Analyse Mathématique et Numérique du Rayonnement Acoustique des Turboréacteurs

DUPREY Stefan

Thèse CIFRE

EADS-CCR Suresnes, Département Modélisation Mathématique

INRIA Lorraine, Institut Elie Cartan, Université Henri Poincaré Nancy 1

Plan

1. Introduction et Enjeux Industriels
2. Théorie du Problème Continu

1. Introduction et Enjeux Industriels

•**Objectif : minimiser le bruit rayonné par les turboréacteurs** : bruit issu du contexte précis du décollage : **pas le bruit aérodynamique**, ni le bruit de jet rayonné à l'arrière, **mais le bruit de raies** (puissant et monofréquentiel) émis par les pales du moteur et **rayonné à l'avant** principalement.

• Différentes techniques utilisées au niveau de la nacelle (traitement des parois de la nacelle, optimisation de sa forme et de la position des traitements...), dont la mise au point est onéreuse : **nécessité du développement d'un code de calcul pour la prévision**.

• **Thématique de décomposition de domaines indispensable** pour un traitement numérique abordable de l'avion entier : on se place dans le **contexte physique précis des équations de Euler linéarisées**.

•**Question débattue et problématique** : influence de la présence d'un écoulement porteur non linéaire par rapport à une propagation acoustique sur un écoulement constant : choix de la position des surfaces rayonnantes.

2. Théorie du Problème Continu

Théorie Ecoulement Porteur

• L'écoulement dérive d'un potentiel et son équation est obtenue à l'ordre zéro des équations de l'écoulement total.

• **Conditions de bord simplifiées** : condition glissante+condition de flux.

• Le potentiel vérifie une **EDP non linéaire**. Le régime subsonique (resp. supersonique) détermine le caractère elliptique (resp. hyperbolique) de l'équation (régime transsonique complexe : ondes de choc)

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{div}(F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\dfrac{\partial\phi_0}{\partial n} = q & \text{dans } \partial\Omega \end{array}\right. = \text{edp du potentiel porteur } \phi_0 \text{, dont}$$

une **solution faible est cherchée variationnellement** :

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Trouver } \phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \text{ tel que :} \\ \displaystyle\int_\Omega F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0\nabla\psi \;dx = \int_{\partial\Omega} q\psi \;d\gamma, \;\; \forall\psi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R} \end{array}\right.$$

• **Les variables de l'écoulement sont adimensionnées** par les constantes de l'écoulement à l'infini (a_∞, ρ_∞ et v_∞).

Existence et Unicité pour l'Ecoulement Porteur

Le problème restreint au convexe fermé non vide des régimes subsoniques $K_\delta = \left\{v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}, ||\nabla v||_\infty \leq \delta < c_*\right\}$ admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_0 \in K_\delta \text{ tel que :} \\ \int\limits_\Omega F_\infty(|\nabla\phi_0|^2)\nabla\phi_0\nabla(\psi - \phi_0)\ \mathrm{d}x \geq \int\limits_{\partial\Omega} q\,(\psi - \phi_0)\ \mathrm{d}\gamma,\ \ \forall\psi \in K_\delta \end{array} \right.$$

Cette inégalité variationnelle caractérise $\phi \in K_\delta$ minimimum de la fonctionnelle K sur K_δ, où $K\,(\phi) = \frac{1}{2}\int_\Omega F\,(|\nabla\phi|) - \int_{\partial\Omega} q\phi \mathrm{d}\gamma$ avec $F\,(x) = -\int_{x^2}^{\infty} F_\infty(s)\mathrm{d}s$

Théorème : Supposons que le problème initial admette une unique solution $\phi \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$, telle que $\exists\delta_0 < c_*$ et $||\nabla\phi||_\infty \leq \delta_0 < c_*$. Alors ϕ est une solution du problème convexifié, pour tout $\delta \in [\delta_0, c_*[$. Réciproquement, si ϕ **est une solution du problème convexifié** pour un certain $\delta < c_*$, telle que l'on peut trouver $\delta_0 < \delta$ et $||\nabla\phi||_\infty \leq \delta_0$ (**contrainte de convexité non saturée**). **Alors ϕ est une solution du problème initial**.

L'Ecoulement Porteur comme Limite d'un Point Fixe

La fonctionnelle K est elliptique sur K_δ :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall\,(\phi_0, \psi) \in K_\delta^2,\ \overrightarrow{\nabla}^2 K(\phi_0)(\psi, \psi) \geq \alpha ||\psi||^2_{H^1\,(\Omega)\,/\mathbb{R}}, \tag{1}$$

ce qui équivaut encore à :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall\,(\phi, \psi) \in K_\delta^2,\ \langle \overrightarrow{\nabla} K(\phi) - \overrightarrow{\nabla} K(\psi), \phi - \psi \rangle \geq \alpha ||\phi - \psi||^2_{H^1\,(\Omega)\,/\mathbb{R}} \tag{2}$$

L'ellipticité de la fonctionnelle K permet de prouver :

Théorème : Pour tout $\phi \in K_\delta$, la coercivité de $B(\phi; .,\ .)$ (où $B(\phi; \psi, \xi) = \int_\Omega F_\infty(|\nabla\phi|^2)\nabla\psi\nabla\xi)$ implique l'existence et l'unicité de la solution de :

$$\forall \phi \in K_\delta,\ \exists\,!\,\zeta = \zeta\,(\phi) \in K_\delta \text{ tel que : } \forall \psi \in K_\delta,\ B(\phi; \zeta,\ \psi - \zeta) \geq < q, \psi - \zeta >$$

La suite définie par $\phi_0 \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ et $\phi_{n+1} = \zeta(\phi_n)$ converge vers l'unique solution du problème convexifié.

Théorie Acoustique

• Le potentiel acoustique est solution de l'**EDP d'ordre 2 à coefficients variables provenant de l'écoulement** suivante :

$$\mathrm{div}\left(\rho_0\left(I -^t \overrightarrow{M_0}.\overrightarrow{M_0}\right)\nabla\phi_a\right)+\rho_0 k_0^2\phi_a+ik_0\rho_0\overrightarrow{M_0}.\nabla\phi_a+\mathrm{div}\left(ik_0\rho_0\phi_a\overrightarrow{M_0}\right)=0$$

• **Réfraction totale** sur les parois rigides.

• **Moteur=guide d'ondes cylindrique en écoulement uniforme**. Source sonore=modes incidents. Condition de rayonnement appropriée permettant la sélection des modes réfléchis pour le potentiel acoustique diffracté. Opérateur Dirichlet-Neumann en écoulement permettant de borner le domaine de calcul.

• **Les modes sont normalisés** : ils ont un flux d'énergie unitaire dans le conduit.

• **Condition de Sommerfeld "convectée" à l'infini** sélectionnant les ondes sortantes et équation intégrale en présence d'écoulement permettant de borner le domaine de calcul.

• **Les variables acoustiques sont adimensionnées** par les valeurs de l'écoulement porteur à l'infini (a_∞, ρ_∞ et v_∞).

On note $A_{Lm}\left(\phi_{am}\right)$ l'opérateur différentiel appliqué à ϕ_{am} :

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho_0\frac{\partial\phi_{am}}{\partial r}\right)+\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0\frac{\partial\phi_{am}}{\partial z}\right)\\
-\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0 M_{0r}M_{0z}\frac{\partial\phi_{am}}{\partial z}\right)-\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 M_{0z}M_{0r}\frac{\partial\phi_{am}}{\partial r}\right)\\
-\frac{1}{1-M_\infty^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 M_{0z}^2\frac{\partial\phi_{am}}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0 M_{0r}^2\frac{\partial\phi_{am}}{\partial r}\right)\\
+\rho_0\left(\frac{ik_\infty M_\infty}{\left(1-M_\infty\right)^{\frac{3}{2}}}\left(1-M_{0z}^2\right)+\frac{ik_0 M_{0z}}{\sqrt{1-M_\infty^2}}-\frac{M_{0r}M_{0z}}{r\sqrt{1-M_\infty^2}}\right)\frac{\partial\phi_{am}}{\partial z}\\
+\rho_0\left(-\frac{M_{0r}^2}{r}+ik_0 M_{0r}-\frac{ik_\infty M_\infty M_{0r}M_{0z}}{1-M_\infty^2}\right)\frac{\partial\phi_{am}}{\partial r}\\
+\frac{\partial}{\partial r}\left(ik_0\rho_0 M_{0r}\phi_{am}\right)+\frac{ik_\infty M_\infty}{\left(1-M_\infty^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\left(\rho_0\phi_{am}\right)}{\partial z}-\frac{ik_\infty M_\infty}{1-M_\infty^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0 M_{0r}M_{0z}\phi_{am}\right)\\
+\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 ik_0 M_{0z}\phi_{am}\right)-\frac{ik_\infty M_\infty}{\left(1-M_\infty^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 M_{0z}^2\phi_{am}\right)\\
+\rho_0\left(-\frac{m^2}{r^2}-\frac{k_\infty^2 M_\infty^2}{\left(1-M_\infty^2\right)^2}\left(1-M_{0z}^2\right)+\frac{ik_0 M_{0r}}{r}\right)\phi_{am}\\
+\rho_0\left(-ik_\infty\frac{M_{0r}M_{0z}M_\infty}{r\left(1-M_\infty^2\right)}+k_0^2-\frac{2k_\infty M_\infty k_0 M_{0z}}{\left(1-M_\infty^2\right)}\right)\phi_{am}=0
\end{array}\right.$$

Opérateur Dirichlet-Neumann Modal dans l'Espace de Lorentz

$$\left\{\begin{array}{c} T_{LMm} : H^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma_M\right) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma_M\right) \\ \phi_{am} \rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^{-}_{mn}\left(\phi_a, \Xi_{rmn}\right)_{L^2(\Gamma_M)} \Xi_{rmn} \end{array}\right.$$ définit l'opérateur Dirichlet-Neumann modal dans l'espace de Lorentz, où l'on a noté :

$$\left\{\begin{array}{l} \mu^{\pm}_{mn} = i\rho_M\left(k_M M_M - \left(1 - M_M^2\right)\beta^{\pm}_{mn}\right) \\ \text{ : les coefficients de l'opérateur } T_{LMm} \\ \beta^{\pm}_{mn} = \dfrac{k_M M_M \pm \sqrt{k_M^2 - k_{rmn}^2(1 - M_M^2)}}{1 - M_M^2} \\ \text{ : les constantes de propagation axiale dans l'espace physique} \\ \gamma^{\pm}_{mn} = -k'_\infty M_\infty + \sqrt{1 - M_\infty^2}\beta^{\pm}_{mn} \\ \text{ : les constantes de propagation axiale dans l'espace de Lorentz} \end{array}\right.$$

Existence et Unicité du Problème Transformé

Théorème : • Le potentiel acoustique transformé dans l'espace de Lorentz cylindrique $\left(\overline{\Omega \cup \Omega_e}\right) \setminus (\Gamma_R \cup \Gamma_M)$ est solution de $A_{Lm}\left(\phi_{am}\right) = 0$, où l'opérateur A_{Lm} est elliptique.

• Les conditions aux limites du potentiel transformé s'écrivent :

- $$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} M_{0z} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{e_z} + M_{0r} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{e_r} = 0, & \forall x \in \Gamma_R \\ \dfrac{\partial \phi_{am}}{\partial n_{A_{Lm}}} = 0, & \forall x \in \Gamma_R \end{cases},$$

- $$\frac{\partial\left(\phi_{am} - \phi_{am,inc}\right)}{\partial n_{A_{Lm}}} = T_{LMm}\left(\phi_{am} - \phi_{am,inc}\right) \quad , \forall x \in \Gamma_M$$

• L'edp se réduit à l'équation de Helmholtz en dehors du domaine perturbé :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi_{am}}{\partial r}\right) - \frac{m^2}{r^2}\phi_{am} + \frac{\partial^2 \phi_{am}}{\partial z^2} + \frac{k_\infty^2}{1-M_\infty^2}\phi_{am} = 0$$

• Le potentiel acoustique transformé vérifiant la condition de Sommerfeld $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \left|\frac{\partial \phi_{am}}{\partial n} - i\frac{k_\infty}{\sqrt{1-M_\infty^2}}\phi_{am}\right|^2 \mathrm{d}\gamma = 0$ existe et est unique.

Egalité d'Energie dans l'Espace Transformé

Lemme : • On suppose donc la source sonore incidente nulle : $\phi_{a,inc} = 0$. Le problème transformé se formule variationnellement dans Ω :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \phi_{am} \in H_a^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a_{Lm}(\phi_{am}, \psi) = \langle T_{LMm}\left(\phi_{am}\right), \psi \rangle_{L^2(\Gamma_M)} + \int\limits_{\Gamma_\infty} \overrightarrow{\nabla} \phi_{am} . \overrightarrow{n}\ \overline{\psi},\ \forall \psi \in H_a^1(\Omega) \end{array} \right. ,$$

• La solution du problème transformé vérifie le bilan d'énergie :

$$\begin{array}{c} \sum\limits_{\pm,\ (m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}} \Im m\left(\mu_{mn}^{\pm}\right) \left|\langle \phi_a, \Xi_{rmn} \rangle_{L^2(\Gamma_M)}\right|^2 ||\Xi_{rmn}||^2_{L^2(\Gamma_M)} \\ + \lim\limits_{R\to+\infty} k'_\infty ||\phi_a||_{L^2(S_R)} = 0 \end{array} ,$$

où la somme modale ci-dessus ne se fait que sur les modes propagatifs :

$$\Im m\left(\mu_{mn}^{\pm}\right) = 0 \iff \text{le mode est évanescent}$$

$$\Im m\left(\mu_{mn}^{\pm}\right) < 0 \iff \text{le mode est propagatif incident}$$

• En l'absence de modes incidents propagatifs à l'entrée de la nacelle ($\phi_{a,inc} = 0$) :

$$\lim_{R\to+\infty} ||\phi_a||_{L^2(S_R)} = 0,\ \lim_{R\to+\infty} ||\frac{\partial \phi_a}{\partial n}||_{L^2(S_R)} = 0$$