Analyse Mathématique et Numérique
du Rayonnement Acoustique des Turboré

DUPREY Stefan

Thèse CIFRE

EADS-CCR Suresnes, Département Modélisation Math

INRIA Lorraine, Institut Elie Cartan, Université Henri Poin

Suresnes, le 24 février 2015

Plan

1. Introduction et Enjeux Industriels
2. Théorie du Problème Continu

1. Introduction et Enjeux Industriels

●**Objectif : minimiser le bruit rayonné par les turboréacteurs** contexte précis du décollage : **pas le bruit aérodynamique**, ni le rayonné à l'arrière, **mais le bruit de raies** (puissant et monofréqu pales du moteur et **rayonné à l'avant** principalement.

● Différentes techniques utilisées au niveau de la nacelle (traiteme nacelle, optimisation de sa forme et de la position des traitements. point est onéreuse : **nécessité du développement d'un code de ca prévision**.

● **Thématique de décomposition de domaines indispensable** po numérique abordable de l'avion entier : on se place dans le **contex précis des équations de Euler linéarisées**.

●**Question débattue et problématique** : influence de la présence porteur non linéaire par rapport à une propagation acoustique sur constant : choix de la position des surfaces rayonnantes.

2. Théorie du Problème Continu

Théorie Ecoulement Porteur

• L'écoulement dérive d'un potentiel et son équation est obtenue à équations de l'écoulement total.

• **Conditions de bord simplifiées** : condition glissante+condition

• Le potentiel vérifie une **EDP non linéaire**. Le régime subsoniqu supersonique) détermine le caractère elliptique (resp. hyperboliqu (régime transsonique complexe : ondes de choc)

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{div}(F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\dfrac{\partial\phi_0}{\partial n} = q & \text{dans } \partial\Omega \end{array}\right. = \text{edp du potentiel}$$

une **solution faible est cherchée variationnellement** :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } \phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0\nabla\psi\ dx = \int_{\partial\Omega} q\psi\ d\gamma,\ \forall\psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \end{array}\right.$$

• **Les variables de l'écoulement sont adimensionnées** par les co l'écoulement à l'infini (a_∞, ρ_∞ et v_∞).

Existence et Unicité pour l'Ecoulement Porteur

Le problème restreint au convexe fermé non vide des régimes sub
$K_\delta = \left\{ v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, ||\nabla v||_\infty \leq \delta < c_* \right\}$ admet une unique so

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_0 \in K_\delta \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega F_\infty(|\nabla \phi_0|^2) \nabla \phi_0 \nabla (\psi - \phi_0) \ \mathrm{d}x \geq \int_{\partial\Omega} q \left(\psi - \phi_0 \right) \ \mathrm{d}\gamma \end{array} \right.$$

Cette inégalité variationnelle caractérise $\phi \in K_\delta$ minimimum de l
sur K_δ, où $K\left(\phi\right) = \frac{1}{2} \int_\Omega F\left(|\nabla \phi|\right) - \int_{\partial\Omega} q\phi \mathrm{d}\gamma$ avec $F\left(x\right) = -$

Théorème : Supposons que le problème initial admette une uniqu
$\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, telle que $\exists \delta_0 < c_*$ et $||\nabla \phi||_\infty \leq \delta_0 < c_*$. Alors
du problème convexifié, pour tout $\delta \in [\delta_0, c_*[$. Réciproquement, s
solution du problème convexifié pour un certain $\delta < c_*$, telle qu
$\delta_0 < \delta$ et $||\nabla \phi||_\infty \leq \delta_0$ (**contrainte de convexité non saturée**).
solution du problème initial.

L'Ecoulement Porteur comme Limite d'un Point Fixe

La fonctionnelle K est elliptique sur K_δ :

$$\exists\alpha > 0,\ \forall\,(\phi_0, \psi) \in K_\delta^2,\ \overrightarrow{\nabla}^2 K(\phi_0)(\psi, \psi) \geq \alpha||\psi||^2_{H}$$

ce qui équivaut encore à :

$$\exists\alpha > 0,\ \forall\,(\phi, \psi) \in K_\delta^2,\ \langle \overrightarrow{\nabla} K(\phi) - \overrightarrow{\nabla} K(\psi), \phi - \psi \rangle \geq \alpha||$$

L'ellipticité de la fonctionnelle K permet de prouver :

Théorème : Pour tout $\phi \in K_\delta$, la coercivité de $B(\phi; ., \ .)$ (
$B(\phi; \psi, \xi) = \int_\Omega F_\infty(|\nabla\phi|^2)\nabla\psi\nabla\xi)$ implique l'existence e
solution de :

$$\forall\phi \in K_\delta,\ \exists\,!\,\zeta = \zeta\,(\phi) \in K_\delta \text{ tel que : } \forall\psi \in K_\delta,\ B(\phi; \zeta,$$

La suite définie par $\phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ et $\phi_{n+1} = \zeta(\phi_n)$ con
l'unique solution du problème convexifié.

Théorie Acoustique

• Le potentiel acoustique est solution de l'**EDP d'ordre 2 à coeff**
provenant de l'écoulement suivante :

$\mathrm{div}\left(\rho_0\left(I -^t \overrightarrow{M_0}.\overrightarrow{M_0}\right)\nabla\phi_a\right)+\rho_0 k_0^2\phi_a+ik_0\rho_0\overrightarrow{M_0}.\nabla\phi_a+\mathrm{div}\left(\right.$

• **Réfraction totale** sur les parois rigides.

• **Moteur=guide d'ondes cylindrique en écoulement uniforme.**
sonore=modes incidents. Condition de rayonnement appropriée p
sélection des modes réfléchis pour le potentiel acoustique diffract
Dirichlet-Neumann en écoulement permettant de borner le domai

• **Les modes sont normalisés** : ils ont un flux d'énergie unitaire d

• **Condition de Sommerfeld "convectée" à l'infini** sélectionnan
sortantes et équation intégrale en présence d'écoulement permetta
domaine de calcul.

• **Les variables acoustiques sont adimensionnées** par les valeur
porteur à l'infini (a_∞, ρ_∞ et v_∞).

On note $A_{Lm}\left(\phi_{am}\right)$ l'opérateur différentiel appliqué à ϕ_{am} :

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho_0\frac{\partial\phi_{am}}{\partial r}\right)+\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\phi_{am}}{\partial z}\right)\\
-\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0 M_{0r}M_{0z}\frac{\partial\phi_{am}}{\partial z}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\partial}{\partial z}\Bigg(\rho \\
-\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 M_{0z}^2\frac{\partial\phi_{am}}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0 M_{0r}^2\frac{\partial\phi_{am}}{\partial r}\right)\\
+\rho_0\Bigg(\frac{ik_\infty M_\infty}{\left(1-M_\infty\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1-M_{0z}^2\right)+\frac{ik_0 M_{0z}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}-\frac{M_{0r}M_{0z}}{r\sqrt{1-M}}\\
+\rho_0\left(-\frac{M_{0r}^2}{r}+ik_0 M_{0r}-\frac{ik_\infty M_\infty M_{0r}M_{0z}}{1-M_\infty^2}\right)\frac{\partial\phi_{am}}{\partial r}\\
+\frac{\partial}{\partial r}\left(ik_0\rho_0 M_{0r}\phi_{am}\right)+\frac{ik_\infty M_\infty}{\left(1-M_\infty^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\left(\rho_0\phi_{am}\right)}{\partial z}-\frac{ik_\infty M}{1-M}\\
+\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 ik_0 M_{0z}\phi_{am}\right)-\frac{ik_\infty M_\infty}{\left(1-M_\infty^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\rho_0 M\\
+\rho_0\left(-\frac{m^2}{r^2}-\frac{k_\infty^2 M_\infty^2}{\left(1-M_\infty^2\right)^2}\left(1-M_{0z}^2\right)+\frac{ik_0 M_{0r}}{r}\right)\phi_{am}\\
+\rho_0\left(-ik_\infty\frac{M_{0r}M_{0z}M_\infty}{r\left(1-M_\infty^2\right)}+k_0^2-\frac{2k_\infty M_\infty k_0 M_{0z}}{\left(1-M_\infty^2\right)}\right)\phi_{am} =
\end{array}
\right.
$$

Opérateur Dirichlet-Neumann Modal dans l'Espace de

$$\left\{\begin{array}{c} T_{LMm} : H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_M\right) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma_M\right) \\ \phi_{am} \rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{mn}^{-}\left(\phi_a, \Xi_{rmn}\right)_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn} \end{array}\right.$$ définit l'o

Dirichlet-Neumann modal dans l'espace de Lorentz, où l'on a not

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_{mn}^{\pm} = i\rho_M\left(k_M M_M - \left(1 - M_M^2\right)\beta_{mn}^{\pm}\right) \\ \text{: les coefficients de l'opérateur } T_{LMm} \\ \beta_{mn}^{\pm} = \dfrac{k_M M_M \pm \sqrt{k_M^2 - k_{rmn}^2(1 - M_M^2)}}{1 - M_M^2} \\ \text{: les constantes de propagation axiale dans l'espace pl} \\ \gamma_{mn}^{\pm} = -k'_{\infty} M_{\infty} + \sqrt{1 - M_{\infty}^2}\beta_{mn}^{\pm} \\ \text{: les constantes de propagation axiale dans l'espace de} \end{array}\right.$$

Existence et Unicité du Problème Transformé

Théorème : • Le potentiel acoustique transformé dans l'espace de
cylindrique $\left(\overline{\Omega \cup \Omega_e}\right) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)$ est solution de $A_{Lm}\left(\phi_{am}\right) =$
A_{Lm} est elliptique.

• Les conditions aux limites du potentiel transformé s'écrivent :

- $$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} M_{0z} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{e_z} + M_{0r} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{e_r} = 0, & \forall x \in \Gamma \\ \dfrac{\partial \phi_{am}}{\partial n_{A_{Lm}}} = 0, & \forall x \in \Gamma \end{array} \right.$$

- $$\frac{\partial\left(\phi_{am} - \phi_{am,inc}\right)}{\partial n_{A_{Lm}}} = T_{LMm}\left(\phi_{am} - \phi_{am,inc}\right) \quad ,$$

• L'edp se réduit à l'équation de Helmholtz en dehors du domain

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi_{am}}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\phi_{am} + \frac{\partial^2 \phi_{am}}{\partial z^2} + \frac{k_\infty^2}{1-M_\infty^2}\phi$$

• Le potentiel acoustique transformé vérifiant la condition de Som
$\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{S_R} \left|\frac{\partial \phi_{am}}{\partial n} - i\frac{k_\infty}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\phi_{am}\right|^2 \mathrm{d}\gamma = 0$ existe et est uniq

Egalité d'Energie dans l'Espace Transformé

Lemme : • On suppose donc la source sonore incidente nulle : ϕ
problème transformé se formule variationnellement dans Ω :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_{am} \in H^1_a(\Omega) \text{ tel que :} \\ a_{Lm}(\phi_{am}, \psi) = \langle T_{LMm}\left(\phi_{am}\right), \psi\rangle_{L^2(\Gamma_M)} + \int\limits_{\Gamma_\infty} \overrightarrow{\nabla}\phi_{am}.\overrightarrow{n} \end{array}\right.$$

• La solution du problème transformé vérifie le bilan d'énergie :

$$\sum_{\pm,\ (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \Im m\left(\mu^{\pm}_{mn}\right) \left|\langle\phi_a, \Xi_{rmn}\rangle_{L^2(\Gamma_M)}\right|^2 ||\Xi_{rmn}|$$

$$+ \lim_{R\to+\infty} k'_\infty ||\phi_a||_{L^2(S_R)} = 0$$

où la somme modale ci-dessus ne se fait que sur les modes propag

$$\Im m\left(\mu^{\pm}_{mn}\right) = 0 \iff \text{ le mode est évanescent}$$

$$\Im m\left(\mu^{\pm}_{mn}\right) < 0 \iff \text{ le mode est propagatif incic}$$

• En l'absence de modes incidents propagatifs à l'entrée de la nac

$$\lim_{R\to+\infty} ||\phi_a||_{L^2(S_R)} = 0, \ \lim_{R\to+\infty} ||\frac{\partial\phi_a}{\partial n}||_{L^2(S_R)}$$