Processus autorégressifs composés
Modèle affine de crédit
Application à l'analyse du risque de crédit

KENFACK Donald et DUPREY Stéfan

Rapport d'économétrie

Master Finance de marché

Conservatoire Nationnal des Arts et Métiers - Paris

Plan

1. Introduction générale
2. Etat de l'art industriel de la modélisation du risque de crédit
3. Processus autorégressifs composés : analyse mathématique
4. Application "FTD Basket", "Cycle effect" et "Loss given Default"
5. Conclusion

1. Introduction générale

Objectif : proposer un modèle de risque de crédit se voulant une alternative fiable, robuste et plus complète que l'état de l'art "industriel"

• Dans un premier temps, nous élaborons un état de l'art des différentes techniques utilisées par l'industrie banquaire et les instances régulatrices pour analyser les risques de crédit.

• Fort de cette vision, nous introduisons la modélisation autorégressive affine de crédit, discutons ces avantages et inconvénient et proposons l'application à des case concrets.

• Nous analysons ensuite plus précisément les propriétés mathématiques des processus autorégressifs composés.

• Nous finissons en exposant des cas de calcul concret implémentés à l'aide du logiciel R. Nous présentons la décomposition du spread des paniers first-to-default, la prise en compte d'effet de cycle et enfin un calcul original : le rendement d'obligations d'entreprises risquées avec taux de recouvrement.

2. Etat de l'art industriel de la modélisation du risque de crédit

Les différents modèles les plus courants

Modèle KMV

3. Processus autorégressifs composés : analyse mathématique

Log-Laplace transformée conditionnelle : fonction affine des valeurs passées du processus

Définition :

Soit $(Y_t, t \geq 0)$ un processus à n dimensions et notons $\underline{Y_{t-1}}$ l'ensemble des informations jusqu'à et incluant $t-1$. Le processus Y est un processus autorégressif d'ordre p **CAR(p)** si et seulement si la distribution conditionnelle de Y_t sachant $\underline{Y_{t-1}}$ admet une transformée de Laplace conditionnelle du type :

$$E\left[exp(u'Y_t)|\underline{Y_{t-1}}\right] = exp\left[-a_1'(u)Y_{t-1} - ... - a_p'(u)Y_{t-p} + b(u)\right] \quad (1)$$

, où $a_p \neq 0$.

Equivalence CAR(p) et CAR(1)

Proposition :

Le processus $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus $CAR(p)$ si et seulement si le processus $\widetilde{Y}_t = \left(Y_t', Y_{t-1}', \ldots, Y_{t-p}'\right)$ est un processus $CAR(1)$.

$$a(v) = \begin{pmatrix} a_1(v_1) + v_2 \\ \vdots \\ a_{p-1}(v_1) + v_p \\ a_p(v_1) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Processus autorégressifs composés à valeurs entières et thématique de file d'attente :

$Y_t = Z_t + \epsilon_t$ avec $Z_t = \rho Y_{t-1}$. Problème Z_t pas entier !

$$Y_t = \sum_{i=1}^{Y_{t-1}} Z_{i,t} + \epsilon_t \tag{3}$$

, où les variables $Z_{i,t}$ suivent une loi de Bernouilli $\mathbb{B}(1, \rho)$. Dans ce cas :

$$E[exp(-uY_t)|Y^{t-1}] = exp(-a(u)Y_{t-1} + b(u))$$

Processus autorégressifs composés à valeurs positives

On donne une condition nécessaire et suffisante sur la transformée de Laplace d'une variable aléatoire pour qu'elle soit positive.

$$\forall j \in \mathbb{N}, (-1)^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}u^j} \left[exp(b(u))\right] \geq 0 \tag{4}$$

Distribution invariante, prévision et stationnarité

Proposition :
La distribution invariante $E[\exp{(-u'Y_t)}\,|\underline{Y}_{t-1}] = \exp[c(u)]$ vérifie :

$$b(u) = c(u) - c(a(u))$$

Un processus stochastique CAR(1) vérifie :

$$E[exp(-uY_{t+h})|Y^t] = exp(-a^{oh}(u)Y_t + \sum_{k=0}^{h-1} b(a^{ok}(u))) \tag{5}$$

Soit un processus CAR(1) admettant une log-Laplace transformée invariante c. La transformée de Laplace conditionnelle tend vers une limite indépendante de la variable conditionnante si et seulement si :

$$\lim_{h\to\infty} a^{oh}(u) = 0,\ \forall u. \tag{6}$$

Réversibilité temporelle d'un processus autorégressif composé

Proposition :
Le processus CAR(1) est réversible si et seulement si la fonction $\psi(u,v) = c(a(u)+v) + c(u) - c(a(u))$ est une fonction symétrique de u et v. La démonstration est immédiate en exprimant la symétrie de la transformée de Laplace de la distribution jointe de (Y_t, Y_{t-1}) par la propriété de Markov. Quand le processus Y_t est réversible :

$$i) a(u) = \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u}\right)^{-1}\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u}(u) - \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u}(0)\right) + \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u}(0)\right]$$

ii) La fonction $\gamma(u) = \frac{\mathrm{d}^2 c}{\mathrm{d}u^2} o (\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}u})^{-1}$ est quadratique.

Opérateur espérance conditionnelle

Proposition :

$$E[Y_t^n|Y_{t-1}] = P_n(Y_{t-1}) \tag{7}$$

, où P_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de plus haut degré est $[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)]^n$. Considérons l'opérateur d'espérance conditionnelle $\psi \to T\psi$ défini par :

$$T\psi(y) = E[\psi(Y_t)|Y_{t-1} = y] \tag{8}$$

Cet opérateur admet les valeurs propres réels $\lambda_n = [\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)]^n$, $n \geq 0$ et pour fonctions propres associées des polynômes P_n de degré n.

Expression des densités conditionnelles dans le cas de la réversibilité

Proposition :
Supposons $|\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)| < 1$. Pour un processus CAR(1) stationnaire et réversible, les fonctions propres P_n, $n \geq 0$, de l'opérateur espérance conditionnelle sont orthogonales pour le produit scalaire associé à la distribution invariante f. De plus :

$$f\left(y_t|y_{t-1}\right) = f(y_t)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)\right]^n P_n(y_t)P_n(y_{t-1})\right] \qquad (9)$$

, où P_n est la base orthogonale des fonctions polynômiales propre de l'opérateur conditionnel d'espérance.

$$f_h\left(y_t|y_{t-h}\right) = f(y_t)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}u}(0)\right]^{hn} P_n(y_t)P_n(y_{t-h})\right] \qquad (10)$$

Représentation espace-états, filtrage et lissage

$$Y_t = Z_t + \epsilon_t \tag{11}$$

$$Z_t = \alpha(Y_{t-1}, \eta_t) \tag{12}$$

Proposition :

1. Les variables Z_t, t variant, sont indépendants conditionnellement au processus observable.
2. La distribution conditionnelle de Z_t sachant toutes les valeurs de Y_t coïncide avec la distribution conditionnelle de Z_t sachant Y_{t-1} et Y_t seulement (réversibilité et propriété de Markov). Cette distribution filtrante est donnée par :
$$l(z_t|y_{t-1}, y_t) = \frac{g(z_t|y_{t-1})h(y_t - z_t)}{\int g(z|y_{t-1})h(y_t - z)\mathrm{d}z} \tag{13}$$
3. La distribution lissante de ϵ_t suit directement puisque $\epsilon_t = y_t - z_t$.

Les différents processus CAR réversibles classés selon l'équation caractéristique $\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ associé à l'équation de Ricatti

• $\beta_1 = \beta_2 = 0$: les processus de Poisson composés

• $\beta_2 = 0$: les processus gaussiens autorégressifs.

• $\beta_2 \neq 0$ et $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 = 0$: les processus γ-composés.

• $\beta_2 \neq 0$ et $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 > 0$: les processus de Bernouilli à régime changeant.

• $\beta_2 \neq 0$ et $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 < 0$: processus à γ fonction quadratique et racines complexes conjuguées.

Inférence statistique : modèle contraint

$$E[\exp(-uY_t)|Y_{t-1}] = L^o(u,y) = \exp(-a(u)y + b(u)) \qquad (14)$$

Proposition :

$$\left[\hat{a}_T(u), \hat{b}_T(u)\right] = \ arg\ \min_{a,b} \sum_{t=1}^{T} \left[\exp(-uy_t) - \exp(ay_{t-1} + b)\right]^2, \qquad (15)$$

Sous les hypothèses de régularité standards et sous la condition que le processus CAR(1) soit bien défini, l'estimateur $\left[\hat{a}_T(u), \hat{b}_T(u)\right]'$ est asymptotiquement normal et tel que :

$$\sqrt{T}\left(\left(\begin{array}{c} \hat{a}_T(u) \\ \hat{b}_T(u) \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c} a(u) \\ b(u) \end{array}\right)\right) \to N\left(0, \Omega(u)\right), \qquad (16)$$

où $\Omega(u) = J^{-1}(u)I(u)J^{-1}(u)$

Inférence statistique : modèle non contraint

Proposition :

La transformée de Laplace non contrainte peut être estimée par l'estimateur de Nadaraya-Watson :

$$\hat{L}_T(u,y) = \frac{\sum_{t=2}^{T} \exp(-uy_t) K_{h_T}(y_{t-1} - y)}{\sum_{t=2}^{T} K_{h_T}(y_{t-1} - y)}, \quad u \in I, y \; variant, \tag{17}$$

L'estimateur est consistent et asymptotiquement normal

$$\sqrt{Th_T} \left[\hat{L}_T(u,y) - L(u,y) \right] \to N(0, \Sigma(u,y)), \tag{18}$$

où :

$$\Sigma(u,y) = \frac{1}{f(y)} \int K^2(v) dv V \left[\exp(-uY_t) | Y_{t-1} = y \right] \tag{19}$$

$$\frac{L(2u,y) - [L(u,y)]^2}{f(y)} \int K^2(v) dv$$

La qualité de l'estimation peut alors être évaluée en considérant le résidu fonctionnel de $\hat{L}_T(u,y) - \hat{L}_T^0(u,y)$, u et y variant.

4. Application "FTD Basket", "Cycle effect" et "Loss given Default"

Les processus γ-composés

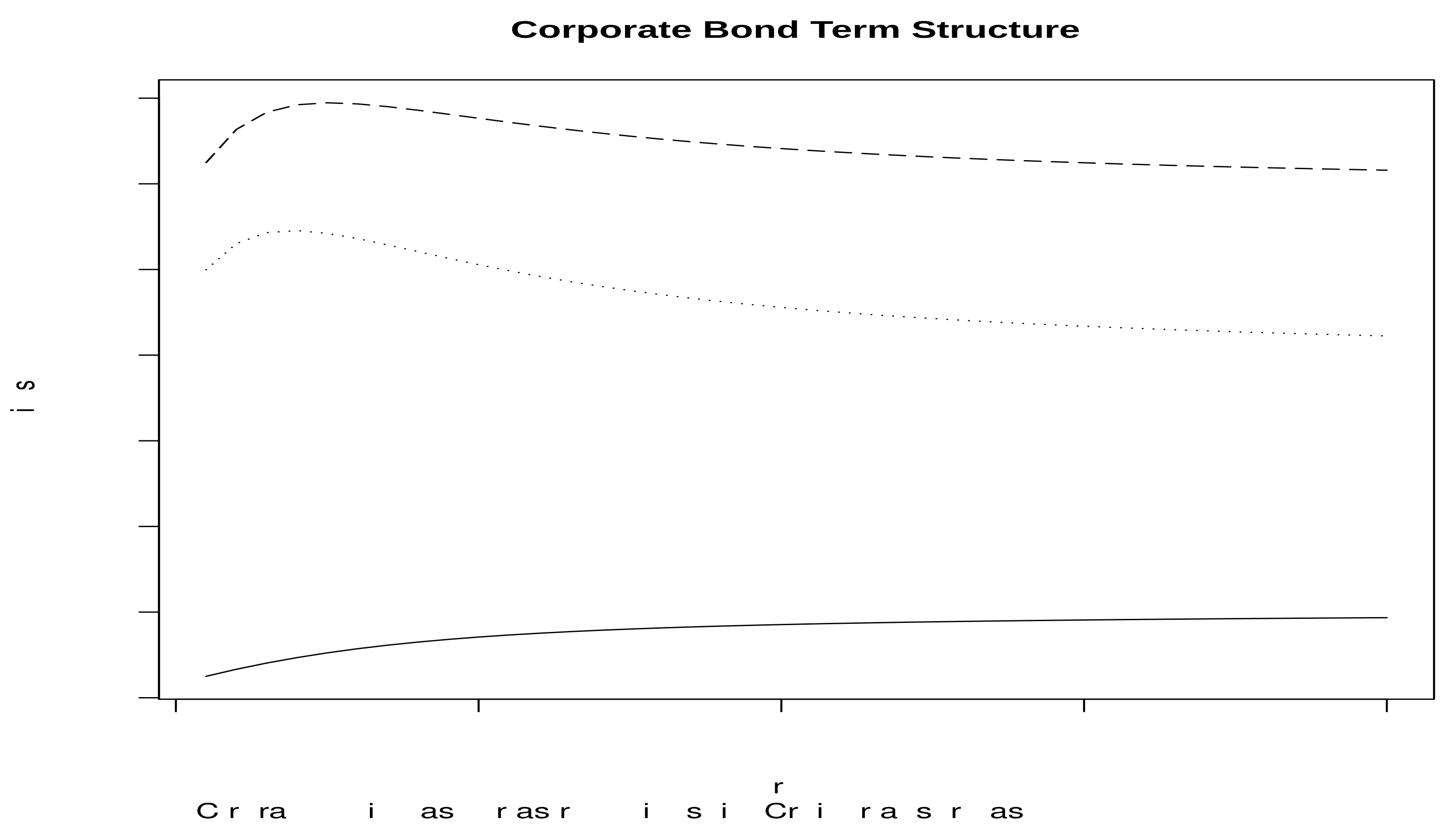
On peut démontrer que la log-transformée de Laplace de ce processus s'écrit :

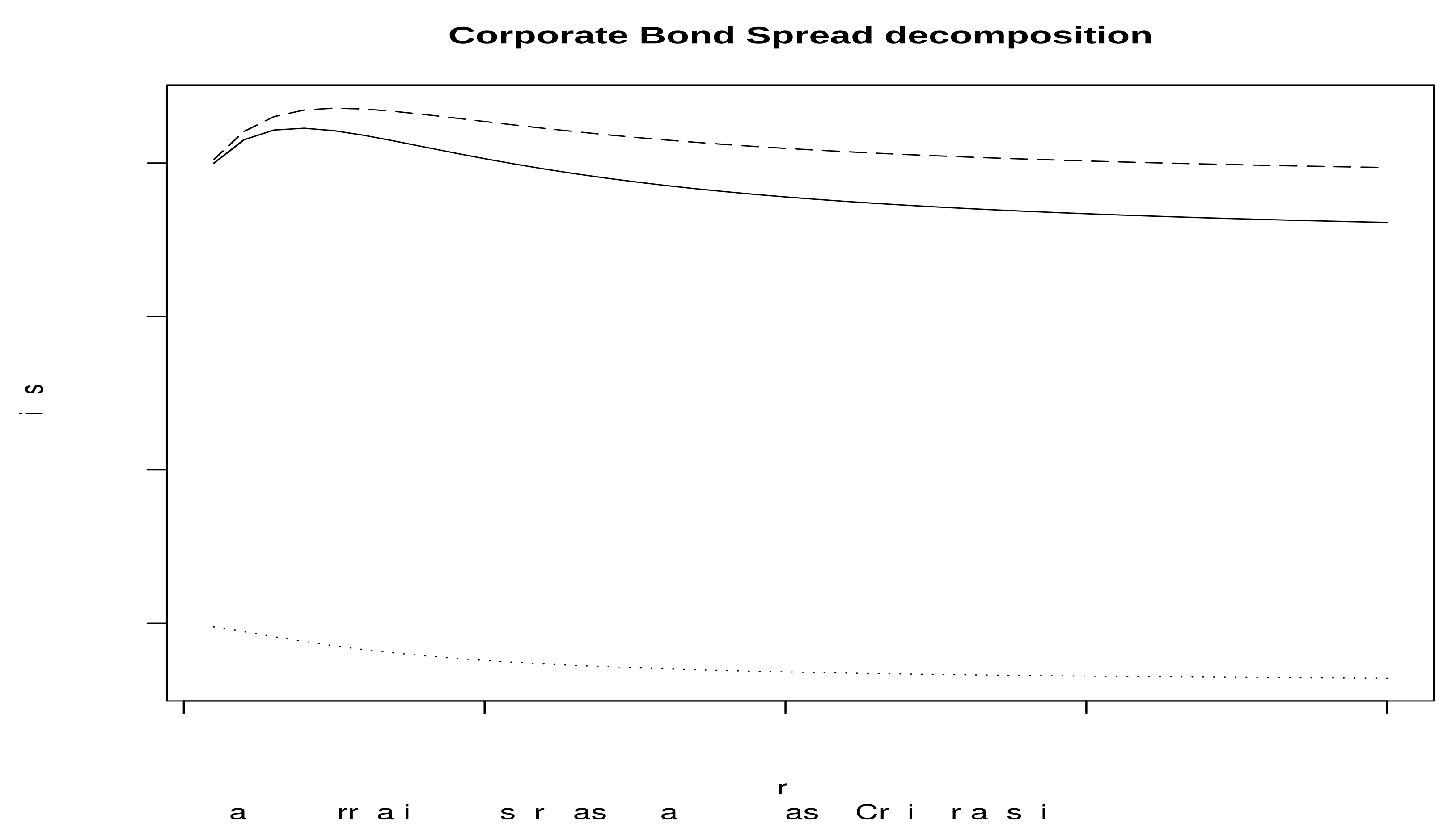
$$E_{t-1}\left[\exp(uY_t)\right] = (1 - uc_t)^{-\delta} \exp\left(\frac{c_t u}{1 - c_t u}\beta_t Y_{t-1}\right). \qquad (20)$$

La log-transformée de Laplace vérifie donc l'hypothèse affine avec pour fonction $a(u) = \frac{c_t u}{1-c_t u}\beta_t$ et $b(u) = -\delta \log(1 - c_t u)$.
Dans le cadre où c, δ et γ sont des constantes, la prévision de Y à l'ordre h est donné par la formule analytique suivante :

$$E_t\left[\exp(uY_{t+h})\right] = \exp\left(Y_t \frac{\rho^h u}{1 - uc\frac{1-\rho^h}{1-\rho}} - \delta \log\left(1 - uc\frac{1-\rho^h}{1-\rho}\right)\right) \qquad (21)$$

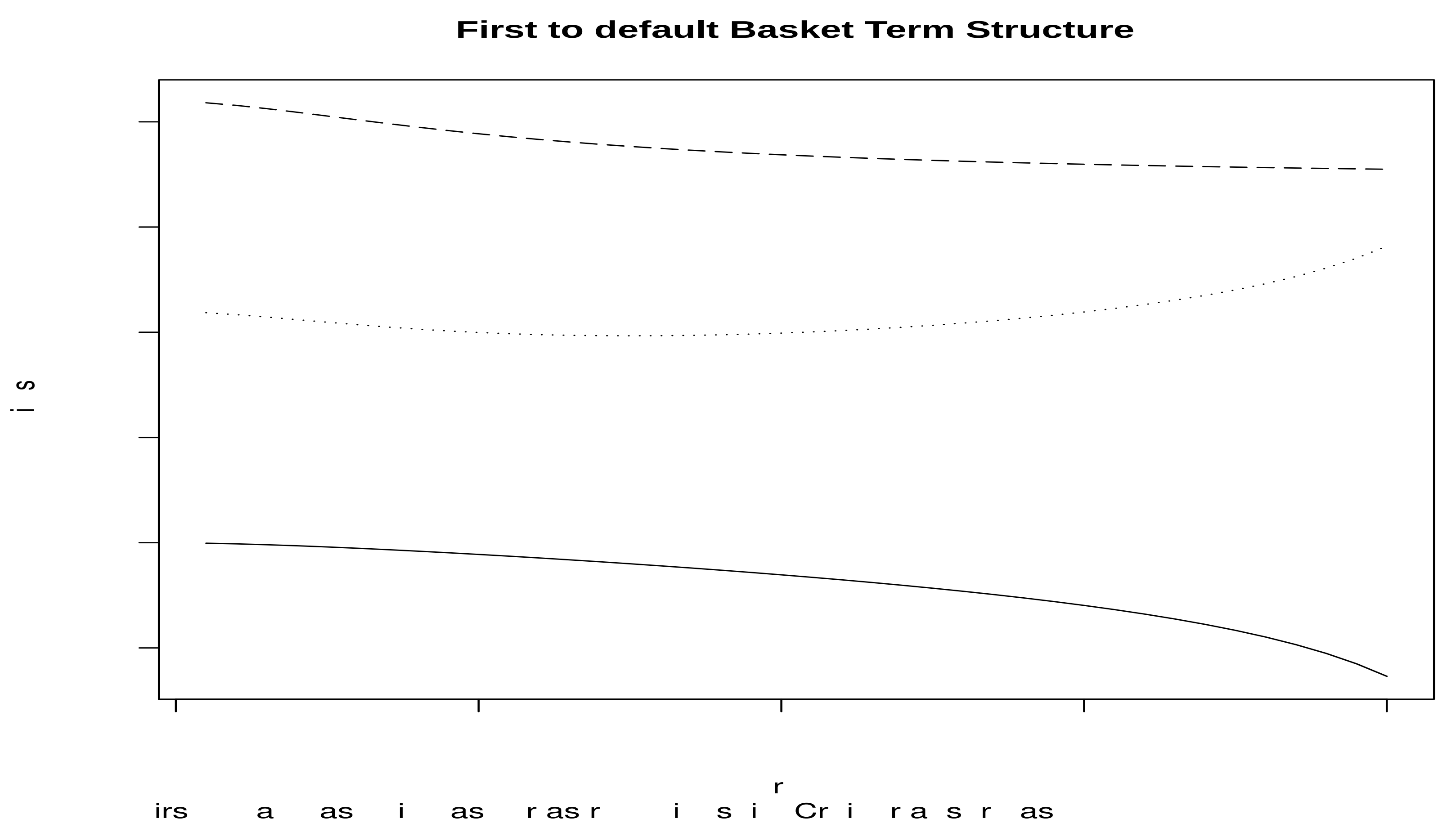
Résultats Corporate Bonds

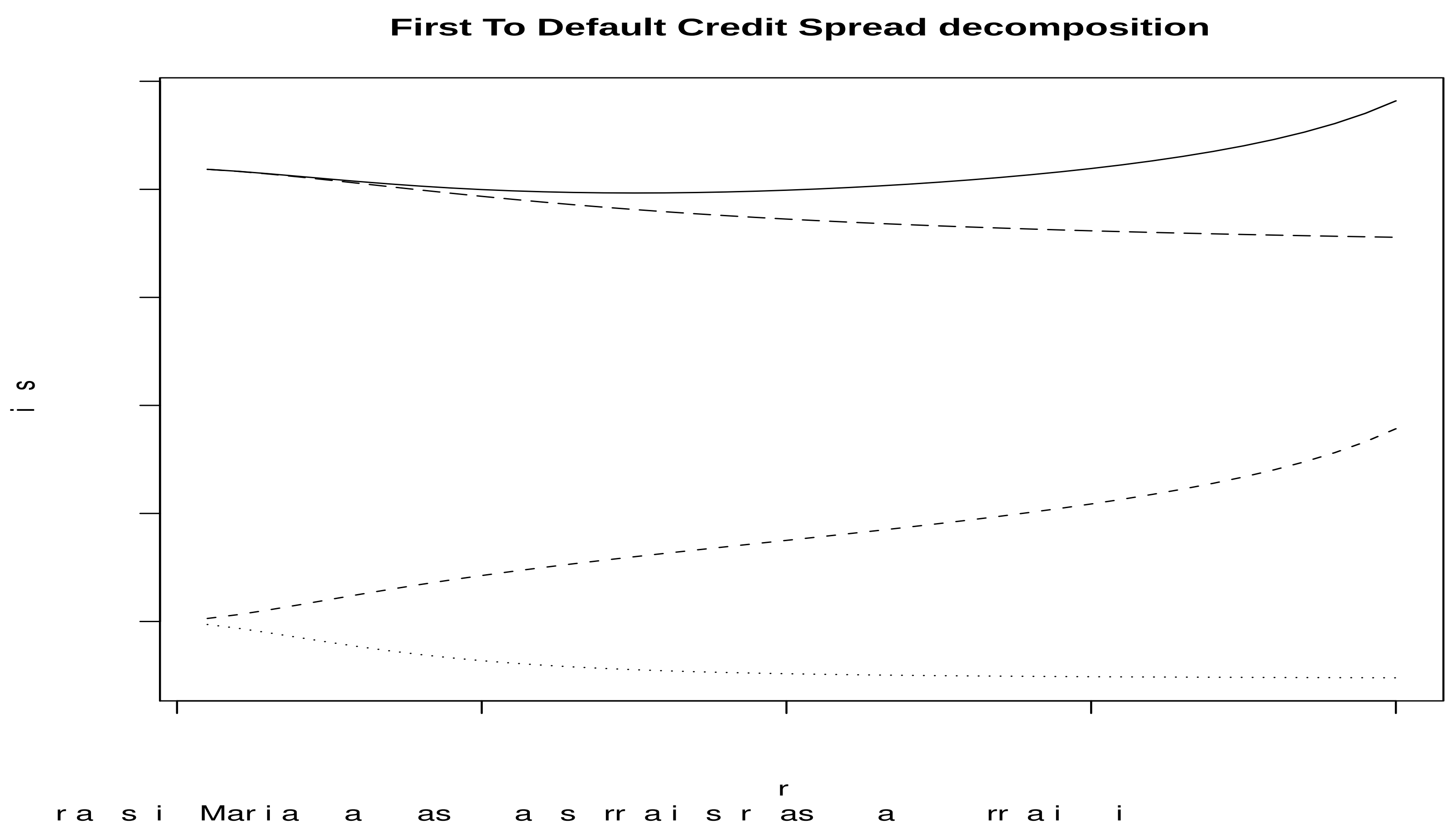




$$s_i(t,t+h) - \pi_i(t,t+h) = -\log\left\{1 + \frac{Cov_t(M_{t,t+1}1_{\tau_i > t+1})}{E_t(M_{t,t+1})E_t(1_{\tau_i > t+1})}\right\}$$

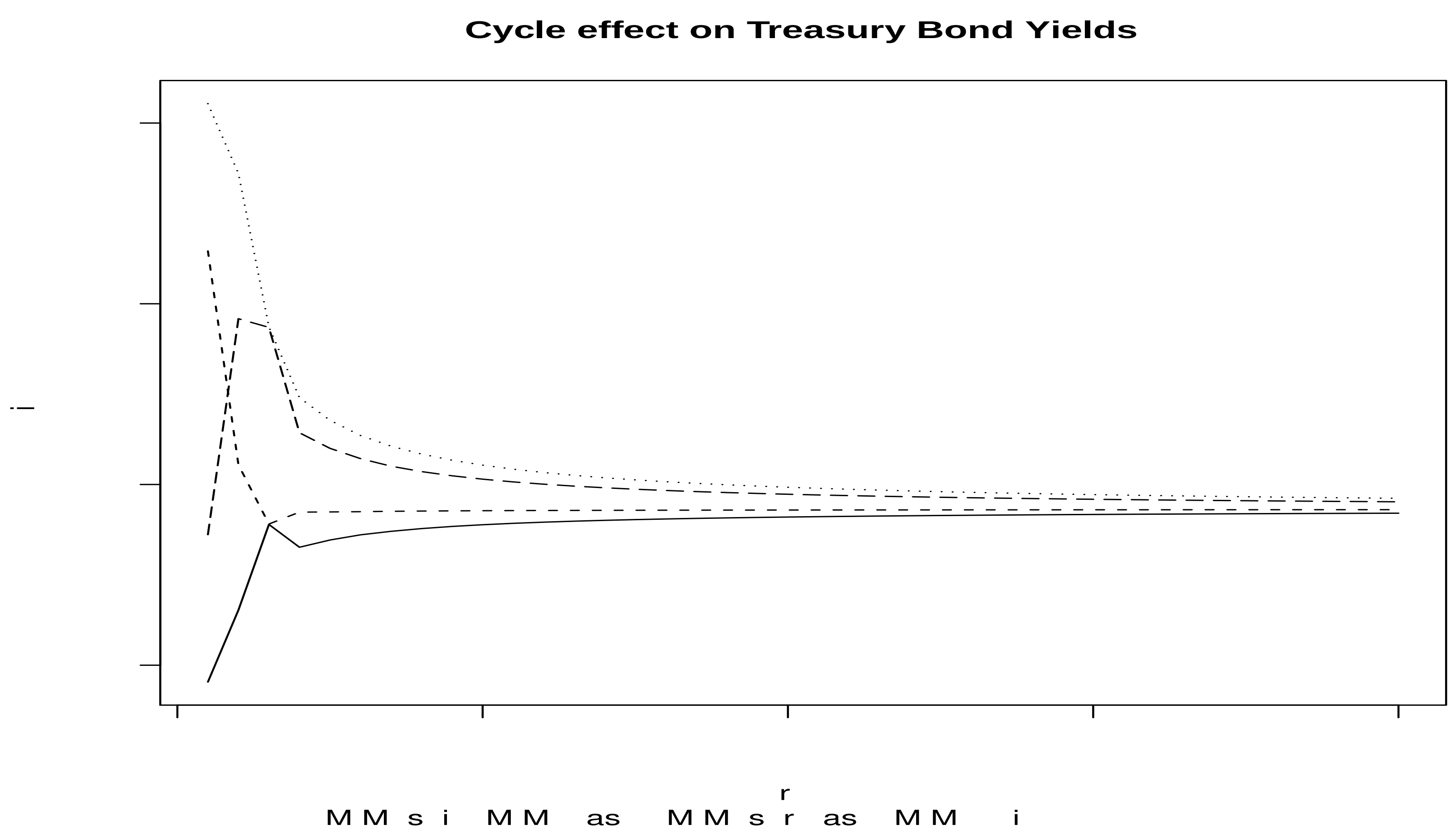
Résultats First-To-Default basket





$$s(t,t+h) = \pi*(t,t+h) + (\pi(t,t+h) - \pi*(t,t+h)) + (s(t,t+h) - \pi(t,t+h))$$

Résultats Cycle effects



Modélisation du taux de recouvrement

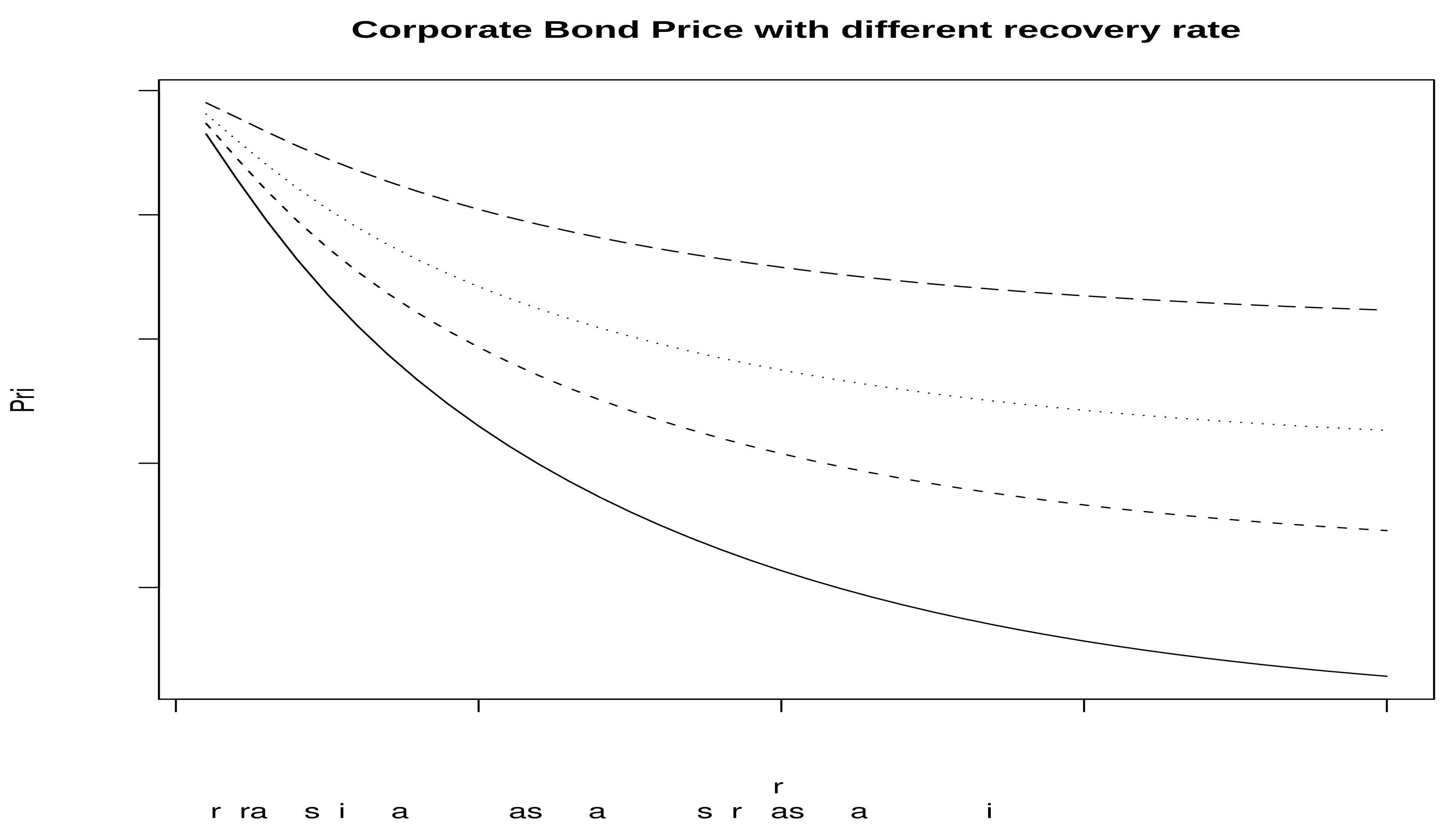
$$C*_i(t, t+h) = \sum_{k=1}^{h} E_t \left\{ \Pi_{j=0}^{k-2} M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1} M_{t+k-1,t+k} \left(1 - \pi_{t+k-1,t+k}\right) R_{t+k-1,t+k} \right\}$$
$$+ E_t \left\{ \Pi_{j=0}^{h-1} (M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1}) \right\},$$

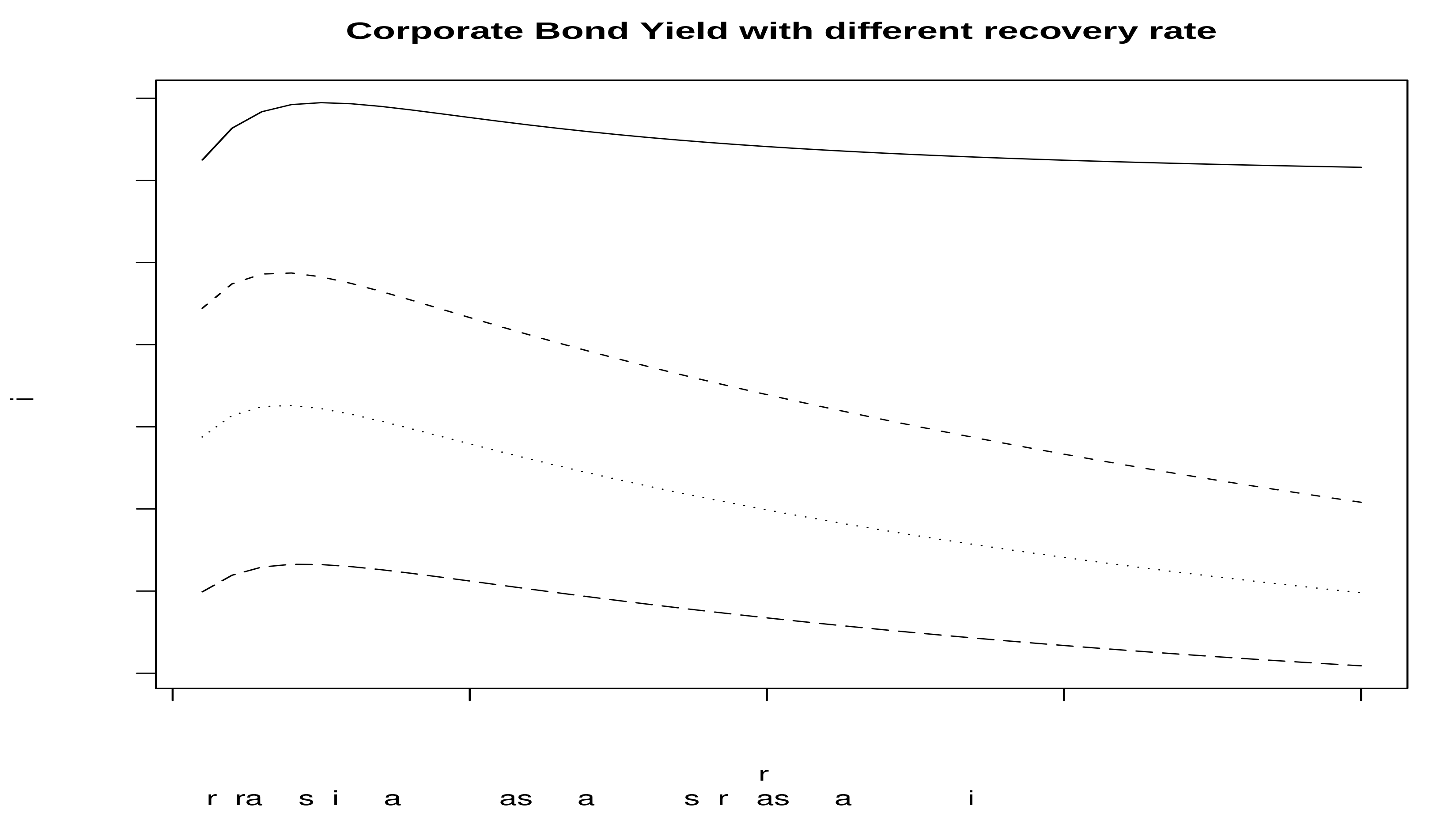
Hyopthèse : Les taux de recouvrement pour les différentes entreprises sont indépendants conditionnellement aux facteurs Z et Z_i. Le taux de recouvrement pour l'entreprise i est tel que :

$$R_{t+j,t+j+1} = \exp(-(\delta_{t+1} + \epsilon'_{t+1} Z_{t+1} + \theta'_{t+1} Zi_{t+1})) = \exp(-\omega'_t), \qquad (22)$$

où $\omega'_t = \delta_t + \epsilon'_t Z_t + \theta'_t Zi_t$ est l'intensité de recouvrement et δ_t, ϵ'_t , θ'_t des fonctions de l'information contenue dans les facteurs Z_t et Z_i. Ce sont aussi des paramètres de sensibilités pour le recouvrement. Les taux de recouvrement étant compris entre 0 et 1, les sensibilités de recouvrement doivent vérifier comme les intensités de survie : $\omega'_t \geq 0$.

Résultats Loss Given Default




Corporate Bond Yield with different recovery rate

5. Conclusion