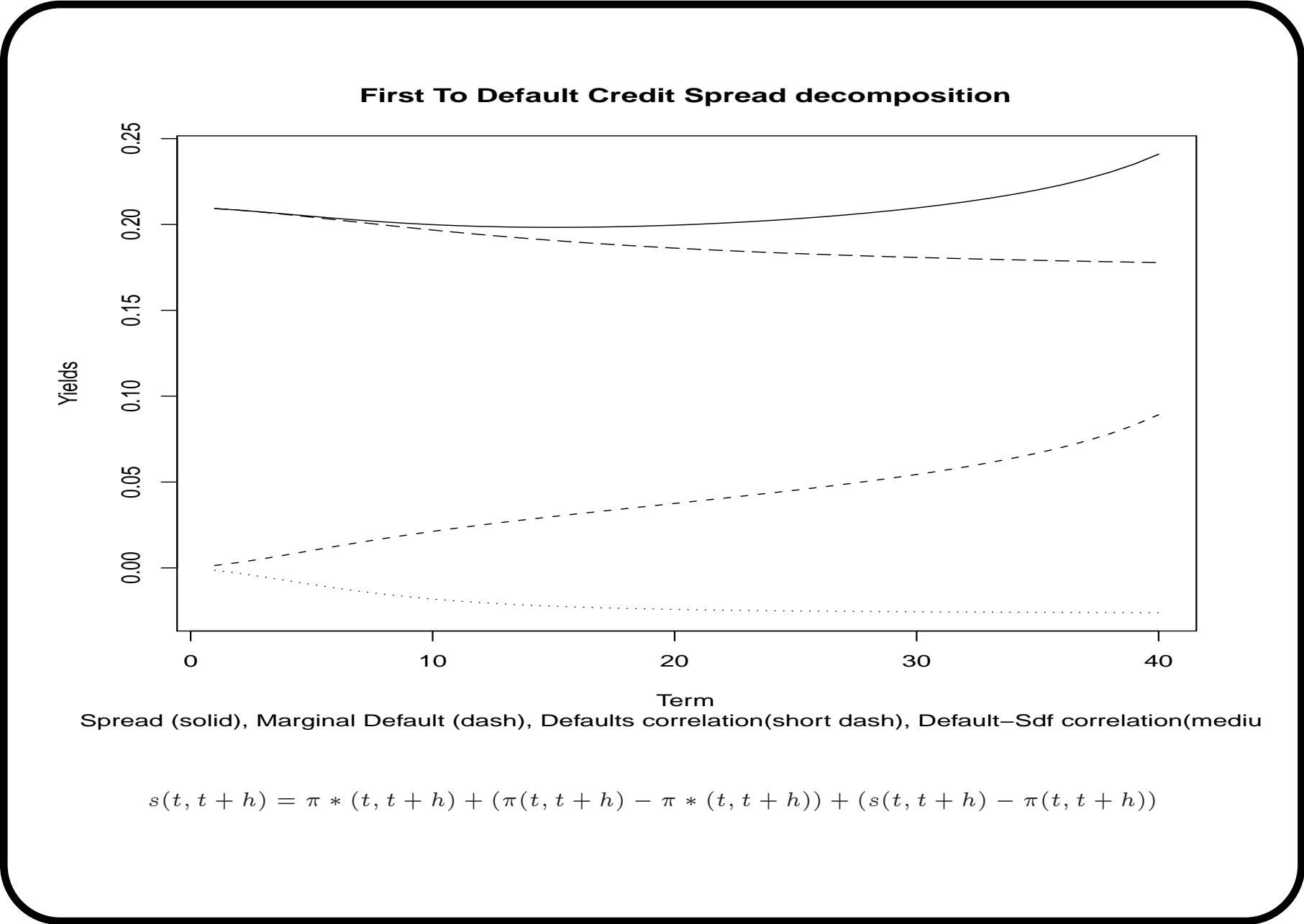
Résultats Corporate Bonds



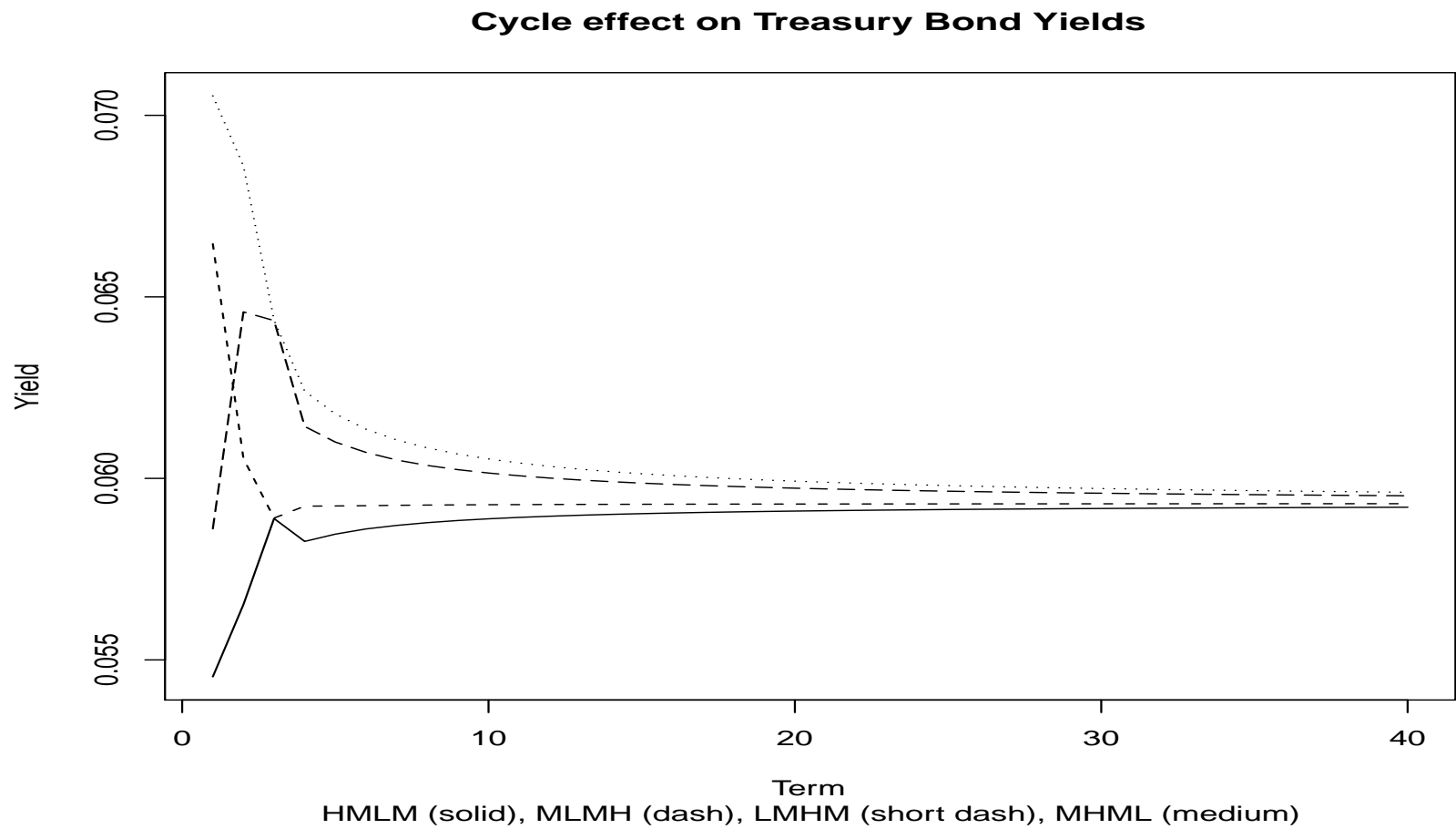


Résultats First-To-Default basket





Résultats Cycle effects



## Modélisation du taux de recouvrement

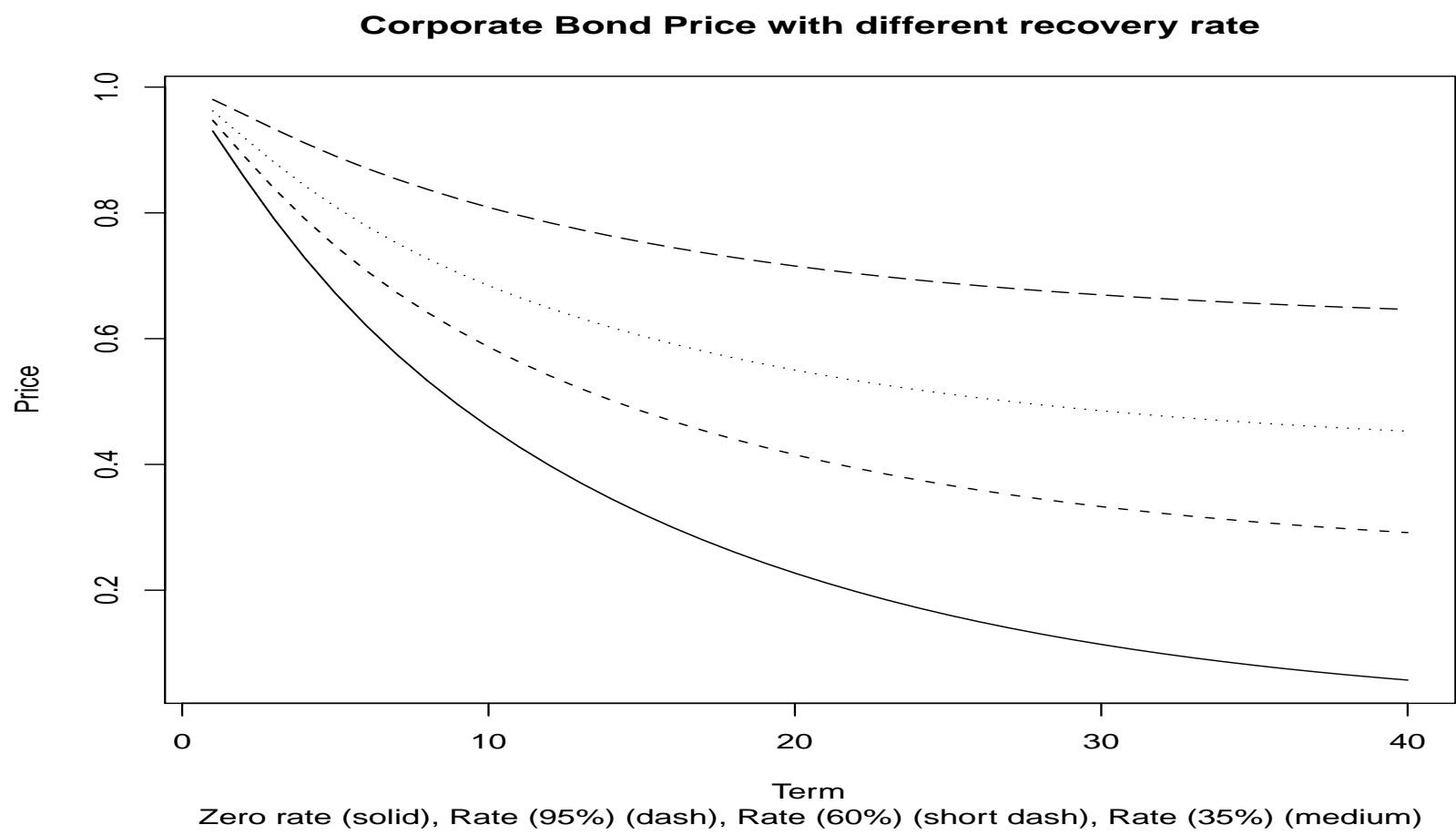
$$C*_i(t, t+h) = \sum_{k=1}^h E_t \left\{ \prod_{j=0}^{k-2} M_{t+j, t+j+1} \pi_{t+j, t+j+1} M_{t+k-1, t+k} \left( 1 - \pi_{t+k-1, t+k} \right) R_{t+k-1, t+k} \right\} \\ + E_t \left\{ \prod_{j=0}^{h-1} (M_{t+j, t+j+1} \pi_{t+j, t+j+1}) \right\},$$

**Hypothèse :** Les taux de recouvrement pour les différentes entreprises sont indépendants conditionnellement aux facteurs  $Z$  et  $Z_i$ . Le taux de recouvrement pour l'entreprise  $i$  est tel que :

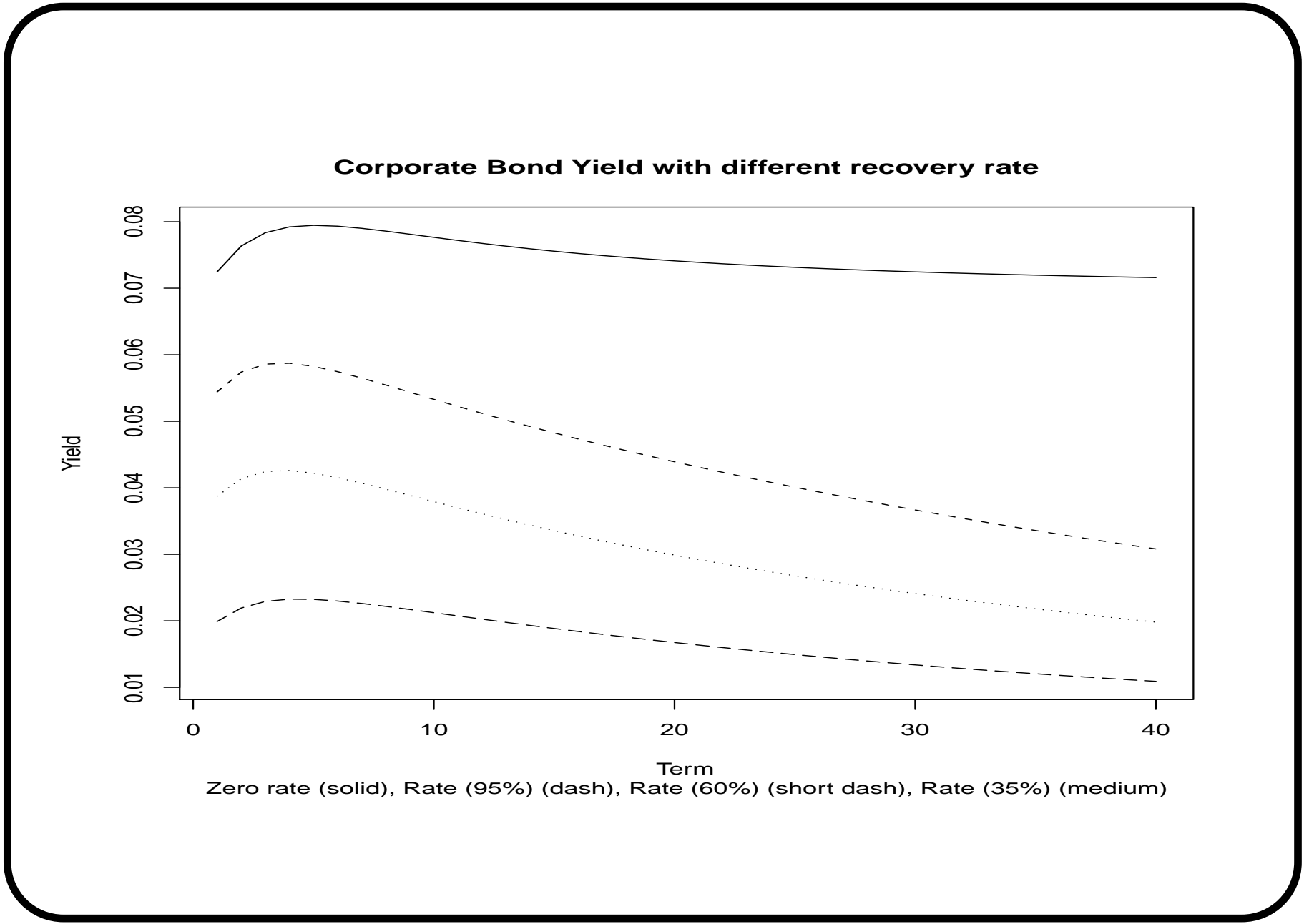
$$R_{t+j, t+j+1} = \exp(-(\delta_{t+1} + \epsilon'_{t+1} Z_{t+1} + \theta'_{t+1} Z i_{t+1})) = \exp(-\omega'_t), \quad (22)$$

où  $\omega'_t = \delta_t + \epsilon'_t Z_t + \theta'_t Z i_t$  est l'intensité de recouvrement et  $\delta_t, \epsilon'_t, \theta'_t$  des fonctions de l'information contenue dans les facteurs  $Z_t$  et  $Z_i$ . Ce sont aussi des paramètres de sensibilités pour le recouvrement. Les taux de recouvrement étant compris entre 0 et 1, les sensibilités de recouvrement doivent vérifier comme les intensités de survie :  $\omega'_t \geq 0$ .

Résultats Loss Given Default







5. Conclusion