

Processus autorégressifs composés  
Modèle affine de crédit  
Application à l'analyse du risque de  
crédit

Stefan Duprey \*



# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Processus autorégressifs composés</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1      | Analyse mathématique des processus autorégressifs composés . . . . .  | 7         |
| 1.1.1    | Introduction . . . . .  | 7         |
| 1.1.2    | Définition des processus autorégressifs composés . . . . .  | 8         |
| 1.1.3    | Analyse de l'opérateur espérance conditionnelle . . . . .   | 10        |
| 1.1.4    | Ordre d'autorégressivité . . . . .  | 15        |
| <b>2</b> | <b>Modélisation affine pour l'analyse du risque de crédit</b>   | <b>17</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .  | 17        |
| 2.2      | Description du modèle affine . . . . .  | 18        |
| 2.2.1    | Méthodologie du modèle . . . . .  | 18        |
| 2.2.2    | Hypothèses du modèle . . . . .  | 19        |
| 2.2.3    | Approche en temps continu . . . . .   | 20        |
| 2.2.4    | Approche alternative de la corrélation de défaut . . . . .  | 21        |
| 2.3      | Distribution jointe des duration . . . . .  | 21        |
| 2.3.1    | Cas général . . . . .   | 21        |
| 2.3.2    | Cas d'un unique émetteur . . . . .  | 22        |
| 2.3.3    | Cas d'un panier first-to-default . . . . .  | 23        |
| 2.3.4    | Cas particulier avec sensibilités constantes . . . . .  | 23        |
| 2.4      | Structure à terme affine et risque de crédit . . . . .  | 24        |
| 2.4.1    | Spécification du facteur escompte stochastique . . . . .  | 24        |
| 2.4.2    | Calcul du prix des obligations . . . . .  | 24        |
| 2.4.3    | Décomposition des spreads pour des zero coupons des entreprises avec un taux de recouvrement nul . . . . .  | 25        |
| 2.4.4    | Décomposition des spreads pour des paniers first-to-default et structure par terme de rentabilité . . . . . | 26        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.4.5    | Facteurs observables . . . . .  | 27        |
| 2.4.6    | Détermination de la VaR de crédit . . . . .   | 28        |
| 2.5      | Perte En Cas De Defaut ou LGD . . . . .   | 28        |
| 2.5.1    | Extension du modèle affine pour le risque de crédit . . . . .   | 29        |
| 2.5.2    | Distributin marginale et Correlation entre le defaut et la LGD . . . . .  | 29        |
| <b>3</b> | <b>Calcul avec le logiciel R</b>  | <b>31</b> |
| 3.1      | Calcul du prix des bons du trésor-zéro coupon . . . . .   | 31        |
| 3.1.1    | Initialisation des variables . . . . .  | 31        |
| 3.1.2    | Treasury Bond-Zero Coupon . . . . .   | 32        |
| 3.1.3    | Corporate Bond-Zero Coupon with zero recovery rate . . . . .  | 32        |
| 3.1.4    | Décomposition du spread pour une obligation risquée d'entreprise-<br>zéro coupon avec un taux de recouvrement nul . . . . . | 33        |
| 3.1.5    | First-to-Default Basket . . . . .   | 35        |
| 3.1.6    | Loss Given Default . . . . .  | 39        |
| 3.1.7    | Résultats pour les obligations risquées d'entreprise . . . . .  | 44        |
| 3.1.8    | Résultats pour les paniers first-to-default . . . . .   | 45        |
| 3.1.9    | Résultats pour les obligations d'entreprise avec des taux de<br>recouvrement distincts . . . . .                            | 46        |

# Introduction générale

Ce document présente les récapitulatifs de deux articles [1] et [2].



# Chapitre 1

## Processus autorégressifs composés

Ce chapitre détaille les caractéristiques mathématiques des processus dits "autorégressifs composés".

Il analyse et résume les résultats de [2], qui s'intéresse exclusivement aux propriétés mathématiques et aux applications de ces processus autorégressifs composés.

### 1.1 Analyse mathématique des processus autorégressifs composés

Nous présentons ici les motivations de l'étude de ces processus autorégressifs composés.

#### 1.1.1 Introduction

L'article [2] introduit un modèle de dynamique stochastique non linéaire appelé **compound autoregressive model (CAR)**, avec la même propriété autorégressive markovienne que les processus autorégressifs gaussiens qui spécifie une loi gaussienne conditionnellement au passé  $y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim IN(0, \sigma^2)$ .

Les processus CAR se prêtent également à la prédiction à l'horizon  $h$   $E[y_{t+h}|y_t]$ , l'opérateur d'espérance conditionnelle au passé laissant invariant les polynômes d'Hermite. La prédiction des facteurs non observables latents via un filtre de Kalman est également possible.

Les modèles conditionnellement gaussiens sont importants en raison de la simple expression du premier moment conditionnel  $E[\exp(-uy_t)|y_{t-1}] = \exp[-u\rho y_{t-1} + \frac{u^2\sigma^2}{2}]$  et de son application au paradigme moyenne-variance pour les investisseurs avec une fonction d'utilité CARA (Constant Absolute Risk Aversion).

Pour l'évaluation de produits dérivés, une expression explicite de la distribution risque-neutre peut s'obtenir à partir du théorème de Girsanov (Black-Scholes et Vasicek modèles).

Il existe trois possibilités distinctes pour définir une relation non-linéaire entre  $Y_t$  et  $Y_{t-1}$  :

- La distribution jointe peut être définie par la fonction de répartition, que l'on peut écrire à l'aide d'une copule et des deux fonctions de répartition marginales  $F(y_t, y_{t-1}) = C(F_1(y_t), F_2(y_{t-1}))$ .
- La distribution jointe peut s'analyser par la fonction de densité jointe et sa décomposition non-linéaire canonique :

$$f(y_t, y_{t-1}) = f_1(y_t)f_2(y_{t-1}) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(y_t) \psi_n(y_{t-1}) \right)$$

, où  $f_1$  (resp.  $f_2$ ) sont les densités de probabilité marginale de  $Y_t$  (resp.  $Y_{t-1}$ ) et  $0 \leq \lambda_n < 1$  sont la suite décroissante des corrélations non linéaires et canoniques (base propre pour l'opérateur espérance conditionnelle). La spécification des  $\lambda_n$  permet de spécifier complètement la densité marginale jointe.

- La distribution jointe peut être spécifiée par la transformée de Laplace  $E[uY_t + vY_{t-1}]$

Nous développons une approche fondée ici sur la transformée de Laplace. Un modèle autorégressif composé définit sa loi conditionnelle au passé à partir de sa log-transformée de Laplace, qui est une fonction affine des valeurs passées du processus (nous expliquons l'appellation processus autorégressif composé).

Nous donnons la forme nécessaire vérifier par la distribution invariante du processus. Nous traitons le problème des prédictions non linéaires à un horizon quelconque en examinant la décomposition spectrale de l'opérateur espérance-conditionnelle.

La condition de réversibilité temporelle est ensuite discutée.

Nous donnons l'exemple de de différents CAR réversible (gaussien autorégressif, gamma autorégressif et le processus de Poisson).

Les équations filtrantes et lissantes correspondantes au CAR sont présentées.

L'inférence statistique non paramétrique est appliqué à notre modèle.

L'application du modèle à l'évaluation de produits dérivés est discuté.

### 1.1.2 Définition des processus autorégressifs composés

**Log-Laplace transformée conditionnelle : fonction affine des valeurs passées du processus**

**Définition 1.** Soit  $(Y_t, t \geq 0)$  un processus à  $n$  dimensions et notons  $\underline{Y}_{t-1}$  l'ensemble des informations jusqu'à et incluant  $t - 1$ . Le processus  $Y$  est un processus autorégressif d'ordre  $p$  **CAR(p)** si et seulement si la distribution conditionnelle de  $Y_t$  sachant  $\underline{Y}_{t-1}$  admet une transformée de Laplace conditionnelle du type :

$$E \left[ \exp(u'Y_t) | \underline{Y}_{t-1} \right] = \exp \left[ -a'_1(u)Y_{t-1} - \dots - a'_p(u)Y_{t-p} + b(u) \right] \quad (1.1)$$

, où  $a_p \neq 0$ .

Les fonctions  $a_i$  et  $b$  définissent le processus, qui est markovien d'ordre  $p$ . La transformée de Laplace n'est pas forcément défini pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ . Nous supposons



son support défini dans un voisinage de 0. Sous cette hypothèse, la transformée de Laplace caractérise la distribution.

On peut toujours ramener un CAR(p) à un CAR(1) d'après la proposition suivante :

**Proposition 1.** *Le processus  $Y$  est un CAR(p) si et seulement si le processus  $(\tilde{Y}_t) = (Y'_t, Y'_{t-1}, \dots, Y'_{t-p})$  est un CAR(1).*

## Origine de la dénomination et exemples

### Les processus à valeurs entières

Supposons que  $Y_{t-1}$  compte le nombre d'individus dans une queue à la fin de la période  $t - 1$ .  $\epsilon_t$  est le nombre d'individus arrivant dans la queue durant la période  $t$  et  $Z_t$  est le nombre d'individus parmi ceux en attente  $Y_{t-1}$  qui sont servis pendant cette période. On a  $Y_t = Z_t + \epsilon_t$ . Il n'est pas possible de spécifier une autorégression linéaire déterministe  $Z_t = \rho Y_{t-1}$  et  $Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$ , où  $\rho$  est la probabilité d'être servi. En effet,  $Z_t$  doit prendre des valeurs entières.

On peut remplacer cette autorégression stochastique par une autorégression stochastique :

$$Y_t = \sum_{i=1}^{Y_{t-1}} Z_{i,t} + \epsilon_t \quad (1.2)$$

, où les variables  $Z_{i,t}$  suivent une loi de Bernouilli  $\mathbb{B}(1, \rho)$ . Plus généralement, soit  $Z_{i,t}, (i, t) \in \mathbb{N}^2$  des variables aléatoires indépendantes et à valeurs entières. On suppose qu'elles admettent une transformée de Laplace de la forme  $E[\exp(-uZ)] = \exp(-a(u))$ . On suppose que la transformée de Laplace de  $\epsilon_t$  existe et vérifie :  $E[\exp(-u\epsilon)] = \exp(b(u))$ . Le processus défini par 1.2 admet la transformée de Laplace suivante conditionnellement au passé :

$$E[\exp(-uY_t) | Y^{t-1}] = \exp(-a(u)Y_{t-1} + b(u))$$

$Y_t$  s'analyse comme la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires indépendantes de même loi. C'est pourquoi ce processus est appelé un "**compound process**".

**Les processus à valeurs positives** On constate que l'on peut facilement générer des processus à valeurs positives, si l'on sait caractériser la positivité d'une variable aléatoire par des propriétés sur sa log-Laplace transformée. On peut montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.** *Soit  $Y$  une variable aléatoire dont la transformée de Laplace est définie et s'écrit  $\exp(b(u))$ . Le fait que  $Y$  soit à valeur positive est caractérisée par les propriétés suivante sur  $b$  :  $b$  une fonction  $C^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  telles que  $b(0) = 0$  et  $b$  vérifie la propriété de complète monotonicité :*

$$\forall j \in \mathbb{N}, (-1)^j \frac{d^j}{du^j} [\exp(b(u))] \geq 0 \quad (1.3)$$

### Distribution invariante

**Proposition 3.** *La log-Laplace transformée de la distribution invariante d'un processus CAR(1) vérifie :*

$$b(u) = c(u) - c(a(u))$$

Par conséquent, si la distribution invariante existe, on peut paramétrer la transformée de Laplace soit par  $a$  et  $b$ , soit par  $a$  et  $c$  :  $E[\exp(-uY_t)|Y^{t-1}] = \exp(-a(u)Y_{t-1} + c(u) - c(a(u)))$

### Prédiction à un horizon quelconque

**Proposition 4.** *Un processus stochastique CAR(1) vérifie :*

$$E[\exp(-uY_{t+h})|Y^t] = \exp(-a^{oh}(u)Y_t + \sum_{k=0}^{h-1} b(a^{ok}(u))) = \exp(-a^{oh}(u)Y_t + c(u) - c(a^{oh}(u))) \quad (1.4)$$

, où l'on remarque  $\sum_{k=0}^{h-1} b(a^{ok}(u)) = \sum_{k=0}^{h-1} c(a^{ok}(u)) - c(a^{o(k+1)}(u)) = c(u) - c(a^{oh}(u))$ . On déduit la condition nécessaire et suffisante d'ergodicité pour le processus stochastique :

**Corollaire 1.1.1.** *Soit un processus CAR(1) admettant une log-Laplace transformée invariante  $c$ . La transformée de Laplace conditionnelle tend vers une limite indépendante de la variable conditionnante si et seulement si :*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} a^{oh}(u) = 0, \quad \forall u. \quad (1.5)$$

### Invariance par aggrégation

**Proposition 5.** *Soit  $Y_{t,j}$ ,  $j = 1, \dots, J$ , dont la transformée de Laplace vérifie :*

$$E[\exp(u'Y_{t,j})|Y_{j,t-1}] = \exp[-a(u)'Y_{t,j} + b_j(u)] \quad (1.6)$$

La transformée de Laplace du processus  $Y_t = \sum_{j=1}^J Y_{t,j}$  vérifie également 1.6.

## 1.1.3 Analyse de l'opérateur espérance conditionnelle

### Moments conditionnelles

**Proposition 6.** *On a :*

$$E[Y_t^n | Y_{t-1}] = P_n(Y_{t-1}) \quad (1.7)$$

, où  $P_n$  est un polynôme de degré  $n$  dont le coefficient de plus haut degré est  $[\frac{da}{du}(0)]^n$

## Décomposition spectrale de l'opérateur d'espérance conditionnelle

**Proposition 7.** *Considérons l'opérateur d'espérance conditionnelle  $\psi \rightarrow T\psi$  défini par :*

$$T\psi(y) = E[\psi(Y_t)|Y_{t-1} = y] \quad (1.8)$$

*Cet opérateur admet les valeurs propres réels  $\lambda_n = [\frac{da}{du}(0)]^n$ ,  $n \geq 0$  et pour fonctions propres associées des polynômes  $P_n$  de degré  $n$ .*

L'opérateur espérance conditionnelle se décompose donc sur cette base propre de fonctions polynômiales. A chaque fonction  $\psi(Y_t) \sum_{n=0}^{\infty} \langle \psi, P_n \rangle P_n(Y_t)$ , l'opérateur associe la fonction de  $Y_t$  :  $E[\psi(Y_t)|Y_{t-1}] = \sum_{n=0}^{\infty} [\frac{da}{du}(0)]^n \langle \psi, P_n \rangle P_n(Y_t)$ .

On déduit la condition nécessaire pour la stationnarité du processus CAR(1) :

$$|\frac{da}{du}(0)| \leq 1 \quad (1.9)$$

## Processus réversibles

### Définition et caractérisation

**Proposition 8.** *Le processus CAR(1) est réversible si et seulement si la fonction  $\psi(u, v) = c(a(u) + v) + c(u) - c(a(u))$  est une fonction symétrique de  $u$  et  $v$ .*

La démonstration est immédiate en exprimant la symétrie de la transformée de Laplace de la distribution jointe de  $(Y_t, Y_{t-1})$  par la propriété de Markov.

**Proposition 9.** *Quand le processus  $Y_t$  est réversible :*

$$i) a(u) = \left(\frac{dc}{du}\right)^{-1} \left[ \frac{da}{du}(0) \left(\frac{dc}{du}(u) - \frac{dc}{du}(0)\right) + \frac{dc}{du}(0) \right]$$

*ii) La fonction  $\gamma(u) = \frac{d^2c}{du^2} o(\frac{dc}{du})^{-1}$  est quadratique.*

**Proposition 10.** *Supposons  $|\frac{da}{du}(0)| < 1$ . Pour un processus CAR(1) stationnaire et réversible, les fonctions propres  $P_n$ ,  $n \geq 0$ , de l'opérateur espérance conditionnelle sont orthogonales pour le produit scalaire associé à la distribution invariante  $f$ .*

**Proposition 11.** *Si  $|\frac{da}{du}(0)| < 1$  et si le processus CAR(1) est stationnaire et réversible, alors :*

$$f(y_t|y_{t-1}) = f(y_t) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{da}{du}(0) \right]^n P_n(y_t) P_n(y_{t-1}) \right] \quad (1.10)$$

, où  $P_n$  est la base orthogonale des fonctions polynômiales propre de l'opérateur conditionnel d'espérance.

**Corollaire 1.1.2.**

$$f_h(y_t|y_{t-h}) = f(y_t) \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{da}{du}(0) \right]^{hn} P_n(y_t) P_n(y_{t-h}) \right] \quad (1.11)$$

## Les différents processus CAR réversibles

Nous décrivons ici différents types de processus **CAR** classé selon les propriétés de l'équation caractéristique et ses racines  $\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 = 0$  associé à l'équation de Riccati.

### Les processus gaussiens autorégressifs

Les processus gaussiens autorégressifs sont obtenus avec  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  : la fonction  $\gamma$  est constante. Alors  $Y_t = \rho Y_{t-1} + \epsilon_t$ , où  $\epsilon_t$  est un bruit blanc gaussien et nous obtenons :

- Distribution conditionnelle :  $N(\rho y_{t-1}, 1)$
- Distribution marginale :  $N(0, \frac{1}{1-\rho^2})$
- Log-Laplace transformée :  $a(u) = u\rho$ ,  $b(u) = \frac{u^2}{2}$ ,  $c(u) = \frac{u^2}{2(1-\rho^2)}$
- Condition de stationnarité :  $|\frac{da}{du}(0)| = |\rho| < 1$
- Fonctions propres polynômiales : les polynômes d'Hermite.
- Distribution pour la prévision à l'horizon  $h$  :  $N(\rho^h y_{t-h}, \frac{1-\rho^{2h}}{1-\rho^2})$
- Fonction composée :  $a^{oh}(u) = \rho^h u$
- Fonction  $\gamma(u) = \frac{1}{1-\rho^2}$
- Log-Laplace transformée jointe  $\psi(u, v) = \frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 + v^2 + 2\rho uv)$

### Les processus de Poisson composés

Les processus de Poisson composés sont obtenus avec  $\beta_2 = 0$  : la fonction  $\gamma$  est affine. Alors  $Y_t = \sum_{i=1}^{Y_{t-1}} Z_{i,t} + \epsilon_t$ , où  $Z_{i,t} \sim P(\lambda(1-\alpha))$  et  $\epsilon_t \sim B(1, \alpha)$  est un bruit blanc gaussien et nous obtenons :

- Distribution conditionnelle :  $B(1, \alpha) * P(\lambda(1-\alpha))$
- Distribution marginale :  $P(\lambda)$
- Log-Laplace transformée :  $a(u) = -\log[\alpha \exp(-u) + 1 - \alpha]$ ,  $b(u) = -\lambda(1 - \alpha)[1 - \exp(-u)]$ ,  $c(u) = -\lambda[1 - \exp(-u)]$
- Condition de stationnarité :  $0 < \alpha < 1$
- Fonctions propres polynômiales : les polynômes de Charlier
- Distribution pour la prévision à l'horizon  $h$  :  $B(y_{t-h}, \alpha^h) * P(\lambda(1 - \alpha^h))$
- Fonction composée :  $a^{oh}(u) = -\log[\alpha^h \exp(-u) + 1 - \alpha^h]$
- Fonction  $\gamma(u) = -u$
- Log-Laplace transformée jointe  $\psi(u, v) = \lambda(2 - \alpha) + \lambda\alpha \exp(-u - v) + \lambda(1 - \alpha)[\exp(-u) + \exp(-v)]$  Cette distribution jointe est connue comme la distribution corrélée, bivariée jointe de Poisson.

### Les processus $\gamma$ composés

Les processus  $\gamma$  composés sont obtenus avec  $\beta_2 \neq 0$  et une racine double  $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 = 0$ . Alors la distribution conditionnelle  $Y_t|Y_{t-1}$  est défini par  $Y_t|X_t \gamma = (\delta + X_t)$  et  $X_t|Y_{t-1} \sim P(\beta Y_{t-1})$ . C'est la contre-partie en temps discret du modèle du processus de diffusion de Cox, Ingersoll et Ross.

- Distribution conditionnelle :  $\gamma(\delta, \beta y_{t-1})$
- Distribution marginale de  $Y_t$  :  $\frac{1}{1-\beta} \gamma(\delta)$
- Log-Laplace transformée :  $a(u) = \frac{\beta u}{1+u}$ ,  $b(u) = -\delta \log(1+u)$ ,  $c(u) = -\delta \log(1 + \frac{u}{1-\beta})$
- Condition de stationnarité :  $|\frac{da}{du}(0)| = |\beta| < 1$
- Fonctions propres polynômiales : les polynômes de Laguerre

- Distribution pour la prévision à l'horizon  $h$  :  $\frac{1-\beta^h}{1-\beta}\gamma(\delta, \beta^h \frac{1-\beta}{1-\beta^h} y_{t-h})$
- Fonction composée :  $a^{oh}(u) = \beta^h u [1 + \frac{1-\beta^h}{1-\beta} u]^{-1}$
- Fonction  $\gamma(u) = \frac{u^2}{\delta}$
- Log-Laplace transformée jointe  $\psi(u, v) = \delta \log[1 + \frac{uv+u+v}{1-\beta}]$

### Les processus de Bernoulli à régime changeant

Les processus de Bernoulli à régime changeant composés sont obtenus avec  $\beta_2 \neq 0$  et deux racines réelles distinctes  $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 > 0$ . Le processus est qualitatif avec deux valeurs admissibles 0 et 1, et correspond à une chaîne de Markov à deux états. Nous obtenons :

- Distribution conditionnelle :  $B(1, \alpha(1 - \gamma) + \gamma y_{t-1})$
- Distribution marginale :  $B(1, \alpha)$
- Log-Laplace transformée :  $a(u) = -\log[\frac{(1-(1-\alpha)(1-\gamma)) \exp(-u) + (1-\alpha)(1-\gamma)}{\alpha(1-\gamma) \exp(-u) + 1 - \alpha(1-\gamma)}]$ ,  $b(u) = \log(1 - \alpha(1 - \gamma) + \alpha(1 - \gamma) \exp(-u))$ ,  $c(u) = \log(\alpha \exp(-u)) + 1 - \alpha$
- Condition de stationnarité :  $|\frac{da}{du}(0)| = |\gamma| < 1$
- Fonctions propres polynômiales : les premiers polynômes de Krawtchouk
- Distribution pour la prévision à l'horizon  $h$  :  $B(1, \alpha(1 - \gamma^h) + \gamma^h y_{t-1})$
- Fonction composée :  $a^{oh}(u) = -\log[\frac{(1-(1-\alpha)(1-\gamma^h)) \exp(-u) + (1-\alpha)(1-\gamma^h)}{\alpha(1-\gamma^h) \exp(-u) + 1 - \alpha(1-\gamma^h)}]$
- Fonction  $\gamma(u) = -u(1 + u)$
- Log-Laplace transformée jointe  $\psi(u, v) = \log[(1 - \alpha)(1 - \alpha(1 - \gamma)) + \alpha(1 - \alpha)(1 - \gamma)(\exp(-u) + \exp(-v)) + \alpha(1 - (1 - \alpha)(1 - \gamma)) \exp(-(u + v))]$

### Les processus avec la $\gamma$ -fonction quadratique avec racines complexe conjuguées

Ces processus sont obtenus avec  $\beta_2 \neq 0$  et deux racines complexes conjuguées  $\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2 < 0$ . Nous obtenons :

- Log-Laplace transformée :  $a(u) = \arctan[\gamma \tan u]$ ,  $b(u) = -\log \cos u + \log \cos \arctan[\gamma \tan u]$ ,  $c(u) = -\log \cos u$
- Condition de stationnarité :  $|\frac{da}{du}(0)| = |\gamma| < 1$
- Fonction composée :  $a^{oh}(u) = \arctan[\gamma^h \tan u]$
- Fonction  $\gamma(u) = 1 + u^2$
- Log-Laplace transformée jointe  $\psi(u, v) = -\log[\cos(u + v) + (1 - \gamma) \sin u \sin v]$

### Représentation espace-états

**Un processus stochastique autorégressif non linéaire** Quand à la fois  $\exp[-a(u)Y_{t-1}]$  et  $\exp[b(u)]$  sont des transformées de Laplace, on introduit la représentation non-linéaire des **processus CAR(1)**. On définit le processus  $(Z_t)$  tel que la distribution conditionnelle de  $Z_t$  sachant  $Y_{t-1}$  admet une transformée de Laplace  $\exp[-a(u)Y_{t-1}]$  et  $\epsilon_t$  une variable conditionnellement indépendante de  $Z_t$  avec une transformée de Laplace  $\exp(b(u))$ . Il vient :

$$Y_t = Z_t + \epsilon_t \quad (1.12)$$

$$Z_t = \alpha(Y_{t-1}, \eta_t) \quad (1.13)$$

**Filtrage et lissage** Nous nous intéressons à la prédiction des processus  $(Z_t)$  et  $(\epsilon_t)$  connaissant le processus observable  $(Y_t)$ . On note  $g(z_t|y_{t-1})$  la distribution condi-

tionnelle de  $Z_t$  sachant  $Y_{t-1}$ , dont la transformée de Laplace s'écrit  $\exp[-a(u)y_{t-1}]$  et par  $h(\epsilon_t)$  la distribution marginale du bruit de transformée de Laplace  $\exp[b(u)]$ .

**Proposition 12.** 1. Les variables  $Z_t$ ,  $t$  variant, sont indépendants conditionnellement au processus observable.

2. La distribution conditionnelle de  $Z_t$  sachant toutes les valeurs de  $Y_t$  coïncide avec la distribution conditionnelle de  $Z_t$  sachant  $Y_{t-1}$  et  $Y_t$  seulement (réversibilité et propriété de Markov). Cette distribution filtrante est donnée par :

$$l(z_t|y_{t-1}, y_t) = \frac{g(z_t|y_{t-1})h(y_t - z_t)}{\int g(z|y_{t-1})h(y_t - z)dz} \quad (1.14)$$

3. La distribution lissante de  $\epsilon_t$  suit directement puisque  $\epsilon_t = y_t - z_t$ .

### Les différents exemples des processus CAR réversibles

#### Les processus gaussiens autorégressifs

- Distribution conditionnelle de  $Z_t$  : la masse de Dirac en  $\rho Y_{t-1}$
- Distribution marginale de  $\epsilon_t$  :  $N(0, 1)$
- Distribution lissante de  $Z_t$  : la masse de Dirac en  $\rho Y_{t-1}$
- Distribution lissante de  $Z_t$  : la masse de Dirac en  $Y_t - \rho Y_{t-1}$

#### Les processus gamma autorégressifs

- Distribution conditionnelle de  $Z_t|X_t\gamma(X_t)$  et  $X_t|Y_{t-1}P(\beta Y_{t-1})$  : c'est un mélange d'une masse de Dirac en zéro de point  $\exp(-\beta Y_{t-1})$  et d'une distribution continue de densité de probabilité :

$$[1 - \exp(-\beta Y_{t-1})]^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \left\{ \exp(-\beta Y_{t-1}) \frac{(\beta Y_{t-1})^x}{x!} \frac{1}{\Gamma(x)} \exp(-z) z^{x-1} \right\} 1_{z>0} \quad (1.15)$$

- Distribution marginale de  $\epsilon_t$  :  $\gamma(\delta)$  de densité de probabilité :

$$h(\epsilon) = \frac{1}{\gamma(\delta) \exp(-\epsilon) \epsilon^{\delta-1}} 1_{\epsilon>0}$$

- Distribution lissante de  $Z_t$  : c'est un mélange d'une masse de Dirac en zéro de poids

$$Y_t^{\delta-1} / \Gamma(\delta) \left( \sum_{x=0}^{\infty} \frac{Y_t^{\delta+x-1} (\beta Y_{t-1})^x \Gamma(x + \delta)}{x!} \right)^{-1}$$

et d'une distribution de probabilité continue de densité de probabilité suivante :

$$\left[ \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(\beta Y_{t-1})^x Y_t^{\delta+x-1}}{x! \Gamma(x + \delta)} \Gamma(\delta) \right]^{-1} \sum_{x=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\beta Y_{t-1})^x Y_t^{\delta+x-1}}{x! \Gamma(x)} \frac{1}{Y_t} \left( \frac{z}{Y_t} \right)^{x-1} \left( 1 - \frac{z}{Y_t} \right) 1_{1>z/Y_t>0} \right\}$$

#### Les processus de Poisson composés

- Distribution conditionnelle de  $Z_t$  :  $B(Y_{t-1}, \alpha)$
- Distribution marginale de  $\epsilon_t$  :  $P(\lambda(1 - \alpha))$
- Distribution lissante de  $Z_t$  :

$$l(z_t|y_{t-1}, y_t) = \frac{\alpha^z (1 - \alpha)^{y_{t-1}-z} [\lambda(1 - \alpha)]^{y_t-z}}{z! (y_{t-1} - z)! (y_t - z)!}, \quad 0 \leq z \leq \min(y_{t-1}, y_t)$$

### 1.1.4 Ordre d'autorégressivité

Il est facile de montrer que tout processus autorégressif d'ordre  $p$   $\text{CAR}(p)$  peut s'écrire comme un processus autorégressif d'ordre 1  $\text{CAR}(1)$ . Réciproquement, il est facile de construire un  $\text{CAR}(p)$  à partir d'un  $\text{CAR}(1)$ .

#### Définition

Considérons un processus  $\text{CAR}(1)$  de transformée de Laplace :

$$E[\exp(-u_1 Y_t) | Y_{t-1}] = \exp[-a(u_1) Y_{t-1} + b(u_1)]$$

, où  $b(u_1) = c(u_1) - c(a(u_1))$

#### Définition





# Chapitre 2

## Modélisation affine pour l'analyse du risque de crédit

### 2.1 Introduction

La mesure et la gestion des risques est l'un des facteurs clés de la concurrence entre banques. Les différents risques bancaires peuvent aujourd'hui être classés en cinq catégories :

- **risque de crédit** : risque lié à un changement de solvabilité ou au défaut d'un emprunteur, que ceux-ci résultent d'une évolution particulière ou d'évènements touchant le pays de la contrepartie.
- **risque de contrepartie** : risque de crédit lié à une transaction de marché avec un tiers pour lequel le montant de l'exposition peut être affecté par une évolution des paramètres de marché.
- **risque de marché et de liquidité** : risque lié aux variations des paramètres de marché (taux de change, taux d'intérêt ...etc) et à l'illiquidité des actifs.
- **risque opérationnel** : risque de perte lié à une défaillance d'un process métier ou une erreur humaine.
- **risque de refinancement et de gestion des actifs/passifs** : risque lié à l'incapacité d'une banque d'honorer ces engagements.

La crise financière actuelle a mis en évidence l'importance d'une bonne gestion de ces différents risques au sein des institutions financière. De ce fait la modélisation du risque revêt donc d'un intérêt majeur afin d'une part de mesurer le risque de crédit contenu dans les différents portefeuilles et d'autre parts pour évaluer le prix des dérivés de crédit.

De plus la réglementation de Bale2 a renforcé les exigences réglementaires en terme d'évaluation du risque de crédit ce qui oblige les établissements financiers à évaluer avec beaucoup plus de finesse leur risque de contrepartie. Effectivement, l'optimisation de l'allocation des fonds propres dépend fortement de la justesse de leur modélisation du risque de crédit.

L'objectif de cet article est de décrire un modèle économétrique robuste permettant de valoriser un portefeuille d'obligations de sociétés et de fournir un meilleur calcul

de la VaR de crédit qui est un indicateur de risque très suivi par les banques. Ce modèle va aussi permettre de combler les lacunes des modèles actuellement utilisés tel que les modèle mono et multifactoriels dans l'industrie financière. Ce sont principalement :

- Non prise en compte de la corrélation entre les taux sans risque et les défauts, alors que les taux évoluent de manières stochastiques.
- Une corrélation de défauts généralement grossière et qui ne prend pas en compte la spécificité de chaque firme et la durée des contrats.
- l'inefficience des outils basés sur les modèles de « Merton » qui ne prennent pas en compte l'information contenue dans le prix des obligations.
- la relation entre la perte en cas de défaut (LGD) et le taux de recouvrement est souvent négligée.

Ce nouveau modèle va ainsi s'appuyer sur deux facteurs. Un premier facteur spécifique à chaque firme comme par exemple une décision d'investissement et un deuxième facteur systémique qui corrèle toutes les obligations du portefeuille. Ces deux facteurs suivent tous un processus autorégressif composé (CAR).

La première partie de cet article va décrire le nouveau modèle affine en présentant les hypothèses de base du modèle, un zoom sera ensuite fait sur le modèle affine en temps continue et le modèle sera comparé à différents approches alternatives du défaut de corrélation.

Dans la deuxième partie, nous allons présenter la distribution jointe des durations. La troisième partie va décrire le modèle de pricing et dans la quatrième partie nous présenterons des exemples numériques et enfin dans la cinquième nous étudierons des extensions de la perte en cas de défaut (LGD).

## 2.2 Description du modèle affine

Nous présentons dans cette section la méthodologie du modèle, les hypothèses et les différentes approches.

### 2.2.1 Méthodologie du modèle

L'objectif de l'utilisation des modèles affines est de pouvoir spécifier des facteurs afin de modéliser la corrélation des défauts existant dans les portefeuilles de créances détenus par les banques. Cette partie va décrire les différentes étapes qui grâce aux modèles affines en temps discret vont permettre d'étudier la relation entre les spreads de crédits observés et le prix des obligations. Les étapes de la méthodologie sont :

- définir les facteurs spécifiques aux entreprises et globaux qui permettent de capturer toute l'information nécessaire.
- spécifier le facteur d'escompte stochastique.
- définir la fonction d'intensité de survie conditionnelle aux facteurs.
- calculer le prix des obligations risqués et des dérivés de crédit avec la loi conditionnelle des facteurs.

### 2.2.2 Hypothèses du modèle

Pour étudier ce modèle, nous allons considérer un portefeuille composé de  $n$  obligations d'entreprises différentes ayant une même date de naissance. Cette date de naissance peut être par exemple la date de création de l'entreprise.

On note  $\tau_i, i = 0, \dots, n$  la date de défaut de l'entreprise  $i$  ou encore sa durée de vie.

**Hypothèse 1.** *Les facteurs spécifiques aux entreprises  $Z_i$  et le facteur global ou systématique  $Z$  sont indépendants, markoviens et tels que leurs transformées de Laplace de leurs lois de transition vérifient :*

$$E[\exp(u'Z_{t+1}|Z_t)] = \exp[a_g(u)'Z_t + b_g(u)] \quad (2.1)$$

$$E[\exp(u'Z_{t+1}^i|Z_t^i)] = \exp[a_c(u)'Z_t^i + b_c(u)] \quad (2.2)$$

Les facteurs  $(Z)$  et  $(Z^i)$  suivent des processus autorégressifs composés (**CAR**) (leur distributions conditionnelles sont définies par leurs log-transformées de Laplace).

D'après cette hypothèse, la population est supposée homogène, c'est-à-dire que les distributions des facteurs spécifiques sont indépendantes des entreprises. En d'autres termes, les facteurs sont propres aux entreprises et leur distribution sont communes à toutes.

De plus il faut noter que les facteurs n'existent que jusqu'à la date de défaut alors les facteurs généraux sont définis avant et après. Ceci explique l'indépendance entre les facteurs spécifiques et systématiques.

**Hypothèse 2.** *Les dates de défaut  $\tau_i, i = 0, \dots, n$  sont indépendantes conditionnellement aux facteurs  $Z$  et  $Z_i$ . L'intensité de survie conditionnelle est telle que :*

$$P[\tau_i > t+1 | \tau_i > t, Z, Z_i, i = 1, \dots, n] = P[\tau_i > t+1 | \tau_i > t, Z_{t+1}, Z_{i,t+1}]$$

$$P[\tau_i > t+1 | \tau_i > t, Z, Z_i, i = 1, \dots, n] = \exp(-(\alpha_{t+1} + \beta'_{t+1}Z_{t+1} + \gamma'_{t+1}Z_{i,t+1}))$$

$$P[\tau_i > t+1 | \tau_i > t, Z, Z_i, i = 1, \dots, n] = \exp(-\lambda'_{t+1}), \quad \forall t \quad (2.3)$$

, où  $\lambda'_t = \alpha_t + \beta'_t Z_t + \gamma'_t Z_{i,t}$  est l'intensité de survie et  $\alpha_t, \beta'_t, \gamma'_t$  des fonctions de l'information contenu dans les facteurs  $Z_t$  et  $Z_{i,t}$ . Ce sont aussi des paramètres de sensibilités.

Cette hypothèse implique des conditions d'une part sur la distribution des paramètres de sensibilités et d'autre part sur les facteurs explicatifs. Ainsi l'intensité de survie dépend à la fois des paramètres de sensibilité  $\alpha_t, \beta'_t, \gamma'_t$  et des facteurs  $Z_t$  et  $Z_{i,t}$ . Les paramètres  $\alpha_t, \beta'_t, \gamma'_t$  permettent par exemple de capturer l'information sur la maturité des entreprises car le taux de survie d'une vieille entreprise n'est pas le même que celui d'une nouvelle entreprise. Les paramètres  $Z_t$  et  $Z_{i,t}$  vont fournir les informations sur la conjoncture économique et sur les choix stratégiques de chaque entreprise.

### 2.2.3 Approche en temps continu

Le modèle affine décrit précédemment est le plus utilisé aujourd'hui en finance car il est facile à implémenter, c'est un modèle à temps discret. L'approche en temps continu a été essentiellement construite pour étudier des processus de saut, des processus d'Ornstein-Uhlenbeck et des processus CIR. Cette approche est moins flexible que le temps discret, c'est l'un de ces inconvénients majeurs. Dans cette partie nous allons décrire l'approche en temps continu et présenter ces inconvénients.

#### Description du modèle en temps continu

En temps continu les paramètres  $Z_t$  et  $Z_t^i$  doivent aussi suivre un processus en temps continu, alors que le temps de défaut peut prendre n'importe quelle valeur positive. Les hypothèses du modèle affine s'écrivent comme suit :

**Hypothèse 3.** *Un facteur en temps continu est affine si la transformée de Laplace conditionnelle est une fonction exponentielle affine de la valeur courante et ce pour tout horizon  $h$ .*

$$E(\exp(u'Z_{t+h}|Z_t) = \exp[(a_g(u, h)'Z_t + b_g(u, h)], \quad \forall h \in [0, +\infty[ \quad (2.4)$$

L'intensité de survie dans le cas continu s'écrit :

$$\lambda_t = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P[t < \tau_i \leq t + dt, Z, Z_i]}{dt} \quad (2.5)$$

où  $\lambda_t = \alpha_t + \beta_t Z_t + \lambda_t Z_i$  ou  $\alpha_t, \beta_t, \lambda_t$  sont des paramètres de sensibilité.

#### Flexibilité du modèle continu

Le gros inconvénient du modèle affine en temps continu est son manque de flexibilité et sa complexité dans son implémentation.

**Manque de flexibilité des processus affine en temps continu :** En temps discret les différents facteurs à analyser doivent suivre un processus autorégressif composé, par contre en temps continu ils doivent suivre un processus affine en temps continu afin de pouvoir leur appliquer le modèle en temps continu. Cette restriction tient du fait que tout facteur qui suit un processus affine continu, sa discrétisation est un (Car), ainsi le modèle affine à temps discret peut être appliqué, alors que la réciproque n'est pas vraie.

Par exemple, dans le cas des processus Gaussien, des processus affine en temps continu sont des processus de type Ornstein-Uhlenbeck, leur discrétisation permet d'obtenir des processus de type VAR(1) qui sont bien des processus CAR dont l'équation est :  $Z_t = FZ_{t-1} + \mu + \epsilon_t, \epsilon_t \sim IN(0, \sigma^2)$ .

La seule restriction est que la matrice  $F = \exp(A)$  soit strictement positive, les valeurs propres soient des réels et la fonction de corrélation des facteurs est une combinaison linéaire des facteurs. Les processus gaussiens (Car) tel que le bruit blanc

gaussien, le system récuratif gaussien et le processus gaussien avec des valeurs propres complexes n'ont pas de contreparties en temps continu, ainsi le modèle affine en temps continu ne peut leur être appliqué.

#### **Manque de flexibilité pour spécifier l'intensité de défaut :**

L'approche en temps continu suppose implicitement l'existence d'une infinitésimale intensité de défaut, et par conséquence que le temps de défaut suit une distribution continue. Ce qui n'est pas compatible avec l'idée que le temps de défaut correspond plus à la date de paiement de la dette comme dans le modèle de Merton et de ce fait doit suivre un modèle en temps discret.

### **2.2.4 Approche alternative de la corrélation de défaut**

Il existe d'autres approches en plus du modèle affine pour modéliser le temps de défaut d'une entreprise.

- La première approche est de spécifier directement la distribution jointe des temps de défaut de chaque entreprise. Cette approche s'appuie sur la théorie des copules qui va permettre d'étudier la dépendance entre la durée de vie des obligations en fonction d'une maturité donnée.
- La deuxième approche est basée sur l'interprétation de la fonction de survie introduit par Bremaud :  $P[\tau_i > t] = \exp[\lambda_u du] = \exp[-\lambda_u^i du < E_i]$ , où  $E_i$  est une variable exponentielle indépendante de l'intensité stochastique.

## **2.3 Distribution jointe des duration**

Dans ce chapitre, nous allons étudier la distribution des durations et de leurs variations dans le temps. On va considérer dans un premier temps le cas de sensibilités dépendantes de l'histoire et dans un second temps, le cas particulier de sensibilités constantes dans le temps.

### **2.3.1 Cas général**

Sous les hypothèses du modèle affine, il est possible de calculer explicitement la fonction de survie jointe conditionnelle, dépendant de l'information disponible à la date  $t$ . Quand cette information est exhaustive, c'est à dire disponible dans les valeurs passées et présentes des facteurs spécifiques, la fonction de survie conditionnelle peut être définie pour n'importe quel sous ensemble  $S$  de la population à risque ( $PaR$ ), c'est à dire un sous ensemble  $PaR_t$  d'entreprise non défaillantes à la date  $t$ .

$$S_t^c(h_i, i \in S) = P[\tau_i > t + h_i, i \in S | PaR_t, (\tau_i | j \in PaR'_t), Z_t, Z_t^j, j = 1, \dots, n]$$

avec  $PaR_t = \{i | \tau_i > t\}$  la population à risque et  $PaR'_t$  son complément

**Proposition 13.** *La fonction de survie conditionnelle est égale à :*

$$S_t^c(h_i, i \in S) = \exp \left[ - \sum_{k=1}^{h'} n_{t+k} \alpha_{t+k} \right] \exp [B_g^{-[n][\beta]}(t, t+h) + A_g^{-[n][\beta]}(t, t+h)' Z_t] \\ \times \exp \left[ \sum_{i \in SB_c^{-[\gamma]}(t, t+h_i)} + \sum_{i \in SA_c^{-[\gamma]}(t, t+h_i)} Z_t^i \right]$$

Avec pour toute suite déterministe  $[u] = (u_t)$ , les opérateurs  $A[u]$  et  $B[u]$  étant récursivement définis par :

1.  $A^{[u]}(t, t+h) = a[u_{t+1} + A^{[u]}(t+1, t+h)]$ .
2.  $B^{[u]}(t, t+h) = b[u_{t+1} + A^{[u]}(t+1, t+h)] + B^{[u]}(t+1, t+h)$ .
3.  $A^{[u]}(t, t) = 0 \forall t, \forall h > 0$
4.  $B^{[u]}(t, t) = 0 \forall t, \forall h > 0$
5.  $h' = \max_{i \in S} h_i$

, la suite déterministe  $[n]$  définie par  $n_{t+k} = h_i \geq k, i \in S$  ;  $[n][\lambda] = n_t \lambda_t$  ;

Cette première proposition montre que la fonction de survie conditionnelle est facilement calculable numériquement à partir d'équations récursives en temps discret. Cette implémentation numérique doit être comparée avec l'utilisation des modèles affines en temps continu. En temps continu, il est nécessaire de résoudre numériquement des équations de Riccati également à partir d'équations récursives en temps discret. Mais ces itérations approximatives sont faites à une échelle de temps beaucoup plus petite et donc avec un nombre beaucoup plus important d'itérations. De plus, ces systèmes récursifs sont des approximations et ne sont en général pas compatibles avec les conditions d'absence d'opportunité d'arbitrage.

La proposition peut être utilisée pour dériver la distribution des durations données. Elle peut également être utilisée pour dériver la distribution du premier défaut d'un panier de créances. Ces calculs sont nécessaires pour les dérivés crédit actuellement échangés sur le marché.

### 2.3.2 Cas d'un unique émetteur

Considérons une entreprise émettant une obligation, notée  $i$ . La fonction de survie conditionnelle spécifique à cette entreprise est égale à  $P[i > t + h_{ji} > t; Z_t; Z_t^i]$ . Elle correspond à la fonction de survie jointe évaluée avec  $S = i$ ,  $h_i = h$  et  $n_{t+k} = 1, \forall 1 \leq k \leq h$ .

**Corollaire 2.3.1.**

$$P[\tau_i > t + h | \tau_i > t, Z_t, Z_t^i] = \\ \exp \left[ - \sum_{k=1}^h n_{t+k} \alpha_{t+k} + B_g^{-[\beta]}(t, t+h) + A_g^{-[\beta]}(t, t+h)' Z_t \right] \times \exp [B_c^{-[\gamma]}(t, t+h_i) + A_c^{-[\gamma]}(t, t+h_i)' Z_t^i]$$

### 2.3.3 Cas d'un panier first-to-default

Considérons maintenant un panier first-to-default pour un ensemble  $S$  d'émetteurs non défaillants en  $t$  et  $S = \min fi 2SPaRtgi$ . La fonction de survie conditionnelle spécifique à cette entreprise est égale à :  $P[S > t + h | PaRt; SPaRt; Z_t; Z_t^i; i2S]$ . Elle correspond à la fonction de survie jointe évaluée avec  $hi = h, \forall i \in S$  et  $n_{t+k} = n = Card(S) \forall 1 \leq k \leq h$ .

**Corollaire 2.3.2.**

$$P[\tau_S^* > t+h | PaRt, S \subseteq Par_t, Z_t, Z_t^i] = \exp[-n \sum_{k=1}^h n_{t+k} \alpha_{t+k} + B_g^{-n[\beta]}(t, t+h) + A_g^{-n[\beta]}(t, t+h)' Z_t] \\ \times \exp[n B_c^{-[\gamma]}(t, t+h_i) + A_c^{-[\gamma]}(t, t+h_i)' Z_t^i], \text{ avec } n[\beta] = n\beta_{t+k}$$

Même si les expressions des fonctions de survie et les deux corollaires semblent lourds, ils sont facile à implémenter à partir d'équations récurrentes. On remarque que la distribution des dates de premier défaut ne dépend pas des états individuels des entreprises.

Cela signifie que la probabilité de premier défaut d'un panier qui contient des entreprises en difficulté financière est identique à celle d'un autre panier où aucune des entreprises n'est en difficulté si l'état moyen est le même. C'est une conséquence directe de l'hypothèse d'homogénéité.

### 2.3.4 Cas particulier avec sensibilités constantes

Dans le cas général, la probabilité de survie conditionnelle d'une entreprise  $i$  émettant une obligation varie avec  $t$  à cause de l'évolution stochastique des facteurs  $Z_t$  et  $Z_t^i$  mais aussi à cause de l'âge déterministe modélisé par les coefficients de sensibilités.

Nous traitons ici le cas particulier dans lequel ces coefficients sont constants. Dans ce cas, les trois précédents corollaires permettent d'obtenir des expressions fermées des probabilités conditionnelles de survie.

**Corollaire 2.3.3.** *Quand les sensibilités aux facteurs sont constantes, on a :*

$$P[\tau_i > t+h | \tau_i > t, Z_t, Z_t^i] = \\ \exp[-h\alpha + \sum_{j=0}^{h-1} b_{g,-\beta}[a_{g-\beta}^{oj}(0)] + [a_{g-\beta}^{oj}(0)' Z_t] + \sum_{j=0}^{h-1} b_{c,-\gamma}[a_{c-\gamma}^{oh}(0)] \times \exp[a_{c-\gamma}^{oh}(0)' Z_t^i] \\ P[\tau_i^* > t+h | PaRt, S \subseteq Par_t, Z_t, Z_t^i, i \in S] = \\ \exp[-nh\alpha + \sum_{j=0}^{h-1} b_{g,-\beta}[a_{g-n\beta}^{oj}(0)] + [a_{g-n\beta}^{oh}(0)' Z_t]] \times \exp[n \sum_{j=0}^{h-1} b_{c,-\gamma}[a_{c-\gamma}^{oj}(0)] + a_{c-\gamma}^{oh}(0)' \sum_{i \in S} Z_t^i]$$

L'expression impliquant  $T_s$  montre les effets des facteurs généraux et spécifiques. La probabilité de survie dépend du nombre  $n$  d'entreprises dans le panier et de la moyenne des  $Zi_t$ . Un point intéressant est la façon dont le nombre d'entreprises  $n$  apparaît dans le coefficient de translation des fonctions  $a_g$  et  $b_g$ .

## 2.4 Structure à terme affine et risque de crédit

La distribution jointe des facteurs et des défauts est adaptée pour faire de la prévision, mais reste insuffisante pour analyser la Var de crédit. Pour cela elle doit être complétée en spécifiant la distribution du risque neutre ou le facteur d'escompte stochastique. En effet, il n'est pas réaliste d'étudier indépendamment la structure à terme de taux et le risque de défaut. Dans cette partie, nous allons spécifier le facteur d'escompte stochastique, calculer le prix des zéro coupons, discuter des facteurs observables et déterminer le creditVar.

### 2.4.1 Spécification du facteur escompte stochastique

Le facteur d'escompte stochastique est la base de valorisation de tout produit dérivé ayant un sous-jacents sur les facteurs et les temps de défaut. Il est utilisé pour prendre en compte l'effet du temps et l'effet incertitude notamment pour valoriser les obligations zéro coupons.

Le prix à  $t$  d'un produit dérivé est :  $C_t(g, h) = E_t(M_{t,t+1} \times \dots \times M_{t+h-1,t+h} \times g_t + h)$ , où  $E_t$  est l'espérance conditionnelle historique à la connaissance des valeurs actuelles et passées des variables d'état, la connaissance de la population à risque et les dates de défauts des autres entreprises.

$M_t$  représente le facteur d'actualisation :

**Hypothèse 4.**

$$M_{t,t+1} = \exp(V_0 + V'Z_{t+1})$$

Il aurait été possible d'introduire les facteurs spécifiques  $Z_t^i$  dans l'expression du facteur d'escompte stochastique, mais cela aurait compliqué son interprétation puisque lorsqu'une entreprise fait faillite ses facteurs spécifiques ne sont plus définis et donc dépendent du temps. De plus, en introduisant les facteurs spécifiques  $Z_t^i$ , on introduit aussi la notion de correction du risque par rapport au nombre et à la structure des entreprises, ce qui n'est pas dans le périmètre de l'étude.

### 2.4.2 Calcul du prix des obligations

**Bon du trésor zéro coupon**

Le prix des zéro coupons bonds du trésor est donné par la formule suivante :

$$B(t, t+h) = E_t\left[\prod_{j=0}^{h-1} M_{t+j,t+j+1}\right] = E[\exp(\nu_0 h + \nu' \sum_{j=1}^h Z_{t+j}) | Z_t]$$



$$= \exp[\nu_0 h + \sum_{j=1}^h b_{g,\nu}[a_{g,\nu}^{oj}(0)] + a_{g,\nu}^{oh}(0)' Z_t]$$

, où le rendement géométrique  $r(t, t+h)$  est égal à :

$$\begin{aligned} r(t, t+h) &= -1/h \log[B(t, t+h)] \\ &= -\nu_0 - \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{h-1} b_{g,\nu}[a_{g,\nu}^{oj}(0)] - \frac{1}{h} a_{g,\nu}^{oh}(0)' Z_t \end{aligned}$$

### Obligations risquées zéro-coupon avec taux de recouvrement nul

Le prix des obligations risquées est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned} C_i(t, t+h) &= E_t[1_{\tau_i > t+h} \prod_{j=0}^{h-1} M_{t+j, t+j+1}] \\ &= E[\exp(\sum_{j=1}^h [\alpha_{t+j} + \beta'_{t+j} Z_{t+j} + \gamma'_{t+j} Z_{t+j}^i]) \exp(\nu_0 h + \nu' \sum_{j=1}^h Z_{t+j}) | Z_t] \\ &= E[\exp(\nu_0 h - \sum_{j=1}^h \alpha_{t+j} + \sum_{j=1}^h [\nu - \beta_{t+j}]' Z_{t+j} - \sum_{j=1}^h \gamma'_{t+j} Z_{t+j}^i) | Z_t] \\ &= \exp[\nu_0 h - \sum_{j=1}^h \alpha_{t+j}] \times \exp[B_g^{\nu-[\beta]}(t, t+h) + A_g^{\nu-[\beta]}(t, t+h)' Z_t] \times \exp[B_c^{-[\gamma]}(t, t+h) + A_c^{-[\gamma]}(t, t+h)' Z_t^i] \end{aligned}$$

le rendement géométrique  $c(t, t+h)$  est égal à :

$$\begin{aligned} c(t, t+h) &= -\frac{1}{h} \log(C_i(t, t+h)) \\ &= -\nu_0 h + \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h \alpha_{t+j} - \frac{1}{h} B_g^{\nu-[\beta]}(t, t+h) - \frac{1}{h} A_g^{\nu-[\beta]}(t, t+h)' Z_t \end{aligned}$$

### 2.4.3 Décomposition des spreads pour des zero coupons des entreprises avec un taux de recouvrement nul

Dans l'approche standard, le défaut est supposé indépendant du taux sans risque et sa valorisation est faite sous la probabilité historique. La valeur actuelle d'une obligation d'entreprise sans taux de recouvrement peut être définie comme suit :

$$C_t^a(t, t+h) = B(t, t+h) P[\tau_i > t+h | \tau_i > t, Z_t, Z_t^i]$$

En considérant le revenu actuariel nous avons :

$$Y_i^a(t, t+h) = r(t, t+h) + \Pi_i(t, t+h)$$

, où  $\Pi_i(t, t+h) =$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h} \log(P[\tau_i > t+k | \tau_i > t+k-1, Z_t, Z_t^i]) \\ & = -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \log P[\tau_i > t+k | \tau_i > t+k-1, Z_t, Z_t^i] \\ & = -\frac{1}{h} \sum_{k=1}^h \lambda_{t+k}^{i,f} \end{aligned}$$

Cette formule peut alors être interprétée comme la moyenne forward de l'intensité de défaut, cette intensité forward diffère  $\lambda_{t+k}^{i,f} = \log P[\tau_i > t+k | \tau_i > t+k-1, Z_t, Z_t^i]$  de l'intensité spot à cause du temps de référence des valeurs des facteurs. De ce fait la formule fréquemment utilisée pour définir la probabilité de défaut à partir des spreads n'est donc plus valide. Le but de cette section est d'apporter une décomposition précise du spread.

**Proposition 14.**

$$\begin{aligned} S_i(t, t+h) - \Pi_i(t, t+h) &= -\frac{1}{h} [A_g^{\nu-[\beta]}(t, t+h) - A_g^{-[\beta]}(t, t+h) - a_{g,\nu}^{oh}(0)]' Z_t \\ &\quad - [B_g^{\nu-[\beta]}(t, t+h) - B_g^{-[\beta]}(t, t+h) - \sum_{j=0}^{h-1} b_{g,\nu}[a_{g,\nu}^{oh}(0)]] \end{aligned}$$

Cette différence mesure les effets de la dépendance entre le défaut et le facteur d'escompte stochastique. Ainsi la proposition 4 propose la décomposition suivante pour les obligations d'entreprise :

Structure à terme des obligations entreprises sans taux de recouvrement = Structure à terme des bons du trésor + structure à terme de la moyenne des intensités de défaut + structure à terme de la dépendance entre le facteur d'escompte stochastique et le défaut.

La moyenne de l'intensité de défaut va absorber toutes les variations du spread alors que la dépendance entre le facteur d'escompte stochastique et le défaut va mesurer le terme de correction dans la décomposition du spread.

#### 2.4.4 Décomposition des spreads pour des paniers first-to-default et structure par terme de rentabilité

Le prix d'un first-to-default basket de maturité  $h$ , composé de  $n$  entreprises ne faisant pas défaut avant  $t+h$  est :

$$C(t, t+h) = E_t[M_{t,t+h} 1_{\tau^* > t+h}]$$

où  $\tau^* = \min_{i=1,\dots,n} \tau_i$ . Le calcul de ce prix est le même que celui présenté dans la section précédente. Pour simplifier les écritures nous décrirons uniquement les formules dans le cas où les sensibilités sont constantes. Les prix des paniers first-to-default, l'intensité de défaut et le spread sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
C(t, t+h) &= \exp(\nu_0 h - n\alpha h + \sum_{j=0}^{h-1} b_{g,\nu-n\beta}(a_{g,\nu-n\beta}^{oj}(0)) + (a_{g,\nu-n\beta}^{oh}(0))' Z_t \\
&\quad + n \sum_{j=1}^{h-1} b_{c,-\gamma}[a_{c,-\gamma}^{oj}(0)] + a_{c,-\gamma}^{oh}(0)' [Z_t^1 + \dots + Z_t^n] \\
S(t, t+h) &= n\alpha + \frac{1}{h} \left[ \sum_{j=1}^{h-1} b_{g,\nu}(a_{g,\nu}^{oj}(0)) \right] - b_{g,\nu-n\beta}[a_{g,\nu-n\beta}^{oj}(0)] \\
&= -nb_{c,-\gamma}[a_{c,-\gamma}^{oj}(0)] + \frac{1}{h} [a_{g,\nu}^{oh}(0) - a_{g,\nu-n\beta}^{oh}(0)]' Z_t \\
&= -\frac{1}{h} a_{c,-\gamma}^{oh}(0)' [Z_t^1 + \dots + Z_t^n] \\
\Pi(t, t+h) &= n\alpha - \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{h-1} [b_{g,n\beta}(a_{g,n\beta}^{oj}(0)) + nb_{c,-\gamma}[a_{c,-\gamma}^{oj}(0)]] - \frac{1}{h} a_{g,n\beta}^{oh}(0)' Z_t - \frac{1}{h} a_{c,-\gamma}^{oh}(0)' [Z_t^1 + \dots + Z_t^n]
\end{aligned}$$

**Proposition 15.** *La structure à terme des paniers first-to-default peut être décomposé comme suit :*

$$y(t, t+h) = r(t, t+h) + \Pi^*(t, t+h) + [\Pi(t, t+h) - \Pi^*(t, t+h)] + [S(t, t+h) - \Pi(t, t+h)]$$

Ce qui correspond à :

- La structure à terme des rendements des bons du trésor
- La structure à terme des défauts marginaux
- La structure à terme des corrélations de défaut
- La structure à terme de la dépendance entre le facteur d'escompte stochastique et le défaut

## 2.4.5 Facteurs observables

Jusqu'ici, nous n'avons pas parlé de l'interprétation des facteurs généraux et spécifiques, en particulier de leur observabilité. Il est généralement admis que les facteurs généraux  $Z$  inclus dans le facteur d'escompte stochastique peuvent être déduits des prix des Bons du Trésor grâce à la structure affine. Certains facteurs explicatifs ne sont pas observables.

Toutefois, ces facteurs créant des schémas de défaut génériques, ils sont déductibles à partir des observations faites à partir des prix des Bons du Trésor et des dérivés de crédit. Cette déduction est rendue possible grâce au caractère affine du modèle. De façon équivalente, le facteur  $Z$  peut être remplacé par des facteurs simulés que l'on

peut interpréter comme des rendements. Ce raisonnement effectué sur les facteurs généraux qui influencent seulement le défaut et auxfacteurs spécifiques également. Ils peuvent être déduits des rendements obligataires en utilisant l'observabilité de  $Z$ . Ainsi, la problématique de l'observabilité des facteurs est équivalente à la problématique de l'observabilité de la structure par terme des rendements, c'est-à-dire du nombre et de la forme des obligations risquées liquides.

### 2.4.6 Détermination de la VaR de crédit

Les différents résultats obtenus ci-dessus vont être utiliser pour calculer la VaR de crédit d'un portefeuille de d'obligations d'entreprises sans taux de recouvrement. Par exemple si nous considérons à la date  $t$  un portefeuille composé de  $S$  entreprises dont la quantité est  $x_{i,t}$  et la maturité de la créance est  $h = 1, \dots, H$ . La valeur courante du portefeuille est :

$$W_t = \sum_{i \in S} \sum_{h=1}^H x_{i,t}(h) C_i(t, t+h)$$

la valeur future est :

$$W_{t+1} = \sum_{i \in S \cap PaR_{t+1}} \sum_{h=1}^H x_{i,t}(h) C_i(t+1, t+h)$$

où  $S \cap PaR_{t+1}$  est l'ensemble des entreprises en vie à  $t+1$ .

En utilisant le modèle affine , on peut réécrire la valeur future du portefeuille de la manière suivante :

$$W_{t+1} = \sum_{i \in S \cap PaR_{t+1}} \sum_{h=1}^H \exp[a(h-1) + b'(h-1)Z_{t+1} + C'(h-1)Z_{t+1}^i]$$

où les coefficients  $a, b, c$  sont déduits des formules de pricing.

La VaR de crédit est donc le quantile de la distribution de la valeur future du portefeuille ( $W_{t+1}$ ) donnée à l'instant  $t$ . Cette distribution peut être approximée par la distribution de Monte-Carlo comme suit :

1. premièrement, déterminé la valeur future des facteurs spécifiques et généraux à partir de la distribution conditionnelle de  $Z_{t+1}$ .
2. deuxièmement, simulé indépendamment l'occurrence de défaut entre  $t$  et  $t+1$  pour chaque entreprise en vie et construire la valeur future des facteurs.

## 2.5 Perte En Cas De Defaut ou LGD

Cette section va traiter l'extension du modèle affine pour le risque de crédit, la corrélation entre le défaut et la perte en cas de défaut et la distribution marginale de la "LGD".

### 2.5.1 Extension du modèle affine pour le risque de crédit

La perte en cas de défaut ou LGD est égale à (1-taux le recouvrement)\*valeur de la créance à l'instant de défaut. La LGD et le taux de recouvrement sont deux variables stochastiques dont les valeurs sont comprises entre (0 et 1). La spécification affine peut aussi être facilement étendue au taux de recouvrement.

Le prix des obligations avec ou sans taux de recouvrement varie. Dans le cas d'une obligation sans taux de recouvrement son prix est défini comme suit :

$$C(t, t+h) = E_t\{\Pi_{j=0}^{h-1}[M_{t+j,t+j+1}(1 - D_{t+j,t+j+1})]\}$$

sans taux de recouvrement son prix est :

$$\begin{aligned} C(t, t+h) = & \sum_{k=1}^h E_t\{\Pi_{j=0}^{k-2}[M_{t+j,t+j+1}(1 - D_{t+j,t+j+1})M_{t+k-1,t+k}D_{t+k-1,t+k}[1 - LGD_{t+k-1,t+k}] \\ & + E_t\{\Pi_{k-1}^{j=0}[M_{t+j,t+j+1}(1 - D_{t+j,t+j+1})]\} \end{aligned}$$

où  $M_{t,t+1}$  représente le facteur d'escompte stochastique et  $D_{t,t+1}$  l'indicateur de défaut sur la période  $(t, t+1)$ .

C'est donc une évidence que le prix d'une obligation sans taux de recouvrement est plus élevé qu'une obligation avec taux de recouvrement. Cette représentation suppose que le facteur d'escompte stochastique dépend uniquement des facteurs et que le défaut et la LGD sont indépendants lorsque le facteur d'escompte stochastique a une valeur donnée.

Cette approche permet un traitement similaire de la probabilité de défaut et de la LGD. Cela évite les hypothèses comme le recouvrement de la valeur de marché dans laquelle on suppose que l'espérance risque neutre du taux de recouvrement est une fraction prédéterminée de l'espérance risque neutre de la valeur de marché.

Le prix des dérivés peut être écrits à l'aide de l'intensité de défaut et de l'espérance de la LGD.

$$\begin{aligned} C(t, t+h) &= E_t\{\Pi_{h-1}^{j=0}[M_{t+j,t+j+1}(1 - PD_{t+j,t+j+1})]\} \\ &= E_t\{\Pi_{h-1}^{j=0}(M_{t+j,t+j+1}\pi_{t+j,t+j+1})\} \end{aligned}$$

On peut introduire ici les spécifications affines exponentielles pour réécrire la perte attendue en cas de défaut (ELGD) ou pour le taux de recouvrement. Dans le modèle risque neutre ELGD et le taux de recouvrement sont toutes des fonctions exponentielles affines.

### 2.5.2 Distributin marginale et Correlation entre le default et la LGD

Le taux de recouvrement relativement faible et la probabilité de défaut élevé en cas de recession explique bien la corrélation qu'il existe entre le défaut et la perte

en cas de défaut. Pour cette raison tout modèle exponentiel affine doit vérifier cette caractéristique.

$$\begin{aligned}
Cov(DP, LGD) &= Cov(\exp[-Tr(AZ)], \exp(-Tr(BZ))) \\
&= E\exp\{-Tr(A+B)Z\} - E\exp[-Tr(AZ)]E\exp[-Tr(BZ)] \\
&= (1/\det(Id + 2(A+B))) - (1/\det(Id + 2A)) * (1/\det(Id + 2B))
\end{aligned}$$

Finalement, il est intéressant de mentionner que les spécifications exponentielles affines avec ARG, la distribution marginale et conditionnelle peut admettre une variété de patterns similaires pattern standard de la beta distribution. Plus précisément, cette distribution correspond à  $Y = \exp(-bZ)$  où  $Z$  suit une distribution gamma avec  $\nu$  degré de liberté.

la fonction de densité associée est :

$$f(y) = (1/\Gamma(\nu)) * (1/b^\nu)(-\log(y))^{\nu-1} y^{1/b-1}(y)$$

# Chapitre 3

## Calcul avec le logiciel R

### 3.1 Calcul du prix des bons du trésor-zéro coupon

#### 3.1.1 Initialisation des variables

Les sensibilités sont supposées constantes dans le temps :

Nous rappelons que le "**stochastic discount factor**" est modélisé par :

$$M_{t,t+1} = \exp(\nu_0 + \nu' Z_{t+1}) \quad (3.1)$$

Nous prenons pour valeur :

$$\nu_0 = -0.01 \text{ et } \nu = -0.2$$

La probabilité de survie sur une période pour l'entreprise  $i$  est modélisée à l'aide de sensibilités constantes dans le temps :

$$P[\tau_i > t + 1 | \tau_i > t, Z, Z^i, i = 1, \dots, n] = \exp(-\lambda_{t+1}^i), \quad \forall t, \quad (3.2)$$

où  $\lambda_t^i = \alpha_t + \beta_t' Z_t + \gamma_t' Z_t^i$  est l'intensité de survie et ici les différentes sensibilités sont supposées constantes :

$$\alpha_t = \alpha = 0.001, \quad \beta_t' = \beta' = 2 \text{ et } \gamma_t' = \gamma = 0.1$$

Les valeurs initiales des facteurs sont choisies égales à :

$$Z_0 = 0.003 \text{ et } Z_0^i = 0.3$$

Le facteur systémique et les facteurs spécifiques suivent un processus gamma régressif, où les fonctions  $a_g$ ,  $b_g$ ,  $a_c$  et  $b_c$  ont les expressions suivantes :

$$a_g(u) = \frac{\rho_g u}{1 - u d_g}, \quad \rho_g > 0, \quad d_g > 0, \quad u > 1/d_g$$

$$b_g(u) = -\lambda_g \log(1 - u d_g), \lambda_g > 0$$

$$a_c(u) = \frac{\rho_c u}{1 - u d_c}, \rho_c > 0, d_c > 0, u > 1/d_c$$

$$b_c(u) = -\lambda_c \log(1 - u d_c), \lambda_c > 0$$

La dynamique des facteurs est décrite à l'aide des valeurs suivantes :

$$\rho_g = 0.9, d_g = 0.1 \text{ et } \lambda_g = 0.1$$

$$\rho_c = 0.9, d_c = 0.1 \text{ et } \lambda_c = 0.1$$

### 3.1.2 Treasury Bond-Zero Coupon

Le prix et les rendements sont donnés par :

$$B(t, t+h) = E_t \left[ \prod_{j=0}^{h-1} M_{t+j, t+j+1} \right] = E[\exp(\nu_0 h + \nu' \sum_{j=1}^h Z_{t+j}) | Z_t]$$

$$B(t, t+h) = \exp[\nu_0 h + \sum_{j=0}^{h-1} b_{g, \nu}[a_{g, \nu}^{oj}(0)] + a_{g, \nu}^{oh}(0)' Z_t],$$

où le rendement géométrique  $r(t, t+h)$  est égal à :

$$r(t, t+h) = -\frac{\log[B(t, t+h)]}{h}$$

$$r(t, t+h) = -\nu_0 - \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{h-1} b_{g, \nu}[a_{g, \nu}^{oj}(0)] - \frac{1}{h} a_{g, \nu}^{oh}(0)' Z_t]$$

### 3.1.3 Corporate Bond-Zero Coupon with zero recovery rate

Le prix des obligations risquées d'entreprise-zéro coupon s'obtient par la formule suivante pour l'entreprise i :

$$C_i(t, t+h) = \exp \left[ \nu_0 h - \sum_{j=1}^h \alpha_{t+j} + B_g^{\nu-[\beta]}(t, t+h) + A_g^{\nu-[\beta]}(t, t+h)' Z_t + B_c^{-[\gamma]}(t, t+h) + A_c^{-[\gamma]}(t, t+h)' Z_t^i \right] \quad (3.3)$$

Le rendement géométrique  $c(t, t+h)$  est égal à :

$$c(t, t+h) = -\frac{\log(C_i(t, t+h))}{h}$$



### 3.1.4 Décomposition du spread pour une obligation risquée d'entreprise-zéro coupon avec un taux de recouvrement nul

La probabilité de survie s'écrit :

$$P[\tau_i > t + h | \tau_i > t, Z_t, Z_t^i] = \exp \left[ - \sum_{k=1}^h \alpha_{t+k} + B_g^{-[\beta]}(t, t+h) + A_g^{-[\beta]}(t, t+h)' Z_t + B_c^{-[\gamma]}(t, t+h) + A_c^{-[\gamma]}(t, t+h)' Z_t^i \right]$$

La "average forward default intensity" se calcule par :

$$\pi_i(t, t+h) = - \frac{P[\tau_i > t+h | \tau_i > t, Z_t, Z_t^i] - P[\tau_i > t | \tau_i > t, Z_t, Z_t^i]}{h}$$

La décomposition du spread de crédit s'écrit alors :

$$y_i(t, t+h) = r(t, t+h) + [s_i(t, t+h) - \pi_i(t, t+h)] + \pi_i(t, t+h) \quad (3.4)$$

#### Programme R

```
#1.Parameters initialisation
#investment horizon
H=40;
#different sensibilities
alpha=rep(0.01,H);
beta=rep(2,H);
gamma=rep(0.1,H);
#systemic dynamical factors
rhog=0.9;
dg=0.1;
lg=0.1;
#specific dynamical factors
rhoc=0.9;
dc=0.1;
lc=0.1;
#stochastic discount factor
nu0=-0.01;
nu=-0.2;
# initial value for observable factors
Z0=0.003;
Z0i=0.3;
#2.Zero coupon - treasury bond Price
ZeroCouponTreasuryBondPrice<-function(horizon){
Ag=0;
```

```

Bg=0;
for (i in horizon :1){
Bg=bg(nu+Ag)+Bg;
Ag=ag(nu+Ag);
}
price = exp(nu0*horizon+Bg+Ag*Z0);
}
#3.Vector of Treasury Bonds yields
TreasuryBondYield=rep(0,H);
for (i in 1 :H){
TreasuryBondYield[i] = -log(ZeroCouponTreasuryBondPrice(i))/i;
}
#4.zero coupon-corporate obligation price
ZeroCouponCorporateBondPrice<-function(horizon){
Ag=Bg=0;
Ac=Bc=0;
SumAlpha=0;
for (i in horizon :1){
SumAlpha = SumAlpha + alpha[i];
Bg=bg(nu-beta[i]+Ag)+Bg;
Ag=ag(nu-beta[i]+Ag);
Bc=bc(-gamma[i]+Ac)+Bc;
Ac=ac(-gamma[i]+Ac);
}
price = exp(nu0*horizon-SumAlpha+Bg+Ag*Z0+Bc+Ac*Z0i)
}
#5.Vector of corporate bond yields
ZeroCouponCorporateBondYield=rep(0,H);
for (i in 1 :H){
ZeroCouponCorporateBondYield[i]=-log(ZeroCouponCorporateBondPrice(i))/i;
}
#6. Vector of credit spread
creditSpread=rep(0,H);
for (i in 1 :H){
creditSpread[i]=ZeroCouponCorporateBondYield[i]-TreasuryBondYield[i];
}
#7. Average default probalbility
SurvivingDefaultProbability<-function(horizon){
Ag=Bg=0;
Ac=Bc=0;
SumAlpha=0;
for (i in horizon :1){
SumAlpha = SumAlpha + alpha[i];
Bg=bg(-beta[i]+Ag)+Bg;
Ag=ag(-beta[i]+Ag);
}
}

```

```

Bc=bc(-gamma[i]+Ac)+Bc ;
Ac=ac(-gamma[i]+Ac) ;
}
price = exp(-SumAlpha+Bg+Ag*Z0+Bc+Ac*Z0i)
}
#8.Vector of default intensity
ZeroCouponCorporateBondSurvivingDefaultIntensity=rep(0,H) ;
for (i in 1 :H){
ZeroCouponCorporateBondSurvivingDefaultIntensity[i]=
-log(SurvivingDefaultProbability(i))/i ;
}
#9.Default-sdf correlation effect
spreadDefaultStochasticDiscountFactor=rep(0,H) ;
for (i in 1 :H){
spreadDefaultStochasticDiscountFactor[i]=netYield[i]
-ZeroCouponCorporateBondDefaultIntensity[i] ;
}
#10. Graphics
all=cbind(netYield,ZeroCouponCorporateBondDefaultIntensity,
spreadDefaultStochasticDiscountFactor) ;
mainLabel = "Corporate Bond Spread decomposition" ;
subLabel="(Default-Sdf correlation effect(short dash),Default Effect(dash), Cre-
dit Spread(solid))" ;
ts.plot(as.ts(all),main=mainLabel,sub=subLabel, xlab="Term",ylab="Spread",lty=c(1,5,3)) ;

```

### 3.1.5 First-to-Default Basket

$$\begin{aligned}
C(t, t+h) &= \exp(\nu_0 h - n \sum_{j=1}^h \alpha_{t+j} + B_g^{\nu-n[\beta]}(t, t+h) + A_g^{\nu-n[\beta]}(t, t+h)' Z_t \\
&\quad + n B_c^{-[\gamma]}(t, t+h) + A_c^{-[\gamma]}(t, t+h)' [Z_t^1 + \dots + Z_t^n]) \\
S(t, t+h) &= \frac{n}{h} \sum_{j=1}^h \alpha_{t+j} - \frac{1}{h} B_g^{\nu-n[\beta]}(t, t+h) - \frac{1}{h} [A_g^{\nu-n[\beta]}(t, t+h) - a_{g, \nu}^{oh}(0)]' Z_t \\
&\quad - \frac{n}{h} B_c^{-[\gamma]}(t, t+h) + \frac{1}{h} \sum_{j=0}^{h-1} b_{g, \nu}(a_{g, \nu}^{oj}(0)) - \frac{1}{h} A_c^{-[\gamma]}(t, t+h)' [Z_t^1 + \dots + Z_t^n] \\
\pi(t, t+h) &= \frac{n}{h} \sum_{j=1}^h \alpha_{t+j} - \frac{1}{h} B_g^{-n[\beta]}(t, t+h) - \frac{1}{h} A_g^{-n[\beta]}(t, t+h)' Z_t
\end{aligned}$$

$$-\frac{n}{h}B_c^{-[\gamma]}(t, t+h) - \frac{1}{h}A_c^{-[\gamma]}(t, t+h)'[Z_t^1 + \dots + Z_t^n]$$

La structure à terme des paniers first-to-default peut être décomposé comme suit :

$$y(t, t+h) = r(t, t+h) + \Pi^*(t, t+h) + [\Pi(t, t+h) - \Pi^*(t, t+h)] + [S(t, t+h) - \Pi(t, t+h)]$$

### Programme R

```
#Zero-Coupon-First to Default-Basket credit spread decomposition
#1.Parameters initialisation
#investment horizon
H=40;
#number of corporation in the basket
n=3;
#different sensibilities
#First set of values
alpha=rep(0.01,H);
beta=rep(0.05,H);
gamma=rep(0.01,H);
#systemic dynamic factors
rhog=0.9;
dg=0.1;
lg=1;
#specific dynamic factors
rhoc=0.9;
dc=0.1;
lc=1;
#stochastic discount factors
nu0=-0.15;
nu=0.05;
# initial values of observable factors
Z0=1;
Z0i=1;
#2.zero-coupon-treasury bond price
ZeroCouponTreasuryBondPrice<-function(horizon){
  Ag=0;
  Bg=0;
  for (i in horizon :1){
    Bg=bg(nu+Ag)+Bg;
    Ag=ag(nu+Ag);
  }
  price = exp(nu0*horizon+Bg+Ag*Z0);
}
#3.Treasury Bonds Yields Vector
TreasuryBondYield=rep(0,H);
```

```

for (i in 1 :H){
TreasuryBondYield[i] =
-log(ZeroCouponTreasuryBondPrice(i))/i;
}
#4.First To Default-zero coupon basket price
ZeroCouponFirstToDefaultBasketPrice<-function(horizon){
Ag=Bg=0;
Ac=Bc=0;
SumAlpha=0;
for (i in horizon :1){
SumAlpha = SumAlpha + alpha[i];
Bg=bg(nu-n*beta[i]+Ag)+Bg;
Ag=ag(nu-n*beta[i]+Ag);
Bc=bc(-gamma[i]+Ac)+Bc;
Ac=ac(-gamma[i]+Ac);
}
price = exp(nu0*horizon-n*SumAlpha+Bg+Ag*Z0+n*Bc+Ac*Z0i*n)
}
#5.First To Default-zero coupon basket yields vector
ZeroCouponFirstToDefaultBasketYield=rep(0,H);
for (i in 1 :H){
ZeroCouponFirstToDefaultBasketYield[i]=
-log(ZeroCouponFirstToDefaultBasketPrice(i))/i;
}
#6. Credit spread vector
creditSpread=rep(0,H);
for (i in 1 :H){
creditSpread[i]=
ZeroCouponFirstToDefaultBasketYield[i]-TreasuryBondYield[i];
}
#7. Average default probability First To Default basket
FirstToDefaultBasketSurvivingDefaultProbability<-function(horizon){
Ag=Bg=0;
Ac=Bc=0;
SumAlpha=0;
for (i in horizon :1){
SumAlpha = SumAlpha + alpha[i];
Bg=bg(-n*beta[i]+Ag)+Bg;
Ag=ag(-n*beta[i]+Ag);
Bc=bc(-gamma[i]+Ac)+Bc;
Ac=ac(-gamma[i]+Ac);
}
price = exp(-n*SumAlpha+Bg+Ag*Z0+n*Bc+Ac*Z0i*n)
}
#8. Construction du vecteur des intensites de defaut pour le panier

```

```

FirstToDefaultBasketDefaultIntensity=rep(0,H);
for (i in 1:H){
FirstToDefaultBasketSurvivingDefaultIntensity[i]=
-log(FirstToDefaultBasketSurvivingDefaultProbability(i))/i;
}
#9.Marginal default surviving probability
FirstToDefaultBasketMarginalSurvivingProbability<-function(horizon){
Ag=Bg=0;
Ac=Bc=0;
SumAlpha=0;
for (i in horizon:1){
SumAlpha = SumAlpha + alpha[i];
Bg=bg(-beta[i]+Ag)+Bg;
Ag=ag(-beta[i]+Ag);
Bc=bc(-gamma[i]+Ac)+Bc;
Ac=ac(-gamma[i]+Ac);
}
price = exp(-SumAlpha+Bg+Ag*Z0+Bc+Ac*Z0i)
}
#10.Marginal default surviving intensity
FirstToDefaultBasketMarginalDefaultIntensity=rep(0,H);
for (i in 1:H){
FirstToDefaultBasketMarginalDefaultIntensity[i]=
-n*log(FirstToDefaultBasketMarginalSurvivingProbability(i))/i;
}
#11.Default-stochastic discount factor correlation effect
spreadDefaultStochasticDiscountFactor=rep(0,H);
for (i in 1:H){
spreadDefaultStochasticDiscountFactor[i]=
creditSpread[i]-FirstToDefaultBasketDefaultIntensity[i];
}
#12.Default Correlation Calculus
FirstToDefaultCorrelDefaultIntensity=rep(0,H);
for (i in 1:H){
FirstToDefaultCorrelDefaultIntensity[i]=
FirstToDefaultBasketDefaultIntensity[i]-
FirstToDefaultBasketMarginalDefaultIntensity[i];
}
#13.Graphics
all=cbind(creditSpread,FirstToDefaultBasketMarginalDefaultIntensity,
FirstToDefaultCorrelDefaultIntensity,spreadDefaultStochasticDiscountFactor);
mainLabel = "First To Default Credit Spread decomposition";
subLabel = "Spread (solid), Marginal Default Effect (dash), Defaults cor-
relation effect(short dash), Default-Sdf correlation effect(medium)";
ts.plot(as.ts(all),main=mainLabel,sub=subLabel,

```

xlab="Term",ylab="Yields",lty=c(1,5,3,2)) ;

### 3.1.6 Loss Given Default

Nous rappelons ici l'expression du prix pour des obligations risquées d'entreprise avec et sans taux de recouvrement. Sans taux de recouvrement, le prix d'une obligation risquée de l'entreprise  $i$  se calcule comme suit en fonction des intensités de survie  $\pi_{t+j,t+j+1}$  des différentes périodes :

$$C_i(t, t+h) = E_t \left\{ \prod_{j=0}^{h-1} (M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1}) \right\},$$

Avec taux de recouvrement, le prix d'une obligation risquée d'entreprise se calcule comme suit en fonction des intensités de survie  $\pi_{t+j,t+j+1}$  et des taux de recouvrement attendus en cas de défaut ( $R_{t+j,t+j+1} = 1 - ELGD_{t+j,t+j+1}$ , où  $ELGD_{t+j,t+j+1}$  désigne l'*expected loss given default* pour la  $j$ -ième période) des différentes périodes :

$$C_{*i}(t, t+h) = \sum_{k=1}^h E_t \left\{ \prod_{j=0}^{k-2} M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1} M_{t+k-1,t+k} (1 - \pi_{t+k-1,t+k}) R_{t+k-1,t+k} \right\} \\ + E_t \left\{ \prod_{j=0}^{h-1} (M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1}) \right\},$$

Par analogie avec le processus stochastique modélisant l'intensité de survie, on choisit de modéliser le taux de recouvrement (compris entre 0 et 1) par l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 5.** *Les taux de recouvrement pour les différentes entreprises sont indépendants conditionnellement aux facteurs  $Z$  et  $Z_i$ . Le taux de recouvrement pour l'entreprise  $i$  est tel que :*

$$R_{t+j,t+j+1} = \exp(-(\delta_{t+1} + \epsilon'_{t+1} Z_{t+1} + \theta'_{t+1} Z_{i,t+1})) = \exp(-\omega'_t), \quad (3.5)$$

où  $\omega'_t = \delta_t + \epsilon'_t Z_t + \theta'_t Z_{i,t}$  est l'intensité de recouvrement et  $\delta_t$ ,  $\epsilon'_t$ ,  $\theta'_t$  des fonctions de l'information contenue dans les facteurs  $Z_t$  et  $Z_i$ . Ce sont aussi des paramètres de sensibilités pour le recouvrement. Les taux de recouvrement étant compris entre 0 et 1, les sensibilités de recouvrement doivent vérifier comme les intensités de survie :  $\omega'_t \geq 0$ .

Fort des hypothèses sur l'intensité de survie, l'intensité de recouvrement et le facteur d'escompte stochastique, nous pouvons maintenant modéliser numériquement les obligations d'entreprise risquées avec taux de recouvrement.  $C(t, t+h)$  a été calculé précédemment. Intéressons-nous au calcul du terme de défaut pour la période  $k$  :

$$E_{tk} = E_t \left\{ \prod_{j=0}^{k-2} (M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1}) M_{t+k-1,t+k} (1 - \pi_{t+k-1,t+k}) R_{t+k-1,t+k} \right\}$$

On sépare cette somme en deux termes en développant le produit  $(1 - \pi_{t+k-1,t+k})$  :

$$E_{tk} = E_{tk1} - E_{tk2},$$

où  $E_{tk1}$  et  $E_{tk2}$  ont les valeurs suivantes :

$$E_{tk1} = E_t \left\{ \Pi_{j=0}^{k-2} (M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1}) M_{t+k-1,t+k} R_{t+k-1,t+k} \right\}$$

Il vient :

$$E_{tk1} = E_t \left[ \exp \left( \nu_0 k + \nu' \sum_{j=1}^k Z_{t+j} \right) \exp \left( - \sum_{j=1}^{k-1} [\alpha_{t+j} + \beta'_{t+j} Z_{t+j} + \gamma'_{t+j} Z_{t+j}^i] \right) \exp \left( - [\delta_{t+k} + \epsilon'_{t+k} Z_{t+k} + \theta'_{t+k} Z_{t+k}^i] \right) \right]$$

En appliquant le calcul récursif maintenant classique, le prix des obligations risquées d'entreprise-zéro coupon s'obtient par la formule suivante pour l'entreprise  $i$  :

$$E_{tk1} = \exp \left[ \nu_0 k - \left( \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{t+j} + \delta_{t+k} \right) + B_g^{\nu-[\tilde{\beta}_1]}(t, t+h) + A_g^{\nu-[\tilde{\beta}_1]}(t, t+h)' Z_t + B_c^{-[\tilde{\gamma}_1]}(t, t+h) + A_c^{-[\tilde{\gamma}_1]}(t, t+h)' Z_t^i \right], \quad (3.6)$$

où les deux suites  $[\tilde{\beta}_1]$  et  $[\tilde{\gamma}_1]$  sont définis par les vecteurs :

$$[\tilde{\beta}_1] = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \epsilon_k \end{pmatrix}, \quad [\tilde{\gamma}_1] = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{k-1} \\ \theta_k \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$E_{tk2} = E_t \left\{ \Pi_{j=0}^{k-2} (M_{t+j,t+j+1} \pi_{t+j,t+j+1}) \pi_{t+k-1,t+k} M_{t+k-1,t+k} R_{t+k-1,t+k} \right\}$$

En appliquant le calcul récursif maintenant classique, le prix des obligations risquées d'entreprise-zéro coupon s'obtient par la formule suivante pour l'entreprise  $i$  :

$$E_{tk2} = \exp \left[ \nu_0 k - \left( \sum_{j=1}^k \alpha_{t+j} + \delta_{t+k} \right) + B_g^{\nu-[\tilde{\beta}_2]}(t, t+h) + A_g^{\nu-[\tilde{\beta}_2]}(t, t+h)' Z_t + B_c^{-[\tilde{\gamma}_2]}(t, t+h) + A_c^{-[\tilde{\gamma}_2]}(t, t+h)' Z_t^i \right], \quad (3.8)$$

où les deux suites  $[\tilde{\beta}_2]$  et  $[\tilde{\gamma}_2]$  sont définis par les vecteurs :

$$[\tilde{\beta}_2] = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_k + \epsilon_k \end{pmatrix}, \quad [\tilde{\gamma}_2] = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{k-1} \\ \gamma_k + \theta_k \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Le rendement géométrique  $c(t, t+h)$  est égal à :

$$c(t, t+h) = -\frac{\log(C_i(t, t+h))}{h}$$



**Programme R**

```

# 1. Parameters initialisation
#horizon
H=40;
#survival intensity sensibility
alpha=rep(0.01,H);
beta=rep(2,H);
gamma=rep(0.1,H);
#recovery rate sensibility
delta=rep(0.01,H);
epsilon=rep(2,H);
theta=rep(0.1,H);
#systemic dynamical factor
rhog=0.9;
dg=0.1;
lg=0.1;
#specific dynamical factor
rhoc=0.9;
dc=0.1;
lc=0.1;
#stochastic discount factor
nu0=-0.01;
nu=-0.2;
# initial value for non observable factors
Z0=0.003;
Z0i=0.3;
#2.Price calculus for zero coupon corporate bond with zero recovery rate
ZeroCouponCorporateBondPrice<-function(horizon){
  Ag=Bg=0;
  Ac=Bc=0;
  SumAlpha=0;
  for (i in horizon :1){
    SumAlpha = SumAlpha + alpha[i];
    Bg=bg(nu-beta[i]+Ag)+Bg;
    Ag=ag(nu-beta[i]+Ag);
    Bc=bc(-gamma[i]+Ac)+Bc;
    Ac=ac(-gamma[i]+Ac);
  }
  price = exp(nu0*horizon-SumAlpha+Bg+Ag*Z0+Bc+Ac*Z0i)
}
#3. zero recovery rate zero coupon corporate bond Yield vector
ZeroCouponCorporateBondYield=rep(0,H);
for (r in 0 :H){
  ZeroCouponCorporateBondYield[r]=-log(ZeroCouponCorporateBondPrice(r))/r;
}

```

```

}
#4. ETK1 Calculus
ETK1 <- function(k){
  Ag=Bg=0;
  Ac=Bc=0;
  SumAlpha=0;
  for (i in k :1){
    if (i == k){
      alphasilde=delta[i];
      betasilde=epsilon[i];
      gammasilde=theta[i];
    }else{
      alphasilde=alpha[i];
      betasilde=beta[i];
      gammasilde=gamma[i];
    }
    SumAlpha = SumAlpha + alphasilde;
    Bg=bg(nu-betasilde+Ag)+Bg;
    Ag=ag(nu-betasilde+Ag);
    Bc=bc(-gammasilde+Ac)+Bc;
    Ac=ac(-gammasilde+Ac);
  }
  price = exp(nu*k-SumAlpha+Bg+Ag*Z0+Bc+Ac*Z0i)
}
#5. ETK2 Calculus
ETK2 <- function(k){
  Ag=Bg=0;
  Ac=Bc=0;
  SumAlpha=0;
  for (i in k :1){
    if (i == k){
      alphasilde=delta[i]+alpha[i];
      betasilde=epsilon[i]+beta[i];
      gammasilde=theta[i]+gamma[i];
    }else{
      alphasilde=alpha[i];
      betasilde=beta[i];
      gammasilde=gamma[i];
    }
    SumAlpha = SumAlpha + alphasilde;
    Bg=bg(nu-betasilde+Ag)+Bg;
    Ag=ag(nu-betasilde+Ag);
    Bc=bc(-gammasilde+Ac)+Bc;
    Ac=ac(-gammasilde+Ac);
  }
}

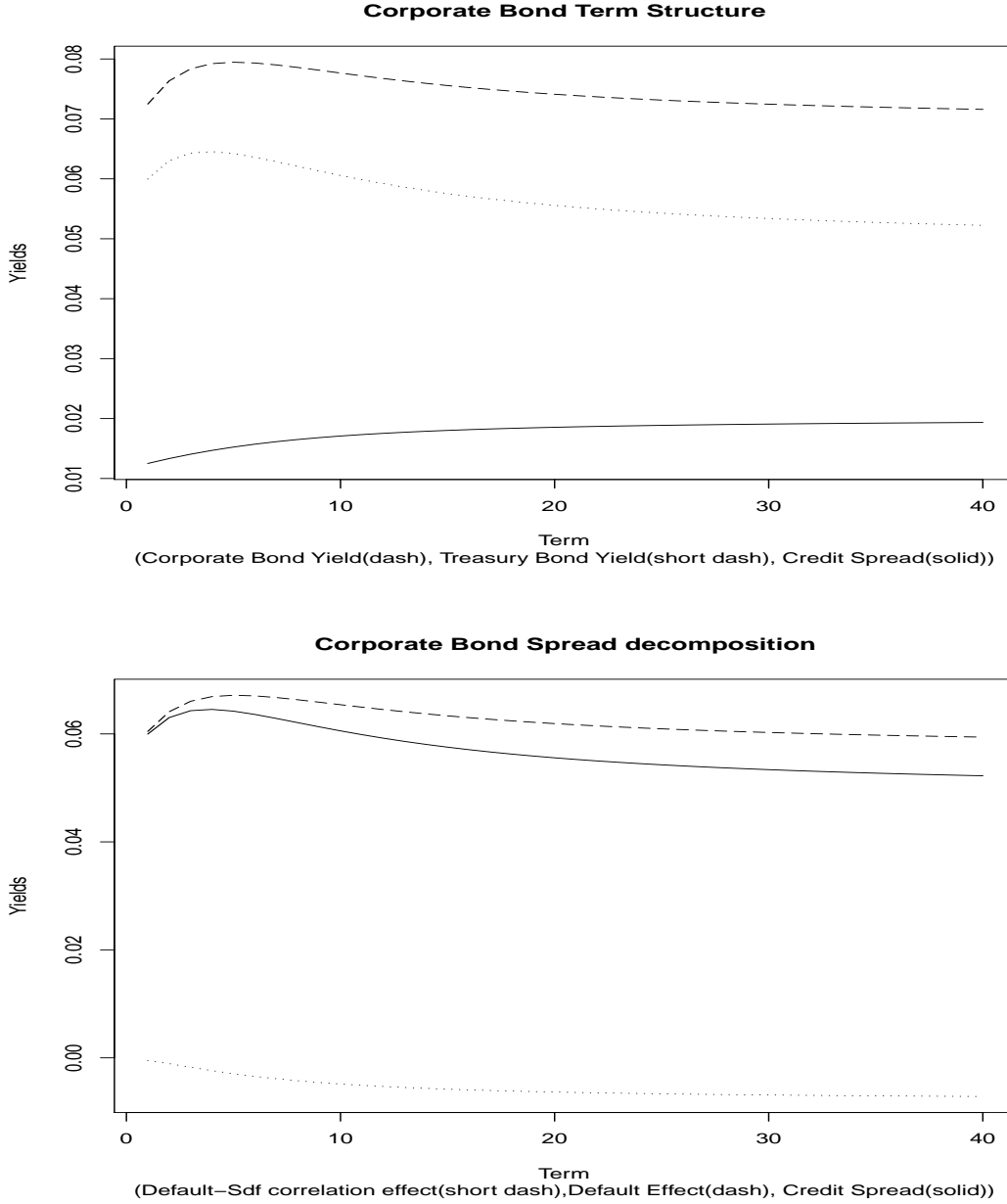
```

```

price = exp(nu0*k-SumAlpha+Bg+Ag*Z0+Bc+Ac*Z0i)
}
#6. Calculus of the price of a zero coupon corporate bond with a not null recovery
rate ZeroCouponCorporateBondWithRecoveryPrice <- function(horizon){
price=ZeroCouponCorporateBondPrice(horizon);
if (horizon > 0){
for (i in 1 :horizon){
price=price+ETK1(i)-ETK2(i);
}
}
return (price);
}
#7. not null recovery rate zero coupon corporate bond Yield vector
WithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield=rep(0,H);
for (s in 0 :H){
WithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield[s]=-log(ZeroCouponCorporateBondWithRecoveryPrice(s))/s
}
#recovery rate sensibility
delta=rep(0.09,H);
epsilon=rep(2.1,H);
theta=rep(0.3,H);
#8. new data : not null recovery rate zero coupon corporate bond Yield vector
SecondWithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield=rep(0,H);
for (s in 0 :H){
SecondWithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield[s]=-log(ZeroCouponCorporateBondWithRecoveryPrice(s))/s
}
#recovery rate sensibility
delta=rep(0.2,H);
epsilon=rep(2.6,H);
theta=rep(0.8,H);
#9. new data : not null recovery rate zero coupon corporate bond Yield vector
ThirdWithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield=rep(0,H);
for (s in 0 :H){
ThirdWithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield[s]=-log(ZeroCouponCorporateBondWithRecoveryPrice(s))/s
}
#10. Graphique
all=cbind(ZeroCouponCorporateBondYield,WithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield,SecondWithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield,ThirdWithRecoveryZeroCouponCorporateBondYield);
mainLabel = "Corporate Bond Yield with different recovery rate";
subLabel = "Zero rate (solid), Rate (95%ts)";
plot(as.ts(all),main=mainLabel,sub=subLabel,xlab="Term",ylab="Yield")

```

### 3.1.7 Résultats pour les obligations risquées d'entreprise

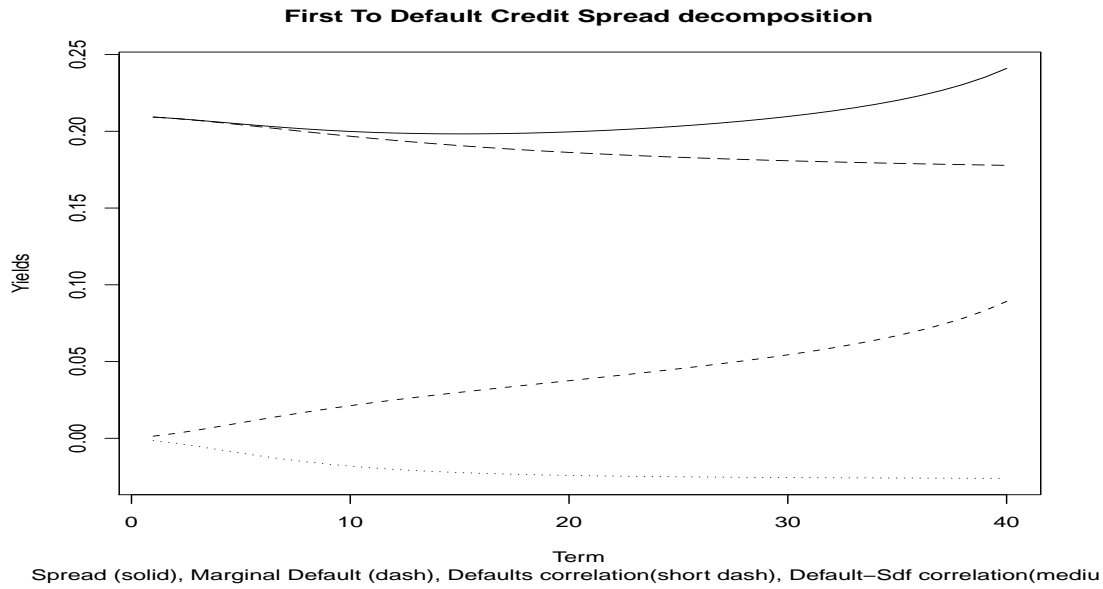
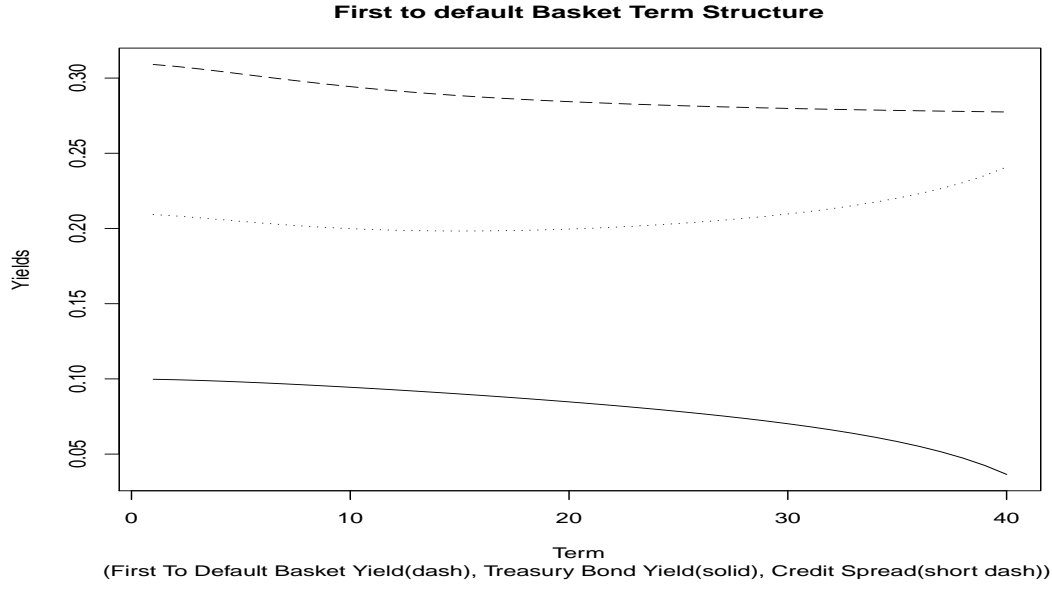


On constate que la forme bosselée typique des rendements d'obligation d'entreprise est facilement reproduite par le modèle même avec des sensibilités constantes. La décomposition du spread en un spread d'effet défaut et un spread d'effet de corrélation de défaut-facteur d'escompte stochastique montre que le spread d'effet de corrélation de défaut-facteur d'escompte stochastique est négatif et petit en valeur absolue.

$$s_i(t, t+h) = \pi_i(t, t+h) + (s_i(t, t+h) - \pi_i(t, t+h))$$

$$s_i(t, t+h) - \pi_i(t, t+h) = -\log \left\{ 1 + \frac{Cov_t(M_{t,t+1} 1_{\tau_i > t+1})}{E_t(M_{t,t+1}) E_t(1_{\tau_i > t+1})} \right\}$$

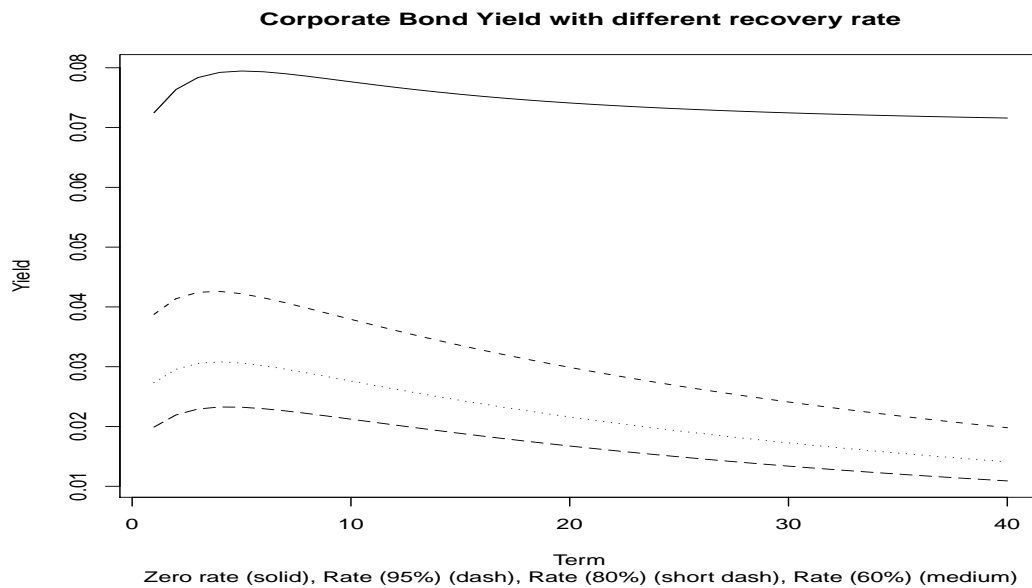
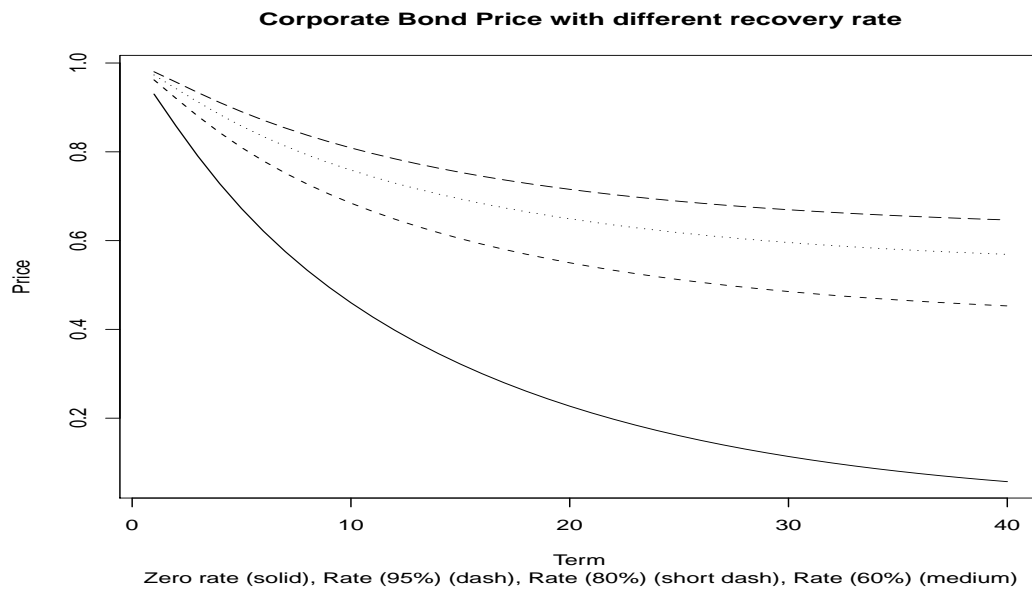
### 3.1.8 Résultats pour les paniers first-to-default



$$s(t, t+h) = \pi * (t, t+h) + (\pi(t, t+h) - \pi * (t, t+h)) + (s(t, t+h) - \pi(t, t+h))$$

La composante principale de ce spread correspond à l'effet de défaut marginal. La corrélation de défaut est négative, alors que la corrélation défaut-stochastic discount factor est positive.

### 3.1.9 Résultats pour les obligations d'entreprise avec des taux de recouvrement distincts



## Conclusion et Perspectives

Ci-dessous la conclusion du rapport.





# Bibliographie

- [1] A. MONTFORT, C. GOUERIOUX et V. POLIMENIS. *Affine models for credit risk analysis*. Journal of Financial Econometrics, (2006), France.
- [2] J. JASIAK, S. DAROLLES et C. GOUERIOUX. *Compound autoregressive models*. (2002).