



Analyse Mathématique et Numérique
du Rayonnement Acoustique des Turboréacteurs

DUPREY Stefan

Thèse CIFRE

EADS-CCR Suresnes, Département Modélisation Mathématique
INRIA Lorraine, Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré Nancy 1

A MODIFIER

Plan

1. Introduction et Enjeux Industriels
2. Théorie du Problème Continu
3. Du Continu au Discret
4. Résultats Numériques
5. Conclusion

Intercaler un § entre le 4 et le 5 sur les
ELEMENTS FINIS AXIS

1. Introduction et Enjeux Industriels

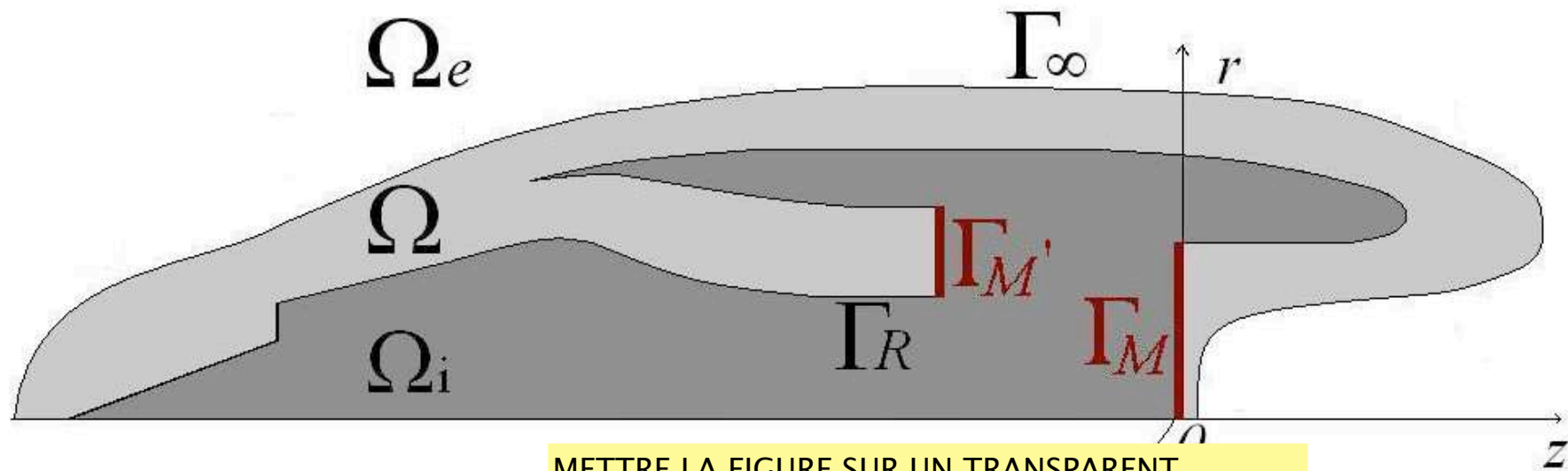
- **Objectif : minimiser le bruit rayonné par les turboréacteurs** : bruit issu du contexte précis du décollage : **pas le bruit aérodynamique**, ni le bruit de jet rayonné à l'arrière, **mais le bruit de raies** (puissant et monofréquentiel) émis par les pales du moteur et **rayonné à l'avant** principalement.
- Différentes techniques utilisées au niveau de la nacelle (traitement des parois de la nacelle, optimisation de sa forme et de la position des traitements...), dont la mise au point est onéreuse : **nécessité du développement d'un code de calcul pour la prévision.**
- **Thématique de décomposition de domaines indispensable** pour un traitement numérique abordable de l'avion entier : on se place dans le **contexte physique précis des équations de Euler linéarisées.**

IL NE S'AGIT PAS DES EQUATIONS D'EULER LINEARISEES.
- **Question débattue et problématique** : influence de la présence d'un écoulement porteur non linéaire par rapport à une propagation acoustique sur un écoulement constant : choix de la position des surfaces rayonnantes.

LA ENCORE, LE MOT LINEARISE EST MAL UTILISÉ...

Un Contexte Physique Particulier : Euler Linéarisé Potentiel

- On est loin du moteur et les nombres de Mach sont largement subsoniques : pas de non-linéarités dues à des Machs transsoniques. Pas de perturbations aérodynamiques (jet ou couche limite).
- Mécanique des milieux continus : fluide parfait.
- Thermodynamique : gaz parfait adiabatique et isentropique.
- Écoulement porteur non-linéaire et acoustique linéaire.
- **Hypothèse supplémentaire** : l'écoulement et l'acoustique sont **potentiels**.
- Géométrie **axisymétrique** :



METTRE LA FIGURE SUR UN TRANSPARENT
SEPARÉ.

2. Théorie du Problème Continu

Théorie Ecoulement Porteur

- L'écoulement dérive d'un potentiel et son équation est obtenue à l'ordre zéro des équations de l'écoulement total.

- **Conditions de bord simplifiées** : condition glissante+condition de flux.

- Le potentiel vérifie une **EDP non linéaire**. Le régime subsonique (resp. supersonique) détermine le caractère elliptique (resp. hyperbolique) de l'équation (régime transsonique complexe : ondes de choc)

$$\begin{cases} \operatorname{div}(F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\frac{\partial\phi_0}{\partial n} = q & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} = \text{edp du potentiel porteur } \phi_0, \text{ dont}$$

une **solution faible** est cherchée **variationnellement** :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0\nabla\psi \, dx = \int_{\partial\Omega} q\psi \, d\gamma, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \end{cases}$$

- **Les variables de l'écoulement sont adimensionnées** par les constantes de l'écoulement à l'infini (a_∞ , ρ_∞ et v_∞).

Sur la partie PB. NON LINEAIRE, il faut mettre en évidence les points importants et ne pas détailler des points accessoires (la form. variat. par exemple). Dire aussi si c'est un travail original ou non, et dans quelle mesure ça l'est... L'énoncé du Th. n'est pas non plus nécessaire

Donner un nom ou un numéro à cette équation (pour ne pas dire pb. initial).

LA FORMULATION VARIATIONNELLE EST INUTILE... PAR CONTRE, IL FAUT EXPLICITER LE F_∞ (voire donner son graphe).

Existence et Unicité pour l'Ecoulement Porteur

Le problème restreint au convexe fermé non vide des régimes subsoniques

$K_\delta = \{v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, \|\nabla v\|_\infty \leq \delta < c_*\}$ admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_0 \in K_\delta \text{ tel que : } \\ \int_{\Omega} F_\infty(|\nabla \phi_0|^2) \nabla \phi_0 \nabla (\psi - \phi_0) \, dx \geq \int_{\partial\Omega} q (\psi - \phi_0) \, d\gamma, \quad \forall \psi \in K_\delta \end{array} \right.$$

INUTILE!

La fonctionnelle K est-elle convexe?

Cette inégalité variationnelle caractérise $\phi \in K_\delta$ minimum de la fonctionnelle K

sur K_δ , où $K(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} F(|\nabla \phi|) - \int_{\partial\Omega} q \phi d\gamma$ avec $F(x) = - \int_{x^2}^{\infty} F_\infty(s) ds$

Théorème : Supposons que le problème initial admette une unique solution

"Pb. initial": mal dit.
Renvoyer à l'équation.

$\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, telle que $\exists \delta_0 < c_*$ et $\|\nabla \phi\|_\infty \leq \delta_0 < c_*$. Alors ϕ est une solution

du problème convexifié, pour tout $\delta \in [\delta_0, c_*[$. Réciproquement, si ϕ est une

solution du problème convexifié pour un certain $\delta < c_*$, telle que l'on peut trouver

$\delta_0 < \delta$ et $\|\nabla \phi\|_\infty \leq \delta_0$ (**contrainte de convexité non saturée**). Alors ϕ est une

solution du problème initial.

Le mot "CONVEXIFIÉ" n'est pas approprié (ça veut dire autre

chose

L'Ecoulement Porteur comme Limite d'un Point Fixe

La fonctionnelle K est elliptique sur K_δ :

On peut gagner beaucoup de place ici, par exemple en supprimant le Théorème...

$$\exists \alpha > 0, \forall (\phi_0, \psi) \in K_\delta^2, \quad \vec{\nabla}^2 K(\phi_0)(\psi, \psi) \geq \alpha \|\psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2, \quad (1)$$

ce qui équivaut encore à :

$$\exists \alpha > 0, \forall (\phi, \psi) \in K_\delta^2, \quad \langle \vec{\nabla} K(\phi) - \vec{\nabla} K(\psi), \phi - \psi \rangle \geq \alpha \|\phi - \psi\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}}^2 \quad (2)$$

L'ellipticité de la fonctionnelle K permet de prouver :

Théorème : Pour tout $\phi \in K_\delta$, la coercivité de $B(\phi; \cdot, \cdot)$ (où $B(\phi; \psi, \xi) = \int_\Omega F_\infty(|\nabla \phi|^2) \nabla \psi \nabla \xi$) implique l'existence et l'unicité de la solution de :

La) ci-dessus est en trop.

$$\forall \phi \in K_\delta, \exists ! \zeta = \zeta(\phi) \in K_\delta \text{ tel que : } \forall \psi \in K_\delta, \quad B(\phi; \zeta, \psi - \zeta) \geq \langle q, \psi - \zeta \rangle$$

La suite définie par $\phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ et $\phi_{n+1} = \zeta(\phi_n)$ converge vers l'unique solution du problème convexifié.

Dans l'équation, on ne voit pas le lien avec l'écoulement porteur : qui est M_0 ? Détailler l'EDP sur ce transparent et faire passer le CL et à l'infini sur le suivant (avec un schéma).

Théorie Acoustique

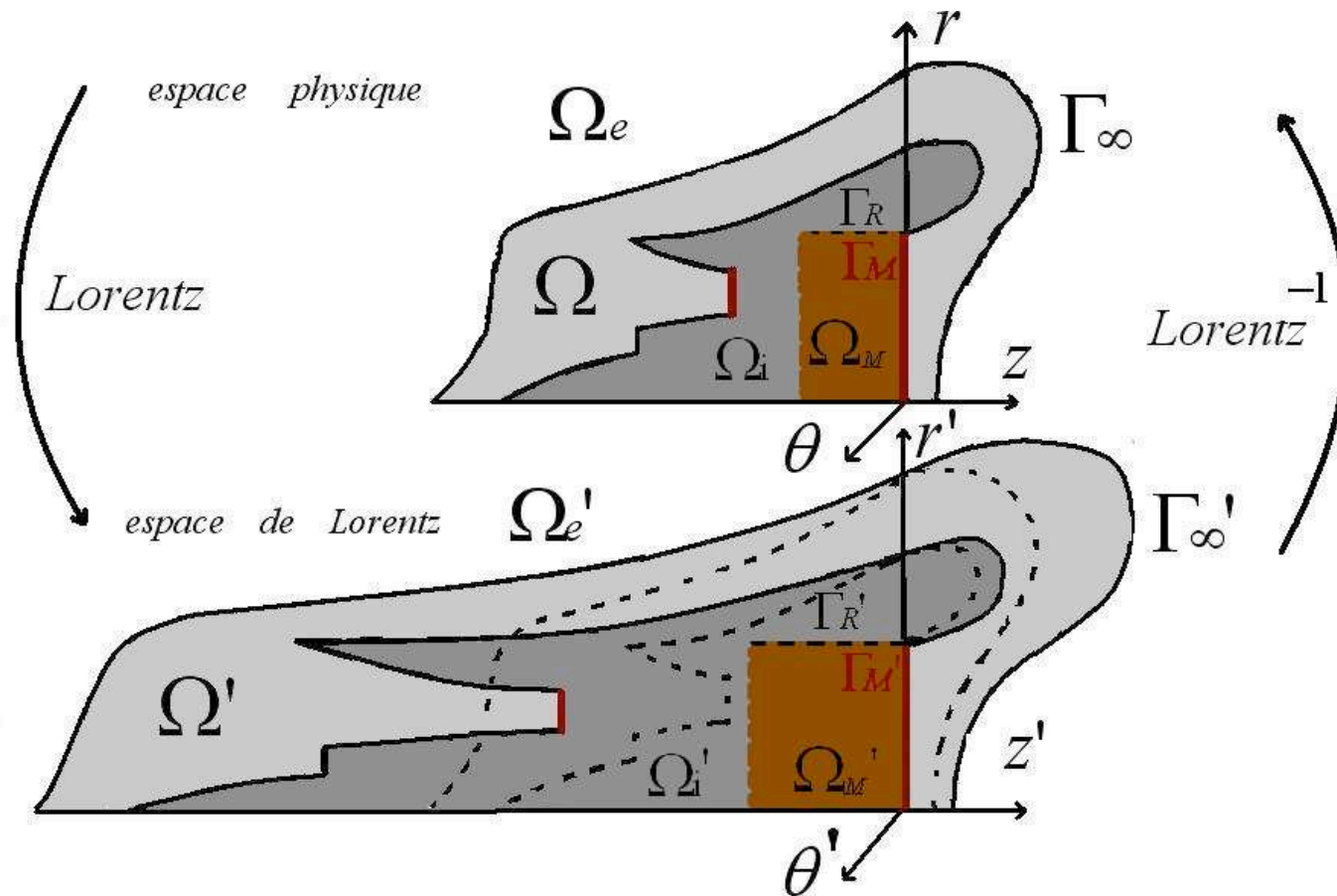
- Le potentiel acoustique est solution de l'**EDP d'ordre 2 à coefficients variables** provenant de l'écoulement suivante :

$$\operatorname{div} \left(\rho_0 \left(I - {}^t \overrightarrow{M_0} \cdot \overrightarrow{M_0} \right) \nabla \phi_a \right) + \rho_0 k_0^2 \phi_a + i k_0 \rho_0 \overrightarrow{M_0} \cdot \nabla \phi_a + \operatorname{div} \left(i k_0 \rho_0 \phi_a \overrightarrow{M_0} \right) = 0$$

- **Réfraction totale** sur les parois rigides.
- **Moteur=guide d'ondes cylindrique en écoulement uniforme.** Source sonore=modes incidents. Condition de rayonnement appropriée permettant la sélection des modes réfléchis pour le potentiel acoustique diffracté. Opérateur Dirichlet-Neumann en écoulement permettant de borner le domaine de calcul.
- **Les modes sont normalisés** : ils ont un flux d'énergie unitaire dans le conduit.
- **Condition de Sommerfeld "convectée" à l'infini** sélectionnant les ondes sortantes et équation intégrale en présence d'écoulement permettant de borner le domaine de calcul.
- **Les variables acoustiques sont adimensionnées** par les valeurs de l'écoulement porteur à l'infini (a_∞ , ρ_∞ et v_∞).

Existence et Unicité pour l'Acoustique

Ecrire la transformée de Lorentz et dire à l'oral quel est son intérêt pour ton problème...



Lorentz fréquentiel = dilatation axiale + $\widetilde{\phi}_a' = e^{-ik'_\infty M_\infty z'} \widetilde{\phi}_a$
 ???

C'est juste pour faire peur aux membres du jury? Sinon, est ce vraiment nécessaire...

On note $A_{Lm}(\phi_{am})$ l'opérateur différentiel appliqué à ϕ_{am} :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \rho_0 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) + \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) \\ & - \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_0 M_{0r} M_{0z} \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 M_{0z} M_{0r} \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) \\ & - \frac{1}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 M_{0z}^2 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\rho_0 M_{0r}^2 \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) \\ & + \rho_0 \left(\frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - M_{0z}^2) + \frac{ik_0 M_{0z}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} - \frac{M_{0r} M_{0z}}{r \sqrt{1 - M_\infty^2}} \right) \frac{\partial \phi_{am}}{\partial z} \\ & + \rho_0 \left(-\frac{M_{0r}^2}{r} + ik_0 M_{0r} - \frac{ik_\infty M_\infty M_{0r} M_{0z}}{1 - M_\infty^2} \right) \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \\ & + \frac{\partial}{\partial r} (ik_0 \rho_0 M_{0r} \phi_{am}) + \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial (\rho_0 \phi_{am})}{\partial z} - \frac{ik_\infty M_\infty}{1 - M_\infty^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_0 M_{0r} M_{0z} \phi_{am}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 ik_0 M_{0z} \phi_{am}) - \frac{ik_\infty M_\infty}{(1 - M_\infty^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_0 M_{0z}^2 \phi_{am}) \\ & + \rho_0 \left(-\frac{m^2}{r^2} - \frac{k_\infty^2 M_\infty^2}{(1 - M_\infty^2)^2} (1 - M_{0z}^2) + \frac{ik_0 M_{0r}}{r} \right) \phi_{am} \\ & + \rho_0 \left(-ik_\infty \frac{M_{0r} M_{0z} M_\infty}{r (1 - M_\infty^2)} + k_0^2 - \frac{2k_\infty M_\infty k_0 M_{0z}}{(1 - M_\infty^2)} \right) \phi_{am} = 0 \end{aligned} \right.$$

Pourquoi détailler autant ce DtN qui vient comme un cheveu sur la soupe!

Opérateur Dirichlet-Neumann Modal dans l'Espace de Lorentz

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{LMm} : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_M) \\ \phi_{am} \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{mn}^-(\phi_a, \Xi_{rmn})_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn} \end{array} \right. \quad \text{définit l'opérateur}$$

Dirichlet-Neumann modal dans l'espace de Lorentz, où l'on a noté :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{mn}^{\pm} = i\rho_M (k_M M_M - (1 - M_M^2) \beta_{mn}^{\pm}) \\ \quad : \text{les coefficients de l'opérateur } T_{LMm} \\ \beta_{mn}^{\pm} = \frac{k_M M_M \pm \sqrt{k_M^2 - k_{rmn}^2 (1 - M_M^2)}}{1 - M_M^2} \\ \quad : \text{les constantes de propagation axiale dans l'espace physique} \\ \gamma_{mn}^{\pm} = -k'_{\infty} M_{\infty} + \sqrt{1 - M_{\infty}^2} \beta_{mn}^{\pm} \\ \quad : \text{les constantes de propagation axiale dans l'espace de Lorentz} \end{array} \right.$$

Existence et Unicité du Problème Transformé

Théorème : • Le potentiel acoustique transformé dans l'espace de Lorentz cylindrique $(\Omega \cup \Omega_e) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)$ est solution de $A_{Lm}(\phi_{am}) = 0$, où l'opérateur A_{Lm} est elliptique.

• Les conditions aux limites du potentiel transformé s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 - & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} M_{0z} \vec{n} \cdot \vec{e}_z + M_{0r} \vec{n} \cdot \vec{e}_r = 0, & \forall x \in \Gamma_R \\ \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n_{A_{Lm}}} = 0, & \forall x \in \Gamma_R \end{cases}, \\
 - & \frac{\partial (\phi_{am} - \phi_{am,inc})}{\partial n_{A_{Lm}}} = T_{LMm} (\phi_{am} - \phi_{am,inc}), \quad \forall x \in \Gamma_M
 \end{aligned}$$

• L'edp se réduit à l'équation de Helmholtz en dehors du domaine perturbé :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_{am}}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \phi_{am} + \frac{\partial^2 \phi_{am}}{\partial z^2} + \frac{k_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \phi_{am} = 0$$

• Le potentiel acoustique transformé vérifiant la condition de Sommerfeld

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \left| \frac{\partial \phi_{am}}{\partial n} - i \frac{k_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \phi_{am} \right|^2 d\gamma = 0 \text{ existe et est unique.}$$

Dire ou écrire que c'est un problème de type Fredholm. D'où l'intérêt de l'unicité...

Egalité d'Energie dans l'Espace Transformé

Lemme : • On suppose donc la source sonore incidente nulle : $\phi_{a,inc} = 0$. Le problème transformé se formule variationnellement dans Ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_{am} \in H_a^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a_{Lm}(\phi_{am}, \psi) = \langle T_{LMm}(\phi_{am}), \psi \rangle_{L^2(\Gamma_M)} + \int_{\Gamma_\infty} \vec{\nabla} \phi_{am} \cdot \vec{n} \bar{\psi}, \forall \psi \in H_a^1(\Omega) \end{array} \right. ,$$

• La solution du problème transformé vérifie le bilan d'énergie :

$$\sum_{\pm, (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \Im m(\mu_{mn}^\pm) |\langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}|^2 \|\Xi_{rmn}\|_{L^2(\Gamma_M)}^2 + \lim_{R \rightarrow +\infty} k'_\infty \|\phi_a\|_{L^2(S_R)} = 0 ,$$

où la somme modale ci-dessus ne se fait que sur les modes propagatifs :

$$\Im m(\mu_{mn}^\pm) = 0 \iff \text{le mode est évanescent}$$

$$\Im m(\mu_{mn}^\pm) < 0 \iff \text{le mode est propagatif incident}$$

• En l'absence de modes incidents propagatifs à l'entrée de la nacelle ($\phi_{a,inc} = 0$) :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \|\phi_a\|_{L^2(S_R)} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \left\| \frac{\partial \phi_a}{\partial n} \right\|_{L^2(S_R)} = 0$$

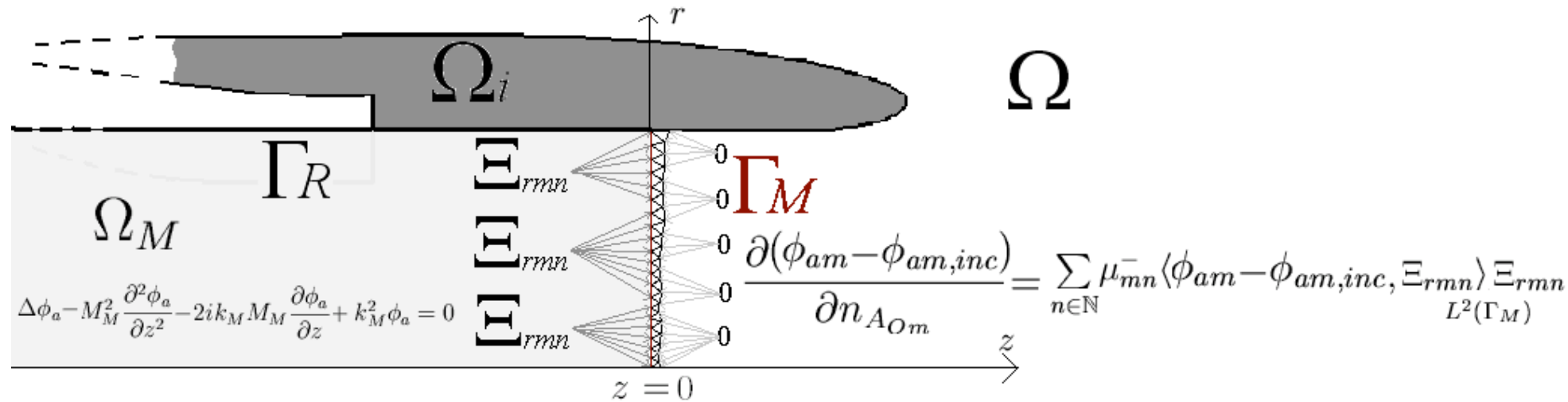
Si tu tiens à mettre la preuve, tu peux, mais pour qu'elle soit compréhensible, il faut la détailler plus.

trop d'items: ne garder que l'essentiel des étapes (et dire le reste à l'oral).

3. Du Continu au Discret

Discrétisation Ecoulement Porteur

- Méthode de point fixe inspirée de la théorie.
- Potentiel calculé à l'étape k par des éléments finis classiques continus H^1 -conformes d'ordre 1.
- Maillage triangulaire non structuré axisymétrique.
- Poids axisymétrique : quadrature de Lagrange à 10 points.
- Densité et vitesse calculées à l'étape $k+1$, constants par éléments.
- Nouvelle matrice assemblée à chaque itération.
- Matrice creuse et symétrique (solveur creux parallèle du CERFACS).
- Assemblage parallélisé.
- Contrainte de convexité estimée sur chaque élément.
- Flux réparti uniformément au niveau du moteur, mais possibilité de prendre un flux inhomogène donné par les motoristes.
- Formulation axisymétrique (seul mode 0 : écoulement indépendant de θ)



Couplage Numérique Modal au Moteur

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } (a_{mn}^+)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ \text{Trouver } \phi_{am} \in H_{am-\Gamma_M}^1(\Omega) \text{ et } (a_{mn}^-)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tel que :} \\ a_{0m}(\phi_{am}, \psi_m) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- a_{0m}(\Xi_{rmn}, \psi_m) - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^- \mu_{mn}^- \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\psi_m} \\ = - \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ a_{0m}(\Xi_{rmn}, \psi_m) + \sum_{n \in \mathbb{N}} a_{mn}^+ \mu_{mn}^+ \int_{\Gamma_M} \Xi_{rmn} \overline{\psi_m}, \\ \forall \psi_m \in H_{am-mod}^1(\Omega) \end{array} \right.$$

??? A Supprimer ?

Dire que pour Helmholtz, voilà ce qui est fait dans le code d'EADS.

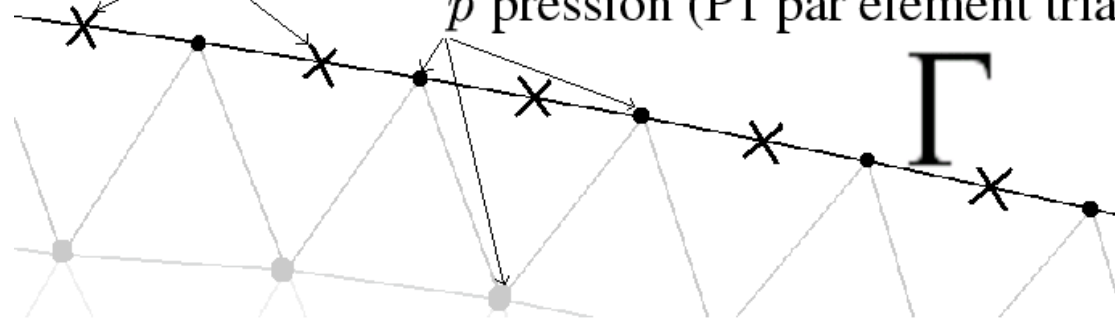
Conditions Intégrales sans Ecoulement : un Couplage Symétrique

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (p, \phi = ' v.n') \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} [\vec{\nabla} p \cdot \vec{\nabla} \bar{p}^t - k^2 p \bar{p}^t] = \frac{ik}{2} \int_{\Gamma} \phi \bar{p}^t - ik \int_{\Gamma} D^* \phi \bar{p}^t + \int_{\Gamma} N p \bar{p}^t \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} p \bar{\phi}^t - \int_{\Gamma} D p \cdot \bar{\phi}^t + ik \int_{\Gamma} S \phi \cdot \bar{\phi}^t = 0 \\ \forall (p^t, \phi^t) \in H^1(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \end{array} \right.$$

qui est
varphi?

$v.n$ vitesse normale (P0 par élément poutre)

p pression (P1 par élément triangle)



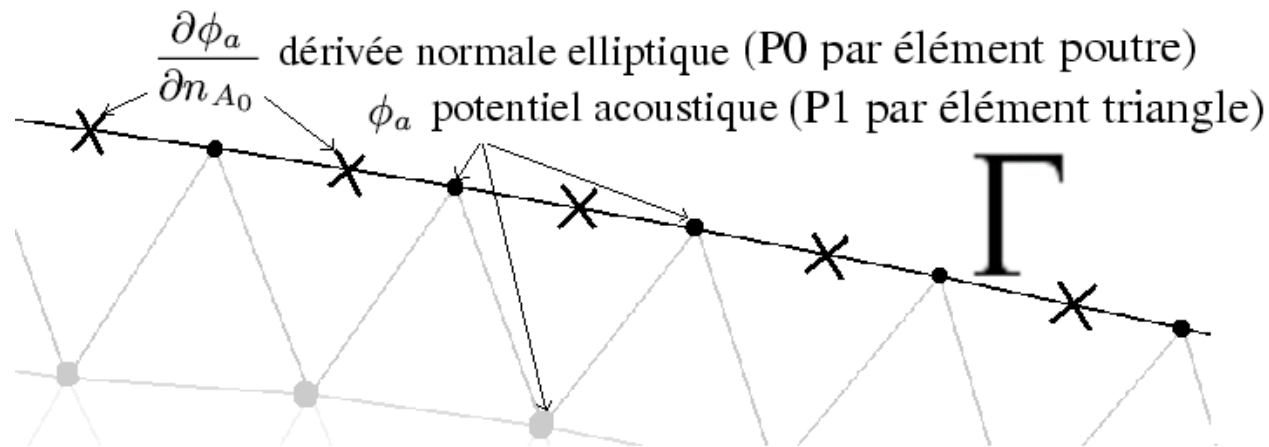
$$\begin{matrix} p_{P^1} & p_{P^1} & \phi_{P^0} \\ p_{P^1}^t & \begin{pmatrix} A & A & 0 \\ A & A - N & ik(-\frac{I}{2} + D^*) \\ 0 & ik(-\frac{I}{2} + D) & k^2 S \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Conditions Intégrales sans Ecoulement

Un dessin avec l'EDP + CL + EI (cf. ton dessin p.41) serait le bienvenu pour comprendre ce qui suit...

Conditions Intégrales avec Ecoulement

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \frac{\partial \phi_a}{\partial n} - \left(-ik_\infty \phi_a + \vec{M}_\infty \cdot \nabla \phi_a \right) \vec{M}_\infty \cdot \vec{n} \\ \phi_a \end{array} \right. \xrightarrow{\text{Lorentz}} \begin{array}{l} \tilde{\nabla} \tilde{\phi}_a' \cdot \vec{n}' \\ \tilde{\phi}_a' \end{array}$$



$\tilde{\phi}_a'$ et $\tilde{\nabla} \tilde{\phi}_a' \cdot \vec{n}'$ sont couplés via la formulation S.

$$\left\{ \begin{array}{l} [\tilde{\phi}_a']_{\tilde{s}} = e^{-ik'_\infty M_\infty z'} [\phi_a]_s = \tilde{\Theta}_{\tilde{s}} [\phi_a]_s \\ [\tilde{\nabla} \tilde{\phi}_a' \cdot \vec{n}']_{\tilde{a}} = \frac{\int_{\tilde{a}} e^{-ik'_\infty M_\infty z'} \left[\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} \right]_a}{|\tilde{a}|} = \tilde{\Theta}_{\tilde{a}} \left[\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} \right]_a \end{array} \right.$$

Discrétisation Acoustique : Formulation Variationnelle Globale

$$\begin{pmatrix}
 A_{0m} - \overline{{}^t\Theta_{\tilde{s}}}\tilde{N}\tilde{\Theta}_{\tilde{s}} & A_{0m}X_{mn} & \overline{{}^t\Theta_{\tilde{s}}}(-\frac{\tilde{I}}{2} + \tilde{D}^*)\tilde{\Theta}_{\tilde{\alpha}} \\
 \overline{X_{mn'}^t}A_{0m} & \overline{X_{mn'}^t}A_{0m}X_{mn} - [\mu_{mn}^-] & 0 \\
 \overline{{}^t\Theta_{\tilde{\alpha}}}(-\frac{\tilde{I}}{2} + \tilde{D})\tilde{\Theta}_{\tilde{s}} & 0 & -\overline{{}^t\Theta_{\tilde{\alpha}}}\tilde{S}\tilde{\Theta}_{\tilde{\alpha}}
 \end{pmatrix}
 \times
 \begin{pmatrix}
 \phi_a(s) \\
 a_{mn}^- \\
 \frac{\partial\phi_a}{\partial n_{A_{0m}}}(a)
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 A_{0m}X_{mn'}(a_{mn}^+) \\
 \left(-\overline{X_{mn'}^t}A_{0m}X_{mn'} + [\mu_m^+]\right)(a_{mn}^+) \\
 0
 \end{pmatrix}$$

aux sommets

$\phi_a(s)$: Potentiel Acoustique au Sommet du Maillage
 a_{mn}^- : Coefficients Modaux Réfléchis
 $\frac{\partial\phi_a}{\partial n_{A_{0m}}}(a)$: Dérivées Elliptiques par Arêtes

mettre les
 domaines sur
 lesquelles vivent
 ces variables :
 Omega,
 Gamma_M,...

Trop d'items : filtrer les plus importants...

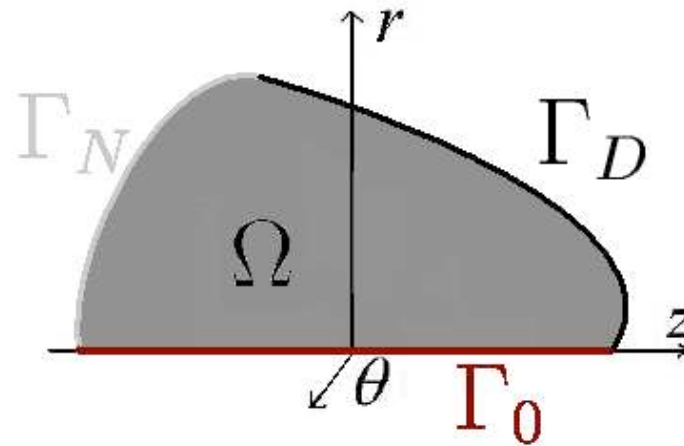
Discrétisation Acoustique

- Potentiel acoustique discrétisé en éléments finis classiques continus H^1 -conformes d'ordre 1.
- Maillage triangulaire non structuré.
- Matrices assemblées séparément et parallèlement.
- Condition de Dirichlet nulle sur l'axe (lignes et colonnes des degrés de liberté correspondant supprimés).
- Poids axisymétrique : quadrature de Lagrange à 10 points.
- Résolution directe du système linéaire par un complément de Schur.
- Solveur creux parallèle du CERFACS utilisé pour la matrice volumique creuse.
- Post-traitement et obtention des résultats acoustiques (décibels et SER) à partir du potentiel acoustique et des données de l'écoulement de porteur sur le maillage.

4. Résultats Numériques

Faire de cette partie une nouvelle section "Eléments finis en axisymétrie". Et motiver son intérêt.

Singularité axiale : un nouvel élément fini axisymétrique



Le problème du Laplacien axisymétrique est posé dans le domaine transverse Ω pour un second membre porté uniquement par le mode azimutal 1 :

Dire que c'est un problème modèle...

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{u}{r^2} = f(r, z), & \forall (r, z) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g(r, z), & \forall (r, z) \in \Gamma_N \\ u = 0, & \forall (r, z) \in \Gamma_D \end{array} \right.$$

Trop dense!

Espaces Fonctionnels Axisymétriques

Ce problème est naturellement bien posé dans les espaces de Sobolev à poids axisymétrique :

$$L_a^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tel que } u\sqrt{\cdot} \in L^2(\Omega)\}.$$

$$H_a^1(\Omega) = \{u \in L_a^2(\Omega), \text{ tel que } u\sqrt{\cdot} \in L^2(\Omega), \vec{\nabla} u \in L_a^2(\Omega)\},$$

où on note $u\sqrt{\cdot}$ la fonction $u\sqrt{\cdot}(r, z) \equiv \frac{u(r, z)}{\sqrt{r}}$ et $u\sqrt{\cdot}$ la fonction

$u\sqrt{\cdot}(r, z) \equiv \sqrt{r}u(r, z)$. L'application trace notée γ_0 , qui à $v \in C_a^\infty(\overline{\Omega})$

(l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R})$ associe ses valeurs au bord $\gamma_0 v : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, se prolonge de manière unique en une application linéaire continue de $H_a^1(\Omega)$ dans $L_a^2(\partial\Omega, \partial\Omega)$.

Toute fonction $u \in H_a^1(\Omega)$ vérifie $\gamma_0 u = 0$ sur l'axe. On note $H_{0,a}^1(\Omega)$ l'espace de Hilbert tel que $\gamma_0 u = 0$ sur Γ_D . Le problème se formule variationnellement :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in H_{0,a}^1(\Omega), \text{ tel que : } a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H_{0,a}^1(\Omega), \\ &{}_a(u, v) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \vec{\nabla} v r dr dz + \int_{\Omega} uv \frac{dr dz}{r} \text{ et } \ell(v) = \int_{\Omega} f v r dr dz + \int_{\Gamma_N} g v r d\gamma. \end{aligned}$$

Discrétisation conforme

Nous considérons l'espace discret suivant :

$$X_{\mathcal{T}} = \left\{ u \in C^0(\overline{\Omega}), u|_K \in P^1, \forall K \in \mathcal{T}^2, u|_{\Gamma_D} = 0 \right\}.$$

Une fonction $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ est de la forme :

$$\tilde{u}_{\mathcal{T}}(r, z) = \tilde{\alpha}\sqrt{r} + \tilde{\beta}r\sqrt{r} + \tilde{\gamma}\sqrt{r}z, \forall K \in \mathcal{T}^2,$$

Pour la formulation discrète, l'espace continu $H_{0,a}^1(\Omega)$ est remplacé par l'espace discret $X_{\mathcal{T}}$ et nous cherchons $\tilde{u}_{\mathcal{T}} \in X_{\mathcal{T}}$ tel que :

$$a(\tilde{u}_{\mathcal{T}}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in X_{\mathcal{T}}.$$

C'est l'inverse, on choisit d'abord u puis on obtient le f et le g correspondants.

Comparaison sur un cas-test analytique

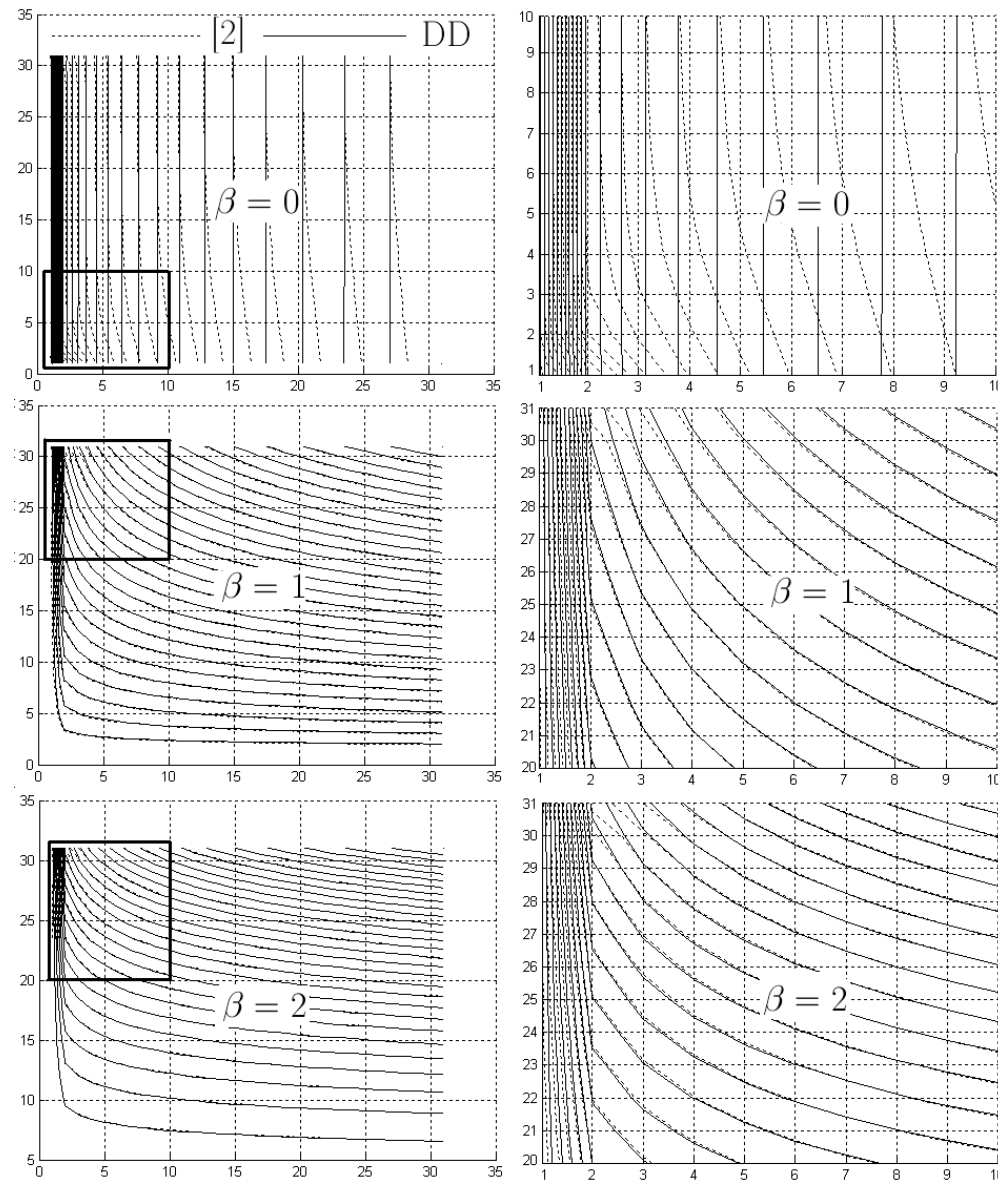
On suppose dans cette partie que $\Omega =]0, 1[^2$ et $\Gamma_D = \emptyset$. On introduit deux paramètres réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$, un second membre f donné par :

$$f(r, z) \equiv r^\alpha \left[(\alpha^2 - 1) \frac{z^\beta}{r^2} + \beta(\beta - 1)z^{\beta-2} \right].$$

et une donnée de Neumann g telle que $g(r, z) = \alpha$ si $r = 1$, $-\beta r^\alpha z^{\beta-1}$ si $z = 0$, βr^α si $z = 1$. La solution du problème modèle s'exprime simplement : $u(r, z) \equiv r^\alpha z^\beta$. Nous comparons ici les résultats des deux méthodes (éléments finis $H_{0,\alpha}^1$ -conformes et éléments finis classiques auxquels on a rajouté une condition de Dirichlet nulle sur l'axe) pour ce cas-test analytique.

A l'oral ou sur le transparent suivant.

Isovaleurs et zoom au niveau de l'axe $u(r, z) = r^{\frac{1}{4}} z^{\beta}$, nous comparons les isovaleurs de Mercier-Raugel, de notre approche et de la solution analytique

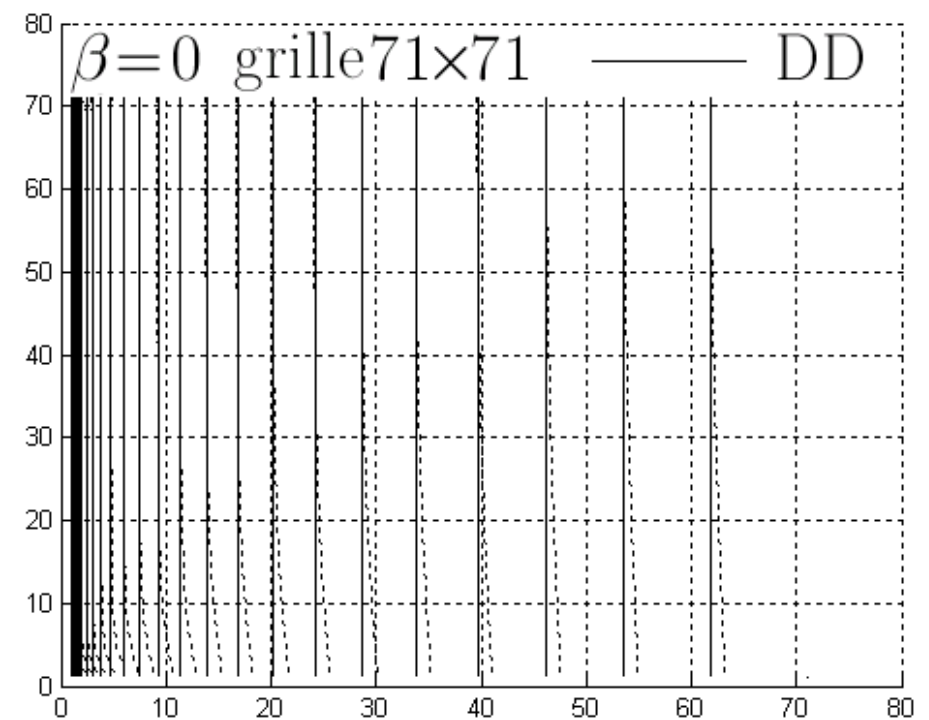
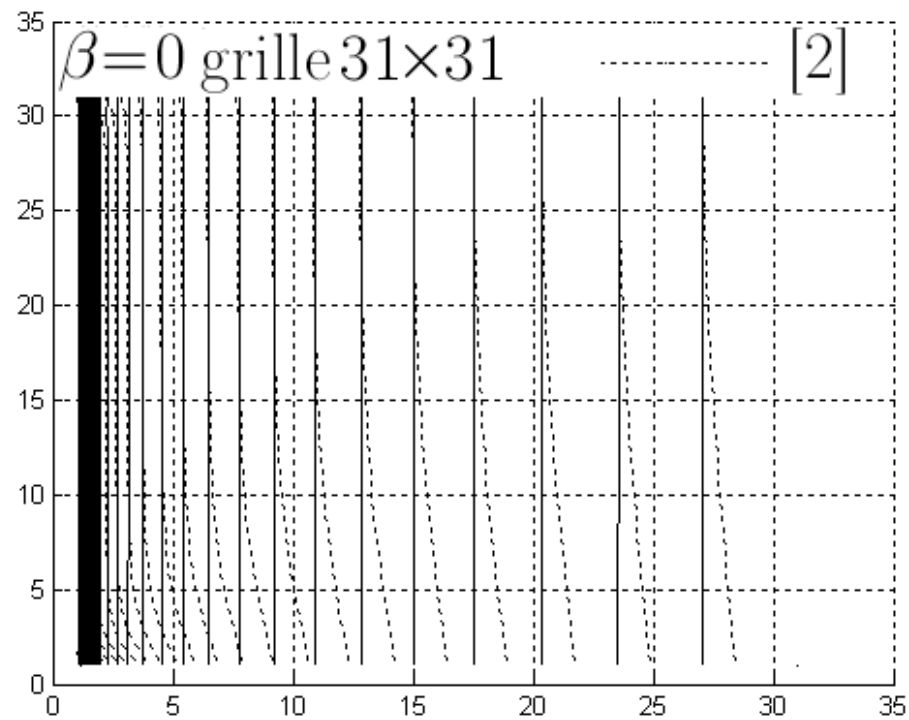


C'est quoi en fonction de quoi? A-t-on besoin de toutes les figures?

Idem que pour le
transparent 24.

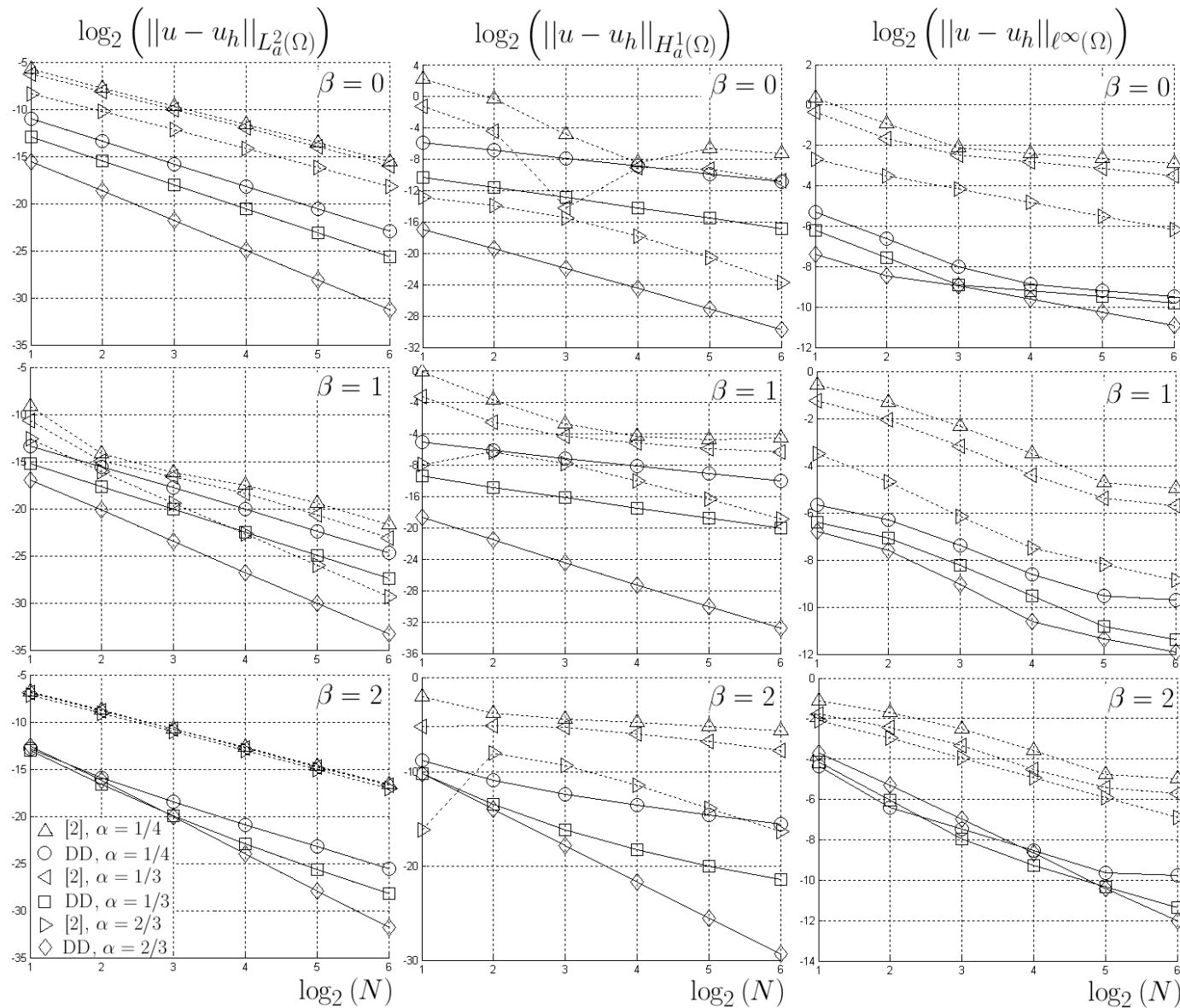
Convergence en maillage des isovaleurs pour les deux schémas

**$u(r, z) = r^{1/4}$, nous comparons les résultats de Mercier-Raugel et de
notre approche**



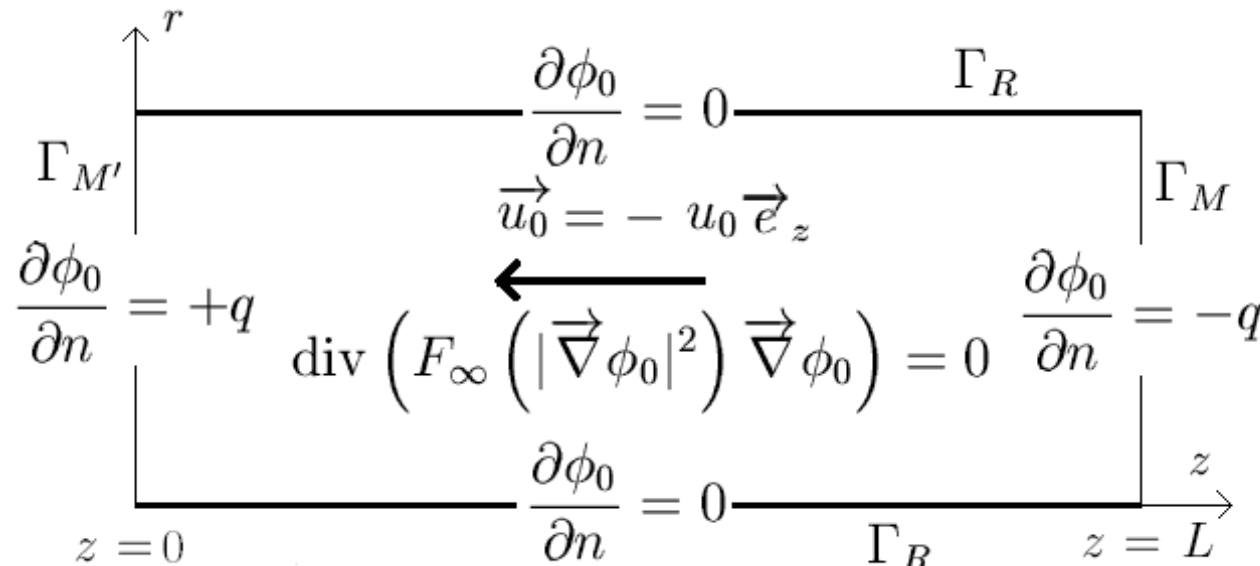
Idem.

Courbes de convergence pour diverses normes $u(r, z) = r^\alpha z^\beta$, nous comparons les résultats de Mercier-Raugel et notre approche

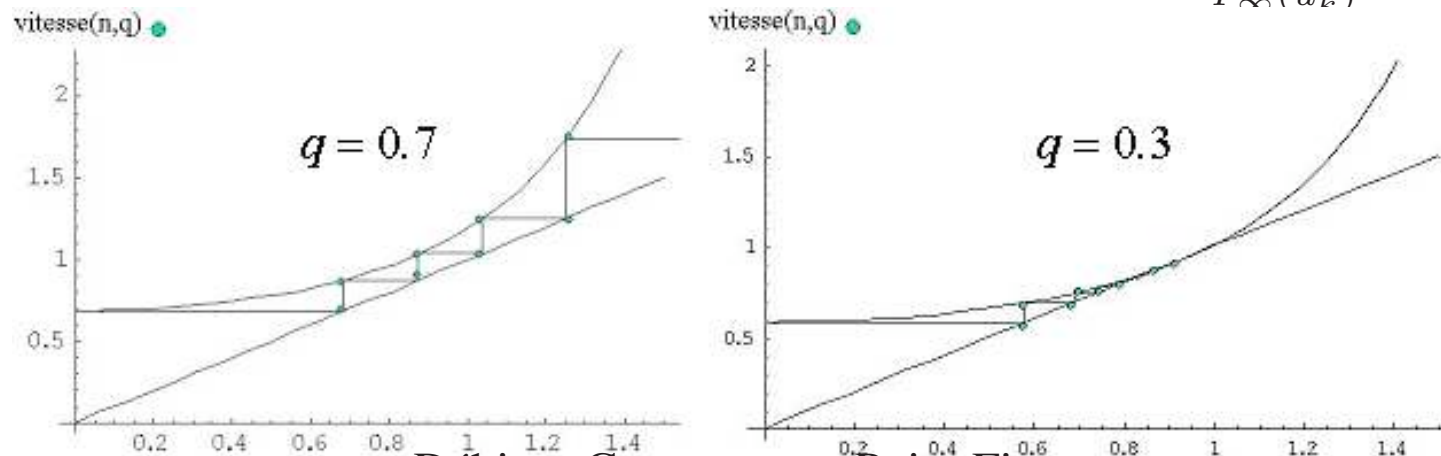


Trop de figures...

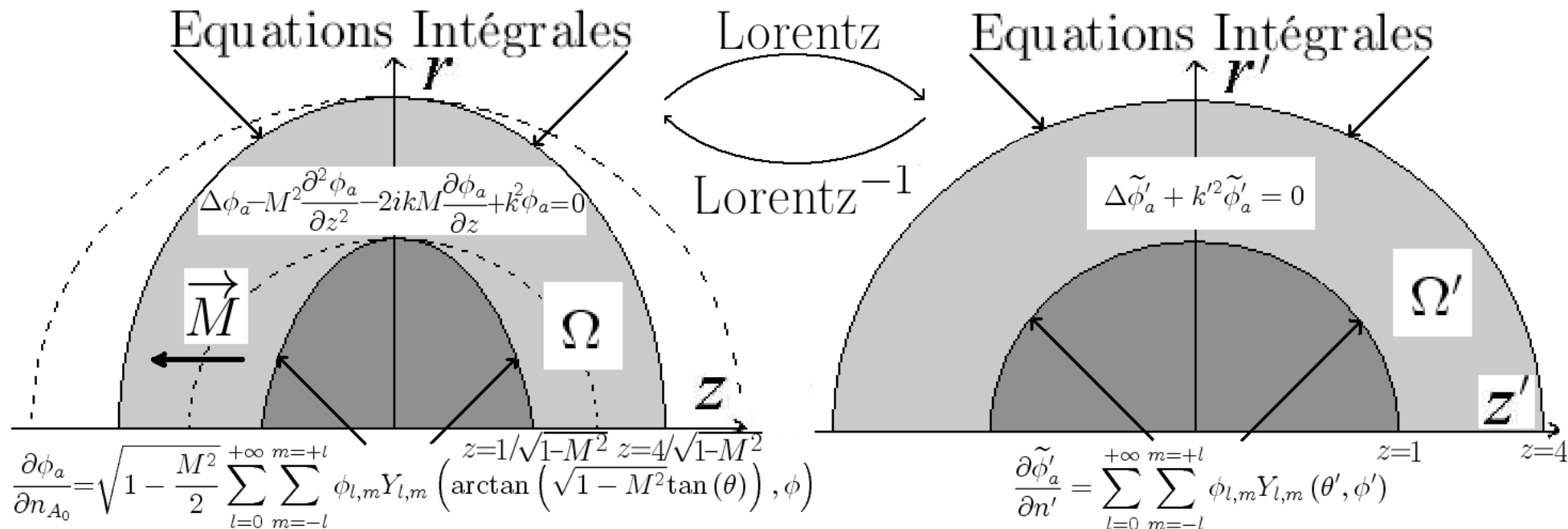
Peut-être mettre ça sur
2 transparents.



Vitesse théorique à l'étape $k + 1$ par récurrence $u_0 = 0, u_{k+1} = \frac{q}{F_{\infty}(u_k)}$.



Débit et Convergence Point Fixe



Validation des Equations Intégrales sans Ecoulement

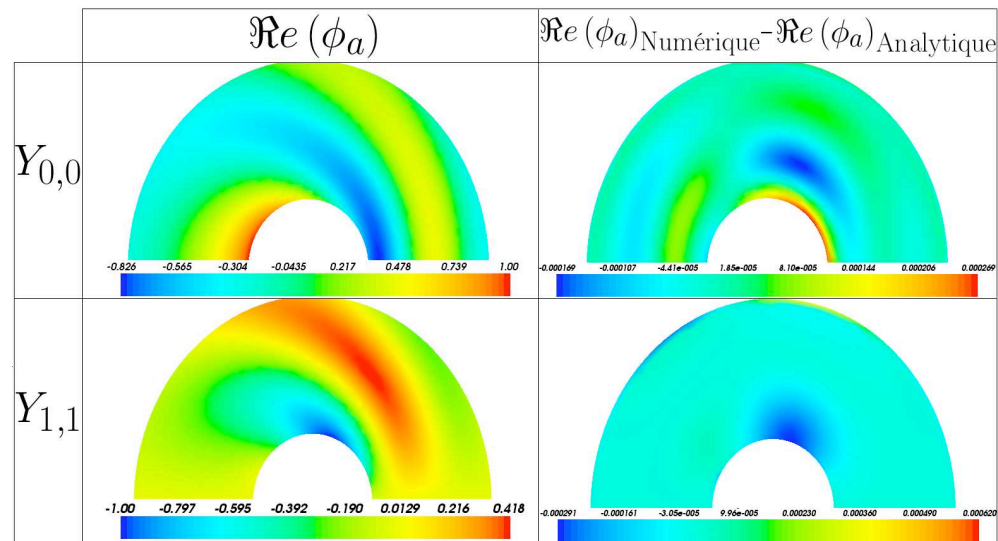
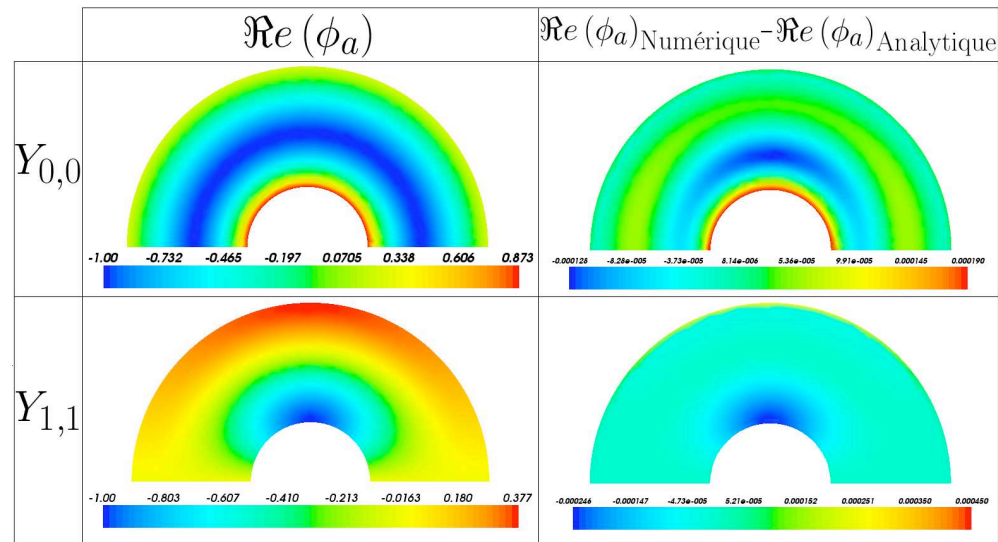
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0 \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A_0}} = \sqrt{1 - \frac{M^2}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \phi_{l,m} Y_{l,m} \left(\arctan \left(\sqrt{1 - M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right) \end{array} \right.$$

$$\phi_a = \sum_{l,m} \phi_{l,m} \frac{h_l^{(1)}(k' r')}{k' \left[\frac{d}{dr'} h_l^{(1)} \right](k')} (r') Y_{l,m} \left(\arctan \left(\sqrt{1 - M^2} \tan(\theta) \right), \phi \right) e^{\frac{ik' M z}{\sqrt{1 - M^2}}}$$

Inutile de réécrire les équations, elles sont sur les figures ci-dessus...

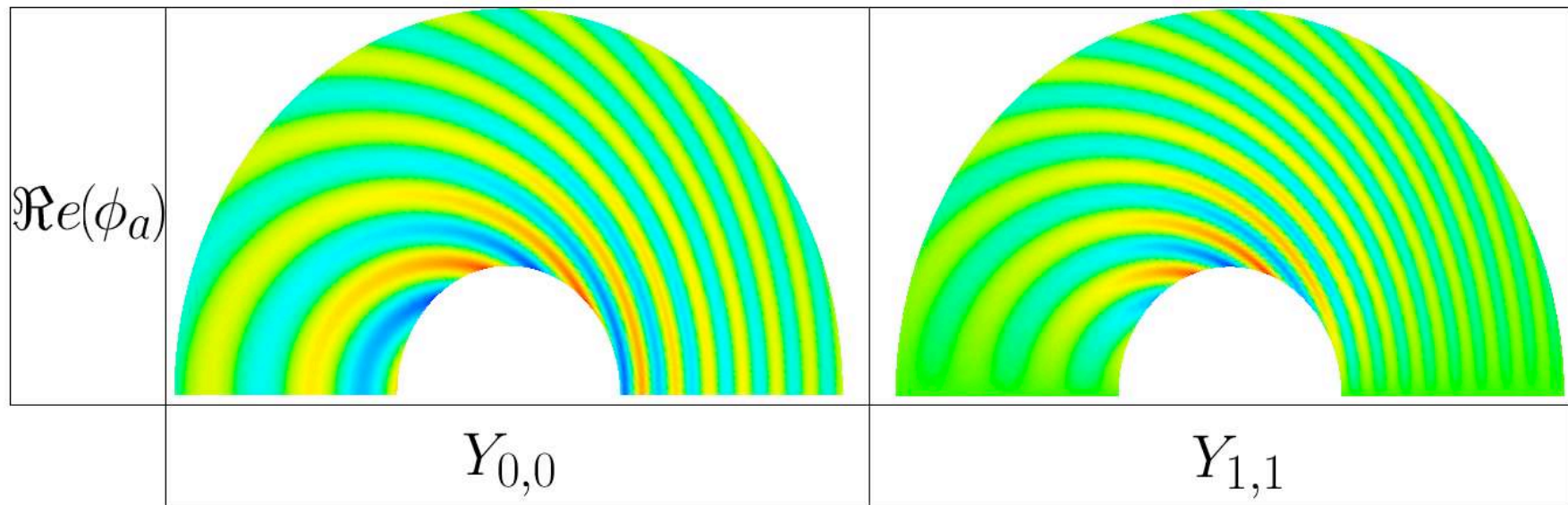
Ce transparent ne sert à rien : écrire les valeurs utilisées sur le transparent suivant.

Nous présentons les résultats (champ de la partie réelle du potentiel acoustique) pour un nombre de Mach nul et constant de 0,3 du cas-test analytique précédent pour $kR = 2$ et pour les conditions de Neumann $Y_{0,0}$ et $Y_{1,1}$. Les solutions sont renormalisées par leur maximum. L'erreur relative à la solution analytique sur le maillage est exhibée dans chaque cas.



Ce transparent ne sert à rien : écrire les valeurs utilisées sur le transparent suivant.

Nous présentons les résultats pour un nombre de Mach constant de 0,3 du cas-test analytique précédent pour $kR = 15$ et pour les conditions de Neumann $Y_{0,0}$ et $Y_{1,1}$.



Validation des Conditions Modales : Tube d'Aspirine

Diagram of a duct of length L with a mean flow M . The duct is bounded by Γ_M at $z=0$ and Γ_R at $z=L$. The domain is Ω . The governing equation is $\Delta\phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0$. Boundary conditions are: at Γ_M , $\frac{\partial(\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n_{A0}} = T_M(\phi_a - \phi_{a,inc})$; at Γ_R , $\frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A0}} = 0$. At $z=0$, incident and reflected waves are shown with coefficients $a_{m'n'}^+ = 1$ and a_{mn}^- .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\phi_a - M^2 \frac{\partial^2 \phi_a}{\partial z^2} - 2ikM \frac{\partial \phi_a}{\partial z} + k^2 \phi_a = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial(\phi_a - \phi_{a,inc})}{\partial n_{A0}} = T_M(\phi_a - \phi_{a,inc}) \quad \forall x \in \Gamma_M \\ \frac{\partial \phi_a}{\partial n_{A0}} = 0 \quad \forall x \in \Gamma_R \end{array} \right.$$

Inutile de réécrire les équations, elles sont sur le dessin...

Le coefficient modal de retour pour un mode $m'n'$: $\beta = e^{2i \frac{\sqrt{k^2 - (1-M^2)k_{rm'n'}^2}}{1-M^2} L}$.

Coefficients Modaux Sans Ecoulement

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = L \\ k = \pi \\ f = \frac{a}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \beta = 1.$$

THEORIE $F(1, 1) = 1.$ Qui est F(1,1)?

PA2R $F(1, 1) = 9.99966 \times 10^{-1} - i8.23800 \times 10^{-3}$

ACTI3S $F(1, 1) = 1.00056 \times 10^{-1} - i1.63131 \times 10^{-3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 16L \\ k = \frac{\pi}{16} \\ f = \frac{a}{32} \end{array} \right. \Rightarrow \beta = e^{\frac{i\pi}{4}}$$

THEORIE $F(1, 1) = 7.07106 \times 10^{-1} + i7.07106 \times 10^{-1}$

PA2R $F(1, 1) = 7.07110 \times 10^{-1} + i7.07102 \times 10^{-1}$

ACTI3S $F(1, 1) = 7.07520 \times 10^{-1} + i7.07899 \times 10^{-1}$

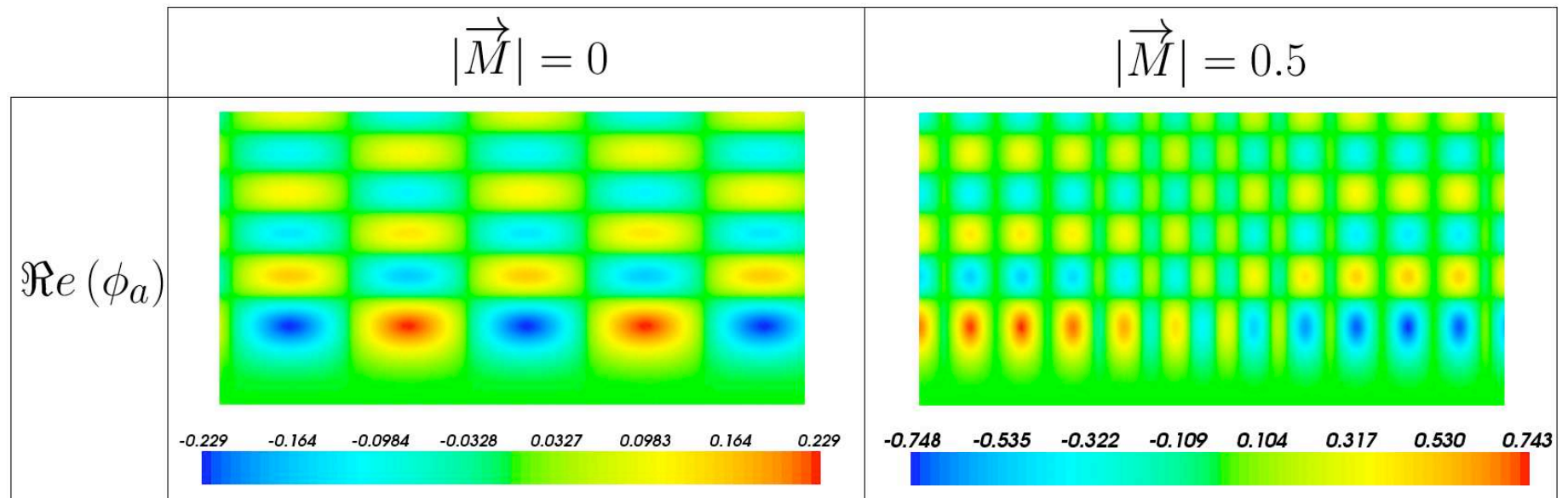
Coefficients Modaux Avec Ecoulement

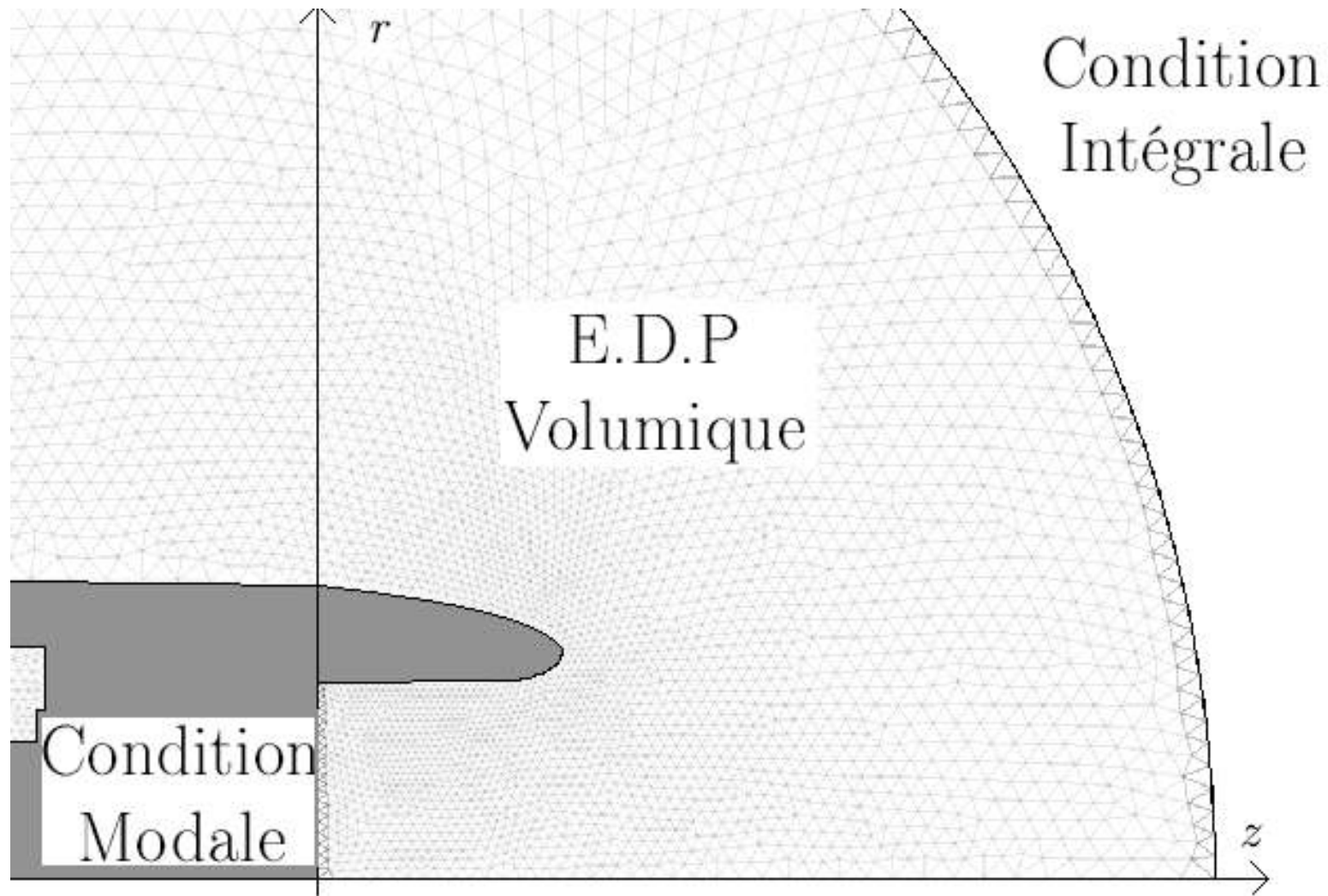
$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 8L \\ k = \frac{\pi}{8a} \\ f = \frac{1}{16} \\ M = 0.1 \end{array} \right. \Rightarrow \beta = e^{i \frac{\pi}{2(1-M^2)}} \quad \text{Bien.} \\
 \text{THEORIE} \quad F(1, 1) = -1.58659 \times 10^{-2} + i9.998741 \times 10^{-1} \\
 \text{PA2R} \quad F(1, 1) = -1.58658 \times 10^{-2} + i9.998745 \times 10^{-1} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 16L \\ k = \frac{\pi}{16a} \\ f = \frac{1}{32} \\ M = 0.1 \end{array} \right. \Rightarrow \beta = e^{i \frac{\pi}{4(1-M^2)}} \\
 \text{THEORIE} \quad F(1, 1) = 7.01474 \times 10^{-1} + i7.12694 \times 10^{-1} \\
 \text{PA2R} \quad F(1, 1) = 7.01479 \times 10^{-1} + i7.12689 \times 10^{-1}
 \end{array}$$

Ce transparent ne sert à rien : écrire les valeurs utilisées sur le transparent suivant.

On présente ici les résultats du cas-test précédent (champ de la partie réelle du potentiel acoustique) pour un nombre de Mach nul et constant de 0,3 pour le mode $m = 5, n = 5$ et pour $kR = 6\pi$. Les modes sont renormalisés par leur flux d'énergie.

Tu annonces un Mach = 0.3 dans le slide précédent et là on a M=0.5?





Problème Général

Qu'est ce que l'on calcule? L'erreur?
Pour quelle norme?

Validation Comparative Ecoulement Nul

$$\text{PA2R, m=0, n=0} \left\{ \begin{array}{lll} 6085 & \text{ddls} & -2.00150 \times 10^{-1} - i 9.09183 \times 10^{-2} \\ 23123 & \text{ddls} & -1.99342 \times 10^{-1} - i 9.24564 \times 10^{-2} \\ 86752 & \text{ddls} & -1.99844 \times 10^{-1} - i 9.36297 \times 10^{-2} \end{array} \right.$$

$$\text{ACTI3S, m=0, n=0} \left\{ \begin{array}{lll} 17137 & \text{ddls} & -1.99854 \times 10^{-1} - i 9.35946 \times 10^{-2} \\ 62455 & \text{ddls} & -1.99837 \times 10^{-1} - i 9.36477 \times 10^{-2} \\ 226747 & \text{ddls} & -1.99837 \times 10^{-1} - i 9.36477 \times 10^{-2} \end{array} \right.$$

$$\text{PA2R, m=1, n=0} \left\{ \begin{array}{lll} 6085 & \text{ddls} & 6.35537 \times 10^{-1} - i 4.76084 \times 10^{-1} \\ 23123 & \text{ddls} & 6.57412 \times 10^{-1} - i 4.73512 \times 10^{-1} \\ 86752 & \text{ddls} & 6.64245 \times 10^{-1} - i 4.76292 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

$$\text{ACTI3S, m=1, n=0} \left\{ \begin{array}{lll} 17137 & \text{ddls} & 6.29812 \times 10^{-1} - i 4.76084 \times 10^{-1} \\ 62455 & \text{ddls} & 6.64129 \times 10^{-1} - i 4.76151 \times 10^{-1} \\ 226747 & \text{ddls} & 6.65324 \times 10^{-1} - i 4.76121 \times 10^{-1} \end{array} \right.$$

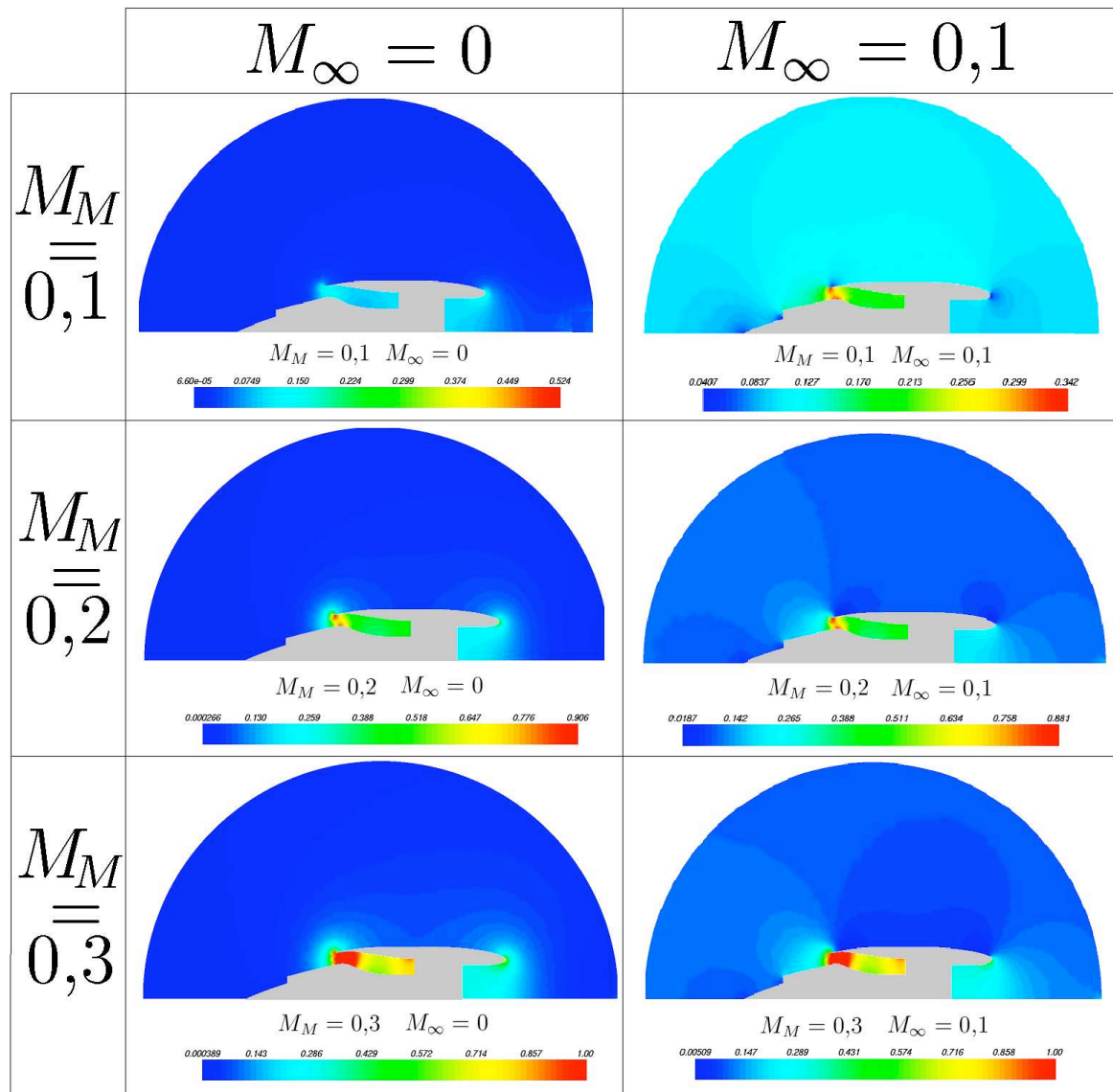
Qu'est ce que l'on calcule?
L'erreur? Pour quelle norme?

Validation Comparative Ecoulement Constant $M = 0.1$

PA2R, m=0, n=0	{	6085	ddls	$-1.92695 \times 10^{-1} - i 1.01288 \times 10^{-1}$
		23123	ddls	$-1.92537 \times 10^{-1} - i 1.02264 \times 10^{-1}$
		86752	ddls	$-1.92143 \times 10^{-1} - i 1.02926 \times 10^{-1}$
ACTI3S, m=0, n=0	{	17137	ddls	$-1.92133 \times 10^{-1} - i 1.02915 \times 10^{-1}$
		62455	ddls	$-1.92111 \times 10^{-1} - i 1.02967 \times 10^{-1}$
		226747	ddls	$-1.92111 \times 10^{-1} - i 1.02967 \times 10^{-1}$
PA2R, m=1, n=0	{	6085	ddls	$6.67034 \times 10^{-1} - i 4.08839 \times 10^{-1}$
		23123	ddls	$6.89210 \times 10^{-1} - i 4.08321 \times 10^{-1}$
		86752	ddls	$6.92364 \times 10^{-1} - i 4.09234 \times 10^{-1}$
ACTI3S, m=1, n=0	{	17137	ddls	$6.62946 \times 10^{-1} - i 4.05877 \times 10^{-1}$
		62455	ddls	$6.96835 \times 10^{-1} - i 4.09237 \times 10^{-1}$
		226747	ddls	$6.93515 \times 10^{-1} - i 4.09432 \times 10^{-1}$

Idem...

Les résultats des nombres de Mach de l'écoulement porteur sont présentés ci-dessous...
ci-dessus pour deux valeurs du Mach à l'infini : $M_\infty = 0$ et $M_\infty = 0,1$ et pour trois valeurs des nombres de Mach au moteur : $M_M = 0,1$, $M_M = 0,2$ et $M_M = 0,3$.



2 résultats au lieu de 3?

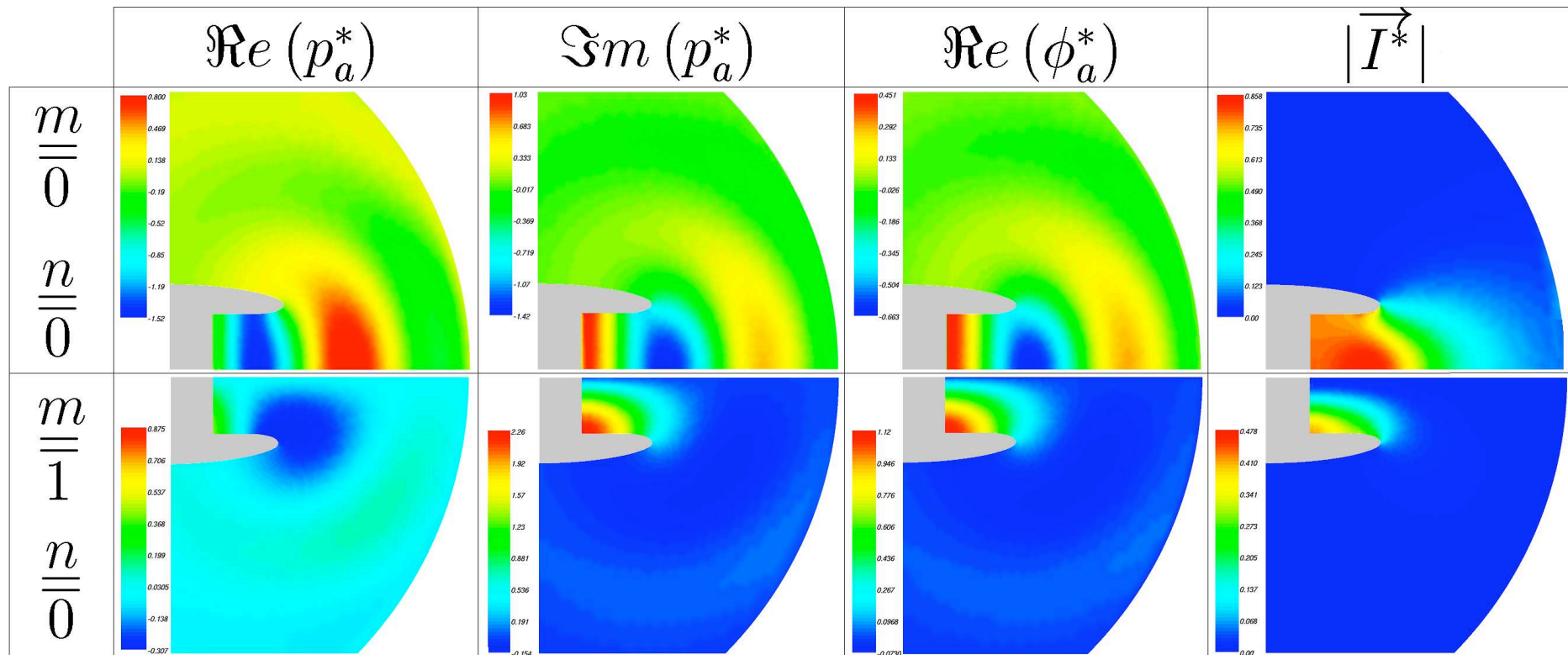
La figure ci-après présente la partie réelle et imaginaire de la pression acoustique adimensionnée ($\Re(p_a^*)$ et $\Im(p_a^*)$) se propageant sur un écoulement potentiel $M_M = 0, 1$ et $M_\infty = 0, 1$. Les résultats sont présentés pour le mode non singulier $m = 0, n = 0$ et pour le mode singulier $m = 1, n = 0$.

La pression acoustique complexe s'obtient à partir du potentiel acoustique complexe : $p_a = -\rho_0(-i\omega\phi_a + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}\phi_a)$.

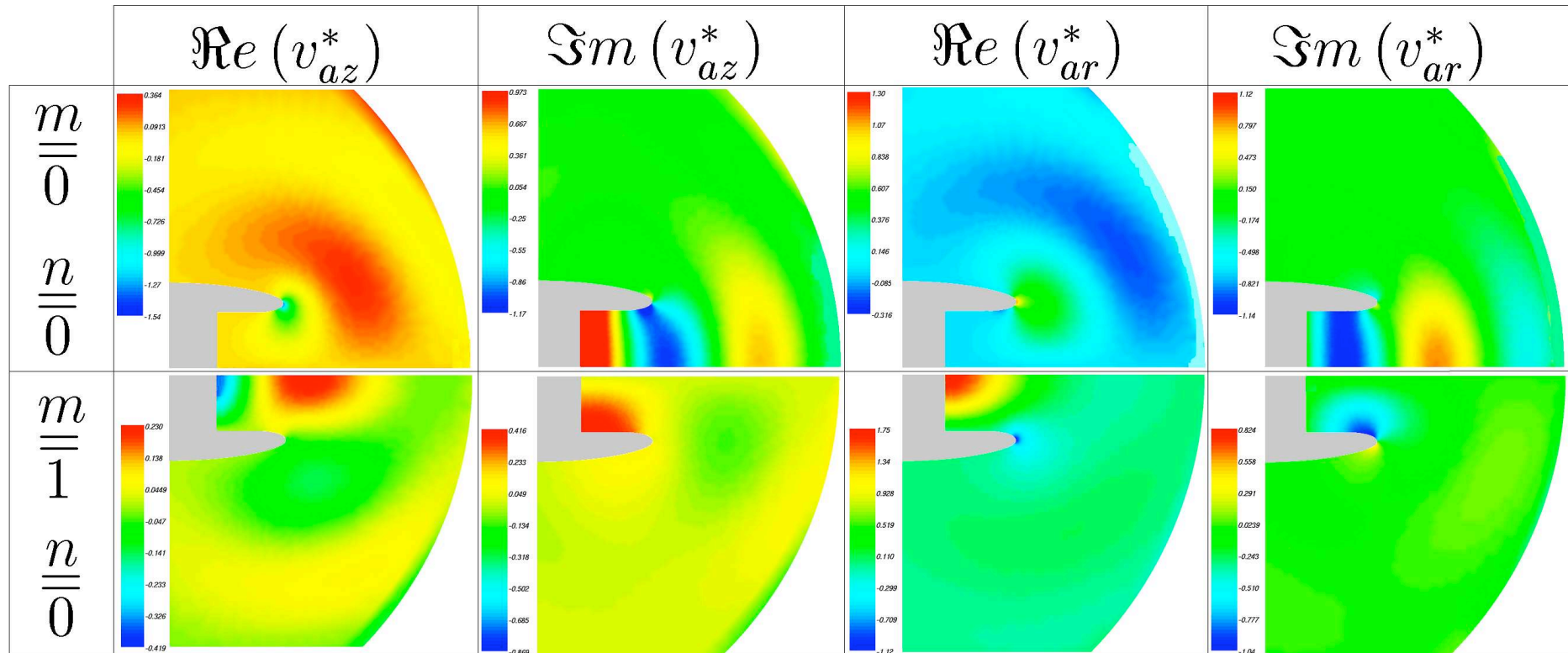
La dernière colonne présente $|\vec{I}^*|$, où \vec{I}^* désigne le vecteur réel :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \rho_0 |\vec{v}_a|^2 + \frac{|p_a|^2}{2\rho_0 a_0^2} \right) \vec{v}_0 + \frac{1}{4} \left(p_a \vec{v}_a + \overline{p_a} \vec{v}_a \right)$$

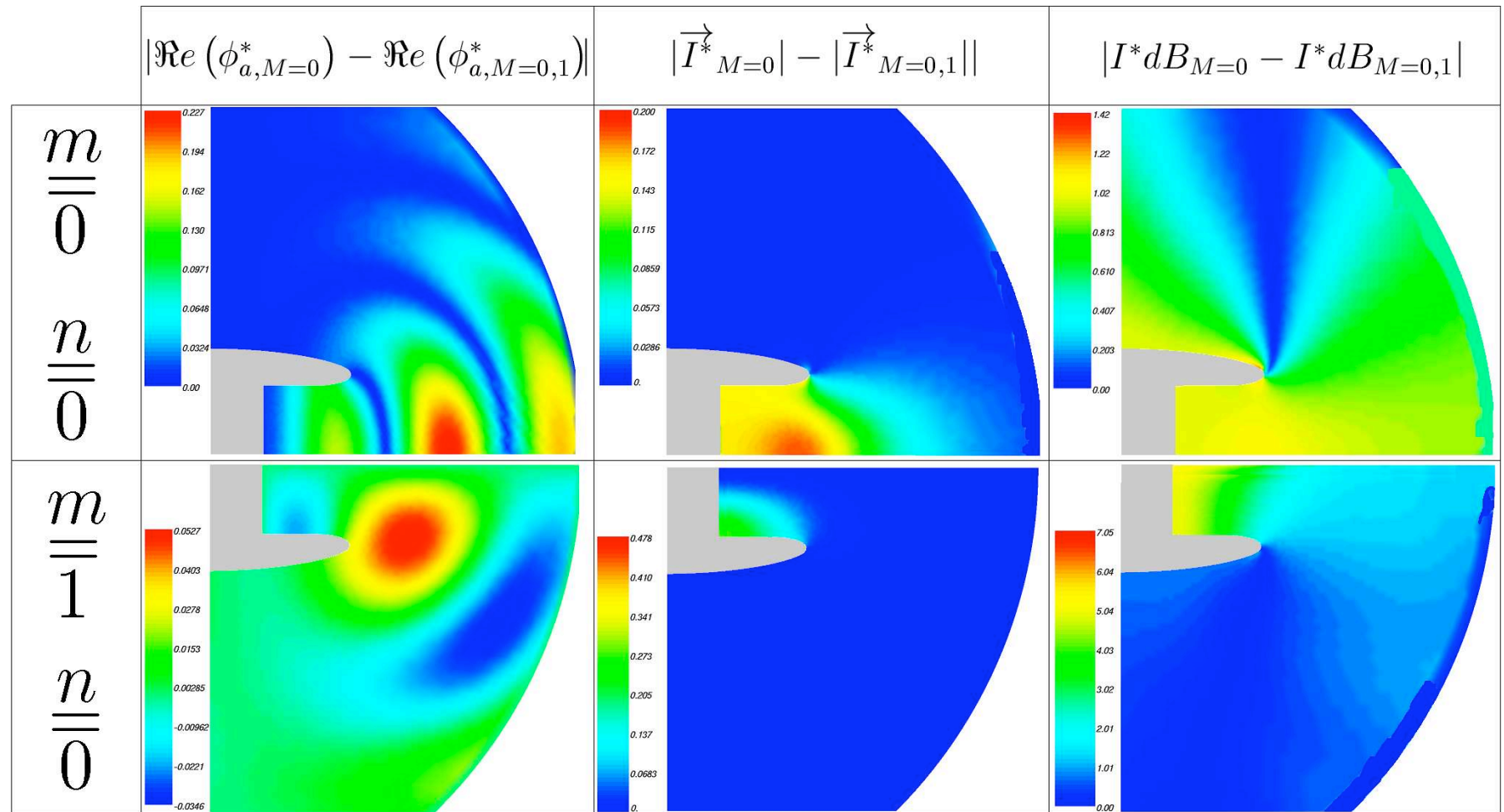
Que représente I^* ?



La figure ci-après présente les parties réelles et imaginaires des vitesses acoustiques radiales et axiales ($\Re(v_{az}^*)$, $\Im(v_{az}^*)$, $\Re(v_{ar}^*)$ et $\Im(v_{ar}^*)$) se propageant sur un écoulement potentiel $M_M = 0, 1$ et $M_\infty = 0, 1$. Les résultats sont présentés pour le mode non singulier $m = 0, n = 0$ et pour le mode singulier $m = 1, n = 0$.



La figure ci-après détaille la comparaison de la propagation acoustique sur un écoulement porteur nul et la propagation acoustique sur un écoulement porteur de Mach constant 0, 1. Les résultats sont présentés pour le mode non singulier $m = 0, n = 0$ et pour le mode singulier $m = 1, n = 0$.

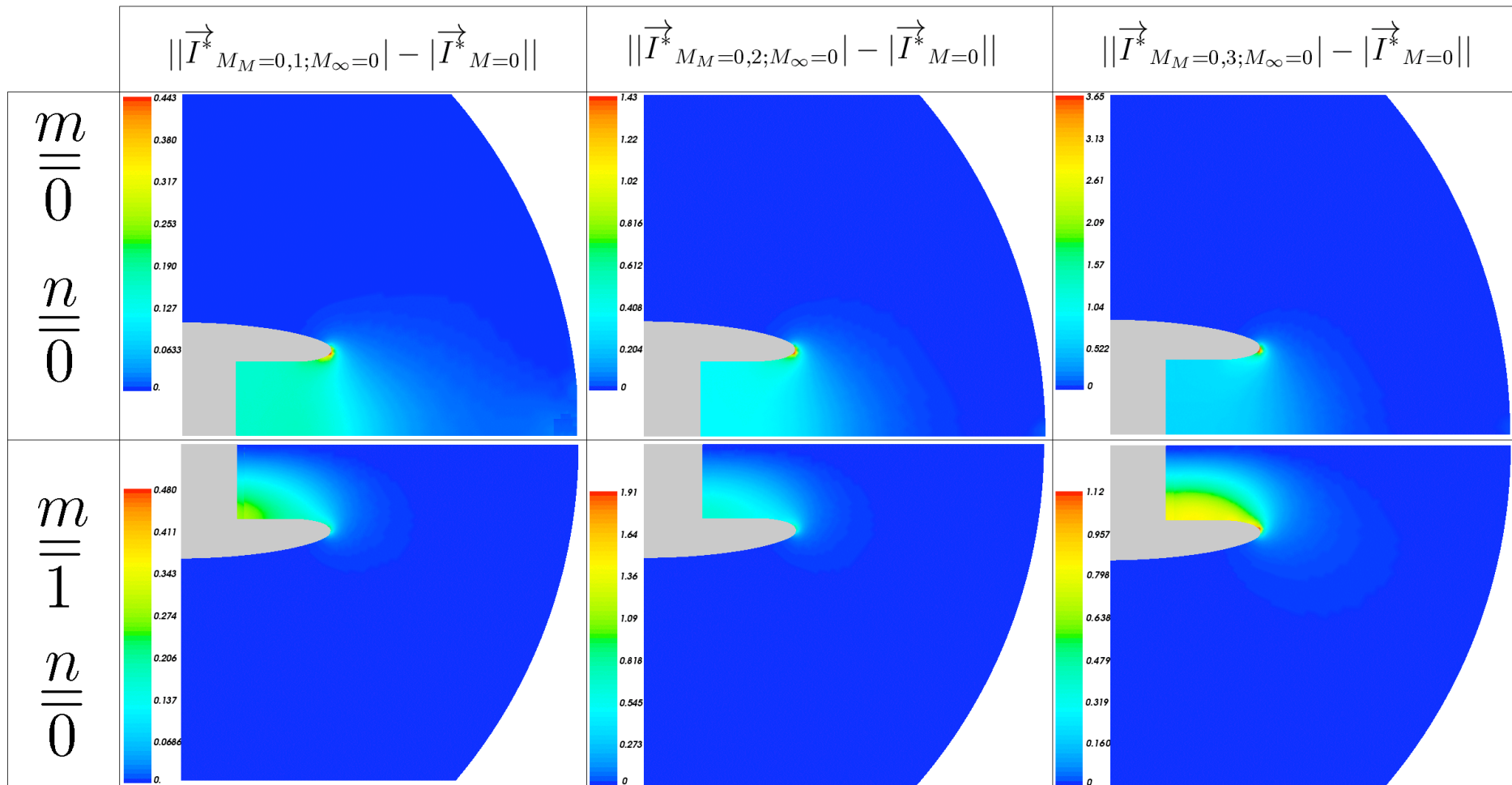


Les figures ci-après détaillent les effets de l'écoulement potentiel et son accélération à la nacelle sur la propagation de l'intensité du bruit. Les comparaisons s'effectuent par rapport à la référence canonique de l'écoulement constant égal au Mach à l'infini.

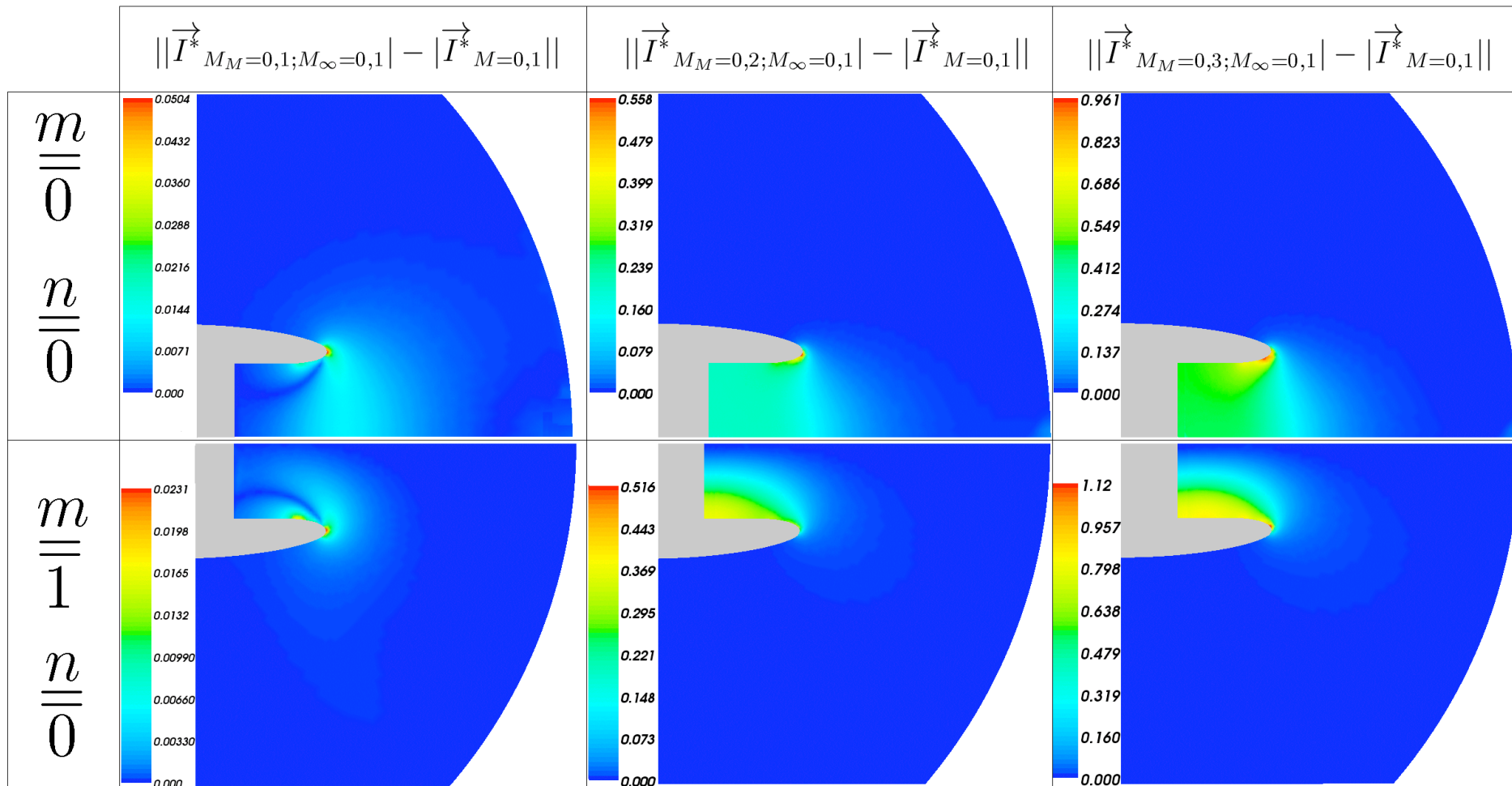
Les comparaisons sont réalisés pour un Mach à l'infini nul et égal à 0,1 ; et pour un Mach au moteur de 0,1-0,2-0,3.

Les résultats sont présentés pour le mode non singulier $m = 0, n = 0$ et pour le mode singulier $m = 1, n = 0$.

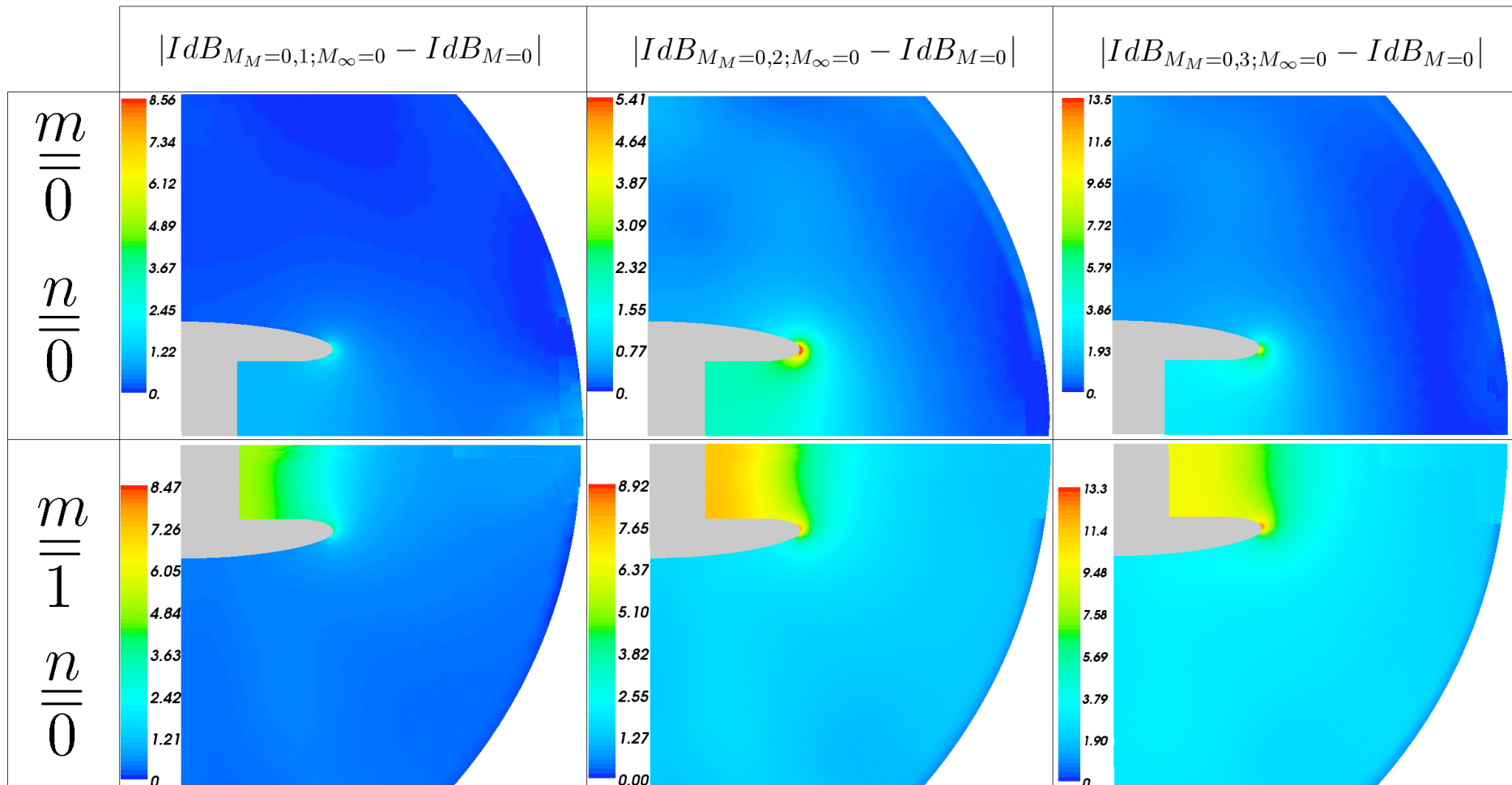
L'intensité physique adimensionnée est comparée dans un premier temps, puis les résultats sont transcrits en décibels (quantité physique pertinente pour l'être humain).



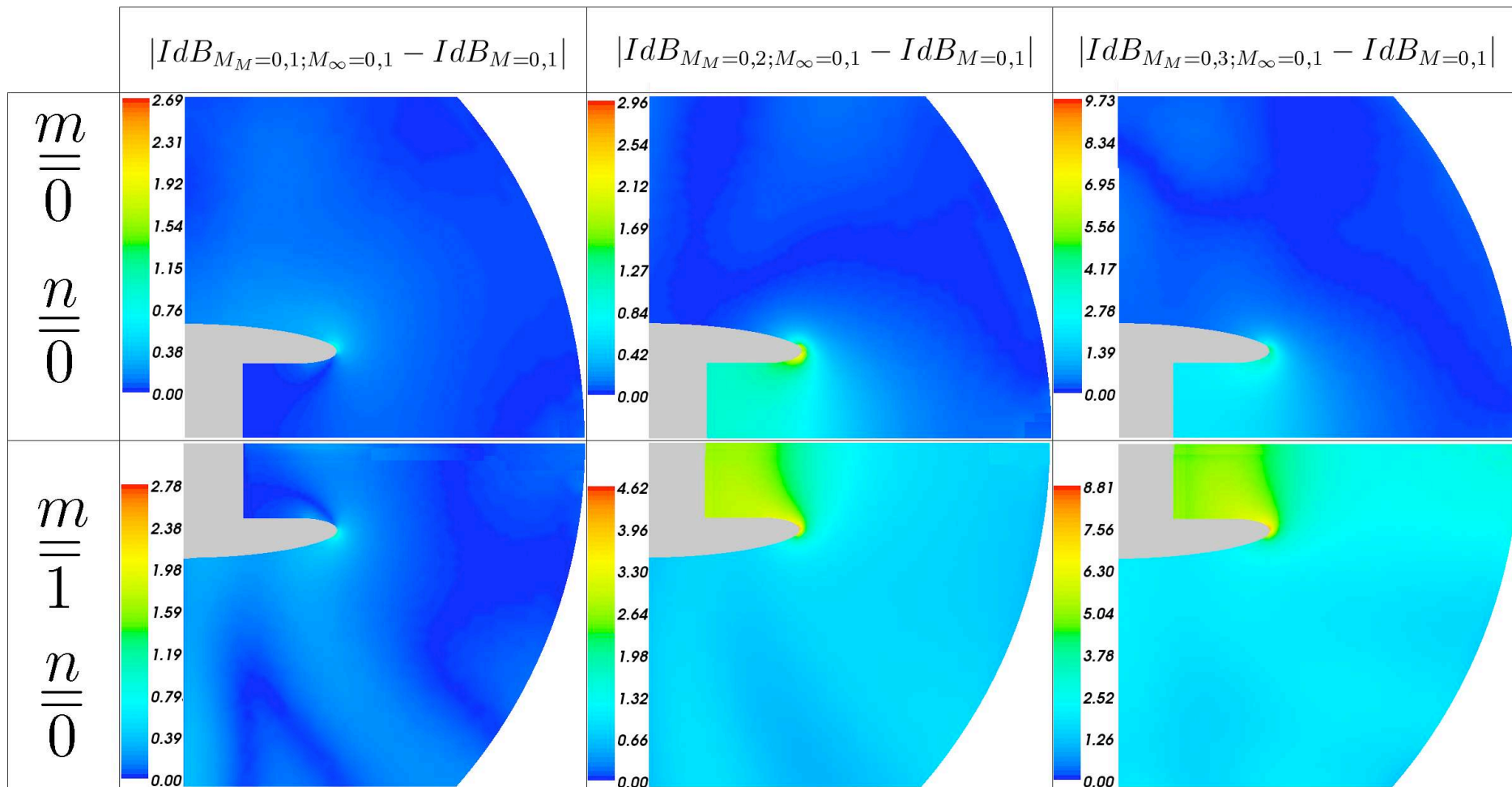
Intensité adimensionnée, $M_\infty = 0$



Intensité adimensionnée, $M_\infty = 0, 1$



Intensité en décibels, $M_\infty = 0$



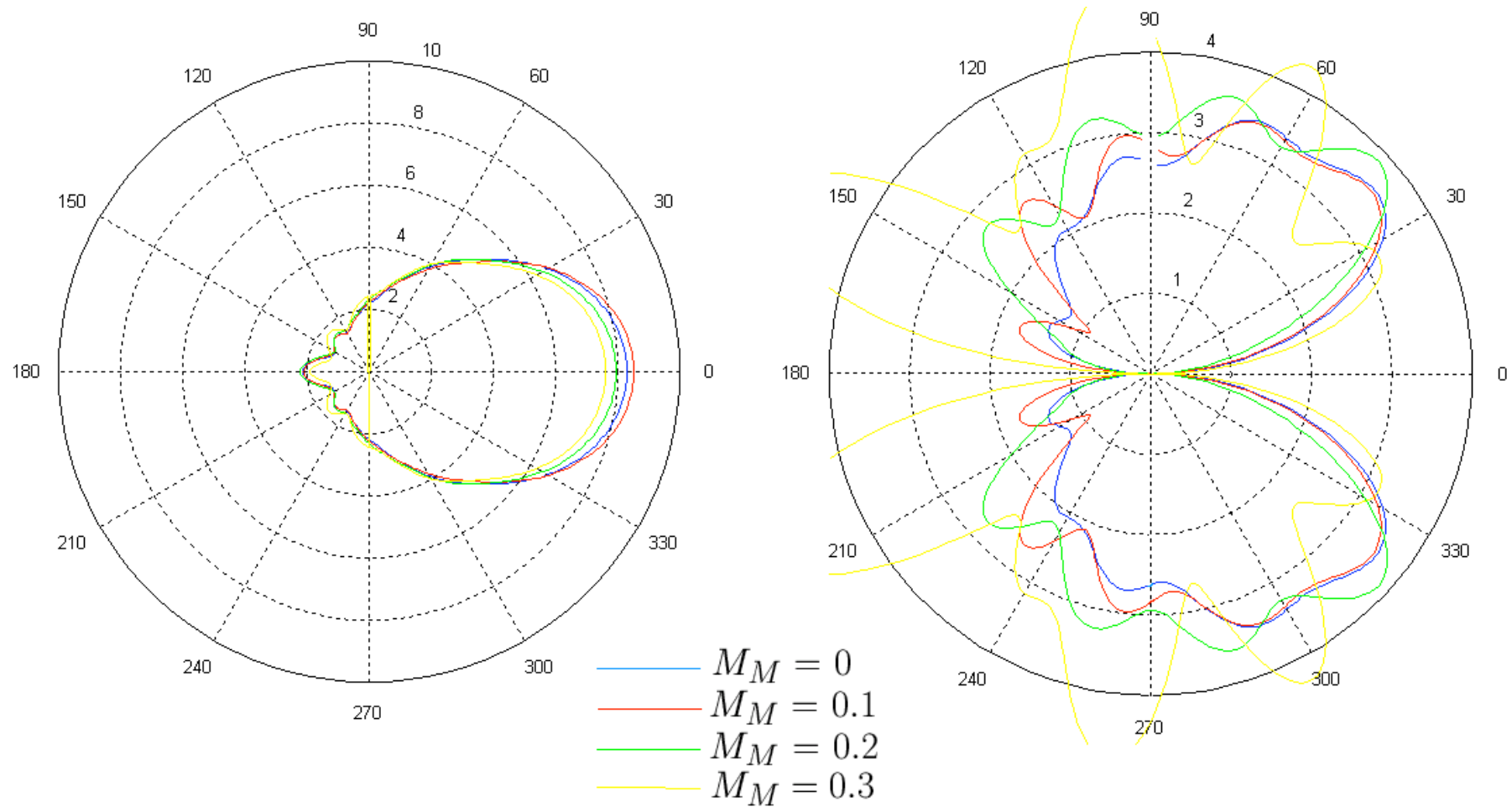
Intensité en décibels, $M_\infty = 0, 1$

Nous présentons ci-après les diagrammes de rayonnement, qui détaillent l'effet de l'écoulement potentiel sur la directivité du son à une longue distance de l'avion.

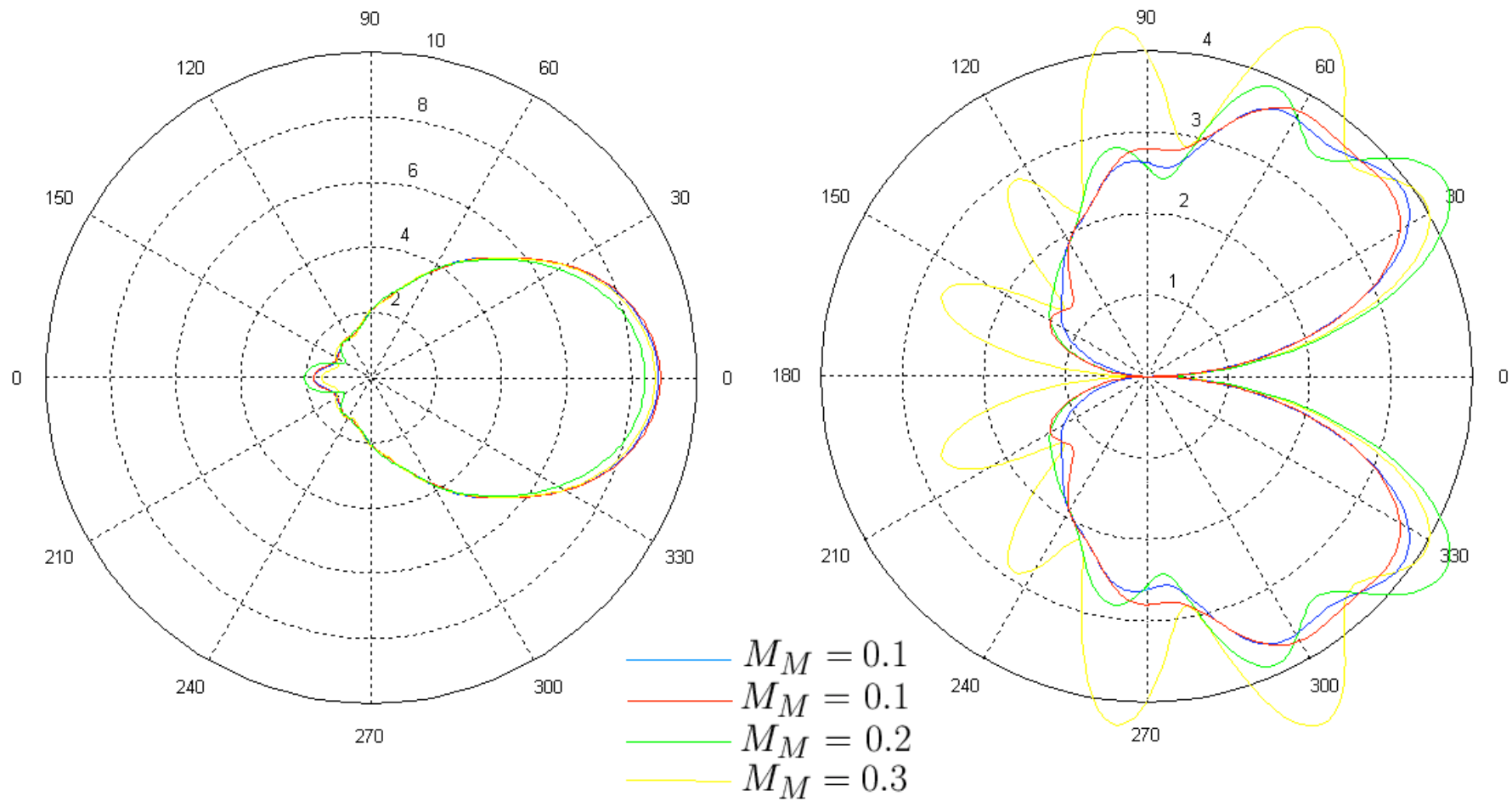
Ces diagrammes sont présentés dans le référentiel galiléen de l'avion. Le rayonnement de l'avion dans un référentiel fixe se déduit *via* une transformation algébrique de Galilée (effet Doppler).

Les résultats sont présentés sous forme de courbe polaire du module $|A(\theta)|$ en fonction de θ .

On ne présente pas la classique SER du fait de l'adimensionnement des variables physiques : seul la différence du logarithme des courbes présentées pour un même Mach infini peut s'interpréter en vrais décibels physiques.

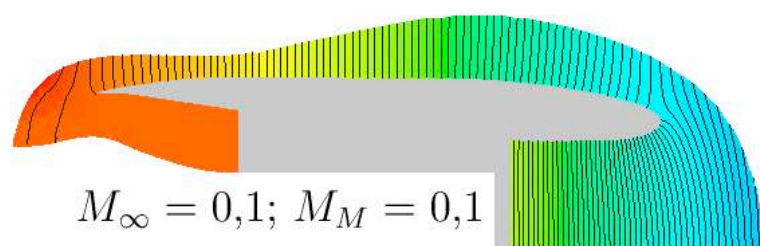


Champ Lointain, $M_\infty = 0$

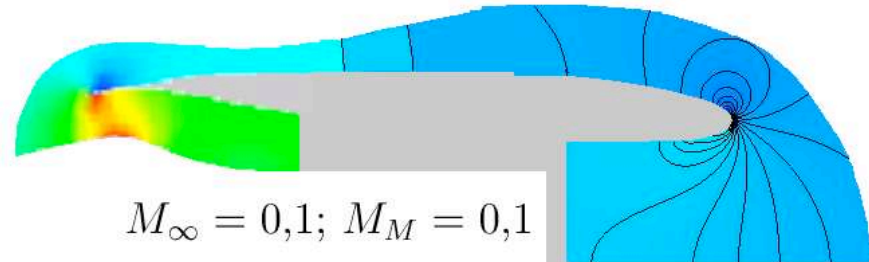


Champ Lointain, $M_\infty = 0, 1$

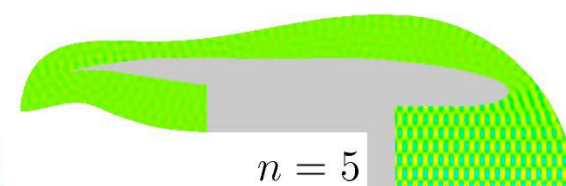
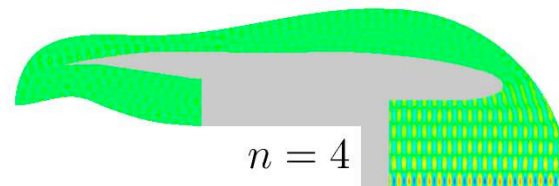
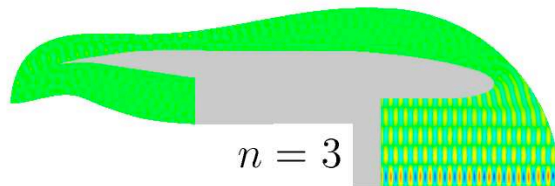
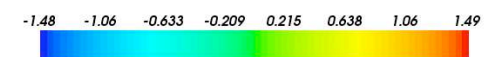
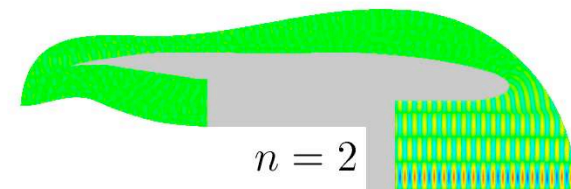
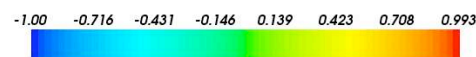
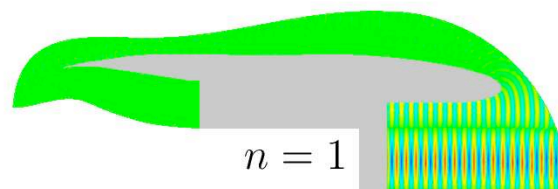
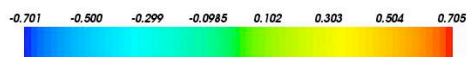
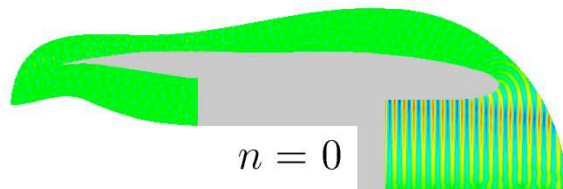
Les figures ci-après présentent les isopotentielle et les nombres de Mach d'un écoulement potentiel de même Mach moteur et infini égal à 0, 1, ainsi que les champ acoustiques de la partie réelle du potentiel se propageant sur l'écoulement précédent $M_M = M_\infty = 0, 1$ pour les modes $m = 1$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ et pour un nombre d'ondes $kR = 60$ et sur un maillage raffiné de 300 000 degrés de liberté.



Isopotentielles



Nombre de Mach



- Mise en place de méthodes numériques alternatives (...).

5. Conclusion

- **Mise à jour de méthodes numériques alternatives** à d'autres méthodes (élément fini axisymétrique, point fixe pour l'écoulement subsonique).
- **Originalité principal : couplage intégral en présence d'écoulement.** originalité principale
- **Avantages et inconvénients** du couplage intégral en écoulement par rapport aux méthodes type éléments infinis et couche limite absorbante :

- Inconvénient : **matrice surfacique pleine.**
- Avantage : surface fictive rayonnante adaptable pour **coller au mieux à l'hétérogénéité de l'écoulement** (gain d'inconnues par rapport à la limite sphérique (resp. rectangulaire) imposée pour les éléments infinis (les couches limites)) et possibilité de l'utilisation des multipôles.

- **Nécessité de la prise en compte des non-linéarités** de l'écoulement pour le rayonnement du bruit des turboréacteurs.
- **Perspective** : l'approche potentielle simplifie la propagation volumique, mais nécessite de la **mise à jour des conditions de raccord avec les méthodes de propagation volumique linéaire complètes** Euler linéarisée (Galerkin discontinu différences finies).

nécessite la mise en place de conditions de raccord...