

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Notes de cours

Année 2016/2017



Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine



- Auteurs des notes :
 - Chafaï, Djalil (enseignant, Paris-Dauphine, 2013–)
 - Lévy-Leduc, Céline (enseignante, Paris-Dauphine, 2010–2012)
- Chasseurs de coquilles :
 - Akrim, Anass (étudiant, Paris-Dauphine, 2016–2017)
 - Azouzi, Youssef (enseignant, Tunis-Dauphine, 2015–2016)
 - Benaych-Georges, Florent (enseignant, Paris-Descartes, 2014–2015)
 - Bobo, Grégoire (étudiant, Paris-Dauphine, 2016–2017)
 - Bonniau, Donatien (étudiant, Paris-Dauphine, 2016–2017)
 - Eremeeva, Evgeniia (étudiante, Paris-Dauphine, 2014–2015)
 - Georget, Maxime (étudiant, Paris-Dauphine, 2016–2017)
 - Ivanoff, Stéphane (enseignant, Paris-Dauphine, 2013–2015)
 - Lee, Chun-Hsien (étudiant, Paris-Dauphine, 2015–2016)
 - Macchi, Emmanuel (étudiant, Paris-Dauphine, 2014–2015)
 - Malouche, Dhafer (enseignant, Tunis-Dauphine, 2014–2015)
 - Munier, Robin (étudiant, Paris-Dauphine, 2016–2017)
 - Pagnard, Camille (enseignant, Paris-Dauphine, 2014–)
 - Stern, Mathilde (étudiante, Paris-Dauphine, 2016–2017)
 - Tan, Xiaolu (enseignant, Paris-Dauphine, 2016–)

Avant-propos

Le cours de Master 1 d'introduction aux séries temporelles est découpé en 13 séances de 90 minutes. Le prérequis est un niveau de licence en mathématiques, notamment en analyse, probabilités, et statistique. L'évaluation consiste en un examen partiel en novembre et un examen final en janvier, avec pour formule $\max(f, \frac{2}{5}p + \frac{3}{5}f)$. Pour réussir aux examens, il faut d'abord comprendre les notes de cours puis s'entraîner sur les exercices de travaux dirigés, les annales d'examens, et les démonstrations du cours. Ces notes de cours, librement disponibles sur Internet, sont inspirées de celles de Céline Lévy-Leduc datant de l'année universitaire 2011/2012. Le sujet des séries temporelles est plutôt plaisant. Lié au concret, il pose de réelles questions sur les plans méthodologiques et philosophiques¹. Lié à l'abstrait, il donne l'occasion de mettre en œuvre quelques concepts de la théorie du signal, de l'analyse harmonique, des probabilités et statistique, de l'algèbre linéaire, etc. En toile de fond, utilitarisme, mythe du quantitatif, et «bigdata».

Notre Master 1 de mathématiques a pour but de former des ingénieurs, et dans une moindre mesure des chercheurs, adaptés au monde d'aujourd'hui. Les ingénieurs et les chercheurs ne cessent d'apprendre des concepts et des techniques, tout au long de la vie professionnelle². Ces notes de cours fournissent des bases incontournables de la modélisation des séries temporelles, que tout ingénieur ou chercheur mathématicien devrait connaître³. Elles sont conçues pour être à la fois accessibles et exigeantes intellectuellement. La formation initiale des ingénieurs et des chercheurs doit mettre l'accent sur les concepts plutôt que sur les techniques. Ceux qui devront ensuite, dans leur vie professionnelle, traiter des données, pourront apprendre les techniques appropriées le moment voulu, en s'appuyant sur leurs connaissances conceptuelles. On trouvera par exemple dans [Ar, C] deux très bons cours orientés vers des techniques concrètes de traitement des données⁴.

1. À ce sujet, on peut penser par exemple au phénomène du réchauffement climatique.

2. C'est mal connaître le monde de l'ingénieur que de le réduire à celui du technicien.

3. Il faut assister au cours oral pour bénéficier des commentaires de mise en situation !

4. Le niveau en mathématiques des élèves de Master est variable d'un établissement à l'autre.

Table des matières

| Table des matières | v |
|---|-----------|
| 1 Introduction (x2) | 1 |
| 1.1 Tendance, saisonnalité, bruit, opérateur retard | 1 |
| 1.2 Processus stationnaires | 7 |
| 1.3 Suites récurrentes aléatoires et processus ARMA | 16 |
| 1.4 Autocovariance et matrices de Toeplitz | 18 |
| 1.5 Compléments | 19 |
| 2 Filtrage linéaire (x2.5) | 23 |
| 2.1 Motivation | 23 |
| 2.2 Théorème de filtrage | 24 |
| 2.3 Composition et convolution | 27 |
| 2.4 Compléments | 34 |
| 3 Processus ARMA (x1.5) | 35 |
| 3.1 Processus MA et processus AR | 36 |
| 3.2 Résolution de l'équation ARMA | 38 |
| 3.3 ARMA causal et inversible | 40 |
| 3.4 Autocovariance d'un ARMA | 45 |
| 3.5 Compléments | 46 |
| 4 Analyse spectrale (x2) | 51 |
| 4.1 Coefficients de Fourier | 51 |
| 4.2 Théorème de Herglotz | 54 |
| 4.3 Mesure spectrale d'un processus stationnaire | 55 |
| 4.4 Compléments | 60 |
| 5 Prédiction linéaire (x3) | 65 |
| 5.1 Prédicteur linéaire optimal | 65 |
| 5.2 Équations de Yule-Walker | 67 |
| 5.3 Algorithme de Cholesky | 71 |
| 5.4 Algorithme de Levinson-Durbin | 74 |
| 5.5 Algorithme de Gram-Schmidt (ou des innovations) | 77 |
| 5.6 Compléments | 79 |

| | |
|--|-----------|
| 6 Estimation (x1) | 81 |
| 6.1 Estimation de la moyenne | 81 |
| 6.2 Estimation de l'autocovariance | 85 |
| 6.3 Application aux tests | 85 |
| A Révisions et étude de cas (x1) | 87 |
| B Rappels d'analyse et probabilités | 89 |
| B.1 Espaces de suites | 89 |
| B.2 Espaces de fonctions | 89 |
| B.3 Covariance | 91 |
| B.4 Vecteur moyenne et matrice de covariance | 91 |
| Bibliographie | 93 |
| Index | 95 |

Plan du cours. Le chapitre 1 introduit le concept de série temporelle, sa modélisation stochastique, les notions de tendance, de saisonnalité, de processus stationnaire, d'autocovariance et de bruit blanc. Le chapitre 2 est consacré au filtrage linéaire des processus stationnaires, un concept fondamental pour résoudre les équations linéaires du type ARMA. Le chapitre 3 est consacré à l'étude des processus ARMA, qui constituent la classe la plus courante de processus stationnaires. Le chapitre 4 est consacré à l'analyse spectrale des processus stationnaires, éclairant d'une lumière toute spectrale les notions d'autocovariance, de filtrage, et de causalité des processus ARMA. Le chapitre 5 est consacré à la prédition linéaire pour les processus stationnaires, en utilisant l'autocovariance. Le chapitre 6 est consacré à l'estimation de la moyenne et de l'autocovariance. L'annexe A propose des exemples concrets, et l'annexe B des rappels d'analyse et de probabilités. Une bibliographie et un index figurent en fin de document. Les nombres entre parenthèse à la fin de l'intitulé des chapitres indiquent le nombre approximatif de séances de cours.

Introduction (x2)

Mots-clés : série temporelle ; modèle additif ; tendance ; saisonnalité ; stationnarité ; autocovariance ; bruit blanc ; opérateur retard ; opérateur différence.

Une **série temporelle** ou **série chronologique** est une suite d’observations d’un phénomène physique¹ faites au cours du temps : consommation d’électricité, cours du pétrole, population française, rythme cardiaque, relevé d’un sismographe, trafic Internet, ventes de téléphones mobiles, hauteurs des crues du nil, température des océans, concentration en dioxyde de carbone de l’atmosphère, taux de glucose dans le sang, côte de popularité du président, etc. Il s’agit d’une suite finie² de valeurs réelles³, indiquées par un temps continu ou discret régulier, typiquement d’un signal échantillonné à une fréquence fixe. Les figures 1.2 et 1.3 donnent des représentations graphiques de quelques séries temporelles, fabriquées grâce au programme pour le logiciel GNU-R donné par la figure 1.1⁴.

L’étude des séries temporelles poursuit plusieurs buts pratiques :

- une meilleure compréhension du phénomène physique représenté par la série ;
- une représentation simplifiée par un modèle stochastique ;
- une prédition du futur de la série à partir de la partie observée.

1.1 Tendance, saisonnalité, bruit, opérateur retard

Une idée serait de tracer le graphe de la série temporelle $t \mapsto y_t$, puis de déterminer une famille de fonctions qui ont la même allure, puis enfin de déterminer la meilleure fonction en minimisant un critère d’ajustement comme les moindres carrés par exemple, avec pénalisation du critère optimisé par la complexité de la fonction utilisée. Dans cette approche, la famille de fonctions choisie constitue un modèle. On dit à ce propos : *tous les modèles sont faux, certains sont utiles*. L’incorporation de bruit dans cette approche conduit aux modèles analysés dans ce cours. Plus précisément, on s’intéresse à des modèles additifs stochastiques du type

$$x_t = d_t + z_t$$

où $t \mapsto d_t$ est une fonction déterministe et où z_t est un bruit aléatoire. La fonction déterministe dépend typiquement d’un nombre réduit de paramètres qu’on cherche à estimer,

1. Physique au sens large, englobant la nature, par opposition à Mathématique ou Informatique.
2. Les données réelles sont des suites finies. Les modèles mathématiques «vont jusqu’à l’infini».
3. Rien n’empêche d’imaginer des valeurs complexes voire même vectorielles bien entendu.
4. Sous Debian GNU/Linux : `sudo apt-get install r-base`. L’environnement de développement RStudio est disponible pour Debian, cf. <https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>. Plus généralement, on pourra consulter <https://cran.r-project.org/web/views/TimeSeries.html>

1. INTRODUCTION (x2)

```
# Inspiré du livre "Séries temporelles avec R" de Yves Aragon.  
# install.packages("datasets") # déjà installé en général !  
require(datasets)  
#  
data(Nile)  
plot.ts(Nile,xlab='année',ylab='Nil')  
data(uspop)  
plot.ts(uspop,xlab='année',ylab='USpop')  
#  
data("AirPassengers")  
plot.ts(AirPassengers,xlab='temps (mensuel, de 1949 à 1961)',ylab='passagers',las=1)  
polygon(c(1958,1960,1960,1958),c(200,200,600,600),lty=2)  
deb=c(1958,1); fin=c(1960,12)  
plot.ts(window(AirPassengers,start=deb,end=fin),xlab='année',ylab='passagers',las=1)  
#  
plot.ts(diff(AirPassengers),xlab="temps (mensuel)",ylab="log(passagers)")  
plot.ts(diff(log(AirPassengers)),xlab="temps (mensuel)",ylab="log(diff(passagers))")
```

FIGURE 1.1 – Code GNU-R pour générer les figures 1.2 et 1.3.

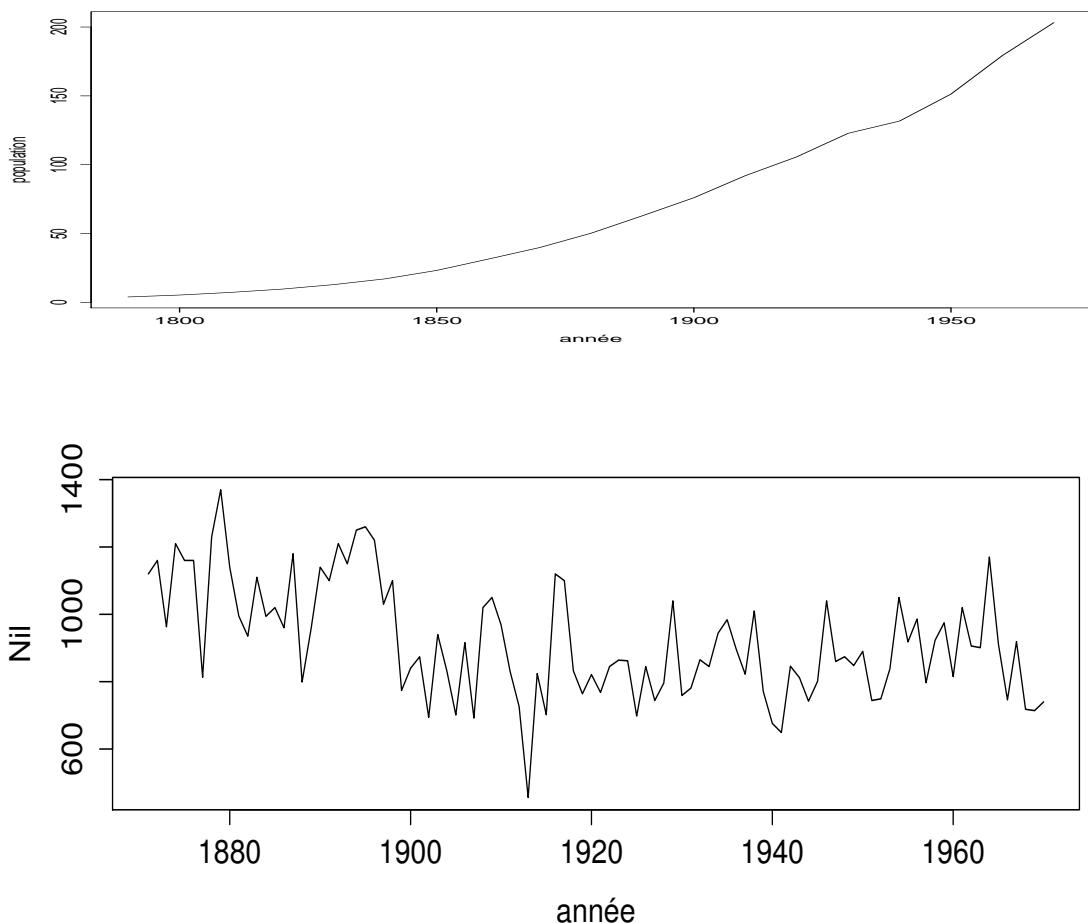
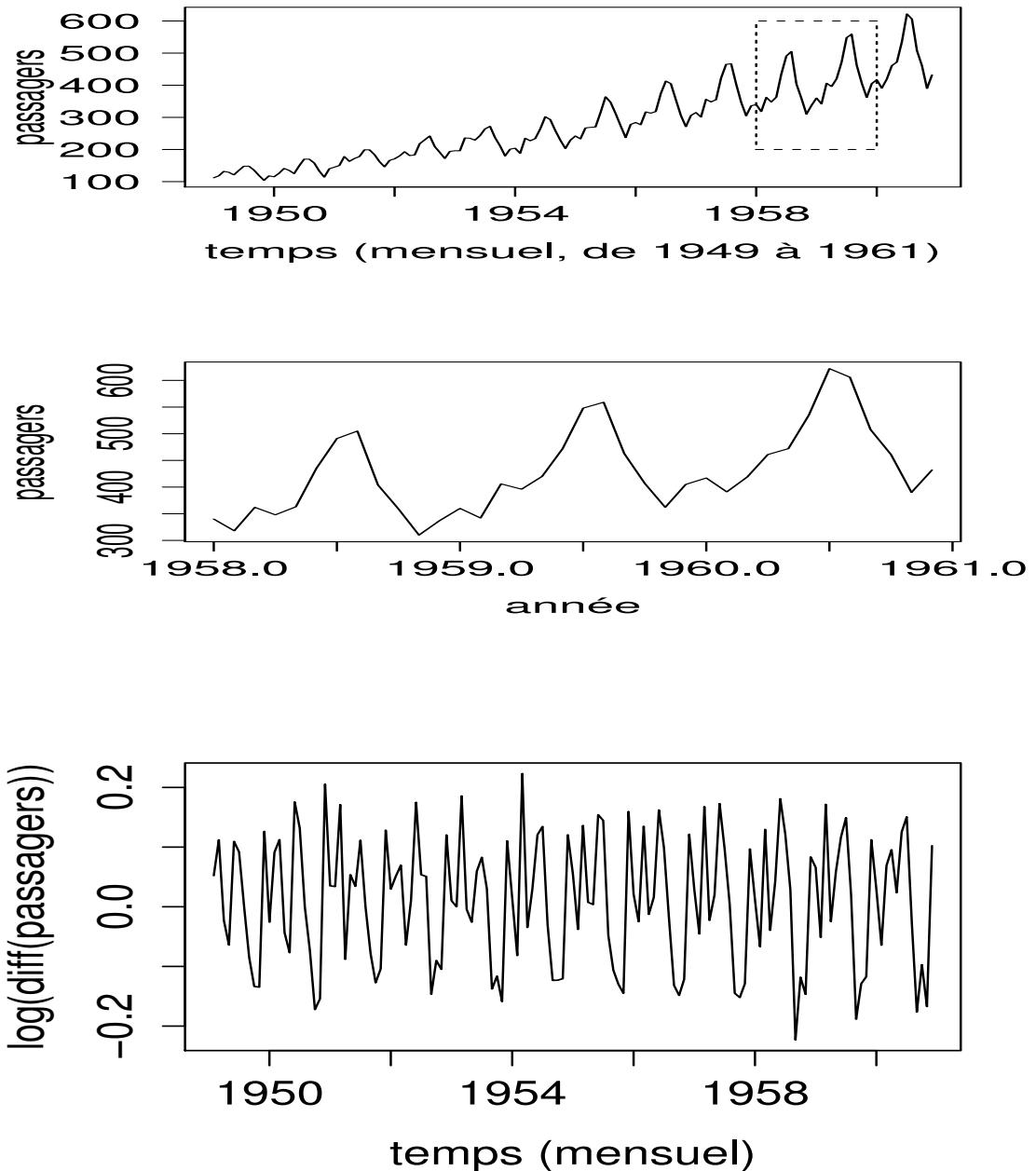


FIGURE 1.2 – Population des États-Unis (haut) et débit du Nil à Assouan (bas).

Ce type de graphique avec le temps en abscisse et la série en ordonnée est appelé **chronogramme**. Ici le temps explique bien l'allure des deux séries.



La série d'origine figure dans le graphique du haut. Elle comporte une saisonnalité marquée avec une variabilité croissante au cours du temps. Le graphique du bas figure la même série après une différentiation, puis une transformation logarithmique qui a pour effet d'en réduire l'hétérogénéité de la variance (**hétérosédasticité**). Le graphique du milieu est un zoom sur la zone rectangulaire en pointillés du graphique du haut. Il suggère une analyse de la saisonnalité de la série pour comparer les mois par exemple.

FIGURE 1.3 – Nombre de passagers aériens.

1. INTRODUCTION (x2)

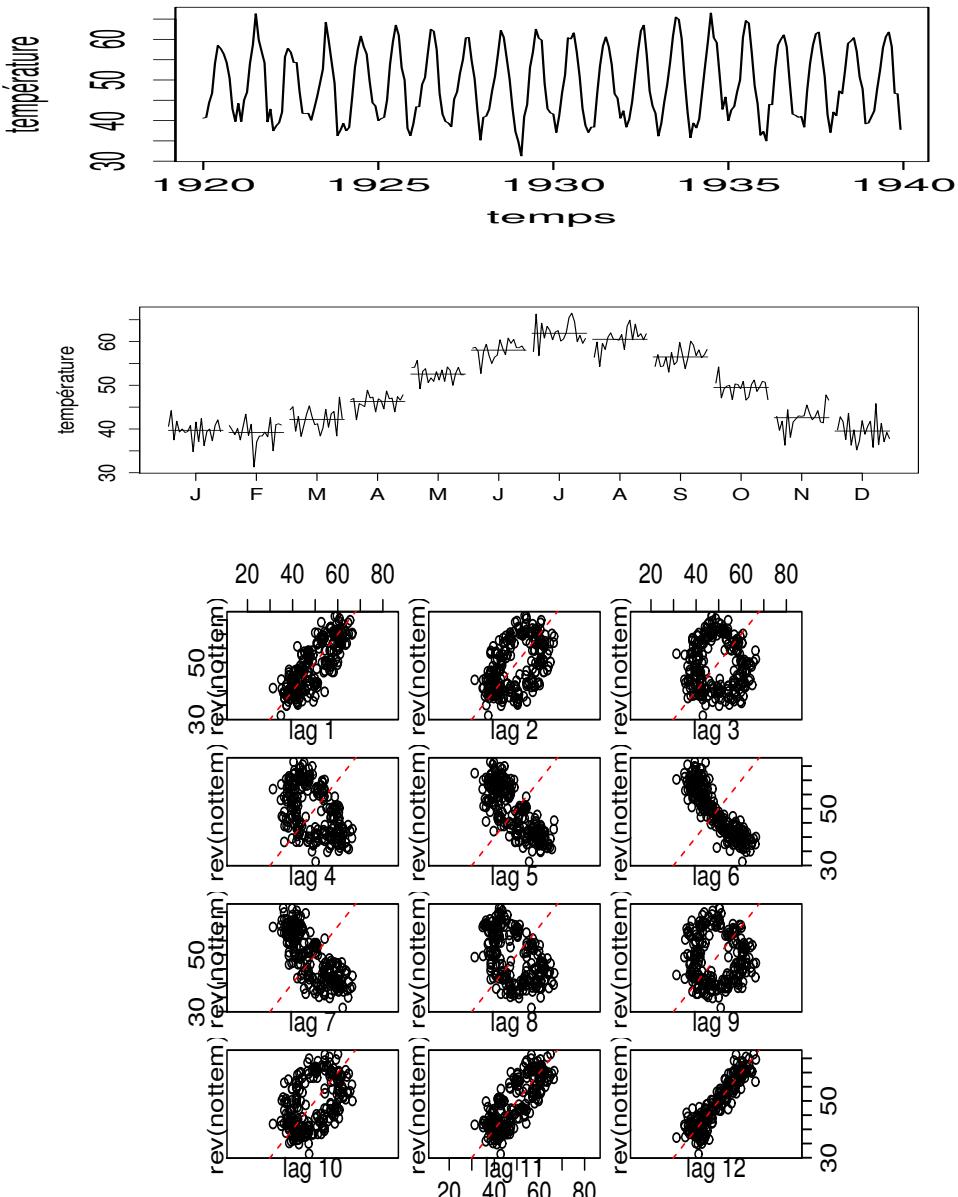


FIGURE 1.4 – Températures mensuelles à Nottingham Castle.

Chronogramme (haut), «month plot» (milieu), et «lag plot» (bas) de la série, réalisés avec le code GNU-R ci-dessous, ou comment révéler la saisonnalité de cette série.

```
# Inspiré du livre "Séries temporelles avec R" de Yves Aragon.
data(nottem)
plot.ts(nottem,xlab="temps",ylab="température")
lag.plot(rev(nottem),12,layout=c(4,3),do.lines=FALSE,diag.col="red",col.main="blue")
monthplot(nottem,ylab="température",main="",cex.main=1)
```

tandis que le bruit est supposé être **stationnaire**, c'est-à-dire que ses caractéristiques statistiques comme son espérance et sa covariance ne varient pas au cours du temps. Dans cette approche stochastique, $(x_t)_{t \in T}$ est modélisée par une trajectoire (ω fixé !) d'un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$.

Une idée naturelle est de rechercher d'abord, au vu des données, la meilleure fonction déterministe d_t telle que le **résidu** $x_t - d_t$ soit raisonnablement stationnaire. On est parfois conduit à transformer les données pour stabiliser la variance, ou encore à les découper en plages temporelles en fonction de ruptures structurelles.

La stationnarité de la partie aléatoire est utile pour effectuer une prévision par translation. Si par exemple on observe Z_1, \dots, Z_t alors on peut estimer la matrice de covariance de ce vecteur aléatoire, c'est-à-dire la structure L^2 du vecteur aléatoire, qui est aussi par stationnarité une estimation de la structure de covariance de Z_{t+1}, \dots, Z_{t+1} , ce qui permet de prédire le futur Z_{t+1} en utilisant une projection par moindres carrés sur les observations Z_2, \dots, Z_t .

Les séries temporelles stationnaires sont rares. Dans la pratique, on tente de s'y ramener en effectuant des transformations qui éliminent par exemple une composante structurelle déterministe. Le modèle additif le plus simple est de la forme

$$X_t = \underbrace{m_t + s_t}_{\text{partie déterministe}} + \underbrace{Z_t}_{\text{partie aléatoire}}$$

où m_t , s_t , et Z_t jouent les rôles suivants :

1. **Tendance.** La fonction $t \mapsto m_t$ est une fonction qui varie lentement, appelée **tendance**. Exemple : tendance polynomiale $m_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d$ (linéaire si $d = 1$). Concrètement, une analyse graphique suggère souvent une valeur de d , ce qui permet ensuite d'estimer a par **moindres carrés** :

$$\hat{a} = \arg \min_a \sum_{t=1}^n (x_t - m_t)^2.$$

Pour $d = 2$ par exemple, et des temps d'observations t_1, \dots, t_n , on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne l'**estimation par moindre carrés**⁵

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} = \arg \min_a \|X - Aa\|_2^2 = (A^\top A)^{-1} A^\top X,$$

avec pour **résidus d'estimation**

$$x - A\hat{a} = x - A(A^\top A)^{-1} A^\top X;$$

5. Revient à minimiser la fonction quadratique convexe $\varphi(a) = \|X - Aa\|_2^2$. On a $\varphi(a+h) - \varphi(a) = 2\langle Aa, Ah \rangle - 2\langle X, Ah \rangle + \|Ah\|_2^2 = \langle \nabla \varphi(a), h \rangle + o(\|h\|)$, d'où $\nabla \varphi(a) = 2A^\top Aa - 2A^\top X$. Or $A^\top A$ est inversible car A est de rang plein ($t_i \neq t_j$ si $i \neq j$), d'où $\nabla \varphi(a) = 0$ ssi $a = (A^\top A)^{-1} A^\top X$.

2. **Saisonnalité.** La fonction $t \mapsto s_t$ est une fonction périodique, appelée **composante saisonnière** (journalière, hebdomadaire, mensuelle, annuelle, etc). Un exemple est donné par une fonction trigonométrique de la forme

$$s_t = a_0 + \sum_{j=1}^k (a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t))$$

où les a_j et b_j sont inconnus et où les λ_i et λ_j sont des multiples entiers connus de $2\pi/d$. On devine d et les λ_i et λ_j puis on estime les a_i, b_j par moindres carrés. Par exemple, pour $k = 1$ et $\lambda_1 = 2\pi/12$ on utilise

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{b}_1 \end{pmatrix} = (A^\top A)^{-1} A^\top X \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\lambda_1 t_1) & \sin(\lambda_1 t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\lambda_1 t_n) & \sin(\lambda_1 t_n) \end{pmatrix};$$

3. **Bruit.** Le processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit qu'on espère **stationnaire**.

Dans la pratique, voici les étapes qu'on peut tenter de suivre :

1. Tracer la série temporelle et rechercher graphiquement la présence d'une tendance et d'une composante saisonnière (la nature des données peut aider) ;
2. Modéliser la tendance et la composante saisonnière (on peut s'aider des opérateurs Δ et Δ_d définis ci-après pour aller vite). Dans les moindres carrés, à valeur égale du critère minimisé, on préfère le modèle le moins complexe ;
3. Modéliser les résidus (en utilisant l'autocovariance définie plus loin).

Ci-dessous, un **opérateur** est une application définie sur l'ensemble \mathcal{X} des processus.

Définition 1.1 : Opérateurs retard et différence

L'**opérateur retard** B décale le processus d'un cran vers le passé :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (BX)_t = X_{t-1}.$$

L'**opérateur différence** Δ est défini par ^a

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (\Delta X)_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t.$$

Pour tout entier $d \geq 1$, l'**opérateur différence saisonnier** Δ_d est défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (\Delta_d X)_t = X_t - X_{t-d} = ((1 - B^d)X)_t.$$

^a. Ici 1 ou I désigne l'opérateur identité.

Notons que $\Delta = \Delta_1$. L'**opérateur différence** Δ agit comme une dérivation par rapport au paramètre t . Il permet d'éliminer une tendance linéaire :

$$\Delta(a + bt + Z_t) = b + Z_t - Z_{t-1}.$$

La partie constante a est éliminée, la partie linéaire bt est transformée en la constante b , tandis que la partie aléatoire Z_t subit une transformation linéaire (préserve l'éventuel caractère stationnaire). Plus généralement, l'**opérateur différence d'ordre n**

$$\Delta^n = \underbrace{\Delta \cdots \Delta}_{n\text{-fois}} = (1 - B)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B^{n-k},$$

(avec la convention $B^0 = 1$) élimine les tendances polynomiales de degré $< n$, par exemple

$$\Delta^2(a + bt + ct^2 + Z_t) = 2c + (Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}).$$

Pour éliminer une composante saisonnière de période d , on utilise l'**opérateur différence saisonnier**

$$\Delta_d = (1 - B^d).$$

Si par exemple s_t est de période d alors $\Delta_d(m_t + s_t + Z_t) = m_t - m_{t-d} + Z_t - Z_{t-d}$. Notons que Δ_d transforme une tendance linéaire at en une constante ad .

Des exemples concrets d'élimination de tendance et de saisonnalité par différentiation sont donnés dans les figures 1.5, 1.6, 1.7.

De manière synthétique, l'approche revient à modéliser la série temporelle observée par un processus X solution du modèle implicite (ou problème inverse)

$$P(B)X = Y$$

où

- $P(B)$ est un polynôme (estimable) de l'opérateur retard B ;
- Y est un processus stationnaire (covariance estimable).

On dit que X s'obtient en intégrant (inverse de la différentiation) Y . Si l'opérateur $P(B)$ ne fait intervenir que Δ et si de plus Y est modélisé par un processus stationnaire **ARMA** (Auto Regressive Moving Average, introduit par la suite), alors on dit que X est un processus **ARIMA** (Auto Regressive Integrated Moving Average). Lorsque $P(B)$ fait également intervenir l'opérateur de différentiation saisonnière Δ_d , alors on dit que X est un processus **SARIMA** (Seasonal ARIMA).

La suite du cours est consacrée à la modélisation des processus stationnaires.
Sauf mention explicite du contraire, on considère un temps discret indiqué par

$$T = \mathbb{Z}.$$

Les variables aléatoires sont définies sur un même espace de probabilité

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}).$$

1.2 Processus stationnaires

Un **processus stochastique** ou **processus** est une famille $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} . Le temps est en indice et l'aléa entre parenthèses :

$$\begin{aligned} \Omega \times T &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, t) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire. Pour tout $\omega \in \Omega$, on dit que la fonction du temps $t \mapsto X_t(\omega)$ est une **trajectoire du processus**.

Définition 1.2 : Processus fortement stationnaire

Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est **fortement stationnaire** lorsque pour tout $h \in \mathbb{Z}$ et toute suite finie $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ de longueur $n \geq 1$ quelconque, les vecteurs aléatoires

1. INTRODUCTION (x2)

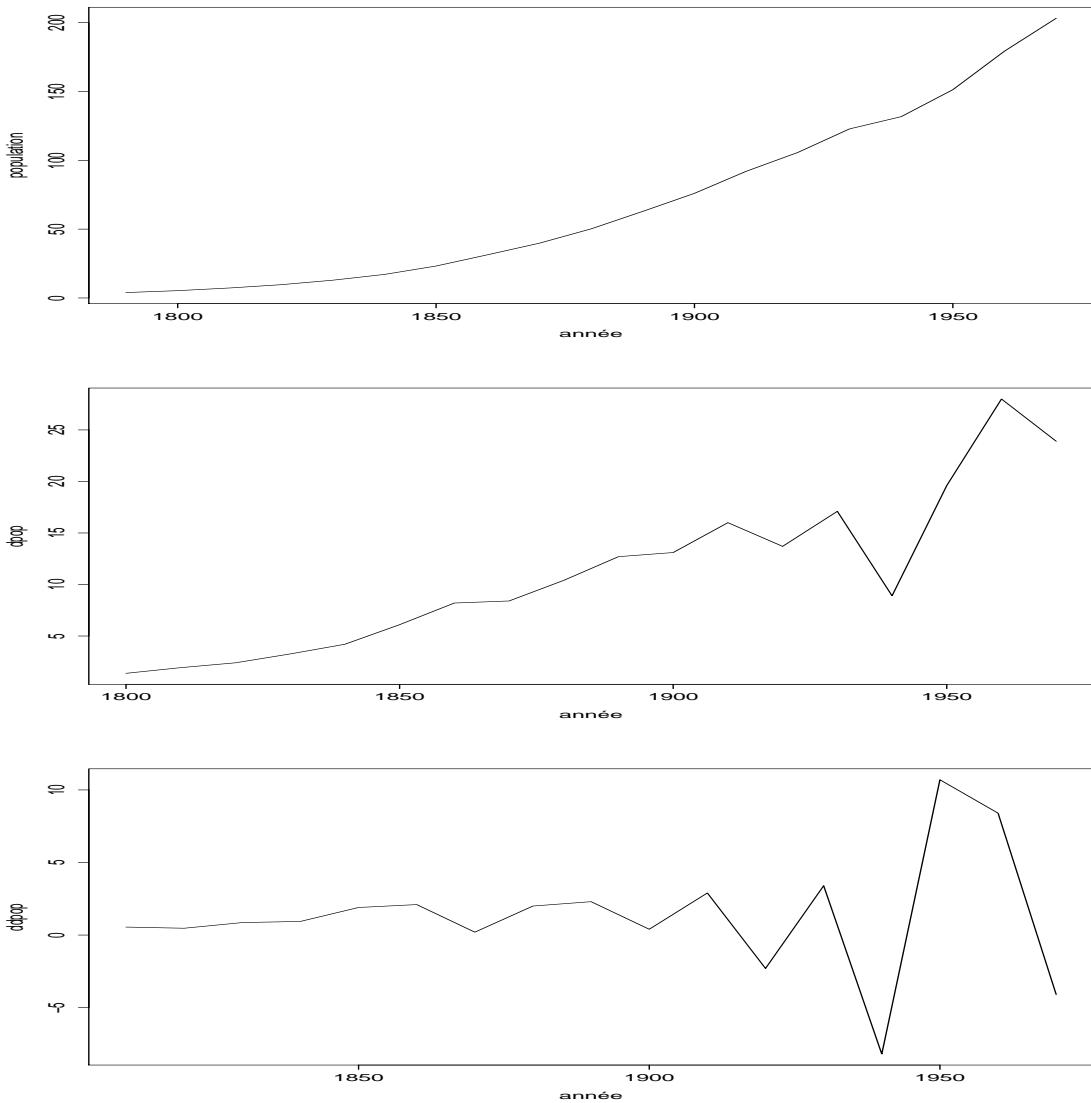


FIGURE 1.5 – Exemple d'élimination de tendance par différentiation.

La série d'origine (haut), après différentiation de degré 1 (milieu), et après différentiation de degré 2 (bas), grâce au code GNU-R ci-dessous.

```
# Inspiré du livre "Séries temporelles avec R" de Yves Aragon.
plot.ts(uspop,xlab='année',ylab='population')
plot.ts(diff(uspop),xlab='année',ylab='dpop')
plot.ts(diff(uspop, differences = 2),xlab='année',ylab='ddpop')
```

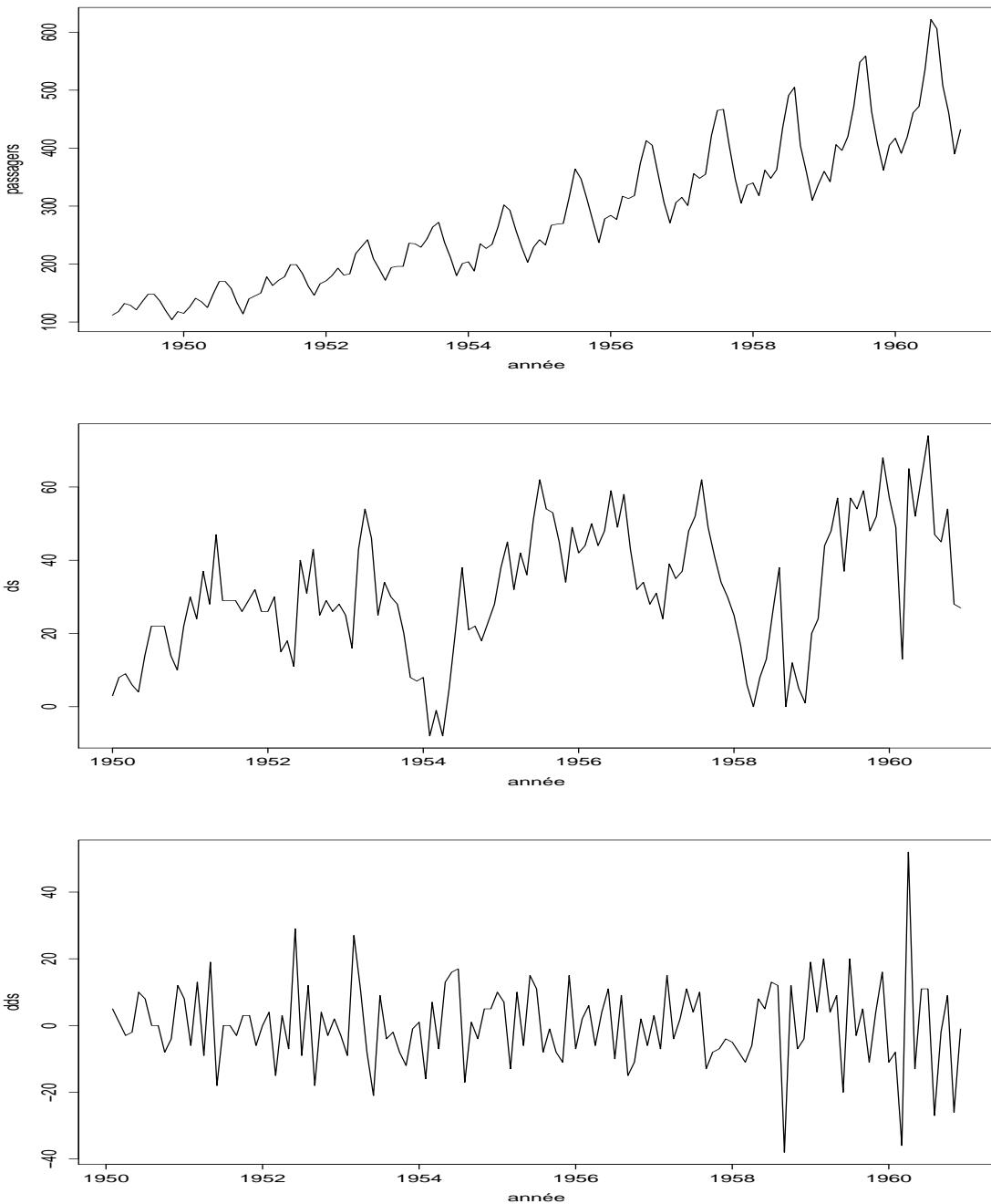


FIGURE 1.6 – Exemple d'élimination de saisonnalité et de tendance par différentiation.

La série d'origine (haut) est celle du nombre de passagers aériens, ce qui conduit à effectuer une différentiation saisonnière Δ_{12} (milieu), puis une différentiation supplémentaire de degré 1 pour éliminer la tendance (bas). Le code GNU-R est donné ci-dessous :

```
# Inspiré du livre "Séries temporelles avec R" de Yves Aragon.
plot.ts(AirPassengers,xlab='année',ylab='passagers')
plot.ts(diff(AirPassengers,lag=12),xlab='année',ylab='ds')
plot.ts(diff(diff(AirPassengers,lag=12)),xlab='année',ylab='dds')
```

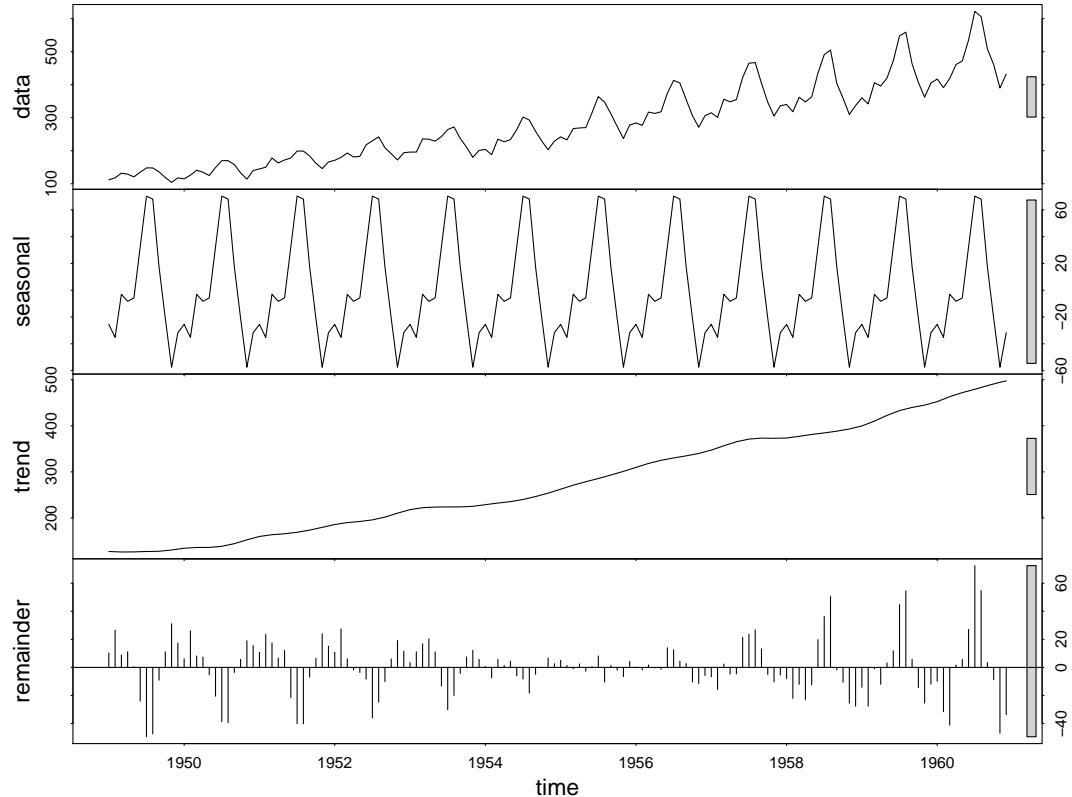


FIGURE 1.7 – Estimation de la tendance et de la saisonnalité par moindre carrés.
Série : nombre de passagers aériens. Code GNU-R :

```
# Inspiré du livre "Séries temporelles avec R" de Yves Aragon.
# Plusieurs fonctions permettent un ajustement (entre autres choses) :
#   lsfit : Find the Least Squares Fit
#   lm : Fitting Linear Models
#   arima : ARIMA Modelling of Time Series
#   stl : Seasonal Decomposition of Time Series by "Loess"
# Les fonctions lsfit, lm, et arima nécessitent de se fixer un modèle.
# La fonction stl en revanche intègre un traitement automatique.
plot(stl(AirPassengers,s.window="periodic"))
```

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ ont même loi.

La stationnarité forte est une propriété d'invariance en loi du processus par translation temporelle. Le concept n'est pas creux : si les variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ sont i.i.d. alors $(X_t)_{t \in T}$ est fortement stationnaire (la réciproque est fausse).

Définition 1.3 : Second ordre : moyenne et autocovariance

Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **processus du second ordre** lorsque $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Pour un tel processus, on définit la **fonction moyenne** $\mu_X : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ et la **fonction d'autocovariance** $\gamma_X : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) \quad \text{et} \quad \gamma_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t).$$

Rappelons que si L^p désigne l'espace de Lebesgue des variables aléatoires possédant un moment d'ordre p fini, alors $L^2 \subset L^1$. Pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, $X_t \in L^2 \subset L^1$ et

$$\begin{aligned} \gamma_t(s, t) &= \text{Cov}(X_s, X_t) \\ &= \mathbb{E}((X_s - \mathbb{E}(X_s))(X_t - \mathbb{E}(X_t))) \\ &= \mathbb{E}(X_s X_t) - \mathbb{E}(X_s) \mathbb{E}(X_t) \\ &= \mathbb{E}(X_s X_t) - \mu_X(s) \mu_X(t). \end{aligned}$$

Par analogie avec les vecteurs aléatoires finis usuels de \mathbb{R}^n , le vecteur (infini) aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ a pour vecteur (infini) moyenne μ_X et pour matrice (infinie) de covariance $\gamma_X = (\gamma_X(s, t))_{s, t \in \mathbb{Z}}$. De ce point de vue, il n'est pas étonnant que γ_X soit symétrique à diagonale réelle ≥ 0 (la diagonale donne les variances des composantes) :

$$\gamma_X(t, t) = \text{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}(X_t)^2.$$

La dépendance à longue portée au sens L^2 (corrélation) est mesurée par $\gamma_X(t, t+h)$ quand h est grand (ne dépend pas de t si le processus est stationnaire).

Définition 1.4 : Stationnarité

On dit qu'un processus du second ordre $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est **faiblement stationnaire** ou tout simplement **stationnaire** lorsque pour tout $h \in \mathbb{Z}$ et toute suite finie $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ de longueur $n \geq 1$ quelconque, les vecteurs aléatoires

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \quad \text{et} \quad (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

ont même **espérance** et **matrice de covariance**. Cela revient à dire, de manière équivalente, que μ_X est constante et γ_X est invariante par translation :

$$\forall s, t, h \in \mathbb{Z}, \quad \mu_X(t) = \mu_X(t+h) \quad \text{et} \quad \gamma_X(s, t) = \gamma_X(s+h, t+h).$$

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire alors $\gamma_X(s, t) = \gamma_X(0, t-s)$ pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la covariance $\gamma_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$ ne dépend que de l'écart temporel $t-s$. Dans ce cas, la fonction à deux variables (matrice infinie) γ_X peut être remplacée par une fonction à une seule variable (vecteur infini), notée également γ_X :

Définition 1.5 : Autocovariance

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire, sa **fonction d'autocovariance** est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \gamma_X(h) = \gamma_X(0, h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \quad (\forall t \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

de sorte que $\gamma_X(s, t) = \gamma_X(t - s)$ pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$.

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire, alors non seulement sa fonction moyenne $t \mapsto \mu_X(t)$ est constante, mais sa fonction variance $t \mapsto \sigma_t^2$ aussi car

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(X_t) = \gamma_X(t, t) = \gamma_X(0)$$

ne dépend plus de t . Idem pour $t \mapsto \mathbb{E}(X_t^2) = \sigma_t^2 + \mu_X(t)^2 = \gamma_X(0)^2 + \mu_X^2$.

Définition 1.6 : Fonction d'autocorrelation

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire, sa **fonction d'autocorrélation** est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow [-1, 1] \\ h &\mapsto \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t+h})}} \quad (\forall t \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Le termes sont bien choisis :

Théorème 1.7 : Stationnarité faible et forte

Un processus du second ordre fortement stationnaire est toujours stationnaire. La réciproque est fausse : il existe des processus stationnaires qui ne sont pas fortement stationnaire.

Démonstration. Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus du second ordre fortement stationnaire alors pour tous $s, t, h \in \mathbb{Z}$, les vecteurs aléatoires (X_s, X_t) et (X_{s+h}, X_{t+h}) ont la même loi, et donc la même moyenne et la même matrice de covariance, ce qui entraîne la constante de μ_X et l'invariance par translation de γ_X , d'où la stationnarité de X .

Construisons un contre-exemple pour la réciproque. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ des v.a.r. indépendantes avec X_t de loi \mathcal{L} si t est pair, et de loi $\mathcal{L}' \neq \mathcal{L}$ si t est impair, avec \mathcal{L} et \mathcal{L}' de même moyenne et variance, par exemple $\mathcal{L} = \text{Exp}(1)$ et $\mathcal{L}' = \mathcal{N}(1, 1)$. On a alors $\gamma_X(s, t) = 0$ si $s \neq t$ par indépendance tandis que $\gamma_X(s, s) = 1$, ce qui fait que le processus est stationnaire, mais pas fortement stationnaire car les X_t n'ont pas même loi ! \square

1→2

La moyenne et l'autocovariance constituent les deux premiers moments du processus, et les deux premiers moments ne suffisent pas à caractériser pas la loi. Au delà de la stationnarité, si X et Y sont deux processus du second ordre tels que $\mu_X = \mu_Y$ et $\gamma_X = \gamma_Y$ alors X et Y ne sont pas forcément de même loi (sauf pour les processus gaussiens!).

Définition 1.8 : Processus gaussiens

On dit que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **processus gaussien** lorsque $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien pour toute suite finie t_1, \dots, t_n dans \mathbb{Z} de longueur $n \geq 1$ quelconque. Un processus gaussien est toujours du second ordre.

Pour un processus gaussien, la stationnarité forte est équivalente à la stationnarité (faible) car la loi d'un vecteur gaussien est caractérisée par sa moyenne et sa covariance.

Définition 1.9 : Bruit blanc

Un processus stationnaire $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de moyenne μ et d'autocovariance γ_Z est un...

- **bruit blanc faible** ou **bruit blanc** si $\text{Cov}(Z_s, Z_t) = 0$ pour tous $s \neq t$;
- **bruit blanc moyennement fort** si Z_s et Z_t sont indépendantes pour tous $s \neq t$, c'est-à-dire que $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont deux à deux indépendantes ;
- **bruit blanc fort** lorsque les variables $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes ;
- **bruit blanc très fort** lorsque les variables $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d.

Dans tous les cas $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$ et on note $\text{BB}(\mu, \sigma^2)$. Dans ces notes de cours, lorsque la moyenne du BB n'est pas précisée, elle vaut zéro par convention.

Le terme «bruit blanc» tire son sens de l'analyse spectrale abordée plus loin.

Exemple 1.10 : Bruit blanc gaussien

Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X est un $\text{BB}(m, \sigma^2)$ fort gaussien. La figure 1.8 propose une simulation d'un bruit blanc gaussien.

Exemple 1.11 : Élémentaire ?

L'exemple le plus élémentaire de processus stationnaire est donné par $X_t = A$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où A est une v.a.r. de carré intégrable. Les trajectoires du processus sont des constantes. On a $\mu_X(t) = \mathbb{E}(A)$ et $\gamma_X(s, t) = \text{Var}(A)$ pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.12 : Processus harmonique

Soient A, B deux v.a.r. non corrélées de moyenne 0 et de variance σ^2 , et $\theta \in [-\pi, \pi]$ une constante. On considère le **processus harmonique** défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t).$$

1. INTRODUCTION (x2)

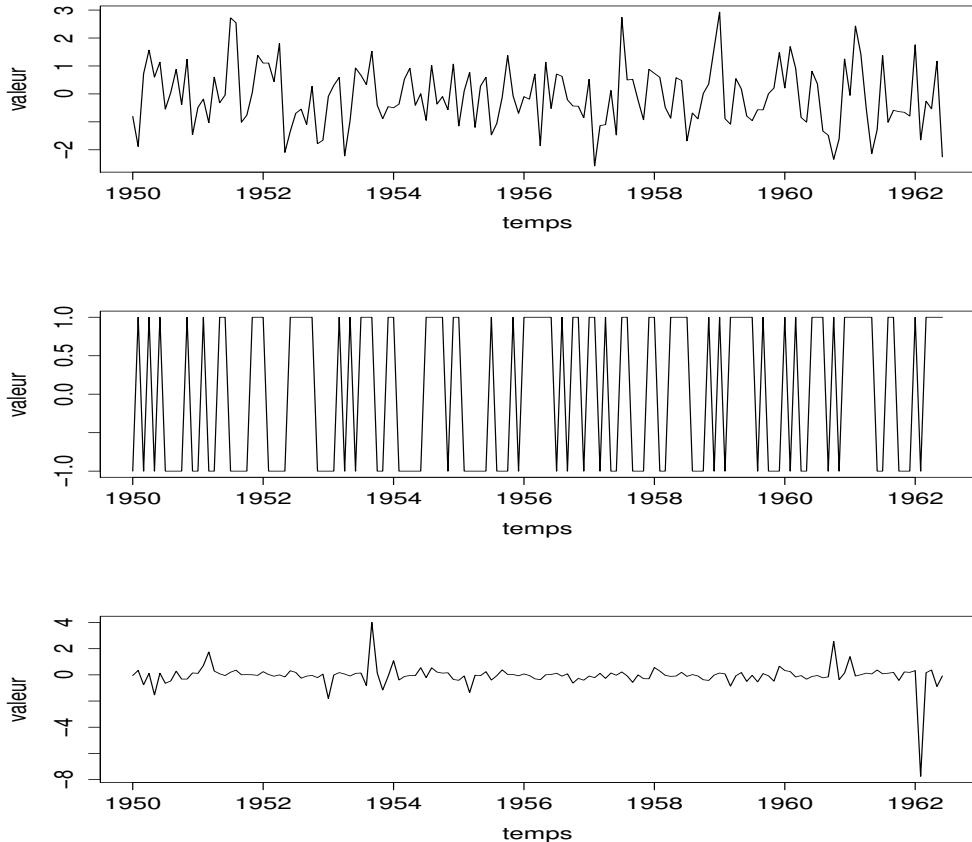


FIGURE 1.8 – Simulation d'un BB(0, 1) (loi de Gauss, Rademacher, Student).

Code GNU-R utilisé pour la simulation :

```
# Cr eation d'une série mensuelle,  a partir de janvier 1950
bbg = ts(rnorm(150,0,1),start=c(1950,1),frequency=12) # Gauss
plot.ts(bbg,xlab='temp',ylab='valeur')
bbb = ts(2*rbinom(150,1,1/2)-1,start=c(1950,1),frequency=12) # Rademacher
plot.ts(bbb,xlab='temp',ylab='valeur')
n = 2.1;
bbt = ts(rt(150,n,0)*sqrt(1-2/n),start=c(1950,1),frequency=12) # Student
plot.ts(bbt,xlab='temp',ylab='valeur')
```

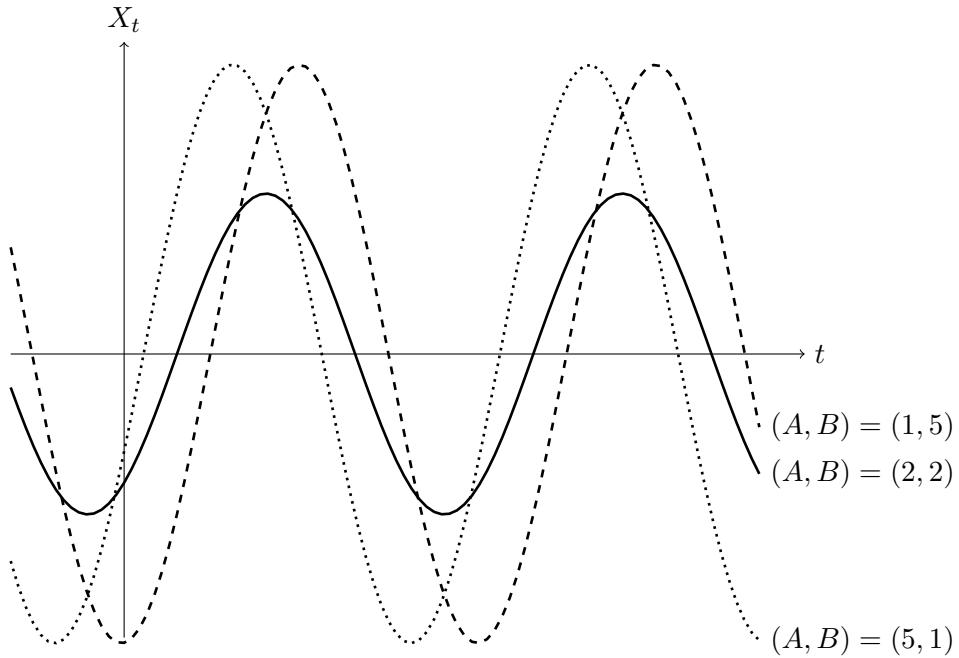


FIGURE 1.9 – Trois trajectoires d'un processus harmonique de fréquence $\theta = 1$.

Le processus est centré : $\mathbb{E}(X_t) = \cos(\theta t)\mathbb{E}(A) + \sin(\theta t)\mathbb{E}(B) = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t X_{t+h}) &= \cos(\theta t) \cos(\theta(t+h))\mathbb{E}(A^2) + \sin(\theta t) \sin(\theta(t+h))\mathbb{E}(B^2) \\ &\quad + (\dots) \underbrace{\mathbb{E}(AB)}_{=0} \\ &= \sigma^2 \Re(\mathrm{e}^{i\theta t} \mathrm{e}^{-i\theta(t+h)}) = \sigma^2 \Re(\mathrm{e}^{-i\theta h}) = \sigma^2 \cos(\theta h),\end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t , donc X est stationnaire, d'autocovariance $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h)$. Pourtant, les trajectoires du processus sont régulières, et ne ressemblent pas à l'idée qu'on se fait d'un processus stationnaire. Cela vient de la manière de rendre aléatoires les trajectoires, via les amplitudes A et B seulement. Une trajectoire de processus harmonique a la même allure qu'une saisonnalité pure, cf. figure 1.9. Un processus harmonique est une saisonnalité à amplitude aléatoire en quelque sorte. L'exemple 1.19 révèle une propriété déterministe très naturelle du processus harmonique.

Tout processus est une variable aléatoire à valeurs trajectoires. Observer une seule trajectoire du processus revient à observer une seule réalisation de cette variable aléatoire.

Remarque 1.13 : Comment reconnaître une suite stationnaire

Une suite doublement infinie de variables aléatoires est stationnaire quand la moyenne est constante et l'autocovariance est invariante par translation, en particulier la variance est constante. Sauf à se restreindre à un modèle particulier comme les suites récurrentes aléatoires, l'observation d'une seule trajectoire d'un processus ne nous renseigne pas beaucoup sur la structure de son aléa : c'est un échantillon de taille 1 de la loi des trajectoires ! Or la stationnarité est liée à la structure de l'aléa, et

ceci explique pourquoi elle est difficile à apprêhender visuellement, comme l'illustre l'exemple 1.12 du processus harmonique, pour lequel les trajectoires sont régulières. Il est malgré tout possible de tester la stationnarité en précisant un modèle. Le test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) de la commande GNU-R `kpss.test` par exemple permet de tester la stationnarité dans le cadre d'un modèle additif simple.

Dans la pratique, la stationnarité des séries temporelles peut s'avérer être une hypothèse raisonnable sur une plage observée, mais restera toujours hypothétique lors d'une prédiction, qui va par définition au delà des plages observées. Concepts reliés : ruptures, catastrophes, «**cygnes noirs**» (**black swans**), etc.

1.3 Suites récurrentes aléatoires et processus ARMA

Les suites récurrentes aléatoires constituent le modèle de processus le plus répandu.

Définition 1.14 : Suites récurrentes aléatoires d'ordre fini – ARMA(p, q)

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $T \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$. On dit qu'un processus $(X_t)_{t \in T}$ est une **suite récurrente aléatoire** d'ordre (p, q) lorsque pour tout $t > p$, la variable aléatoire X_t est une fonction du passé X_{t-1}, \dots, X_{t-p} et de bruits $Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-q}$ où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un BB. C'est le cas par exemple si pour une fonction f fixée on a

$$\forall t > p, \quad X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-q}).$$

- On dit que le processus est **markovien** lorsque $(p, q) = (1, 0)$;
- On dit que le processus a une **mémoire longue** lorsque $p = \infty$;
- On dit que le processus est un **ARMA(p, q)** lorsque $T = \mathbb{Z}$ et f est linéaire ; le cas $q = 0$ correspond aux processus **AR(p)** (Auto Regressive) tandis que le cas $p = 0$ correspond aux processus **MA(q)** (Moving Average).

Considérons une équation de récurrence aléatoire d'ordre (p, q) en $X = (X_t)_{t \in T}$. Si $T = \mathbb{N}$ alors X est bien défini par récurrence à partir des valeurs initiales X_0, \dots, X_{p-1} et de Z grâce à l'équation de récurrence. Si en revanche $T = \mathbb{Z}$, alors l'existence d'un tel X n'est pas claire. Le but du cours est d'aborder les questions suivantes :

- Sous quelles conditions les processus ARMA(p, q) existent-ils ?
- Sont-ils stationnaires ? Quelles sont leurs propriétés ?
- Comment les ajuster au mieux aux observations ?
- Comment s'en servir pour effectuer des prévisions ?

Examinons tout d'abord quelques cas particuliers simples.

Exemple 1.15 : Processus à moyenne mobile (MA)

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est à **moyenne mobile** (MA : Moving Average) lorsque

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$$

où $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$. On a $\mu(t) = \mathbb{E}(Z_t) + \theta\mathbb{E}(Z_{t-1}) = 0$ et

$$\gamma(s, t) = \mathbb{E}(X_s X_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |s - t| > 1; \\ \theta\sigma^2 & \text{si } |s - t| = 1; \\ (1 + \theta^2)\sigma^2 & \text{si } s = t. \end{cases}$$

En effet, comme $\mu_Z = 0$ et $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$, il vient, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) &= \mathbb{E}((Z_t + \theta Z_{t-1})(Z_{t+h} + \theta Z_{t+h-1})) \\ &= \mathbb{E}(Z_t Z_{t+h}) + \theta^2 \mathbb{E}(Z_{t-1} Z_{t+h-1}) + \theta \mathbb{E}(Z_{t-1} Z_{t+h}) + \theta \mathbb{E}(Z_t Z_{t+h-1}) \\ &= \gamma_Z(h) + \theta^2 \gamma_Z(h) + \theta \gamma_Z(h+1) + \theta \gamma_Z(h-1) \\ &= (1 + \theta^2)\sigma^2 \mathbf{1}_{h=0} + \theta \sigma^2 \mathbf{1}_{h=\pm 1}. \end{aligned}$$

Ce processus du second ordre est donc stationnaire. Si Z est un BB fortement stationnaire, alors X est aussi fortement stationnaire car

$$\begin{aligned} (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) &= (Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}) + \theta(Z_{t_1-1}, \dots, Z_{t_n-1}) \\ &= F(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n}, Z_{t_1-1}, \dots, Z_{t_n-1}) \\ &\stackrel{\text{loi}}{=} F(Z_{t_1+h}, \dots, Z_{t_n+h}, Z_{t_1+h-1}, \dots, Z_{t_n+h-1}) \\ &= (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}). \end{aligned}$$

Plus généralement, pour h et $\theta_0, \dots, \theta_h$ fixés, on peut considérer le processus MA(q)

$$X_t = \theta_0 Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_h Z_{t-h}.$$

Exemple 1.16 : Marche aléatoire

On peut étudier les séries temporelles avec une origine des temps, ce qui revient à indexer le temps par l'ensemble \mathbb{N} au lieu de l'ensemble \mathbb{Z} . Considérons par exemple la **marche aléatoire** $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ définie par $X_0 = 0$ et l'équation de récurrence linéaire d'ordre 1 ou AR(1) suivante :

$$X_{t+1} = X_t + Z_{t+1} = Z_1 + \dots + Z_{t+1}$$

où $(Z_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne 0 et de variance σ^2 . La moyenne vaut $\mu(t) = \mathbb{E}(X_t) = 0$. Le processus X n'est pas stationnaire car comme pour tous $t, h \in \mathbb{N}$,

$$X_t = Z_1 + \dots + Z_t \quad \text{et} \quad X_{t+h} - X_t = Z_{t+1} + \dots + Z_{t+h}$$

sont indépendantes et centrées, on a $\text{Cov}(X_t, X_{t+h} - X_t) = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \gamma(t, t+h) &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h} - X_t + X_t) \\ &= \text{Cov}(X_t, X_{t+h} - X_t) + \text{Var}(X_t) \\ &= \text{Var}(X_t) \\ &= t\sigma^2 \end{aligned}$$

qui dépend de t . La marche aléatoire est un processus AR(1) non stationnaire.

1.4 Autocovariance et matrices de Toeplitz

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire alors pour toute suite finie t_1, \dots, t_n dans \mathbb{Z} , la matrice de covariance Γ du vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ vérifie

$$\Gamma_{j,k} = \text{Cov}(X_{t_j}, X_{t_k}) = \gamma(t_k - t_j).$$

De plus, si les t_1, \dots, t_n sont régulièrement espacés alors les coefficients de Γ sont constants le long de chaque diagonale : on dit qu'il s'agit d'une **matrice de Toeplitz**. Plus généralement, le vecteur (infini) aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ a pour matrice (infinie) de covariance $(\gamma_X(t - s))_{s,t \in \mathbb{Z}}$, dont les coefficients sont constants le long des diagonales.

Dans toute la suite, on réservera la lettre i au nombre complexe $(0, 1)$ et on utilisera plutôt les lettres j, k, h pour indexer les sommes.

$$(\gamma(j - k))_{1 \leq j, k \leq p} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \dots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \ddots & & \vdots \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma(1) & \gamma(2) \\ \vdots & & \ddots & \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(p-1) & \dots & \dots & \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.17 : Autocovariance

Si $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire alors elle est **symétrique de type positif**, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\gamma(h) = \gamma(-h)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$;
2. pour tout $n \geq 1$, et tout $t \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\Gamma = (\gamma(t_j - t_k))_{1 \leq j, k \leq n}$ vérifie :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \langle v, \Gamma v \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_j \gamma(t_j - t_k) v_k \geq 0.$$

De plus $\Gamma_{1,1} = \dots = \Gamma_{n,n} = \gamma(0) \geq 0$ et $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est symétrique et de type positif, alors c'est la fonction d'autocovariance d'un processus (fortement) stationnaire gaussien.

Note : la seconde condition signifie que le spectre de la matrice symétrique Γ est ≥ 0 .

Note : on ne perd rien à prendre $t = (1, \dots, n)$, quitte à extraire une sous-matrice.

Preuve (en partie facultative). Le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ de \mathbb{R}^n a pour matrice de covariance $\Gamma = (\gamma(t_j - t_k))_{1 \leq j, k \leq n}$. En posant

$$V = (X_{t_1} - \mathbb{E}(X_{t_1}), \dots, X_{t_n} - \mathbb{E}(X_{t_n})),$$

on a, en utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que $v^\top V$ est une v.a.r. centrée,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_j \Gamma_{j,k} v_k = v^\top \underbrace{\mathbb{E}(VV^\top)}_{\text{matrice!}} v = \mathbb{E}(|v^\top V|^2) = \text{Var}(v^\top V) \geq 0.$$

Enfin, on a $\gamma(0) = \text{Var}(X_t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, et pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \gamma(-h),$$

tandis que par l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans L^2 ,

$$|\gamma(h)| = |\mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}(X_t))(X_{t+h} - \mathbb{E}(X_{t+h})))| \leq \sqrt{\text{Var}(X_t)} \sqrt{\text{Var}(X_{t+h})} = \gamma(0).$$

Cette partie de la preuve est facultative. Il nous reste à construire un processus à fonction d'autocovariance prescrite γ (symétrique de type positif). Munissons $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit, qui est la topologie la moins fine rendant les projections (applications coordonnées) continues, et de la tribu borélienne associée, qui coïncide avec la tribu produit engendrée par les cylindres. Nous allons construire une loi gaussienne sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ (i.e. les lois marginales de dimension finie sont gaussiennes), invariante par translation, centrée, et de fonction de covariance γ . On considère tout d'abord une suite de v.a.r. i.i.d. $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de loi gaussienne centrée réduite. La loi de cette suite est une loi gaussienne produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on construit, par exemple grâce à la **décomposition de Cholesky**. (théorème 5.6), une matrice $L \in \mathcal{M}_{2n+1, 2n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$LL^\top = (\gamma(j-k))_{-n \leq j, k \leq n},$$

de sorte que $Y = L(Z_k)_{-n \leq k \leq n}$ soit un vecteur gaussien de matrice de covariance LL^\top . On pose alors $X_k = Y_k$ si $-n \leq k \leq n$ et $X_k = Z_k$ sinon. On peut alors montrer que X converge en loi quand $n \rightarrow \infty$ (fonctions test d'un nombre fini de variables). \square

2 → 3

1.5 Compléments

Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus du second ordre. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on note

$$H_{t-1} := \overline{\text{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}}$$

l'adhérence dans L^2 du sous-espace vectoriel $\text{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k}$ convergentes dans L^2 . On note également

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1}) = \arg \min_{Y \in H_{t-1}} \|X_t - Y\|_2 \in H_{t-1}$$

la projection orthogonale dans L^2 de $X_t \in L^2$ sur le sous-espace vectoriel fermé $H_{t-1} \subset L^2$. Ces notions hilbertiennes sont centrales dans le chapitre 5 sur la prédition linéaire.

Définition 1.18 : Processus déterministe

Un processus du second ordre $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est **déterministe** lorsque pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t \in H_{t-1} := \overline{\text{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}}.$$

Autrement dit $X_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1})$ dans L^2 pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

Note : si X est gaussien alors $\text{proj}(X_t, H_{t-1}) = \text{proj}(X_t, L^2(\mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$ où \mathcal{F}_{t-1} est la tribu engendrée par X_{t-1}, X_{t-2}, \dots

Exemple 1.19 : Le processus harmonique stationnaire est déterministe

Montrons que le **processus harmonique** de l'exemple 1.12 est déterministe. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, les formules trigonométriques $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ et $2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) + \sin(b-a)$ donnent, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = 2\cos(\theta)X_{t-1} - X_{t-2} \in H_{t-1}, \quad \text{d'où} \quad X_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1}).$$

Ceci n'est pas étonnant car les trajectoires du processus harmonique sont des sinusoïdes dont la seule source d'aléa est l'amplitude, ce qui fait qu'à chaque instant, il est parfaitement possible de prédire le futur de la trajectoire à partir de son passé.

Lemme 1.20 : Processus stationnaire non déterministe

Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. Alors $t \in \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2)$ est constante. Si σ^2 est sa valeur, alors X est déterministe si et seulement si $\sigma^2 > 0$.

Note : la variable aléatoire $X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1})$ est appelée **innovation**.

Un bruit blanc à variance non nulle est un exemple de processus non déterministe. En effet, si $Z \sim BB(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$ alors $Z_t \perp H_{t-1} := \overline{\text{vect}\{Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots\}}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ d'où $\text{proj}(Z_t, H_{t-1}) = 0$ et $\|Z_t - \text{proj}(Z_t, H_{t-1})\|_2^2 = \|Z_t\|_2^2 = \sigma^2 > 0$.

Démonstration du lemme 1.20. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, le sous espace vectoriel H_{t-1} est formé par l'ensemble des séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k}$$

qui convergent dans L^2 . Montrons que l'ensemble Φ des coefficients $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ qui garantit la convergence dans L^2 ne dépend pas de t . Pour tous $s \geq r \geq 1$ on a

$$\left\| \sum_{k=s}^r \varphi_k X_{t-k} \right\|_2^2 = \sum_{j,k=s}^r \varphi_j \varphi_k \gamma_X(j-k),$$

quantité qui ne dépend pas de t . Ainsi le critère de Cauchy ne dépend pas de t , ce qui signifie que Φ ne dépend pas de t . À présent on a

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1}) = \arg \inf_{Y \in H_{t-1}} \|X_t - Y\|_2^2 = \arg \inf_{\varphi \in \Phi} \sum_{j,k=0}^{\infty} \varphi_j \varphi_k \gamma_X(j-k)$$

où on a posé $Y = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k}$ et $\varphi_0 := -1$. Il en découle que

$$\|X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1})\|_2^2 = \inf_{Y \in H_{t-1}} \|X_t - Y\|_2^2 = \inf_{\varphi \in \Phi} \sum_{j,k=0}^{\infty} \varphi_j \varphi_k \gamma_X(j-k),$$

quantité qui ne dépend pas de t . Enfin $\mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = 0$ si et seulement si $X_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1})$ dans L^2 . \square

La **décomposition de Wold** motive l'étude de processus de la forme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Y_{t-k}$, au moins dans le cas agréable où $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$. C'est précisément l'objet du chapitre suivant.

Théorème 1.21 : Décomposition ou représentation de Wold

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **processus stationnaire non déterministe** alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = D_t + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}, \quad (1.1)$$

dans L^2 , où $(D_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, et $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifient les propriétés suivantes :

1. $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$ avec $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$;
2. $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim BB(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$
3. $Z_t \in H_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$;
4. $\text{Cov}(Z_s, D_t) = 0$ pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$;
5. $(D_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **processus déterministe** ;
6. $D_t \in H_s$ pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$.

De plus cette décomposition est **unique**. Enfin, lorsque $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors la série dans le membre de droite de (1.1) converge dans L^1 et $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(D_t)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

Note : $\ell^1(\mathbb{Z}) \not\subset \ell^2(\mathbb{Z})$!

Démonstration (facultative en première lecture). Le lemme 1.20 appliqué au processus stationnaire déterministe X donne, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\sigma^2 := \mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0.$$

À présent, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{Z}$ on pose

$$Z_t := X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1})$$

Preuve de 2 et 3. Il vient que $\mathbb{E}(Z_t) = 0$. De plus par définition $Z_t \in H_t$ et $Z_t \in H_{t-1}^\perp$, donc $Z_t \in H_{t-1}^\perp \subset H_{t-2}^\perp \subset \dots$, d'où $\text{Cov}(Z_s, Z_t) = \mathbb{E}(Z_s Z_t) = 0$ pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$ avec $s < t$. Enfin $\text{Var}(Z_t) = \mathbb{E}(Z_t^2) = \sigma^2$. Nous avons donc $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim BB(0, \sigma^2)$.

Preuve de (1.1). Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$X_t - Z_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1}) \in \overline{\text{vect}\{Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots\}}$$

et

$$\text{proj}(X_t, \text{vect}\{Z_t, Z_{t-1}, \dots\}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$$

où

$$\alpha_k := \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0, \\ \frac{1}{\sigma^2} \langle X_t, Z_{t-k} \rangle & \text{si } k \geq 0. \end{cases}$$

Preuve de 1. Les coefficients $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont indépendants de t par stationnarité et

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sigma^2} \langle X_t, Z_t \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \langle X_t, X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}) \rangle = \frac{1}{\sigma^2} \|X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1})\|_2^2 = 1.$$

Preuve de 4. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, posons

$$D_t := X_t - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k} = X_t - \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k Z_{t-k}.$$

On a $\langle D_t, Z_s \rangle = 0$ pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$ avec $s \leq t$, tandis que d'autre part si $s > t$ alors $Z_s \in H_{s-1}^\perp \subset H_t^\perp$ et comme $D_t \in H_t$ il vient $\langle D_t, Z_s \rangle = 0$ pour tous $s < t$.

Preuve de 5 et 6. Comme $D_t \in H_t = H_{t-1} \oplus \text{vect}\{Z_t\}$ et comme $\langle D_t, Z_t \rangle = 0$, il vient $D_t \in H_{t-1} = H_{t-2} \oplus \text{vect}\{Z_{t-1}\}$, etc, d'où $D_t \in \cap_{k \in \mathbb{N}} H_{t-k}$, ce qui donne

$$\overline{\text{vect}\{D_t, D_{t-1}, \dots\}} \subset \cap_{k \in \mathbb{N}} H_{t-k}.$$

Par définition de D_t , $H_t = \overline{\text{vect}\{Z_t, Z_{t-1}, \dots\}} \oplus \overline{\text{vect}\{D_t, D_{t-1}, \dots\}}$. Si $Y \in \cap_{k \in \mathbb{N}} H_{t-k}$ alors $Y \in H_{s-1}$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, d'où $\langle Y, Z_s \rangle = 0$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, d'où $Y \in \overline{\text{vect}\{D_t, D_{t-1}, \dots\}}$. Ceci signifie que $\cap_{k \in \mathbb{N}} H_{t-k} \subset \overline{\text{vect}\{D_t, D_{t-1}, \dots\}}$ d'où

$$\cap_{k \in \mathbb{N}} H_{t-k} = \overline{\text{vect}\{D_t, D_{t-1}, \dots\}}.$$

Comme cela est valable pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et que le membre de gauche ne dépend pas de t , on en déduit que $(D_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est déterministe. De plus $D_t \in H_s$ pour tout $s \in \mathbb{Z}$.

Preuve de l'unicité de la décomposition. Il est possible (exercice !) de déduire de (1.1) que les ingrédients Z , α , et D vérifient les formules indiquées, et il n'y a donc pas le choix.

Cas intégrable. Si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors pour tout $K \subset \mathbb{Z}$ fini,

$$\sum_{k \in K} \|\alpha_k Z_{t-k}\|_1 = \sum_{k \in K} |\alpha_k| \|Z_{t-k}\|_1 \leq \sum_{k \in K} |\alpha_k| \|Z_{t-k}\|_2 = \sigma \sum_{k \in K} |\alpha_k|,$$

et il en découle que la série dans (1.1) vérifie le critère de Cauchy dans l'espace de Banach L^1 . Alternativement la convergence absolue ou normale dans L^1 de la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\alpha_k Z_{t-k}\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| \|Z_{t-k}\|_1 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| \|Z_{t-k}\|_2 = \sigma \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| = \sigma \|\alpha\|_1 < \infty$$

implique automatiquement la convergence de la série dans l'espace de Banach L^1 . \square

La décomposition de Wold est un cas spécial d'une décomposition plus générale en théorie des opérateurs de von Neumann : la décomposition de Wold et von Neumann affirme que toute isométrie linéaire sur un espace de Hilbert est somme directe d'opérateurs de décalages (shift) unilatéraux et d'opérateurs unitaires.

Filtrage linéaire (x2.5)

Mots-clés : filtrage ; processus linéaire ; causalité ; inversibilité ; convolution.

2.1 Motivation

Considérons l'équation autorégressive AR(1) :

$$\forall t \in \mathbb{Z} : X_t = Z_t + \varphi X_{t-1},$$

où $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et où φ est un paramètre réel déterministe (faire un dessin de trajectoire). Pour résoudre cette équation en X , on itère l'équation n fois :

$$X_t = Z_t + \varphi(Z_{t-1} + \varphi X_{t-2}) = \dots = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} + \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}.$$

À présent, si $|\varphi| < 1$ et si une solution X stationnaire existait alors

$$\|\varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}\|_2^2 = |\varphi|^{2(n+1)} \|X_{t-(n+1)}\|_2^2 = |\varphi|^{2(n+1)} (\gamma_X(0) + \mu_X^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)} = 0$ dans L^2 , ce qui entraînerait que la série aléatoire $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k Z_{t-k}$ converge dans L^2 vers la solution stationnaire X_t . Quand est-ce que de telles séries aléatoires sont convergentes ? En quel sens ? Ce chapitre a précisément pour objectif d'étudier de telles séries aléatoires, qui apparaissent naturellement dans la résolution d'équation de type AR ou plus généralement ARMA.

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus, et si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite déterministe à valeurs dans \mathbb{R} , et à support fini : $\text{card}\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\} < \infty$, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire

$$Y_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k}$$

a un sens car la somme est finie. Cette moyenne mobile pondérée constitue une forme de **lissage par convolution**¹ (dessin) appelé **filtrage linéaire**, analogue discret de

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(s) x(t-s) ds = (\alpha * x)(t).$$

Le théorème de filtrage ci-après assure que quitte à imposer quelques contraintes de sommabilité, on peut donner un sens à Y_t même si $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas à support fini.

1. La valeur X_t au temps t est remplacée par la moyenne pondérée $\dots + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_0 X_t + \alpha_{-1} X_{t+1} + \dots$.

2.2 Théorème de filtrage

On dit qu'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ indicée par \mathbb{Z} et à valeurs dans \mathbb{R} est **sommable** ssi $\sup_{m,n \geq 0} \sum_{k=-m}^n |x_k| < \infty$. Dans ce cas, les séries $\sum_{k \geq 0} x_k$ et $\sum_{k \leq 0} x_k$ sont absolument convergentes, ce qui permet de définir la somme $\sum_{x \in \mathbb{Z}} x_k$. On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'espace vectoriel des suites sommables à valeurs dans \mathbb{R} et indicées par \mathbb{Z} . La formule $\|x\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|$ définit une norme sur $\ell^1(\mathbb{Z})$ qui en fait un espace de Banach.

Théorème 2.1 : Filtrage linéaire des processus bornés

Soit $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus, borné dans L^p avec $p \geq 1$, c'est-à-dire que $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^p) < \infty$. Posons

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall m, n \in \mathbb{N}, Y_{t,m,n} = \sum_{k=-m}^n \alpha_k X_{t-k}.$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ la famille $(Y_{t,m,n})_{m,n \geq 1}$ converge presque-sûrement et dans L^p lorsque $m, n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire $Y_t \in L^p$:

$$Y_{t,m,n} \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} Y_t \in L^p \quad \text{et} \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|Y_{t,m,n} - Y_t|^p) = 0.$$

De plus, le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est bien défini p.s. et est borné dans L^p .

Note : la bornitude dans L^p implique la bornitude dans L^1 (inégalité de Hölder).

Démonstration. Pour simplifier les notations, on se contente du cas $m = n$. Comme L^p est un espace de Banach², le théorème de Riesz–Fischer affirme que toute série absolument convergente est convergente (preuve par critère de Cauchy). Or pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{h=-n}^n \|\alpha_h X_{t-h}\|_p = \sup_{n \geq 1} \sum_{h=-n}^n |\alpha_h| \|X_{t-h}\|_p \leq \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_t\|_p \sum_{h \in \mathbb{Z}} |\alpha_h| < \infty$$

et donc $(Y_{t,n,n})_{n \geq 1} = (\sum_{h=-n}^n \alpha_h X_{t-h})_{n \geq 1}$ converge dans L^p quand $n \rightarrow \infty$.

Il ne reste plus qu'à établir que la convergence a lieu presque sûrement lorsque $p = 1$, et que les deux limites coïncident presque sûrement. Pour cela, si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est bornée dans L^1 , alors le théorème de convergence monotone (ou de Fubini–Tonelli) donne, dans $[0, +\infty]$,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| |X_{t-k}|\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|\alpha_k| |X_{t-k}|) \leq \sup_{s \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_s|) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| = \sup_{s \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_s|) \|\alpha\|_1 < \infty.$$

Donc $S := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| |X_{t-k}|$ à valeurs dans $[0, \infty]$ vérifie $\mathbb{E}(S) < \infty$, d'où $S < \infty$ p.s. c'est-à-dire que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k}$ converge (absolument) p.s. Sa somme est notée Y_t .

La limite p.s. est identique à la limite dans L^1 car les deux types de convergence entraînent la convergence en probabilité. Alternativement, on peut observer que

$$\sup_n |Y_{t,n,n}| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| |X_{t-k}| \in L^1,$$

et comme on sait déjà que $Y_{t,n,n} \rightarrow Y_t$ p.s., le théorème de convergence dominée implique que la limite Y_t est dans L^1 et que la convergence $Y_{t,n,n} \rightarrow Y_t$ a lieu dans L^1 .

2. Espace vectoriel normé complet : toute suite de Cauchy est convergente.

Enfin, si A_t est l'événement presque sûr sur lequel a lieu la convergence presque sûrement pour t , alors l'événement $\cap_{t \in \mathbb{Z}} A_t$ est également presque sûr ce qui assure que $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est bien défini presque sûrement. Ce processus est borné dans L^p car grâce à la continuité et à l'inégalité triangulaire,

$$\|Y_t\|_p = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} Y_{t,n,n} \right\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_{t,n,n}\|_p \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| \|X_{t-k}\|_p \leq \|\alpha\|_1 \sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X\|_p$$

et cette dernière quantité est finie et indépendante de t . \square

Théorème 2.2 : Filtrage de processus stationnaires

Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne $\mu_X = \mathbb{E}(X_t)$ et d'autocovariance $\gamma_X(h)$. Alors le processus $Y := F_\alpha(X)$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (F_\alpha X)_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k}$$

est un processus du second ordre et stationnaire, de moyenne et d'autocovariance

$$\mu_Y = \mu_X \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \quad \text{et} \quad \gamma_Y(h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_X(h + j - k).$$

Note : ne pas confondre $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k$ avec $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| = \|\alpha\|_1$.

Note : la parité de γ_Y provient de celle de γ_X car pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \gamma_Y(-h) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_X(-h + j - k) \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_X(h - j + k) \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_j \gamma_X(h + k - j) \\ &= \gamma_Y(h). \end{aligned}$$

Ceci montre au passage qu'on peut remplacer $j - k$ par $k - j$ dans la formule.

Démonstration. Comme X est stationnaire, il est du second ordre, donc borné dans L^2 car

$$\sup_{t \in \mathbb{Z}} \|X_t\|_2^2 = \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^2) = \gamma_X(0)^2 + \mu_X^2 < \infty.$$

Ceci permet d'utiliser le théorème 2.1 avec $p = 2$, qui garantit que le processus $F_\alpha X$ est bien défini presque-sûrement et dans L^2 . Il s'agit donc d'un processus du second ordre dont nous allons calculer la moyenne et l'autocovariance. Rappelons que le produit scalaire de L^2 est continu : si $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$ dans L^2 alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_n, V_n \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} U_n, \lim_{n \rightarrow \infty} V_n \rangle = \langle U, V \rangle.$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}((F_\alpha X)_t) = \langle 1, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k} \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in [-n, n]} \alpha_k X_{t-k} \rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle 1, \sum_{k \in [-n, n]} \alpha_k X_{t-k} \rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in [-n, n]} \alpha_k X_{t-k} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in [-n, n]} \alpha_k \mathbb{E}(X_{t-k}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_X \sum_{k \in [-n, n]} \alpha_k \\
 &= \mu_X \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k,
 \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t . De même, pour l'autocovariance, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}((F_\alpha X)_s (F_\alpha X)_t) &= \left\langle \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j X_{s-j}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k} \right\rangle \\
 &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in [-n, n]} \alpha_j X_{s-j}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in [-n, n]} \alpha_k X_{t-k} \right\rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{j \in [-n, n]} \alpha_j X_{s-j}, \sum_{k \in [-n, n]} \alpha_k X_{t-k} \right\rangle \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in [-n, n]} \sum_{k \in [-n, n]} \alpha_j \alpha_k \mathbb{E}(X_{s-j} X_{t-k}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in [-n, n]} \sum_{k \in [-n, n]} \alpha_j \alpha_k (\gamma_X(s-j, t-k) + (\mu_X)^2) \\
 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_X(t-s+j-k) + (\mu_X \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k)^2,
 \end{aligned}$$

qui ne dépend que de $t-s$. Il en découle que $F_\alpha X$ est stationnaire. Notons que la double série $\sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_X(h+j-k)$ est absolument convergente car

$$\sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\alpha_j \alpha_k \gamma_X(h+j-k)| \leq \gamma_X(0) \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| |\alpha_k| = \gamma_X(0) \|\alpha\|_1^2 < \infty,$$

où on a utilisé le fait que $|\gamma_X(h)| \leq \gamma_X(0)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$ tiré du théorème 1.17. \square

Exemple 2.3 : Processus linéaires : filtrage d'un BB

Si $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors le théorème 2.2 dit que $X = \mu + F_\alpha Z$ est un processus stationnaire de moyenne μ et d'autocovariance

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_{j+h}.$$

C'est l'image d'un BB par une application linéaire : on parle de **processus linéaire**.

Remarque 2.4 : Notation avec opérateur retard

Si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors la fonction

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$$

est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ car

$$\left| \sum_{-n \leq k \leq n} \alpha_k z^k \right| \leq \sum_{-n \leq k \leq n} |\alpha_k| |z|^k = \sum_{-n \leq k \leq n} |\alpha_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|$$

L'opérateur F_α s'écrit aussi $f(B)$ où B est l'opérateur retard :

$$f(B)X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k B^k X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k}.$$

Si α est à support fini : $\text{card}\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\} < \infty$, alors $f(z)$ est bien définie pour tout $z \neq 0$, et prend des valeurs réelles si z et α sont réels. De plus f est un polynôme ssi $\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\}$ est une partie finie de \mathbb{N} , et dans ce cas $f(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Réciproquement, si une fonction $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en série de puissances de z sous la forme $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ alors cette série converge absolument lorsque $|z| = 1$ ssi $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et la notation $F_\alpha = f(B)$ fait sens.

Définition 2.5 : Causalité et inversibilité

Si Z est stationnaire, on dit que le filtre $X = \mu + F_\alpha Z$ de Z est un processus...

- **causal** lorsque $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$ (X_t ne dépend pas du futur de Z_t). C'est le cas par exemple des processus MA(q), $q \geq 1$, qui vérifient

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}.$$

Plus généralement, les processus linéaires causaux (Z BB) avec $\alpha_0 = 1$ sont les processus MA(∞) (un processus MA(q) est un MA(q') pour tout $q' \geq q$);

- **inversible** lorsque Z est un processus causal de X , c'est-à-dire qu'il existe un $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $Z = F_\beta(X)$ avec $\beta_k = 0$ pour tout $k < 0$. C'est le cas par exemple des processus AR(p), $p \geq 1$, qui vérifient $Z = F(X)$ car

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = Z_t.$$

Plus généralement, les processus linéaires inversible (Z BB) avec $\alpha_0 = 1$ sont les processus AR(∞) (un AR(p) est un AR(p') pour tout $p' \geq p$).

2.3 Composition et convolution

Théorème 2.6 : Composition des opérateurs

2. FILTRAGE LINÉAIRE (x2.5)

Avec les notations du théorème 2.2, si $\alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et si X est stationnaire, alors

$$F_\alpha(F_\beta X) = F_{\alpha * \beta} X \quad \text{où} \quad (\alpha * \beta)_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k-j}.$$

La quantité $(\alpha * \beta)_k$ fait sens pour tout $k \in \mathbb{Z}$ car

$$\left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k-j} \right| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| |\beta_{k-j}| \leq \|\beta\|_1 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| = \|\alpha\|_1 \|\beta\|_1 < \infty.$$

On dit que $\alpha * \beta$ est le **produit de convolution** de α et β . Le même argument montre que $\alpha * \beta$ existe dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ dès que $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\beta \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, mais cela n'est pas exploité dans ce cours. Le produit de convolution vérifie les propriétés suivantes :

1. Le produit de convolution est commutatif et associatif :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \alpha * \beta = \beta * \alpha \quad \text{et} \quad (\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma);$$

2. Le produit de convolution possède un élément neutre $e = \mathbf{1}_0$:

$$\forall \alpha \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \alpha * e = \alpha;$$

3. Le produit de convolution est distributif :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \alpha + \beta) * \gamma = (\lambda \alpha) * \gamma + \beta * \gamma = \lambda(\alpha * \gamma) + \beta * \gamma;$$

4. Le produit de convolution vérifie, pour tous $\alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$,

$$\|\alpha * \beta\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |(\alpha * \beta)_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| |\beta_{k-j}| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\alpha_j| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\beta_{k-j}| = \|\alpha\|_1 \|\beta\|_1.$$

On dit que le produit de convolution $*$ fait de $\ell^1(\mathbb{Z})$ une algèbre de Banach.

Preuve du théorème 2.6. Lorsque α et β sont à support fini, la propriété est évidente car

$$\begin{aligned} (F_\alpha(F_\beta X))_t &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j (F_\beta X)_{t-j} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k X_{t-j-k} \\ &\stackrel{k'=j+k}{=} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k'-j} \right) X_{t-k'} \\ &= (F_{\alpha * \beta} X)_t. \end{aligned}$$

Lorsque α et β sont à support infini, la commutation des sommes est licite grâce au théorème de Fubini–Tonelli (les séries sont presque sûrement absolument convergentes). Alternativement, lorsque α et β sont à support infini, on peut adopter une approche L^2 : on procède par troncature et on exploite l'hypothèse de sommabilité sur α et β . \square

Il est à présent naturel de se poser la question suivante :

- Peut-on défiltrer en utilisant à nouveau un filtre ? Autrement dit, à quelle condition sur $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ existe-t-il $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $\alpha * \beta = e$ où $e = \mathbf{1}_0$ est l'élément neutre de la convolution ?

Il est bien connu en algèbre que si un tel élément β existe, alors il est unique^a. Il s'agit de l'inverse de α pour le produit de convolution $*$ et on le note $\beta = \alpha^{-1}$. Nous

allons voir que le calcul de l'inverse est lié à la série de puissances associée à α .

a. Si $\alpha * \beta = e = \alpha * \beta'$ alors $\beta = \beta * e = \beta * (\alpha * \beta') = (\beta * \alpha) * \beta' = e * \beta' = \beta'$.

Lemme 2.7 : Convolution et séries de puissances

Soit $(\mathcal{F}, +, \times)$ l'algèbre usuelle des fonctions continues définies sur le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et à valeurs dans \mathbb{C} . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Pour tout $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, on a $(\alpha_k z^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que la série suivante converge absolument sur le cercle unité :

$$P_\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k;$$

- L'application $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z}) \mapsto P_\alpha \in \mathcal{F}$ est un **homomorphisme d'algèbres** :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \ell^1(\mathbb{Z}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad P_{\alpha * \beta + \lambda \gamma}(z) = P_\alpha(z)P_\beta(z) + \lambda P_\gamma(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que les séries de puissances $P_\alpha(z)$, $P_\beta(z)$, et $P_\gamma(z)$ convergent absolument. En particulier, le produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ est transformé en produit standard de fonctions dans \mathcal{F} par l'application $\alpha \mapsto P_\alpha$:

$$\forall \alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad P_{\alpha * \beta} = P_\alpha P_\beta.$$

- L'application $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z}) \mapsto P_\alpha \in \mathcal{F}$ est injective :

$$\forall \alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad P_\alpha = P_\beta \Rightarrow \alpha = \beta;$$

Note : en français, la formule $P_{\alpha * \beta}(z) = P_\alpha(z)P_\beta(z)$ dit que les coefficients du **produit de Cauchy** de deux séries de puissances sont donnés par le produit de convolution des coefficients des deux séries. Cette liaison entre suites et fonctions est utile.

Note : l'élément neutre est envoyé sur l'élément neutre : $P_e(z) = 1$.

Éléments de preuve. La première propriété est évidente. La seconde propriété n'offre pas non plus de difficulté. Pour $\lambda = 0$ la seconde propriété découle d'un produit de Cauchy de séries de puissances absolument convergentes :

$$\begin{aligned} P_\alpha(z)P_\beta(z) &= \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k \right) \left(\sum_{k' \in \mathbb{Z}} \beta_{k'} z^{k'} \right) \\ &= \sum_{k, k' \in \mathbb{Z}} \alpha_k \beta_{k'} z^{k+k'} \\ &\stackrel{h=k+k'}{=} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \beta_{h-k} \right) z^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} (\alpha * \beta)_h z^h \\ &= P_{\alpha * \beta}(z). \end{aligned}$$

Établissons la troisième propriété (injectivité). Si $P_\alpha = P_\beta$ pour $\alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors d'après la seconde propriété on a $P_{\alpha - \beta} = 0$, c'est-à-dire que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on

a $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k z^k = 0$, où $\gamma_k = \alpha_k - \beta_k$. À présent, on note que les éléments de \mathcal{F} sont des fonctions continues et bornées sur le cercle unité, et sont dans l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable sur le cercle unité. On rappelle que l'application

$$(f, g) \in L^2 \times L^2 \mapsto \langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} d\theta$$

est un produit scalaire, qu'elle fait de L^2 un espace de Hilbert, et que les fonctions trigonométriques $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta k} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, constituent une base hilbertienne. Le caractère orthonormé provient du fait que pour tous $k, h \in \mathbb{Z}$,

$$\langle \theta \mapsto e^{i\theta k}, \theta \mapsto e^{i\theta h} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(h-k)} d\theta = \mathbf{1}_{h=k}.$$

Aussi, pour tout $h \in \mathbb{Z}$ fixé, en posant $z = e^{i\theta}$, il vient, grâce au théorème de Fubini–Tonelli,

$$0 = \left\langle \theta \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{i\theta k}, \theta \mapsto e^{i\theta h} \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \left\langle \theta \mapsto e^{i\theta k}, \theta \mapsto e^{i\theta h} \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \mathbf{1}_{h=k} = \gamma_h.$$

□

La condition d'appartenance au cercle unité vient du fait que la série $P_\alpha(z)$ où $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ peut comporter des puissances positives ou négatives arbitrairement grandes de z . La série $P_\alpha(z)$ est un polynôme ssi le support $\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\}$ de α est une partie finie de \mathbb{N} , et dans ce cas la série est une somme finie, qui a un sens pour tout $z \in \mathbb{C}$. Si le support de α contient une infinité de valeurs positives, alors la convergence de $P_\alpha(z)$ n'est pas garantie pour $|z| > 1$. Si le support de α contient des valeurs négatives, alors la convergence de $P_\alpha(z)$ est impossible en $z = 0$. Si le support de α contient une infinité de valeurs négatives alors la convergence de $P_\alpha(z)$ n'est pas garantie pour $|z| < 1$. Seul le cas $|z| = 1$ subsiste quelque soit le support de α , et la convergence (absolue) est alors garantie par $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Le théorème suivant fait le lien entre propriétés d'algèbre et d'analyse.

Théorème 2.8 : Inversibilité pour la convolution et séries de puissances

Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $P_\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ est un polynôme, c'est-à-dire que α est à support fini et ≥ 0 . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. α est inversible pour le produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$;
2. P_α n'a pas de racine de module 1 ;
3. $z \mapsto 1/P_\alpha(z)$ est développable en série de puissances de z , absolument convergente dans une couronne de \mathbb{C} contenant le cercle unité :

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k z^k, \quad \beta \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

Lorsque ces propriétés ont lieu, alors $\alpha^{-1} = \beta$. De plus, si P_α n'a pas de racine de module < 1 alors le support de α^{-1} est ≥ 0 , c'est-à-dire que $\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k^{-1} \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.

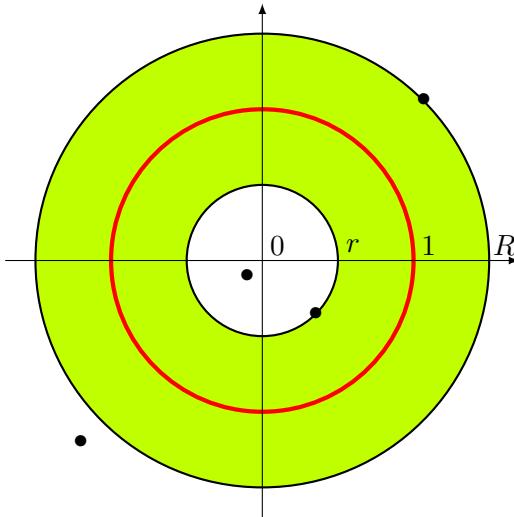


FIGURE 2.1 – Si le polynôme P_α n'a pas de racines de module 1, alors ses racines sont à l'extérieur d'une couronne qui contient le cercle unité.

Démonstration. Montrons que $2 \Rightarrow 3$. Supposons que P_α n'a pas de racine de module 1. Soit z_1, \dots, z_d les racines distinctes de P_α dans \mathbb{C} , de multiplicités respectives m_1, \dots, m_d , de sorte que $P_\alpha(z) = c(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_d)^{m_d}$ avec $c \in \mathbb{C}$. Si

$$r := \max\{|z| \in \mathbb{C} : P_\alpha(z) = 0, |z| < 1\} = \max\{|z| : z \in \{z_1, \dots, z_d\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\}$$

et

$$R := \min\{|z| \in \mathbb{C} : P_\alpha(z) = 0, |z| > 1\} = \min\{|z| : z \in \{z_1, \dots, z_d\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}\},$$

alors $r < 1 < R$ et les racines z_1, \dots, z_d de P_α sont à l'extérieur de la couronne (figure 2.3)

$$D(r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\},$$

qui contient le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Afin de développer la **fraction rationnelle** $z \mapsto 1/P_\alpha(z)$ en série, on considère sa décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k},$$

où $c_{j,k} \in \mathbb{C}$ sont des constantes, pour tout $z \notin \{z_1, \dots, z_d\}$. Or pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < 1$, une formule de Taylor donne (convergence absolue)

$$(1 + w)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} w^n \quad \text{où} \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}.$$

(il s'agit d'une généralisation de la formule du binôme aux puissances quelconques). Donc si $|z_j| < 1$ et $|z| > |z_j|$ alors en posant $w = z_j/z$, on a (convergence absolue)

$$\frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k} = \frac{c_{j,k}}{z^k} \frac{1}{(1 - z_j/z)^k} = \frac{c_{j,k}}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (-z_j/z)^n = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k,h} z^h$$

tandis que si $|z_j| > 1$ et $|z| < |z_j|$ en posant $w = z/z_j$, on a (convergence absolue)

$$\frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k} = \frac{c_{j,k}(-1)^k}{z_j^k} \frac{1}{(1 - z/z_j)^k} = \frac{c_{j,k}(-1)^k}{z_j^k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (-z/z_j)^n = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k,h} z^h.$$

En combinant tout, on obtient enfin le développement en série de $1/P_\alpha(z)$:

$$\forall z \in D(r, R), \quad \frac{1}{P_\alpha(z)} = \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{m_j} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k,h} z^h = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^{m_j} \beta_{j,k,h} \right) z^h = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \beta_h z^h,$$

et la convergence est absolue, car une somme finie de séries de puissances absolument convergentes est une série de puissance absolument convergente. À présent, en prenant $z = 1 \in D(r, R)$ on a $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Enfin, pour établir que β est réel, on observe que comme α est réel, le polynôme P_α est à coefficients réels, donc l'ensemble de ses racines est stable par conjugaison, donc les coefficients $c_{j,k}, \beta_{j,k,h}, \beta_h$ sont en fait tous réels, ce qui assure finalement que β est bien à valeurs réelles : $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Montrons que $3 \Rightarrow 1$. Pour tout $z \in D(r, R)$, par produit de Cauchy (lemme 2.7),

$$P_e(z) = 1 = P_\alpha(z) \frac{1}{P_\alpha(z)} = P_\alpha(z) P_\beta(z) = P_{\alpha * \beta}(z),$$

ce qui donne $e = \alpha * \beta$ grâce au lemme 2.7. Donc α est inversible d'inverse $\alpha^{-1} = \beta$.

Montrons que $1 \Rightarrow 2$. Comme $\alpha^{-1} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le lemme 2.7 donne

$$P_{\alpha^{-1}}(z) P_\alpha(z) = P_{\alpha^{-1} * \alpha}(z) = P_e(z) = 1$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, et cela interdit à P_α d'avoir une racine de module 1.

Enfin, on observe que seules les racines de P_α de module inférieur à 1 contribuent à la partie de α^{-1} indiquée par des indices négatifs. Par conséquent, si P_α n'a pas de racine de module ≤ 1 alors α^{-1} est porté par \mathbb{N} . \square

Exemple 2.9 : Séries géométriques

Exampons trois exemples liés à une série géométrique.

- Cas où $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = -1$, et $\alpha_k = 0$ si $k \notin \{0, 1\}$. On a alors $P_\alpha(z) = 2 - z$, dont la seule racine 2 est de module > 1 . Le théorème 2.8 s'applique, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$,

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \frac{1/2}{1 - z/2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2} \right)^2 + \dots \right).$$

Cela donne $(\alpha^{-1})_k = 2^{-(k+1)} \mathbf{1}_{k \geq 0}$, et on a bien $\alpha^{-1} \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

- Cas où $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, et $\alpha_k = 0$ si $k \notin \{0, 1\}$. On alors $P_\alpha(z) = 1 - 2z$, dont la seule racine $1/2$ est de module < 1 . Le théorème 2.8 s'applique, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1/2$ (autrement dit $|2z| > 1$),

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \frac{1}{1 - 2z} = -\frac{1}{2z} \frac{1}{1 - 1/(2z)} = -\frac{1}{2z} \sum_{k=0}^{\infty} (2z)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z^{-k}.$$

Cela donne $(\alpha^{-1})_k = 2^k \mathbf{1}_{k < 0}$, et on a bien $\alpha^{-1} \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

- Cas où $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_k = 0$ si $k \notin \{0, 1\}$. On a alors $P_\alpha(z) = 1 - z$ dont la seule racine est 1, qui est de module 1. Le théorème 2.8 ne s'applique

pas. Cependant, le développement en série géométrique

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, et suggère que $\alpha^{-1} = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$. Cette suite n'appartient pas à $\ell^1(\mathbb{Z})$. Cela suggère au passage que l'inverse d'un élément de $\ell^1(\mathbb{Z})$ peut exister dans $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

Remarque 2.10 : Calcul pratique de l'inverse

L'équation $\alpha * \beta = e$ en β est un système infini d'équations linéaires. La preuve du théorème 2.8 montre qu'on peut déterminer β en déterminant les racines de P_α puis en effectuant des développements en série. Mais cela peut s'avérer laborieux en pratique. Dans le cas où P_α n'a pas de racine de module ≤ 1 , on sait que β est porté par \mathbb{N} , ce qui rend le système d'équations $\alpha * \beta = e$ triangulaire, et donc facile à résoudre par récurrence. En effet, si d est le degré du polynôme P_α alors on obtient une identité entre séries de puissances de z absolument convergentes sur le cercle unité :

$$(\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_d z^d)(\beta_0 + \beta_1 z + \dots) = 1.$$

En développant le membre de droite (produit de Cauchy) et en identifiant les coefficients pour chaque puissance grâce au lemme 2.7, on obtient le système triangulaire suivant qu'on peut résoudre de haut en bas :

$$\begin{cases} \alpha_0 \beta_0 &= 1 \quad (\text{d'où on tire } \beta_0) \\ \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 &= 0 \quad (\text{d'où on tire } \beta_1) \\ \alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0 &= 0 \quad (\text{d'où on tire } \beta_2) \\ &\vdots \end{cases}$$

Théorème 2.11 : Identifiabilité

On note \mathcal{S}_2 l'ensemble des processus stationnaires.

- Si Z est $\text{BB}(0, \sigma^2)$ alors $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z}) \mapsto F_\alpha Z$ est injective :

$$\forall \alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad F_\alpha Z = F_\beta Z \quad \Rightarrow \alpha = \beta;$$

- Si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est inversible pour $*$ alors $X \in \mathcal{S}_2 \mapsto F_\alpha X$ est injective :

$$\forall X, Y \in \mathcal{S}_2, \quad F_\alpha X = F_\alpha Y \quad \Rightarrow X = Y.$$

Démonstration.

- Si $F_\alpha Z = F_\beta Z$ alors pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} Z_s \alpha_k Z_{t-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} Z_s \beta_k Z_{t-k}$. En prenant l'espérance et en utilisant le fait que $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$ (car Z est un BB), il vient $\alpha_{t-s} = \beta_{t-s}$, et comme s, t sont quelconques, on a enfin $\alpha = \beta$. Note : on peut invoquer le fait que le produit scalaire dans L^2 est continu pour justifier l'interversion

entre \mathbb{E} et Σ . Note : ce raisonnement n'est plus valable si on sait seulement que $F_\alpha Z \stackrel{d}{=} F_\beta Z$ où « $\stackrel{d}{=}$ » désigne l'égalité en loi, mais le redevient si $(Z, F_\alpha Z) \stackrel{d}{=} (Z, F_\beta Z)$; 2. Si $F_\alpha X = F_\alpha Y$ avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $X, Y \in \mathcal{S}_2$, alors, grâce aux théorèmes 2.6 et 2.8,

$$X = F_{\alpha^{-1} * \alpha} X = F_{\alpha^{-1}}(F_\alpha X) = F_{\alpha^{-1}}(F_\alpha Y) = F_{\alpha^{-1} * \alpha} Y = Y.$$

□

2.4 Compléments

Remarque 2.12 : Filtrage faible d'un BB

Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un BB($0, \sigma^2$) et $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$ c'est-à-dire que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$. Alors pour tout $K \subset \mathbb{Z}$ fini, le théorème de Pythagore dans l'espace de Hilbert L^2 donne

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k \in K} \alpha_k Z_{t-k}\right|^2\right) = \sum_{j, k \in K} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(j - k) = \sigma^2 \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2.$$

Comme $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$ le critère de Cauchy dans l'espace complet L^2 indique que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ converge dans L^2 . On note $(F_\alpha Z)_t \in L^2$ sa somme, en cohérence avec les filtres habituels. D'autre part, la série est absolument convergente dans L^2 ssi $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ car $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\alpha_k Z_{t-k}\|_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|$, et dans ce cas la convergence a lieu p.s. d'après le théorème de filtrage ! Rappelons à ce sujet que $\ell^1(\mathbb{Z}) \not\subseteq \ell^2(\mathbb{Z})$, et que l'inclusion est inversée pour les espaces L^p au sens où $L^2 \subset L^1$ (stricte en général).

Remarque 2.13 : Analyse de Fourier

Le théorème 2.6 est lié à l'associativité du produit de convolution car

$$F_\alpha(F_\beta X) = \alpha * (\beta * X) = (\alpha * \beta) * X = F_{\alpha * \beta} X$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$. Le terme **filtrage** vient de la théorie du signal : comme la transformée de Fourier transforme produit de convolution en produit, on a $\widehat{\alpha * x} = \widehat{\alpha} \widehat{x}$ qui n'est rien d'autre qu'un **filtre spectral**^a. L'analyse de Fourier ω par ω des séries temporelles mène au **théorème de Wiener-Khinchine-Kolmogorov**, qui dépasse le cadre de ces notes. Nous feront appel à l'analyse de Fourier dans le chapitre 4 pour étudier la fonction d'autocovariance des processus stationnaires (elle est déterministe).

a. C'est un filtre passe-bande quand $\widehat{\alpha}$ est l'indicatrice d'un intervalle compact.

Remarque 2.14 : Analyse complexe

Il est possible d'étendre le théorème 2.8 d'inversibilité des filtres au delà des suites à support fini en introduisant de la technologie (analyse complexe) comme le développement en série de Laurent des fonctions méromorphes. Bien qu'amusant, cela n'est pas nécessaire pour l'étude, menée plus loin, des processus ARMA(p, q) avec $p, q < \infty$.

CHAPITRE 3

Processus ARMA (x1.5)

Mots-clés : processus AR/MA/ARMA ; causalité ; inversibilité.

Les **processus ARMA**(p, q) (Auto Regressive Moving Average) forment une classe de processus stationnaires paramétrés incluant à la fois un mécanisme d'autoregression linéaire (AR) d'ordre p , et de moyenne mobile ou ajustée (MA) d'ordre q .

Définition 3.1 : AR, MA, ARMA

Soient $p, q \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathbb{R}^p$ et $\theta \in \mathbb{R}^q$ des coefficients fixés, et $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$. On dit que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **processus ARMA**(p, q), ou ARMA d'ordre (p, q) , lorsqu'il est stationnaire et vérifie l'équation de récurrence linéaire suivante^a :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \sum_{k=1}^p \varphi_k X_{t-k} + Z_t + \sum_{k=1}^q \theta_k Z_{t-k}.$$

De plus :

- si $\theta \equiv 0$ ou $q = 0$ alors on dit qu'il s'agit d'un **processus AR**(p) ;
- si $\varphi \equiv 0$ ou $p = 0$ alors on dit qu'il s'agit d'un **processus MA**(q).

a. Avec la convention $\sum_{k=0}^{-1} = \sum_{\emptyset} = 0$ utile quand $p = 0$ ou $q = 0$.

Les processus MA(q) existent toujours : ce sont les processus linéaires causaux à support fini. En revanche, l'existence des processus AR(p) n'est pas évidente, car le temps est indexé par \mathbb{Z} , ce qui rend délicate l'exploitation de la récurrence. Une idée naturelle consiste à utiliser récursivement l'équation pour produire une suite récurrente aléatoire. Bien qu'il n'y a pas de notion de condition initiale car le temps est indicé par \mathbb{Z} , cette approche conduit à la solution de AR(1) comme nous allons le voir plus loin. L'équation ARMA(p, q) peut aussi être vue comme un système triangulaire doublement infini d'équations indicées par \mathbb{Z} . Nous allons le résoudre dans ce chapitre, en reformulant ARMA(p, q) en terme de filtrage !

L'équation de récurrence ARMA(p, q) s'écrit également

$$\forall t \in \mathbb{Z}, X_t - (\varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_p X_{t-p}) = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q},$$

ou encore

$$\Phi(B)X = \Theta(B)Z$$

3. PROCESSUS ARMA (x1.5)

où B est l'opérateur retard et où Φ et Θ désignent les polynômes

$$\Phi(z) = 1 - (\varphi_1 z + \cdots + \varphi_p z^p) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q.$$

L'écriture avec une **fraction rationnelle** suggère même la solution :

$$X \stackrel{?}{=} \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} Z = \frac{1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q}{1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p} Z \stackrel{?}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k B^k Z = F_\beta(Z).$$

L'équation de récurrence ARMA(p, q) s'écrit aussi avec des filtres

$$F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\theta} Z,$$

où $(\alpha_\varphi)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(\alpha_\theta)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont les suites à support fini définies par

$$(\alpha_\varphi)_h = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ -\varphi_h & \text{si } 1 \leq h \leq p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad (\alpha_\theta)_h = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ \theta_h & \text{si } 1 \leq h \leq q \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette écriture avec des filtres suggère aussi la solution :

$$X \stackrel{?}{=} F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z.$$

Notons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a les identités suivantes (les sommes sont finies !)

$$\Phi(z) = P_{\alpha_\varphi}(z) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} (\alpha_\varphi)_h z^h \quad \text{et} \quad \Theta(z) = P_{\alpha_\theta}(z) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta)_h z^h.$$

3.1 Processus MA et processus AR

Rappelons la définition des processus à moyenne mobile (Moving Average).

Définition 3.2 : Processus MA

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est MA(q) pour un entier $q \geq 0$ lorsqu'il est du second ordre, stationnaire, et solution de l'équation de récurrence

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^q \theta_k Z_{t-k} = (F_{\alpha_\theta} Z)_t = (\Theta(B)Z)_t$$

où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un BB($0, \sigma^2$) et où $\theta \in \mathbb{R}^q$ est un vecteur fixe. On dit que q est l'ordre du processus et que (θ, σ^2) sont ses paramètres.

5→6

Le théorème 2.2 affirme que si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est MA(q) alors $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance $\gamma_X(h) = \mathbf{1}_{[-q,q]}(h) \sigma^2 \sum_{k=0}^{q-|h|} \theta_k \theta_{k+|h|}$.

Rappelons la définition des processus autoregressifs (Auto Regressive).

Définition 3.3 : Processus AR

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est AR(p) pour un entier $p \geq 0$ lorsqu'il est du second ordre,

stationnaire, et solution de l'équation de récurrence

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^p \varphi_k X_{t-k}$$

en d'autres termes

$$Z_t = (F_{\alpha_\varphi} X)_t = (\Phi(B)X)_t$$

où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$ et où $\varphi \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur fixe. On dit que p est l'ordre du processus et (φ, σ^2) ses paramètres.

Contrairement aux processus MA, l'existence des processus AR n'est pas évidente, car le temps étant indexé par \mathbb{Z} , il n'y a pas d'origine des temps qui permettrait d'exploiter facilement la récurrence. Le théorème suivant assure l'existence de processus AR(1).

Théorème 3.4 : Existence des processus AR(1)

- Si $|\varphi_1| = 1$ alors l'équation des AR(1) n'a pas de solution stationnaire ;
- Si $|\varphi_1| < 1$ alors la solution est donnée par le processus linéaire causal

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^k Z_{t-k},$$

de moyenne 0 et d'autocovariance $\gamma_X(h) = \sigma^2 \varphi_1^{|h|} / (1 - \varphi_1^2)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

C'est un $\text{MA}(\infty)$. C'est de plus l'unique solution stationnaire ;

- Si $|\varphi_1| > 1$ alors la solution est donnée par le processus linéaire non-causal

$$X_t = - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1^{-k} Z_{t+k},$$

de moyenne 0 et d'autocovariance $\gamma_X(h) = \sigma^2 \varphi_1^{-|h|} / (\varphi_1^2 - 1)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

C'est là encore l'unique solution stationnaire.

Remarque 3.5 : Infinité de solutions non stationnaires

Si X est solution de AR(1) $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + Z_t$, on peut rechercher un processus Y tel que la somme $X + Y$ soit également solution. On a $X_t + Y_t = \varphi_1(X_{t-1} + Y_{t-1}) + Z_t$ et comme $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + Z_t$, on obtient alors $Y_t = \varphi_1 Y_{t-1}$. Ainsi, $Y_t = \varphi_1^t Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, avec Y_0 quelconque. Cela donne une infinité non dénombrable de solutions, mais ces solutions ne sont pas stationnaires en général (exercice!).

Démonstration. L'équation de récurrence s'écrit $X_t = Z_t + \varphi_1 X_{t-1}$ et donne par récurrence $X_t = \sum_{k=0}^r \varphi_1^k Z_{t-k} + \varphi_1^{r+1} X_{t-(r+1)}$ pour tout $r \geq 0$. Lorsque $|\varphi_1| < 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_1|^k < \infty$, c'est-à-dire que $\alpha_\varphi \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et par le théorème 2.2, $\sum_{k=0}^r \varphi_1^k Z_{t-k}$ converge p.s. et dans L^2 vers $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^k Z_{t-k}$, un processus du second ordre stationnaire, qui est un processus linéaire (exemple 2.3), dont on vérifie qu'il est solution de l'équation de récurrence :

$$\varphi_1 X_{t-1} = \varphi_1 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^k Z_{(t-1)-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^{k+1} Z_{t-(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1^k Z_{t-k} = X_t - Z_t.$$

Par ailleurs, si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est solution du second ordre stationnaire alors $\varphi_1^{r+1} X_{t-(r+1)} \rightarrow 0$ dans L^2 quand $r \rightarrow \infty$ car $|\varphi_1| < 1$, et on retrouve le processus linéaire $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = \varphi_1^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$. L'autocovariance s'obtient en spécialisant celle des filtres du théorème 2.2 et plus précisément celle des processus linaires de l'exemple 2.3 : pour tout $h \in \mathbb{Z}$ avec $h \geq 0$,

$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_{h+j} = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varphi_1^{h+j} = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1^h}.$$

Lorsque $|\varphi_1| > 1$ on procède de la même manière en utilisant la récurrence renversée $X_t = -\varphi_1^{-1} Z_{t+1} + \varphi_1^{-1} X_{t+1}$ en exploitant le fait que $|\varphi_1^{-1}| < 1$, ce qui conduit à la solution $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = \varphi_1^k \mathbf{1}_{k \leq -1}$. Ici aussi, on peut vérifier directement que ce processus $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1^{-k} Z_{t+k}$ est solution de l'équation de récurrence :

$$\varphi_1 X_{t-1} = -\varphi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1^{-k} Z_{(t-1)+k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1^{-(k-1)} Z_{t+(k-1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^{-k} Z_{t+k} = X_t - Z_t.$$

De même l'autocovariance s'obtient comme précédemment : pour tout $h \in \mathbb{Z}$ avec $h \leq 0$,

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_{h+j} = \sigma^2 \sum_{j \leq -1} \varphi_1^j \varphi_1^{h+j} = \sigma^2 \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_1^{-j} \varphi_1^{-|h|-j} = \frac{\sigma^2 \varphi_1^{-|h|}}{\varphi_1^2 - 1}.$$

Lorsque $|\varphi_1| = 1$, alors s'il existait une solution stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t - \varphi_1^{r+1} X_{t-(r+1)}|^2) &= \mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=0}^r \varphi_1^k Z_{t-k}\right|^2\right) \\ &= \sum_{k=0}^r |\varphi_1|^{2k} \mathbb{E}(|Z_{t-k}|^2) \\ &= (r+1)\sigma^2 \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_t - \varphi_1^{r+1} X_{t-(r+1)}|^2) &= \gamma_X(0) + \gamma_X(0) - 2\gamma_X(t - (r+1) - t) \\ &= 2(\gamma_X(0) - \gamma_X(r+1)) \\ &\leq 4\gamma_X(0), \end{aligned}$$

ce qui n'est pas possible simultanément pour r assez grand. \square

3.2 Résolution de l'équation ARMA

Le théorème suivant généralise considérablement l'étude précédente des AR(1).

Théorème 3.6 : Existence des processus ARMA

Soient Φ et Θ les polynômes associés à l'équation ARMA(p, q).

1. Si Φ n'a pas de racine de module 1 alors ARMA(p, q) possède une unique solution stationnaire, donnée par le processus linéaire $F_\alpha Z$ où $\alpha = \alpha_\theta * \alpha_\varphi^{-1}$ où α_φ^{-1} est l'inverse de α_φ pour $*$ (existe : théorème 2.8) ;
2. Si ARMA(p, q) admet un processus linéaire $F_\alpha Z$ avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ comme solution

alors toute racine de module 1 de Φ est également racine de Θ .

Preuve du théorème 3.6.

1. L'équation ARMA(p, q) s'écrit $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\theta} Z$. Supposons que Φ n'a pas de racine de module 1. Alors le théorème 2.8 assure l'existence de $\alpha_\varphi^{-1} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Donc $F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z$ est solution de ARMA(p, q) car le théorème 2.6 donne

$$F_{\alpha_\varphi}(F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z) = F_{\alpha_\varphi * (\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta)} Z = F_{(\alpha_\varphi * \alpha_\varphi^{-1}) * \alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\theta} Z.$$

Le produit de convolution est commutatif, donc $\alpha = \alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta = \alpha_\theta * \alpha_\varphi^{-1}$. Réciproquement, si X est solution de ARMA(p, q) alors, comme α_φ^{-1} existe,

$$X = F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z$$

par le théorème 2.6. On peut aussi utiliser le théorème 2.11 d'identifiabilité.

2. Supposons qu'un processus linéaire $F_\alpha Z$ avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ soit solution de ARMA(p, q). Alors par théorème 2.6 de composition des filtres,

$$F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\varphi}(F_\alpha Z) = F_{\alpha * \alpha_\varphi} Z,$$

puis par le théorème 2.11 d'identifiabilité, $\alpha * \alpha_\varphi = \alpha_\theta$. Comme $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, par le lemme 2.7, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$,

$$P_\alpha(z)\Phi(z) = P_\alpha(z)P_{\alpha_\varphi}(z) = P_{\alpha * \alpha_\varphi}(z) = P_{\alpha_\theta}(z) = \Theta(z).$$

Donc toute racine de Φ de module 1 est également racine de Θ .

□

Remarque 3.7 : Fraction rationnelle d'un ARMA

La suite $\alpha = \alpha_\theta * \alpha_\varphi^{-1}$ de la solution $F_\alpha Z$ de ARMA(p, q) est liée au développement en série de la **fraction rationnelle** Θ/Φ . En effet, si Φ n'a pas de racine de module 1, alors la preuve du théorème 2.8 dit qu'il existe une couronne $D(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ contenant le cercle unité, ne contenant aucune racine de Φ , telle que

$$\forall z \in D(r, R), \quad \frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{P_{\alpha_\varphi}(z)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_\varphi^{-1})_k z^k,$$

et ce développement en série de puissances est absolument convergent. Par conséquent,

en effectuant un produit de Cauchy, on obtient, pour tout $z \in D(r, R)$,

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} &= \frac{P_{\alpha_\theta}(z)}{P_{\alpha_\varphi}(z)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta)_k z^k \right) \left(\sum_{k' \in \mathbb{Z}} (\alpha_\varphi^{-1})_{k'} z^{k'} \right) \\ &= \sum_{k, k' \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta)_k (\alpha_\varphi^{-1})_{k'} z^{k+k'} \\ &\stackrel{h=k+k'}{=} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta)_k (\alpha_\varphi^{-1})_{h-k} \right) z^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta * \alpha_\varphi^{-1})_h z^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h z^h.\end{aligned}$$

Cela revient à exploiter la décomposition en éléments simples de Θ/Φ . Deux équations ARMA(p, q) qui admettent une solution stationnaire et qui ont la même **fraction rationnelle** ont la même solution. Cela permet d'éliminer les racines communes de Θ et Φ par simplification, et conduit à une équation ARMA **irréductible**.

Remarque 3.8 : Présence de racines de module 1

Si $\Phi = P_{\alpha_\varphi}$ possède des racines de module 1, alors l'équation ARMA(p, q) ne possède pas en général de solution stationnaire, comme le montre un AR(1) avec $|\varphi_1| = 1$.

3.3 ARMA causal et inversible

D'après la définition 2.5, un filtre $X = F_\alpha Z$ de Z est qualifié de **causal** ssi $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$. Il est qualifié d'**inversible** ssi Z est un filtre causal de X , c'est-à-dire ssi il existe $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $Z = F_\beta X$ avec $\beta_k = 0$ pour tout $k < 0$.

Théorème 3.9 : Causalité et inversibilité des ARMA

Considérons une équation ARMA(p, q) $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\theta} Z$ et ses polynômes $\Phi = P_{\alpha_\varphi}$ et $\Theta = P_{\alpha_\theta}$. On suppose que Φ n'a pas de racines de module 1, ce qui assure l'existence d'une solution stationnaire unique $X = F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z$ (théorème 3.6). Alors

- la solution X est causale si Φ n'a pas de racine de module ≤ 1 ;
- la solution X est inversible si Θ n'a pas de racine de module ≤ 1 .

Note : comment se souvenir de la condition qui assure la causalité ? La méthode la plus efficace est de refaire la preuve, qui est courte et simple !

Remarque 3.10 : Causalité, inversibilité, et fraction rationnelle

La condition suffisante de causalité donnée par le théorème 3.9 ne constitue pas une condition nécessaire. En effet, comme l'unique solution stationnaire de l'équation

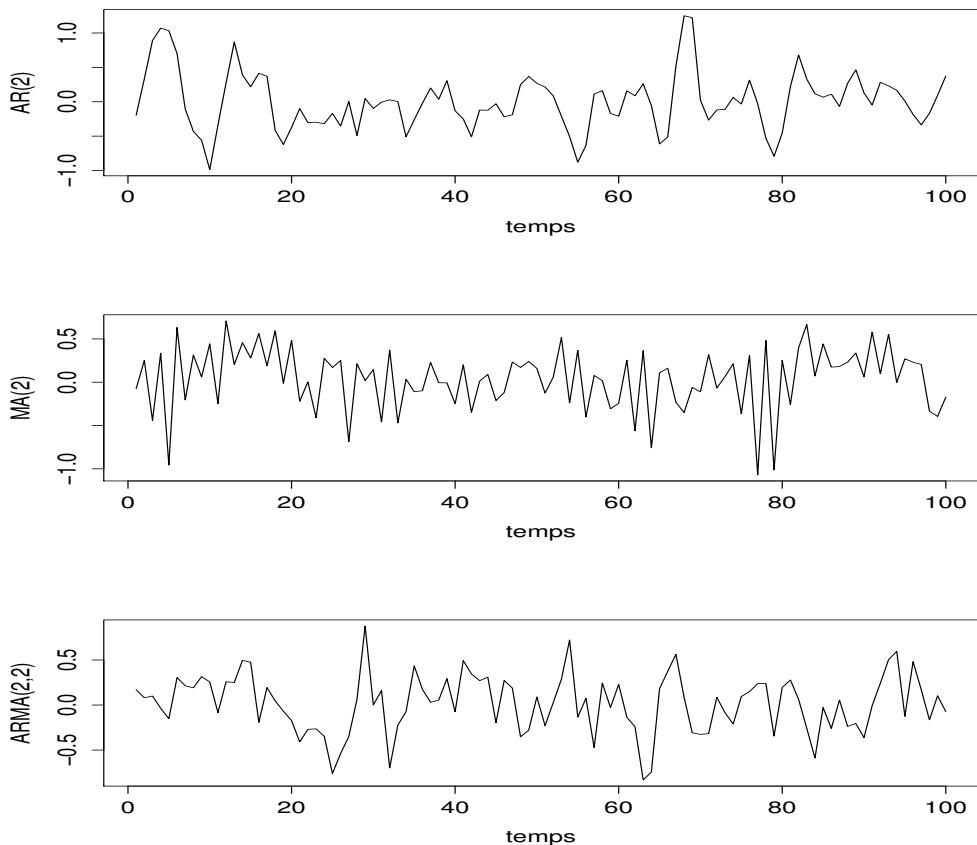


FIGURE 3.1 – Simulation de trajectoires de processus AR(2), MA(2), et ARMA(2,2).

Trajectoires simulées de processus AR, MA, ARMA, avec le code GNU-R ci-dessous.

```
require("stats") # en général déjà installé
serie = arima.sim(n=100,list(ar = c(0.8, -0.4), ma = c(-0.2, 0.2)), sd = 0.3)
plot.ts(serie,xlab="temps",ylab="ARMA(2,2)")
serie = arima.sim(n=100,list(ar = c(0.8, -0.4)), sd = 0.3)
plot.ts(serie,xlab="temps",ylab="AR(2)")
serie = arima.sim(n=100,list(ma = c(-0.2, 0.2)), sd = 0.3)
plot.ts(serie,xlab="temps",ylab="MA(2)")
```

3. PROCESSUS ARMA (x1.5)

ARMA ne dépend que de la fraction rationnelle Θ/Φ autour du cercle unité, c'est la forme irréductible $\tilde{\Theta}/\tilde{\Phi}$ qui importe, obtenue après simplification des racines communes à Θ et Φ (attention aux multiplicités). Ainsi si $\tilde{\Phi}$ (respectivement $\tilde{\Theta}$) ne s'annule pas sur le disque unité alors la solution est causale (respectivement inversible).

Démonstration. Le processus X est causal ssi $\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta$ est porté par \mathbb{N} . Si Φ n'a pas de racine de module ≤ 1 , alors, d'après le théorème 2.8, α_φ^{-1} est porté par \mathbb{N} , et comme α_θ est porté par \mathbb{N} (Θ est un polynôme), on en déduit que $\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta$ est porté par \mathbb{N} .

Le processus X est inversible ssi α_θ est inversible pour $*$ dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ et $\alpha_\theta^{-1} * \alpha_\varphi$ est porté par \mathbb{N} . Si Θ n'a pas de racine de module ≤ 1 , alors, d'après le théorème 2.8, α_θ^{-1} existe et est porté par \mathbb{N} , et comme α_φ est porté par \mathbb{N} (Φ est un polynôme), on en déduit que $\alpha_\theta^{-1} * \alpha_\varphi$ est porté par \mathbb{N} . \square

Remarque 3.11 : Résolution pratique des ARMA inversibles

La résolution pratique des ARMA(p, q) inversible peut être menée grâce à la remarque 2.10. En effet, on résout en ξ le système

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k z^k \right) (1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$$

en identifiant les coefficients, ce qui donne dans le cas causal le système triangulaire

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \theta_0 = 1 \\ -\xi_0 \varphi_1 + \xi_1 &= \theta_1 \\ -\xi_0 \varphi_2 - \xi_1 \varphi_1 + \xi_2 &= \theta_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note : si P_{α_φ} divise P_{α_θ} (c'est-à-dire que si z_j est racine de P_{α_φ} de multiplicité m_j alors elle est aussi racine de P_{α_θ} de multiplicité $\geq m_j$) alors P_ξ est un polynôme. Dans le cas contraire, P_ξ n'est pas un polynôme et contient des puissances de z de degré arbitrairement grand. Exemple : la solution de ARMA(1, 1) quand $|\varphi_1| < 1$ est donnée par $P_\xi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_1 + \theta_1) \varphi_1^k z^k$, qui vérifie bien $(1 - \varphi_1 z) P_\xi(z) = 1 + \theta_1 z$. Ici, P_{α_φ} divise P_{α_θ} ssi $-1/\theta_1 = 1/\varphi_1$, c'est-à-dire ssi $P_\xi(z) = 1$ (et on a $P_{\alpha_\varphi} = P_{\alpha_\theta}$).

Exemple 3.12 : Tiré de l'examen final de janvier 2014

On considère un $\text{BB}(0, \sigma^2)$ Z et l'équation ARMA(1, 1)

$$X_t = Z_t + 2Z_{t-1} + (1/2)X_{t-1}.$$

- **Solution stationnaire, causalité, invertibilité.** Comme $\Phi(z) = 1 - (1/2)z$ a une seule racine, 2, de module > 1 . L'équation admet donc une unique solution stationnaire, causale, de la forme $X = F_\alpha Z$ (processus linéaire) avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$. D'autre part, $\Theta(z) = 1 + 2z$ admet une unique racine, $-1/2$, de module < 1 , mais cela ne signifie pas que la solution n'est

pas inversible. Pour calculer α , comme $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$, il suffit de résoudre le système triangulaire

$$(1 - (1/2)z)(\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots) = 1 + 2z,$$

c'est-à-dire $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 - (1/2)\alpha_0 = 2$, $\alpha_k - (1/2)\alpha_{k-1} = 0$ pour tout $k \geq 2$, ce qui donne $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2 + 1/2 = 5/2$, $\alpha_k = 5(1/2)^k$ pour tout $k \geq 1$.

Alternativement, on peut développer la **fraction rationnelle** de l'équation : comme $|(1/2)z| = 1/2 < 1$ pour $|z| = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} &= \frac{1+2z}{1-(1/2)z} \\ &= (1+2z) \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k z^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} ((1/2)^k + 2(1/2)^{k-1}) z^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 5(1/2)^k z^k;\end{aligned}$$

Il est agréable de vérifier qu'on a bien $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (série géométrique convergente).

Il est aussi judicieux de vérifier la formule pour $z = 1$, ce qui donne $6 = 6$;

- **Autocovariance.** Si α est tel que $X = F_\alpha Z$, alors, d'après le théorème de filtrage des processus stationnaires, pour $h \geq 0$,

$$\begin{aligned}\gamma_X(h) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+j-k) \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{h+j} \\ &= \sigma^2 (\alpha_h + \sum_{j=1}^{\infty} 25(1/2)^{2j+h}) \\ &= \sigma^2 (1_{h=0} + 5(1/2)^{|h|} 1_{|h| \neq 0} + (25/3)(1/2)^{|h|}).\end{aligned}$$

Ainsi, $\gamma_X(h) \rightarrow 0$ exponentiellement vite quand $|h| = |t-s| \rightarrow \infty$.

Exemple 3.13 : Inspiré des examens de septembre et novembre 2015

Cet exemple contient l'exemple 3.12. Soit l'équation ARMA(1,1)

$$X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$$

où φ et θ sont des réels. Sa fraction rationnelle est

$$R(z) := \frac{\Theta(z)}{\varphi(z)} = \frac{1+\theta z}{1-\varphi z}.$$

Le polynôme $\varphi(z) = 1 - \varphi z$ a une unique racine $1/\varphi$ de module $1/|\varphi|$. Le polynôme $\Theta(z) = 1 + \theta z$ a une unique racine $-1/\theta$ de module $1/|\theta|$.

— **Condition suffisante d'existence de solution stationnaire.** D'après le théorème 3.6, si φ ne s'annule pas sur le cercle unité (c'est-à-dire que $|\varphi| \neq 1$) alors il existe une unique solution stationnaire X qui est un filtre de Z , donné par $F_\psi Z$ où ψ est le développement en série de puissances de z sur le cercle unité de la fraction rationnelle $z \mapsto R(z)$.

— **Calcul de la solution quand $|\varphi| < 1$.** Si $|z| = 1$ alors $|\varphi z| < 1$ et $1/(1 - \varphi z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k z^k$, d'où

$$\frac{1 + \theta z}{1 - \varphi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k z^k + \theta z \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{k-1} (\varphi + \theta) z^k$$

d'où

$$\psi_k = \mathbf{1}_{k=0} + \varphi^{k-1} (\varphi + \theta) \mathbf{1}_{k>0}.$$

— **Calcul de la solution quand $|\varphi| > 1$.** Si $|z| = 1$ alors $|(\varphi z)^{-1}| < 1$ et

$$\frac{1}{1 - \varphi z} = -\frac{1}{\varphi z} \frac{1}{1 - (\varphi z)^{-1}} = -\frac{1}{\varphi z} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{-k} z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{-k} z^{-k}.$$

et donc

$$\frac{1 + \theta z}{1 - \varphi z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{-k} z^{-k} - \theta z \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{-k} z^{-k} = -\theta \varphi^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{-k-1} (\varphi + \theta) z^{-k}$$

d'où

$$\psi_k = -\theta \varphi^{-1} \mathbf{1}_{k=0} + \varphi^{k-1} (\varphi + \theta) \mathbf{1}_{k<0}.$$

Dans les deux cas, $F_\varphi^{-1} \circ F_\theta = F_\psi$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k Z_{t-k}$$

(note : $X = Z$ si $\varphi + \theta = 0$), et l'autocovariance vaut, pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\psi Z}(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{h+j}.$$

Enfin, le processus X est causal lorsque Φ ne s'annule pas sur le disque unité (c'est-à-dire que $|\varphi| < 1$). Lorsque Θ ne s'annule pas sur le disque unité (c'est-à-dire que $|\theta| < 1$) alors X est inversible.

— **Étude du cas dégénéré $|\varphi| = 1$.** Le théorème 3.6 ne s'applique pas. On procède comme lors de l'étude de l'équation AR(1). Pour tous φ et θ , l'utilisation

récursive de $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}$ donne, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1} \\ &= \varphi(\varphi X_{t-2} + Z_{t-1} + \theta Z_{t-2}) + X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1} \\ &= \varphi^2 X_{t-2} + Z_t + (\varphi + \theta) Z_{t-1} + \varphi \theta Z_{t-2} \\ &\vdots \\ &= \varphi^n X_{t-n} + Z_t + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{k-1} (\varphi + \theta) Z_{t-k} + \varphi^{n-1} \theta Z_{t-n}. \end{aligned}$$

On retrouve l'expression de la solution stationnaire quand $|\varphi| < 1$ (une récurrence inversée conduit à la solution du cas $|\varphi| > 1$). D'autre part, si X est solution stationnaire, le calcul de la variance des deux membres de l'équation

$$X_t - \varphi^n X_{t-n} = Z_t + (\varphi + \theta) \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{k-1} Z_{t-k} + \varphi^{n-1} \theta Z_{t-n}$$

donne

$$(1 + \varphi^{2n})\gamma_X(0) - 2\varphi^n\gamma_X(n) = \sigma^2 + \sigma^2(\varphi + \theta)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{2(k-1)} + \sigma^2 \varphi^{2(n-1)} \theta^2.$$

Or si $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$ alors on obtient une contradiction lorsque $n \rightarrow \infty$: le membre de gauche reste borné tandis que le membre de droite tend vers l'infini. Il n'y a donc pas de solution stationnaire lorsqu'à la fois $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$. D'un autre côté si $\varphi + \theta = 0$ alors $X = Z$ est solution stationnaire.

3.4 Autocovariance d'un ARMA

D'après le résultat suivant, la fonction d'autocovariance d'un processus ARMA décroît exponentiellement : ces processus ne sont donc pas de bons modèles pour les **séries temporelles à mémoire longue**, dont l'autocovariance n'a pas ce comportement.

Théorème 3.14 : Autocovariance des ARMA

Si X est la solution stationnaire causale de ARMA(p, q) fournie par le théorème 3.6 avec $\Phi = P_{\alpha_\varphi}$ sans racines de module ≤ 1 , alors l'autocovariance de X décroît exponentiellement : il existe des constantes $0 \leq \rho < 1$ et $C > 0$ telles que

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad |\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h}|.$$

Démonstration. On a $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha = \alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta$. Comme P_{α_φ} n'a pas de racines de module ≤ 1 , les coefficients de α_φ^{-1} proviennent de la superposition d'un nombre fini de séries de puissances géométriques portées par \mathbb{N} . Il existe donc des constantes $C > 0$ et $0 \leq \rho < 1$ telles que $|\alpha_k| \leq C\rho^k$ pour tout $k \geq 0$, tandis que $\alpha_k = 0$ si $k < 0$ (car le processus est causal). À présent, l'exemple 2.3 donne, pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_{j+h} = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+h}.$$

Il en découle que pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$|\gamma_X(h)| \leq \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} C^2 \rho^{2j+|h|} = \frac{\sigma^2 C^2 \rho^{|h|}}{1 - \rho^2} = \mathcal{O}(\rho^{|h|}).$$

□

6→7

3.5 Compléments

Remarque 3.15 : Linéarité des équations ARMA

Considérons l'équation ARMA(p, q) $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\theta} Z$ en $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, où $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$. Il est possible de concevoir X et Z comme deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^\mathbb{Z}$, c'est-à-dire comme des vecteurs aléatoires infinis dont les composantes sont indiquées par l'ensemble \mathbb{Z} . L'équation ARMA s'écrit alors matriciellement

$$M^{(\varphi)} X = M^{(\theta)} Z$$

où $M^{(\varphi)} = (M_{t,k}^{(\varphi)})_{t,k \in \mathbb{Z}}$ et $M^{(\theta)} = (M_{t,k}^{(\theta)})_{t,k \in \mathbb{Z}}$ sont des matrices infinies, triangulaires inférieures, bande-diagonales (de largeur de bande $p + 1$ et $q + 1$), de Toeplitz :

$$M_{t,k}^{(\varphi)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = t \\ -\varphi_k & \text{si } k \in \{t-1, \dots, t-p\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$M_{t,k}^{(\theta)} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = t \\ \theta_k & \text{si } k \in \{t-1, \dots, t-q\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(elles seraient inversibles si elles étaient finies!). Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} M_{t,k}^{(\varphi)} X_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} M_{t,j}^{(\theta)} Z_j.$$

On veut résoudre cette équation dans l'espace vectoriel \mathcal{S}_2 des processus stationnaires. La linéarité de l'équation fait que si X et X' sont deux solutions alors $X - X'$ est solution de l'équation sans second membre $M^{(\varphi)} X = 0$. En général cette équation sans second membre n'a, dans \mathcal{S}_2 , qu'une seule solution qui est identiquement nulle, d'où l'unicité (si existence), dans \mathcal{S}_2 , de la solution de l'équation avec second membre.

Remarque 3.16 : Filtrage exponentiel et AR(∞)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |\lambda| < 1$ et soit $\varphi_k = -\lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit Z un $\text{BB}(0, \sigma^2)$.

Recherchons un processus linéaire solution de l'équation AR(∞) suivante

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k}.$$

Ici $\Theta(z) = 1$ mais $\Phi(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k = 1/(1 - \lambda z)$ (pour $|\lambda z| < 1$) n'est pas un polynôme. L'équation $\Phi(z) = 0$ en z n'a pas de solution. De plus, on a la formule $\Theta(z)/\Phi(z) = 1 - \lambda z$ ce qui suggère la solution $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$. On vérifie immédiatement que ce processus MA(1) est bien solution de notre équation AR(∞) :

$$Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k Z_{t-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} Z_{t-1-k} = Z_t - \lambda Z_{t-1} = X_t.$$

Nous savions qu'un AR(1) causal est un MA(∞). Nous avons le cas dual ici : un AR(∞) causal est un MA(1). Plus généralement, l'analyse des ARMA(∞, ∞) peut être menée en étudiant les suites sommables à support infini au moyen de concepts et d'outils d'analyse complexe comme les fonctions méromorphes et les séries de Laurent.

Il n'y a aucune différence entre d'une part un théorème démontré du cours et d'autre part un exercice corrigé des travaux dirigés. Ici comme ailleurs, il est conseillé de chercher à comprendre plutôt que d'apprendre par cœur.

Analyse spectrale (x2)

Mots-clés : mesure spectrale ; densité spectrale ; représentation isospectrale.

Nous savons (théorème 1.17) que les fonctions d'autocovariance des processus stationnaires sont les fonctions **symétriques de type positif**, et cela provient de la structure Toeplitz de la covariance, elle même conséquence de la stationnarité. Le théorème de Herglotz (théorème 4.6), au centre de ce chapitre, affirme que les fonctions d'autocovariance sont les **coefficients de Fourier** des mesures positives finies paires. Cette bijection apporte un nouveau point de vue très utile sur les processus stationnaires.

Dans ce chapitre, nous effectuons l'analyse spectrale d'un signal, et ce signal est la fonction d'autocovariance, et non pas le processus stationnaire lui-même. Cela permet au passage de comprendre enfin le sens exact des termes «filtrage» et «bruit blanc». Mais nous allons voir que cela permet surtout de construire pour presque tout processus ARMA un processus ARMA causal et inversible de même autocovariance! (théorème 4.15).

4.1 Coefficients de Fourier

Les mesures positives finies sont une généralisation des fonctions positives intégrables. De même, les mesures signées finies sont une généralisation des fonctions intégrables. Plus précisément, si ν_1 et ν_2 sont deux **mesures positives finies** sur $[-\pi, \pi]$, on dit que leur différence $\nu = \nu_1 - \nu_2$ est une **mesure signée finie**. Pour toute fonction «test» mesurable bornée $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\int \varphi d\nu = \int \varphi d\nu_1 - \int \varphi d\nu_2$. On a $L^1(\nu) = L^1(\nu_1) \cap L^1(\nu_2)$.

Pour tout $h \in \mathbb{Z}$, on note $\varphi_h : u \in [-\pi, \pi] \mapsto e^{ihu} \in \mathbb{C}$, où $i := (0, 1)$. Comme $|\varphi_h| = 1$, pour toute mesure signée finie ν sur $[-\pi, \pi]$, on a $\varphi_h \in L^1_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi], d\nu)$. Dans ce chapitre, on utilise plusieurs fois le fait trigonométrique suivant : pour tous $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{[-\pi, \pi]} e^{iju} e^{-iku} du = \int_{[-\pi, \pi]} e^{i(j-k)u} du = 2\pi \mathbf{1}_{j=k}.$$

Définition 4.1 : Coefficients de Fourier

Si ν est une mesure signée finie sur $[-\pi, \pi]$ alors la suite $(\widehat{\nu}(h))_{h \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de ses **coefficients de Fourier** est définie par

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{\nu}(h) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{ihu} \nu(du) = \int \varphi_h d\nu.$$

Si $f \in L^1([-\pi, \pi], du)$ et si ν est la mesure signée finie sur $[-\pi, \pi]$ de densité f , c'est-à-dire que $d\nu(u) = f(u)du$, alors on note $\widehat{f}(h) := \widehat{\nu}(h) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{ihu} f(u) du$.

Chaque coefficient de Fourier « teste » ν sur une fonction trigonométrique. Le paramètre h est la « fréquence » de la fonction $u \mapsto \varphi_h(u) = e^{ihu} = \cos(hu) + i \sin(hu)$. Lorsque ν est positive, alors $\widehat{\nu}(0) = \nu([-\pi, \pi]) \geq 0$, ν est une probabilité ssi $\widehat{\nu}(0) = 1$, et

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad |\widehat{\nu}(h)| \leq \widehat{\nu}(0) = \nu([-\pi, \pi]).$$

Exemple 4.2 : Localisation et principe d'incertitude

- si $\nu = \delta_0$ (localisé) alors $\forall h \in \mathbb{Z}, \widehat{\nu}(h) = 1$ (délocalisé) ;
- si $\nu = \text{Unif}([-\pi, \pi])$ (délocalisé), alors $\forall h \in \mathbb{Z}, \widehat{\nu}(h) = \mathbf{1}_{h=0}$ (localisé).

On voit sur ces deux exemples extrêmes que si ν est localisée dans l'espace alors $\widehat{\nu}$ ne l'est pas, et réciproquement. Plus généralement, au delà de ces deux exemples, on peut établir qu'il est impossible de localiser à la fois ν et $\widehat{\nu}$ au delà d'un certain seuil absolu, phénomène connu sous le nom de principe d'incertitude en analyse harmonique ^a.

^{a.} En mécanique quantique, la position et l'impulsion sont liées à des opérateurs associés par une transformation de Fourier, ce qui conduit au principe d'incertitude de Heisenberg.

Le théorème suivant affirme que les coefficients de Fourier caractérisent la mesure.

Théorème 4.3 : Injectivité de la suite des coefficients de Fourier

Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures signées finies sur $[-\pi, \pi]$ vérifiant $\widehat{\nu}_1 = \widehat{\nu}_2$ alors $\nu_1 = \nu_2$.

Démonstration. L'intervalle $K = [-\pi, \pi]$ est compact. Soit $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ l'espace de Banach des fonctions continues $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ muni de la norme uniforme $\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [-\pi, \pi]} |f(t)|$. Le théorème de densité de Stone-Weierstrass affirme que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ est dense lorsque

- \mathcal{A} est une algèbre (stable par combinaisons linéaires finies et multiplication) ;
- \mathcal{A} est stable par conjugaison, et contient les constantes ;
- \mathcal{A} sépare les points : $\forall x \neq y \in K, \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$.

L'algèbre engendrée par les fonctions trigonométriques $\{u \in [-\pi, \pi] \mapsto e^{ihu} : h \in \mathbb{Z}\}$, dont les éléments sont appelés **polynômes trigonométriques**, vérifie ces conditions. Donc si $\widehat{\nu}_1 = \widehat{\nu}_2$ alors ν_1 et ν_2 coïncident sur \mathcal{A} en tant que formes linéaires continues et donc sur $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ par densité. En effet, pour tout $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(K)$ et tout $\varepsilon > 0$, la densité nous dit qu'il existe $f_{\varepsilon} \in \mathcal{A}$ tel que $\|f - f_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq \varepsilon$:

$$\int f d(\nu_1 - \nu_2) = \underbrace{\int (f - f_{\varepsilon}) d(\nu_1 - \nu_2)}_{\mathcal{O}(\varepsilon)} + \underbrace{\int f_{\varepsilon} d(\nu_1 - \nu_2)}_{=0 \text{ car } \widehat{\nu}_1 = \widehat{\nu}_2},$$

où $\int g d(\nu_1 - \nu_2) := \int g d\nu_1 - \int g d\nu_2$. Comme ε est arbitrairement petit, le tour est joué. \square

Intuitivement, on s'attend à un lien entre la régularité de ν et le comportement à l'infini de $\widehat{\nu}$ (hautes fréquences). Dans cet esprit, le théorème suivant affirme qu'une mesure à coefficients de Fourier sommables possède toujours une densité.

Théorème 4.4 : Critère de densité et formule d'inversion

Si ν est une mesure signée finie sur $[-\pi, \pi]$ telle que $\widehat{\nu} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ alors ν admet une densité $f = \frac{d\nu}{du} \in L^1([-\pi, \pi], du)$ continue donnée pour presque tout $u \in [-\pi, \pi]$ par la série absolument convergente suivante (appelée **formule d'inversion**) :

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-iuh} \widehat{\nu}(h).$$

De plus $f \geq 0$ ssi ν est une mesure positive.

Note : exemple de non sommabilité : si $\nu = \delta_0$ alors $\widehat{\nu} = 1 \notin \ell^1(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Comme $\widehat{\nu} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, la série définissant $f(u)$ est absolument convergente, uniformément bornée par $\|\widehat{\nu}\|_1$, et $f \in L^1([-\pi, \pi], du)$. La fonction f définit une mesure signée $f(u)du$ finie sur $[-\pi, \pi]$. Notons que f est réelle car $\widehat{\nu}$ est **hermitienne** :

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \overline{\widehat{\nu}(h)} = \widehat{\nu}(-h).$$

De plus la mesure ν est paire si et seulement si sa densité f est paire, et alors la transformée de Fourier $\widehat{\nu} = \widehat{f}$ est paire et réelle. Enfin, le théorème de Fubini–Tonelli donne

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{f}(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iuh} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-iuk} \widehat{\nu}(k) du = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\nu}(k) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{iu(h-k)} du}_{2\pi \mathbf{1}_{h=k}} = \widehat{\nu}(h).$$

Donc $\widehat{f} = \widehat{\nu}$, et donc $f(u)du = d\nu(u)$ par le théorème 4.3 d'injectivité. La somme de la série définissant f est la limite uniforme de fonctions continues sur $[-\pi, \pi]$ (série de fonctions normalement convergente), c'est donc une fonction continue sur $[-\pi, \pi]$. Enfin, la fonction f est ≥ 0 presque partout en tant que densité, et donc partout par continuité. \square

Théorème 4.5 : Paul Lévy – Critère de convergence

Si $(\nu_n)_{n \geq 1}$ est une suite de **mesures de probabilité** sur $[-\pi, \pi]$ telles que

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\nu_n}(h) = \varphi(h) \in \mathbb{C},$$

alors il existe une **mesure de probabilité** ν sur $[-\pi, \pi]$ telle que

$$\varphi = \widehat{\nu},$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \nu$ étroitement : pour toute $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\nu_n = \int g d\nu.$$

Preuve (facultative). On prolonge chaque ν_n en une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . Comme $[-\pi, \pi]$ est compact et contient $\text{supp}(\nu_n)$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(\nu_n)_{n \geq 1}$ est tendue : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $\sup_n \nu_n(K^c) \leq \varepsilon$. Il en découle grâce au théorème de Prohorov que $(\nu_n)_{n \geq 1}$ est relativement compacte pour la topologie de la

convergence étroite (qui est métrisable). Ainsi, $(\nu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement si elle admet une unique valeur d'adhérence pour la convergence étroite (qui est nécessairement une mesure de probabilité portée par $[-\pi, \pi]$). Or cette unicité découle de l'hypothèse faite sur les transformées de Fourier grâce au théorème 4.3 d'injectivité : les limites des sous-suites de $(\nu_n)_{n \geq 1}$ qui convergent étroitement ont toutes la même transformée de Fourier φ . \square

4.2 Théorème de Herglotz

Théorème 4.6 : Herglotz – Mesure spectrale et densité spectrale

Pour tout $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. γ est symétrique de type positif :

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma(-h) = \gamma(h) \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \forall v \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_j v_k \gamma(j-k) \geq 0;$$

2. $(\gamma(h))_{h \in \mathbb{Z}}$ sont les coefficient de Fourier d'une **mesure positive finie** ν sur $[-\pi, \pi]$. En particulier ν est **paire** et $\gamma(0) = \nu([-\pi, \pi])$ car

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma(h) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{ihu} \nu(du) \in \mathbb{R}.$$

Lorsque ces propriétés ont lieu, la mesure ν est unique, et est appelée **mesure spectrale** (sa densité $f = d\nu/du$, si elle existe, est appelée **densité spectrale**).

Lorsque ces propriétés ont lieu, et si de plus $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors la densité spectrale $f = d\nu/du$ existe et est donnée par la série (uniformément convergente en u)

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{-ihu},$$

et cette fonction est paire et continue.

Note : la parité de ν fait écho à la nature réelle symétrique de γ

Note : comme f est paire on peut remplacer e^{-ihu} par e^{ihu} dans la formule.

Note : la somme qui définit f est réelle car comme γ est **hermitienne** (car réelle symétrique), on en déduit que pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$\overline{\sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{-ihu}} = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(-h) e^{ihu} = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{-ihu}.$$

Exemple 4.7 : Densité spectrale d'un MA(1)

Si $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ est un MA(1) avec $Z \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$, alors son autocovariance est donnée par $\gamma_X = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_0 + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{\pm 1} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et sa densité spectrale est donnée par $f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \{0, \pm 1\}} \gamma_X(h) e^{-ihu} = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1 + \theta^2 + 2\theta \cos(u))$ pour tout $u \in [-\pi, \pi]$.

Démonstration du théorème 4.6. Montrons que $2 \Rightarrow 1$. Supposons que $\gamma = \widehat{\nu}$ pour une mesure positive finie ν sur $[-\pi, \pi]$. Comme $\widehat{\nu}$ est hermitienne, dire que $\widehat{\nu}$ est réelle est

équivalent à dire que $\widehat{\nu}$ est symétrique. Or comme la fonction γ est par définition réelle et $\widehat{\nu} = \gamma$, on en déduit que γ est symétrique (ce qui implique que ν est paire). Pour établir que γ est de type positif, on observe que pour tous $n \geq 1$ et $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_j v_k \gamma(j-k) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_j e^{iju} v_k e^{-iku} \nu(du) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n v_j e^{iju} \right|^2 \nu(du) \geq 0.$$

Montrons que $1 \Rightarrow 2$. Soit $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique de type positif. Dans la définition de **7→8** positivité, on peut remplacer $v \in \mathbb{R}^n$ par $v \in \mathbb{C}^n$ et $v_j v_k$ par $v_j \overline{v_k}$, car si $v, v' \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j,k=1}^n (v_j + i v'_j)(\overline{v_k + i v'_k}) \gamma(j-k) = \underbrace{\sum_{j,k=1}^n (v_j v_k + v'_j v'_k) \gamma(j-k)}_{\geq 0} + i \underbrace{\sum_{j,k=1}^n (v'_j v_k - v_j v'_k) \gamma(j-k)}_{=0}.$$

Recherchons la mesure positive finie ν . On ne peut pas utiliser le théorème 4.4 car la condition $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ n'est pas forcément vérifiée. On peut malgré tout s'inspirer du théorème 4.4 : pour tout $n \geq 1$ et $u \in [-\pi, \pi]$, soit,

$$f_n(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n e^{-iju} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{iku} \gamma(j-k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{1}{n} e^{-i(j-k)u} \gamma(j-k).$$

Comme γ est de type positif, on a $f_n(u) \geq 0$ (prendre $v_j = e^{-iju}$). Comme la quantité sous le signe somme ne dépend que de $\ell = j - k$, on a (dessin !)

$$f_n(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-n+1}^{n-1} \frac{\text{card}\{(j, k) : j - k = \ell\}}{n} e^{-i\ell u} \gamma(\ell) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-n+1}^{n-1} \frac{n - |\ell|}{n} e^{-i\ell u} \gamma(\ell).$$

Soit ν_n la mesure positive de densité $f_n = \frac{d\nu_n}{du}$. On a, pour tout $h \in \mathbb{Z}$ avec $|h| \leq n$,

$$\begin{aligned} \widehat{\nu_n}(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihu} f_n(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|\ell|}{n}\right) \gamma(\ell) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ihu} e^{-i\ell u} du}_{= 2\pi \mathbf{1}_{h=\ell}} \\ &= \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h). \end{aligned}$$

En posant $\widehat{\nu_n}(h) = 0$ si $|h| > n$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\nu_n} = \gamma$ ponctuellement sur \mathbb{Z} . Notons que $\nu_n([- \pi, \pi]) = \widehat{\nu_n}(0) = \gamma(0)$. Si $\gamma(0) = 0$ alors $\gamma = 0$ et on peut prendre $\nu = 0$. Si $\gamma(0) > 0$, alors on se ramène par dilatation au cas où $\gamma(0) = 1$ et on obtient par le théorème 4.5 de Paul Lévy qu'il existe une mesure de probabilité ν telle que $\gamma = \widehat{\nu}$ et $\nu_n \rightarrow \nu$ étroitement.

L'unicité de ν découle du théorème 4.3, et la densité du théorème 4.4. \square

4.3 Mesure spectrale d'un processus stationnaire

Définition 4.8 : Mesure/densité spectrale d'un processus stationnaire

Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire d'autocovariance γ_X alors la **mesure spectrale** de X , notée ν_X , est la mesure positive de transformée de Fourier γ_X fournie par le théorème 4.6 de Herglotz. De même, si $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors la **densité spectrale**

de X , notée f_X , est la densité de ν_X fournie par le théorème 4.6 de Herglotz.

Théorème 4.9 : Condition pratique pour être autocovariance

Si $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant les deux propriétés

- (symétrie) $\forall h \in \mathbb{Z} : \gamma(-h) = \gamma(h)$;
- (sommabilité) $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ c'est-à-dire $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$;

alors γ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire ssi

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{-ihu} \geq 0$$

De plus, dans ce cas, le processus admet pour densité spectrale f .

Note : comme f est paire on peut remplacer e^{-ihu} par e^{ihu} dans la formule.

Démonstration. Si $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est l'autocovariance d'un processus stationnaire, alors la seconde partie du théorème 4.6 de Herglotz assure que γ possède une densité spectrale, donnée par $f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ihu} \gamma(h)$ pour tout $u \in [-\pi, \pi]$, et $f \geq 0$.

Réciproquement, si $f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ihu} \gamma(h) \geq 0$ pour tout $u \in [-\pi, \pi]$, alors $0 \leq f \in L^1([-\pi, \pi])$ car $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et f est donc la densité d'une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$. De plus, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, on a

$$\hat{f}(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihu} f(u) du = \frac{1}{2\pi} \sum_{h' \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ihu} e^{ih'u} \gamma(h') du = \gamma(h).$$

Donc par le théorème 4.6 de Herglotz, γ est symétrique de type positif, et par le théorème 1.17, γ est l'autocovariance d'un processus stationnaire de densité spectrale f . \square

Exemple 4.10 : Processus harmonique

Considérons à nouveau le **processus harmonique** de l'exemple 1.12, défini par la formule $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$ où A et B sont des variables aléatoires non corrélées de moyenne 0 et de variance σ^2 , et où $\theta \in [-\pi, \pi]$ est une constante. Nous avions calculé que $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h)$. En ce qui concerne la mesure spectrale, on a

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h) = \frac{\sigma^2}{2} (e^{-i\theta h} + e^{i\theta h}) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{ihu} \mu(du)$$

pour $\mu = \frac{\sigma^2}{2} (\delta_{-\theta} + \delta_\theta)$ (mesure de Bernoulli). La présence d'atomes fait que la densité spectrale n'existe pas. Donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$ car sinon cela contredirait le théorème de Herglotz. Notons d'ailleurs que la série $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(h)|$ diverge car $|\cos(\theta h)| \not\rightarrow 0$ (facile à voir quand $\theta \in \mathbb{Q}\pi$) et donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$.

Remarque 4.11 : Localisation spectrale et mémoire

Si $\nu_X = \delta_0$ alors $\gamma_X = 1$ et donc X est à mémoire longue, tandis que si $\nu_X = du$ alors $\gamma_X = 2\pi\mathbf{1}_0$ et donc X est à mémoire courte (cf. ci-dessous l'exemple du bruit blanc).

Le théorème suivant montre en particulier que le filtrage a pour effet de modifier les poids affectés aux différentes fréquences, ce qui explique son nom.

Théorème 4.12 : Spectre et filtrage

Si X est stationnaire de mesure spectrale ν_X alors pour tout $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, la mesure spectrale $\nu_{F_\alpha X}$ du processus filtré stationnaire $F_\alpha X$ est absolument continue par rapport à ν_X , de densité $u \in [-\pi, \pi] \mapsto |P_\alpha(e^{-iu})|^2$ où

$$P_\alpha(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j z^j.$$

En particulier, si X possède une densité spectrale f_X alors $Y = F_\alpha X$ aussi et

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad f_Y(u) = |P_\alpha(e^{-iu})|^2 f_X(u).$$

Note : comme les densités spectrales sont paires on peut remplacer e^{-iu} par e^{iu} .

Note : comme α est réel on a $|P_\alpha(e^{iu})| = |\overline{P_\alpha(e^{iu})}| = |P_\alpha(\overline{e^{iu}})| = |P_\alpha(e^{-iu})|$.

Note : P_α est un polynôme ssi le support $\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\}$ est une partie finie de \mathbb{N} .

Démonstration. Par le théorème 2.2, $\gamma_{F_\alpha X}(h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_X(h + k - j)$, d'où

$$\begin{aligned} \gamma_{F_\alpha X}(h) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \int_{[-\pi, \pi]} e^{iu(h+k-j)} \nu_X(du) \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k e^{iu(h+k-j)} \nu_X(du) \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} e^{iuh} \underbrace{\left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{-iuj} \right|^2}_{\underbrace{P_\alpha(e^{-iu})}_{\nu_{F_\alpha X}(du)}} \nu_X(du). \end{aligned}$$

Note : si on avait utilisé $h + j - k$ (et pas $h + k - j$) alors on aurait eu e^{iu} (et pas e^{-iu}).

Note : si $\gamma, \alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors $h \mapsto \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma(h + j - k) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ car

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma(h + j - k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j (\alpha * \gamma)_{h+j} = (\underbrace{\alpha \ast \gamma}_{\in \ell^1(\mathbb{Z})})(h).$$

□

Exemple 4.13 : Bruits blancs et processus linéaires

Si $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$ alors $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$ et donc Z admet pour densité

spectrale la fonction constante

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto f_Z(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

En voyant chaque fréquence entre $-\pi$ et π comme une couleur, on a un poids uniforme sur toutes les couleurs, ce qui explique le terme **bruit blanc**. Si $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors d'après le théorème 4.12 le processus linéaire $F_\alpha Z$ a pour densité spectrale

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi} |P_\alpha(e^{-iu})|^2.$$

Par conséquent, si la mesure spectrale n'admet pas de densité (présence d'une partie étrangère à la mesure de Lebesgue, comme des masses de Dirac par exemple), alors il ne peut pas s'agir d'un processus linéaire, obtenu en filtrant un bruit blanc. D'un autre côté, en combinant les théorèmes 1.17 et 4.6 on obtient que toute mesure positive finie est la mesure spectrale d'un processus gaussien fortement stationnaire.

Exemple 4.14 : Densité spectrale d'un ARMA

Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p, q) solution de l'équation

$$\Phi(B)X = \Theta(B)Z \quad \text{où} \quad Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$$

et si $\Phi(z) = 1 - (\varphi_1 z + \cdots + \varphi_p z^p)$ et $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$ n'ont pas de racine commune de module 1, alors $X = F_\alpha Z$ où $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\Theta(z)/\Phi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, et donc X , en combinant l'exemple 4.13 avec le théorème 3.6, on obtient que X a pour densité spectrale

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-iu})|^2}{|\Phi(e^{-iu})|^2}.$$

Cette quantité est plus facile à manier que l'autocovariance pour les ARMA. Autrement dit, la densité spectrale d'un ARMA est proportionnelle au carré du module de sa **fraction rationnelle** sur le cercle unité. En particulier, un MA(1) d'équation $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ a pour densité spectrale

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 + \theta e^{-iu}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + 2\theta \cos(u) + \theta^2),$$

tandis qu'un AR(1) d'équation $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t$ a pour densité spectrale

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \varphi e^{-iu}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\varphi \cos(u) + \varphi^2}.$$

Pour un processus stationnaire ARMA(p, q) donné, peut-on construire un processus stationnaire ARMA(p, q), causal et inversible, de même fonction d'autocovariance ? Le théorème suivant affirme que oui, quite à changer la variance du bruit blanc. D'après le théorème 4.6 de Herglotz, deux processus stationnaires centrés ont la même fonction d'autocovariance si ils ont la même mesure spectrale. **La fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire ARMA ne dépend que du module de sa fraction**

rationnelle sur le cercle unité. L'idée est donc de construire une fraction rationnelle dont le module coïncide avec celle du processus d'origine sur le cercle unité, et dont les racines du numérateur et du dénominateur (pôles) sont de module > 1 .

Théorème 4.15 : ARMA : représentation isospectrale causale inversible

Soit X le processus linéaire solution de ARMA(p, q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où Z est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$, et où Φ et Θ n'ont pas de racines de module 1. Soient a_1, \dots, a_p et b_1, \dots, b_q les racines de Φ et Θ , avec

$$|a_1| \leq \dots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \dots \leq |a_p|$$

et

$$|b_1| \leq \dots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \dots \leq |b_q|$$

où $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$, de sorte que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^p (1 - a_j^{-1}z) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = \prod_{j=1}^q (1 - b_j^{-1}z).$$

Soient Φ_* et Θ_* les polynômes définis par

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \bar{a}_j z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1}z) \quad \text{et} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \bar{b}_j z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1}z).$$

Soit à présent Z_* un $\text{BB}(0, \sigma_*^2)$ où (avec la convention $\prod_{\emptyset} = 1$)

$$\sigma_*^2 = \sigma^2 \frac{\prod_{j=1}^r |a_j|^2}{\prod_{j=1}^s |b_j|^2}.$$

Alors Θ_* et Φ_* n'ont pas de racines de module ≤ 1 et le processus linéaire X_* solution de ARMA(p, q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ est causal et inversible, et possède la même densité spectrale (donc la même autocovariance) que le processus d'origine X .

Note : on a $\Phi_*(0) = \Theta_*(0) = 1$ grâce à la manière de prendre en compte les racines.

Démonstration (facultative). Les polynômes Φ_* et Θ_* ont pour racines respectives

$$\frac{1}{\bar{a}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{a}_r}, a_{r+1}, \dots, a_p \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{b}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{b}_s}, b_{s+1}, \dots, b_q,$$

qui sont toutes de module > 1 car l'application $z \mapsto 1/\bar{z}$ conserve l'argument et inverse le module. Par définition, on a

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j z^j = -\varphi_p \prod_{j=1}^p (z - a_j) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j z^j = \theta_q \prod_{j=1}^q (z - b_j).$$

Comme $\Phi(0) = \Theta(0) = 1$, on a $|a_1 \cdots a_p \varphi_p| = |b_1 \cdots b_q \theta_q| = 1$, et

$$|\Phi(z)| = \prod_{j=1}^p \left| \frac{z - a_j}{a_j} \right| = \prod_{j=1}^p \left| 1 - a_j^{-1}z \right| \quad \text{et} \quad |\Theta(z)| = \prod_{j=1}^q \left| \frac{z - b_j}{b_j} \right| = \prod_{j=1}^q \left| 1 - b_j^{-1}z \right|.$$

D'après l'exemple 4.14, on a, pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-iu})|^2}{|\Phi(e^{-iu})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\prod_{j=1}^q \left|1 - b_j^{-1} e^{-iu}\right|^2}{\prod_{j=1}^p \left|1 - a_j^{-1} e^{-iu}\right|^2} = \frac{\sigma_*^2}{2\pi} \frac{|\Theta_*(e^{-iu})|^2}{|\Phi_*(e^{-iu})|^2} = f_{X_*}(u),$$

où on a utilisé, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ (notons que $z^{-1} = \bar{z}$ dans ce cas!),

$$|1 - c^{-1}z| = |c|^{-1}|c - z| = |c|^{-1}|\bar{z}c - 1| = |c|^{-1}|1 - \bar{c}z|$$

pour déplacer les racines de l'intérieur vers l'extérieur du disque unité, sans perturber la valeur du module! À présent, comme les racines de Φ_* et Θ_* sont de module > 1 , le processus ARMA(p, q) X_* est causal et inversible (théorème 3.9). \square

Exemple 4.16 : Représentation causale inversible d'un processus ARMA

Considérons l'équation ARMA(1, 1) suivante où Z est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$:

$$X_t - 2X_{t-1} = Z_t + 3Z_{t-1}.$$

On a $\Phi(z) = 1 - 2z$ dont l'unique racine est $a_1 = 1/2$, et $\Theta(z) = 1 + 3z$ dont l'unique racine est $b_1 = -1/3$. L'équation ARMA(1, 1) ci-dessus a une solution X dans l'ensemble des processus linéaires d'après le théorème 3.6, mais elle n'est ni causale ni inversible d'après le théorème 3.9. D'après le théorème 4.15, $\Phi_*(z) = 1 - z/2$ et $\Theta_*(z) = 1 + z/3$, et $\sigma_*^2 = \frac{9}{4}\sigma^2$, et le processus X_* solution de l'équation ARMA(1, 1)

$$X_{*t} - \frac{1}{2}X_{*(t-1)} = Z_t + \frac{1}{3}Z_{t-1}$$

est causal et inversible et de même densité spectrale que X (donc même autocov.).

8→9

4.4 Compléments

Il existe un analogue complexe du théorème de Herglotz, dans lequel les suites γ hermitiennes de type positif sont les transformées de Fourier de mesures positives finies (plus forcément paires).

Remarque 4.17 : Symétrie

Si une mesure signée finie ν sur $[-\pi, \pi]$ est paire^a, alors $\widehat{\nu}$ est paire et réelle : $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\nu}(h) = \widehat{\nu}(-h) \in \mathbb{R}$. De même, si $f \in L^1([-\pi, \pi], du)$ est paire^b alors \widehat{f} est réelle et paire : $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(h) = \widehat{f}(-h) \in \mathbb{R}$.

- a. C.-à-d. que $\int_{[-\pi, \pi]} g(u)\nu(du) = \int_{[-\pi, \pi]} g(-u)\nu(du)$, $\forall g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée.
- b. C.-à-d. que $f(u) = f(-u)$ pour presque tout $u \in [-\pi, \pi]$.

Remarque 4.18 : Aspects hilbertiens

Soit $f \in L^2([-\pi, \pi], du) \subset L^1([-\pi, \pi], du)$. Alors on a $\widehat{f}(h) = \langle \varphi_{-h}, f \rangle$. Pour tous $h, h' \in \mathbb{Z}$, $\varphi_{-h} = \varphi_h$ et

$$\langle \varphi_h, \varphi_{h'} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_h(u) \varphi_{h'}(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i t(h-h')} du = 2\pi \mathbf{1}_{h=h'}.$$

En posant $\psi_h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi_h$, ceci montre que la famille $(\psi_h)_{h \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi], du)$. De plus, cette famille est dense dans $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi], du)$ (ceci découle par exemple du théorème de Stone-Weierstrass, cf. preuve du théorème 4.3 plus loin). Cette famille constitue donc une base hilbertienne, et l'identité de Parseval donne

$$f = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \langle \psi_h, f \rangle \psi_h = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \varphi_{-h} \widehat{f}(h).$$

La série converge dans $L^2_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi], du)$, et ponctuellement absolument si $\widehat{f} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

Remarque 4.19 : Coefficients de Fourier et transformée de Fourier

Pour une mesure finie ν sur \mathbb{R}^d , on considère en général la **transformée de Fourier** à paramètre $h \in \mathbb{R}^d$, définie par $h \in \mathbb{R}^d \mapsto \widehat{\nu}(h) = \int \varphi_h d\nu$. Le théorème de Herglotz possède un analogue pour les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dû à Bochner. Lorsque ν est définie sur l'ensemble compact $[-\pi, \pi]^d$, on peut se restreindre à un paramètre $h \in \mathbb{Z}^d$, ce qui donne la notion de **coefficients de Fourier**, et de **série de Fourier**. Dans ce cas, le théorème 4.3 d'injectivité peut être obtenu en régularisant par convolution avec une mesure gaussienne, point fixe de la transformée de Fourier, ce qui produit de la densité, puis en inversant la transformée de Fourier.

Remarque 4.20 : Séries de Fourier

Le théorème 4.4 fournit une condition suffisante pour la reconstruction de fonction intégrable à partir de ses coefficients de Fourier : si $f \in L^1([-\pi, \pi], du)$ vérifie $\widehat{f} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, alors pour presque tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-iuh} \widehat{f}(h).$$

La série du membre de droite (on parle de **série de Fourier**) converge absolument. Cette formule exprime f comme une superposition (un mélange) de fonctions trigonométriques élémentaires $u \mapsto e^{ihu} = \cos(hu) + i \sin(hu)$, où h joue le rôle d'une fréquence (couleur), d'où les termes **synthèse spectrale** et **analyse harmonique**. Cette représentation permet d'effectuer un filtrage, consistant à éliminer certaines fréquences ou plages de fréquences (filtre passe-haut, passe-bas, passe-bande, etc).

Théorème 4.21 : Lemme de Riemann-Lebesgue

Si $f \in L^1([-\pi, \pi], du)$ alors

$$\lim_{|h| \rightarrow \infty} \widehat{f}(h) = 0.$$

Note : $f \in L^1([-\pi, \pi], du) \mapsto \widehat{f} \in \{\alpha \in \mathbb{C}^\mathbb{Z} : \lim_{|h| \rightarrow \infty} \alpha_h = 0\}$ n'est pas surjective, cf. théorème 5.15 p. 99 du livre d'analyse réelle et complexe de Rudin.

Démonstration. D'après la preuve du théorème 4.3, l'ensemble \mathcal{T} des polynômes trigonométriques est dense, pour $\|\cdot\|_\infty$, dans l'ensemble $C([- \pi, \pi])$ des fonctions continues sur $[- \pi, \pi]$. Par ailleurs, $C([- \pi, \pi])$ est dense, pour $\|\cdot\|_1$, dans $L^1([-\pi, \pi], du)$. Or $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$, et donc \mathcal{T} est dense, pour $\|\cdot\|_1$, dans $L^1([-\pi, \pi], du)$. Ainsi, pour tout $f \in L^1([-\pi, \pi], du)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $P = P_{f, \varepsilon} \in \mathcal{T}$ tel que $\|f - P\|_1 \leq \varepsilon$. Or pour tout $h \in \mathbb{Z}$ avec $|h| > \deg(P)$, on a $\langle e^{iuh}, P \rangle = 0$ et donc

$$|\widehat{f}(h)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{itu} (f(u) - P(u)) du \right| \leq \|f - P\|_1 \leq \varepsilon.$$

□

Remarque 4.22 : Fourier et convolution

Le passage en Fourier transforme la convolution en produit. Il est possible de le voir sur les mesures ou sur les fonctions. Si par exemple f et g sont deux fonctions intégrables sur $[-\pi, \pi]$, prolongées par périodicité à tout \mathbb{R} , alors leur convolution $f_1 * f_2$, définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ par

$$(f_1 * f_2)(u) = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(v) f_2(u - v) dv,$$

est une fonction intégrable sur $[-\pi, \pi]$, et $\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1} \widehat{f_2}$. En effet, grâce au théorème de Fubini-Tonelli (◊) et par périodicité (◊◊), pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \widehat{f_1 * f_2}(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{iuh} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(v) f_2(u - v) dv du \\ &\stackrel{\diamond}{=} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ivh} f_1(v) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(u-v)h} f_2(u - v) du dv \\ &\stackrel{\diamond\diamond}{=} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ivh} f_1(v) \int_{-\pi}^{\pi} e^{iwh} f_2(w) dw dv \\ &= \widehat{f_1}(h) \widehat{f_2}(h). \end{aligned}$$

Le résultat suivant a été obtenu à l'origine par Carathéodory et Toeplitz. Il apparaît ici comme un corollaire du théorème 4.6 de Herglotz. Il existe également une preuve algorithmique, tout à fait différente, obtenue par Schur, liée à l'algorithme de Bareiss de calcul de la **décomposition de Cholesky** des matrices de Toeplitz. Ce bouillonnement a eu lieu au début du vingtième siècle, cf. [Am].

Théorème 4.23 : Carathéodory-Toeplitz

Si $\gamma \in \ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ est hermitienne, c'est-à-dire que

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty \quad \text{et} \quad \forall h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma(-h) = \overline{\gamma(h)}.$$

alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. γ est de type positif : pour tout $n \geq 1$ et tout $v \in \mathbb{C}^n$, $\sum_{j,k=1}^n v_j \overline{v_k} \gamma(j-k) \geq 0$;
2. L'image du disque unité ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ par $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(n) z^n$ est incluse dans le demi-plan droit fermé $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$.

Démonstration. Comme γ est hermitienne, on a $\gamma(0) \in \mathbb{R}$. D'autre part g est bien définie sur le disque unité fermé car $\gamma \in \ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$. On pose, pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$2\pi f(u) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ihu} \gamma(h) = \gamma(0) + \sum_{h=1}^{\infty} \left(e^{ihu} \overline{\gamma(h)} + e^{-ihu} \gamma(h) \right) = 2\Re(g(e^{-iu})) - \gamma(0).$$

Supposons que γ est de type positif. Pour $n = 1$ on obtient $\gamma(0) \geq 0$. D'autre part, d'après le théorème 4.6, γ est la transformée de Fourier d'une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$, qui admet f pour densité car $\gamma \in \ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$. Donc $f \geq 0$ p.p. et donc partout par continuité. Il en découle que $\Re g(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$ tel que $|z| = 1$. Comme g est holomorphe, sa partie réelle est harmonique, et comme $g(0) = \gamma(0) \geq 0$, il en découle que $\Re g(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$.

Réciproquement, supposons que $\Re g(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{Z}$ tel que $|z| < 1$. En prenant $z = 0$ on obtient $\Re(g(0)) \geq 0$. Comme γ est hermitienne, $\gamma(0)$ est réel, et donc $\gamma(0) \geq 0$. Par ailleurs, par continuité, $\Re g(z) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Il en découle que $f \geq 0$. En passant en transformée de Fourier inverse (possible car $\gamma \in \ell_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$), on obtient que γ est la transformée de Fourier d'une mesure positive finie, et donc γ est de type positif grâce au théorème 4.6. \square

Prédiction linéaire (x3)

Mots-clés : prédiction ; équations de Yule-Walker ; matrices de Toeplitz ; décomposition de Cholesky ; algorithme de Levinson-Durbin ; algorithme de Gram-Schmidt (ou des innovations).

Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire, de moyenne nulle, et d'autocovariance γ vérifiant $\gamma(0) > 0$ (le processus n'est pas identiquement nul). Dans ce chapitre, on s'intéresse à la meilleure approximation, au sens des moindres carrés, de X_t avec une combinaison linéaire de X_{t-1}, \dots, X_{t-p} . Cette approximation est une projection orthogonale, dont les coefficients ne dépendent que de l'autocovariance γ . La stationnarité du processus permet d'estimer γ dans une plage temporelle donnée, et d'utiliser son invariance par translation pour faire de la prédiction. Ce mécanisme d'estimation-prédiction rend naturelle l'hypothèse de stationnarité.

Dans ce chapitre, on utilise à la fois la structure hilbertienne de L^2 et de \mathbb{R}^p , et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|_2$ le produit scalaire et la norme, par abus de notation.

5.1 Prédicteur linéaire optimal

Pour tous entiers $p \geq 0$ et $t \in \mathbb{Z}$, on note

$$H_{t-1,p} = \text{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\}$$

le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par X_{t-1}, \dots, X_{t-p} , avec pour convention $H_{t-1,0} = \{0\}$ si $p = 0$. Ce sous-espace, de dimension au plus p , représente le passé de profondeur p de X_t . Le carré de la distance dans L^2 de X_t à $H_{t-1,p}$ est donné par

$$\sigma_p^2 = \text{dist}_{\|\cdot\|_2}(X_t, H_{t-1,p})^2 = \inf_{Y \in H_{t-1,p}} \|X_t - Y\|_2^2.$$

L'infimum est atteint en un unique $Y \in H_{t-1,p}$, noté $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$, projection orthogonale dans L^2 de X_t sur $H_{t-1,p}$. On dit qu'il s'agit du **prédicteur progressif** ou **direct** de X_t par une combinaison linéaire de X_{t-1}, \dots, X_{t-p} . Il est optimal au sens des **moindres carrés**. Comme $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \in H_{t-1,p}$, il existe $\varphi_p = (\varphi_{p,1}, \dots, \varphi_{p,p})^\top \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-k}.$$

Le vecteur des coefficients φ_p est unique ssi les vecteurs X_{t-1}, \dots, X_{t-p} sont linéairement indépendants dans L^2 , c'est-à-dire que $\dim(H_{t-1,p}) = p$. C'est le cas ssi la matrice de

covariance $\Gamma_p = \text{Cov}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ est inversible (matrice de Gram). La projection $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$ et l'**erreur de prédition progressive** (ou directe)

$$E_{t,p}^+ = X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$$

sont centrées, et la variance σ_p^2 de l'erreur de prédition $E_{t,p}^+$ vérifie

$$\sigma_p^2 = \|E_{t,p}^+\|_2^2 = \|X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})\|_2^2 = \mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}))^2).$$

La figure 5.1 résume ces formules en une.

Note : φ_p et σ_p^2 ne dépendent pas de t car le processus est stationnaire : en effet

$$\begin{aligned} \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) &= \arg \inf_{Y \in H_{t-1,p}} \|X_t - Y\|_2^2 \\ &= \arg \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^p} \left\| X_t - \sum_{k=1}^p \varphi_k X_{t-k} \right\|_2^2 \\ &= \arg \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^p} \sum_{j,k=0}^p \varphi_j \varphi_k \gamma_X(j-k) \end{aligned}$$

(avec la convention $\varphi_0 := -1$), formule qui ne dépend plus du tout de t , et de même

$$\sigma_p^2 = \inf_{Y \in H_{t-1,p}} \|X_t - Y\|_2^2 = \inf_{\varphi \in \mathbb{R}^p} \sum_{j,k=0}^p \varphi_j \varphi_k \gamma_X(j-k).$$

Note : si $p = 0$ alors $\text{proj}(X_t, H_{t-1,0}) = \text{proj}(X_t, \{0\}) = 0$, $E_{t,p}^+ = X_t$, et $\sigma_p^2 = \gamma(0)$.

Note : si X est gaussien alors, en notant $\mathcal{F}_{t-1,p}$ la tribu engendrée par X_{t-1}, \dots, X_{t-p} ,

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \text{proj}(X_t, L^2(\mathcal{F}_{t-1,p})) = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1,p})$$

ce qui est tout à faire remarquable car $H_{t-1,p} \subsetneq L^2(\mathcal{F}_{t-1,p})$.

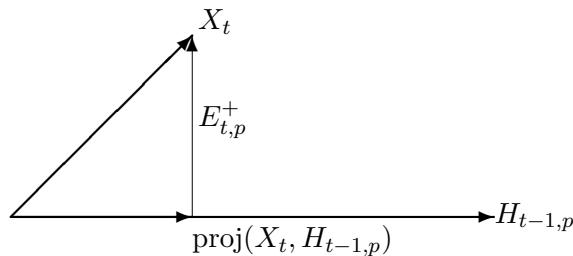


FIGURE 5.1 – Prédiction progressive et erreur progressive.

Exemple 5.1 : Processus AR(m) causal

Soit Z un $BB(0, \sigma^2)$ et soit X un processus AR(m) linéaire causal solution de

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_m X_{t-m} + Z_t,$$

où $1 - (\varphi_1 z + \dots + \varphi_m z^m) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq 1$. Alors, comme X est causal, on a $\mathbb{E}(Z_t X_{t-h}) = 0$ pour tout $h \geq 1$, et l'équation AR(m) donne l'identité $\mathbb{E}((X_t - \sum_{k=1}^m \varphi_k X_{t-k}) X_{t-h}) = 0$ pour tout $h \geq 1$. Ceci implique que $X_t - \sum_{k=1}^m \varphi_k X_{t-k} \perp H_{t-1,p}$ pour tout $p \geq 1$. De plus $\sum_{k=1}^m \varphi_k X_{t-k} \in H_{t-1,p}$ pour

tout $m \leq p$. Donc^a pour tout $p \geq m$, on a $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^p \varphi_k X_{t-k}$ avec

$$\varphi_{p,k} = \begin{cases} \varphi_k & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ 0 & \text{si } m < k \leq p. \end{cases}$$

Ainsi, pour notre processus AR(m) causal, les coefficients de prédiction linéaires de profondeur p coïncident avec les coefficients de l'équation d'autorégression, dès que $p \geq m$. Ceci explique la notation φ utilisée pour les coefficients de prédiction. Nous allons voir plus loin le cas des processus MA(q) et un algorithme lié à la notation θ .

^a. Caractérisation du projeté orthogonal : $v = \text{proj}(u, H)$ ssi $v \in H$ et $u - v \perp H$.

5.2 Équations de Yule-Walker

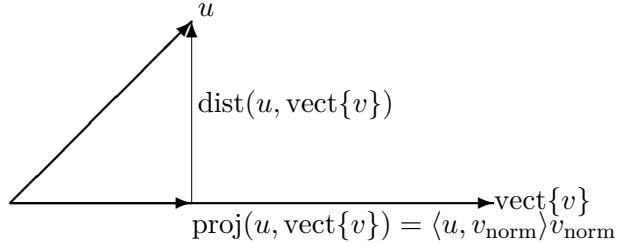


FIGURE 5.2 – Intuition géométrique : projection du vecteur u sur le sous-espace $\text{vect}\{v\} = \text{vect}\{v_{\text{norm}}\}$ de dimension 1. Ici $v_{\text{norm}} = \frac{v}{\|v\|}$ de sorte que $v = \|v\|v_{\text{norm}}$ et $\|v_{\text{norm}}\| = 1$. Le théorème de Pythagore s'écrit ici : $\|u\|^2 = \|\text{dist}(u, \text{vect}\{v\})\|^2 + \|\text{proj}(u, \text{vect}\{v\})\|^2$.

Pour $p = 1$, les choses sont simples et directes (figure 5.2) :

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,1}) = \text{proj}(X_t, \text{vect}\{X_{t-1}\}) = \left\langle X_t, \frac{X_{t-1}}{\|X_{t-1}\|_2} \right\rangle \frac{X_{t-1}}{\|X_{t-1}\|_2}$$

ce qui donne

$$\varphi_{1,1} = \left\langle X_t, \frac{X_{t-1}}{\|X_{t-1}\|_2} \right\rangle \frac{1}{\|X_{t-1}\|_2} = \langle X_t, X_{t-1} \rangle \frac{1}{\|X_{t-1}\|_2^2} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}.$$

Plus généralement, le vecteur $\varphi_p = (\varphi_{p,k})_{1 \leq k \leq p}^\top$ vérifie les équations de Yule¹-Walker² :

Théorème 5.2 : Équations Yule-Walker

Si $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-k}$ alors

$$\Gamma_p \varphi_p = \gamma_p$$

1. George Udny Yule (1871–1951).
2. Gilbert Thomas Walker (1868–1958).

où $\Gamma_p = (\gamma(k-j))_{1 \leq k,j \leq p}$ et où $\gamma_p = (\gamma(1), \dots, \gamma(p))^\top$. De plus

$$\sigma_p^2 = \gamma(0) - \varphi_p^\top \gamma_p = \gamma(0) - \varphi_p^\top \Gamma_p \varphi_p.$$

Note : $\Gamma_p = (\gamma(k-j))_{1 \leq k,j \leq p}$ est la matrice de covariance de $(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$. Il s'agit d'une magnifique matrice de Toeplitz symétrique à valeurs propres ≥ 0 :

$$\Gamma_p = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \dots & \gamma(p-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \ddots & & \vdots \\ \gamma(2) & \gamma(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \gamma(1) & \gamma(2) \\ \vdots & & \ddots & \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(p-1) & \dots & \dots & \gamma(2) & \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix}.$$

Note : si Γ_p est inversible alors $\Gamma_p \varphi_p = \gamma_p$ a une unique solution $\varphi_p = \Gamma_p^{-1} \gamma_p$. Ceci permet de calculer les coefficients de prédiction φ_p à partir de l'autocovariance γ puisque Γ_p et γ_p sont des fonctions de γ . D'autre part, on a aussi

$$\sigma_p^2 = \gamma(0) - \gamma_p^\top \Gamma_p^{-1} \gamma_p.$$

Il s'agit du complément de Schur du bloc Γ_p dans la décomposition par bloc

$$\Gamma_{p+1} = \begin{pmatrix} \Gamma_p & w_p^\top \\ w_p & \gamma(0) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad w_p := (\gamma(p), \dots, \gamma(1))^\top.$$

On peut aussi écrire $\gamma_p^\top \Gamma_p^{-1} \gamma_p = \gamma(0) - \sigma_p^2 = \sigma_0^2 - \sigma_p^2$.

Démonstration. L'orthogonalité $X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \perp H_{t-1,p}$ (dessin) donne

$$\forall 1 \leq j \leq p, \quad \left\langle X_t - \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-k}, X_{t-j} \right\rangle = 0.$$

Cela s'écrit également au moyen de la fonction d'autocovariance γ ,

$$\forall 1 \leq j \leq p, \quad \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} \gamma(k-j) = \gamma(j).$$

d'où $\Gamma_p \varphi_p = \gamma_p$. D'autre part, $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \perp X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$, donc

$$\sigma_p^2 = \langle X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}), X_t \rangle = \gamma(0) - \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} \gamma(k) = \gamma(0) - \varphi_p^\top \gamma_p.$$

□

Notons que grâce au théorème de Pythagore on obtient que

$$\|\text{proj}(X_t, H_{t-1,p})\|_2^2 = \|X_t\|_2^2 - \sigma_p^2 = \gamma(0) - \sigma_p^2 = \varphi_p^\top \gamma_p$$

tandis que par ailleurs

$$\|\text{proj}(X_t, H_{t-1,p})\|_2^2 = \sum_{j,k=1}^p \varphi_{p,j} \varphi_{p,k} \gamma(j-k) = \varphi_p^\top \Gamma_p \varphi_p.$$

Définition 5.3 : Décroissance et convergence de l'erreur de prédiction

On a $H_{t-1,p} \subset H_{t-1,p+1}$ et donc, comme $E \mapsto \inf E$ est décroissante pour l'inclusion,

$$\sigma_{p+1}^2 = \inf_{Y \in H_{t-1,p+1}} \|X_t - Y\|_2^2 \leq \inf_{Y \in H_{t-1,p}} \|X_t - Y\|_2^2 = \sigma_p^2.$$

La suite $(\sigma_p^2)_{p \geq 1}$ décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite ≥ 0 :

$$\sigma_\infty^2 := \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma_p^2 = \inf_{p \geq 1} \sigma_p^2 \geq 0.$$

Définition 5.4 : Processus réguliers et déterministes

Un processus est **régulier** si $\sigma_\infty^2 > 0$ et **déterministe** si $\sigma_\infty^2 = 0$ (dans ce cas, X_t est une combinaison linéaire infinie à coefficients déterministes de X_{t-1}, X_{t-2}, \dots).

Note : la quantité σ_∞^2 est égale à la quantité σ^2 du lemme 1.20.

Théorème 5.5 : Condition suffisante d'inversibilité

Si $\gamma(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow \infty$ alors Γ_p est inversible pour tout $p \geq 1$.

Note : on rappelle que dans tout ce chapitre on suppose que $\gamma(0) > 0$.

Note : si $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$, i.e. $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$, alors $\gamma(h) \rightarrow 0$.

Note : si X a une densité spectrale alors $\gamma(h) \rightarrow 0$ (lemme de Riemann-Lebesgue 4.21).

Note : si $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors X a une densité spectrale (théorème de Herglotz 4.6).

Démonstration. La démonstration fait appel au lemme suivant.

Lemme : Inversibilité des matrices symétriques de type positif

Soit A une matrice $n \times n$ symétrique réelle et de type positif. Alors A est inversible si et seulement si $u^\top A u \neq 0$ (c'est-à-dire > 0) pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u \neq 0$.

Notons que pour toute matrice A carrée réelle, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est symétrique réelle de type positif
- A est diagonalisable en base orthonormée et ses valeurs propres sont ≥ 0
- A est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire.

Preuve du lemme. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et v_1, \dots, v_n une base orthonormée de vecteurs propres. On a $\lambda_k \geq 0$, $Av_k = \lambda_k v_k$, et $\langle v_j, v_k \rangle = \mathbf{1}_{j=k}$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $u = \sum_{j=1}^n \langle u, v_j \rangle v_j$, $Au = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, v_k \rangle v_k$, et

$$u^\top A u = \langle u, Au \rangle = \sum_{j,k=1}^n \lambda_k \langle u, v_j \rangle \langle u, v_k \rangle \langle v_j, v_k \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, v_k \rangle^2 \geq 0.$$

Maintenant, si A est inversible alors $\lambda_k > 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ et donc pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$, en choisissant $1 \leq k \leq n$ tel que $\langle u, v_k \rangle \neq 0$, il vient $u^\top A u \geq \lambda_k \langle u, v_k \rangle^2 > 0$.

Réiproquement, si $u^\top Au > 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ avec $u \neq 0$ alors pour tout $1 \leq k \leq n$, en prenant $u = v_k$ il vient $\lambda_k = \lambda_k \langle v_k, v_k \rangle = v_k^\top Av_k > 0$ et donc A est inversible. \square

Démontrons à présent le théorème. Supposons que $\gamma(p) \rightarrow 0$ quand $p \rightarrow \infty$. Pour $p = 1$, $\Gamma_1 = \gamma(0) > 0$ est inversible. À présent, supposons que $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$ sont inversibles pour $p \geq 1$ et montrons que Γ_{p+1} est alors inversible.

D'après le lemme, Γ_{p+1} est inversible ssi $u^\top \Gamma_{p+1} u \neq 0$ (> 0 en fait) pour tout $u \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $u \neq 0$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $u^\top \Gamma_{p+1} u = 0$ pour un $u \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $u \neq 0$. Si $u_{p+1} = 0$ alors $(u_1, \dots, u_p) \neq 0$, et la décomposition par blocs

$$\Gamma_{p+1} = \begin{pmatrix} \Gamma_p & w_p \\ w_p^\top & \gamma(0) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad w_p = (\gamma(p), \dots, \gamma(1))^\top$$

donne $(u_1, \dots, u_p)^\top \Gamma_p (u_1, \dots, u_p) = 0$ ce qui est impossible car Γ_p est inversible. Supposons à présent que $u_{p+1} \neq 0$. En notant $\mathbf{X}_{p+1} = (X_1, \dots, X_{p+1})^\top$, il vient

$$0 = u^\top \Gamma_{p+1} u = u^\top \mathbb{E}(\mathbf{X}_{p+1}^\top \mathbf{X}_{p+1}) u = \mathbb{E}(u^\top \mathbf{X}_{p+1}^\top \mathbf{X}_{p+1} u) = \mathbb{E}(\langle u, \mathbf{X}_{p+1} \rangle^2).$$

Donc $\langle u, \mathbf{X}_{p+1} \rangle = 0$ p.s. d'où, p.s. (la division par u_{p+1} est licite car $u_{p+1} \neq 0$)

$$X_{p+1} = - \sum_{k=1}^p \frac{u_k}{u_{p+1}} X_k.$$

Par stationnarité, le même procédé avec $(X_{h+1}, \dots, X_{h+p+1})$ donne, p.s. pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$X_{h+p+1} = - \sum_{k=1}^p \frac{u_k}{u_{p+1}} X_{h+k}.$$

Par récurrence, pour tout $h \geq p+1$, il existe un vecteur déterministe de coefficients $v_h = (v_{h,1}, \dots, v_{h,p})^\top$ tel que p.s. pour tout $h \geq p+1$,

$$X_h = \sum_{k=1}^p v_{h,k} X_k = \langle v_h, \mathbf{X}_p \rangle.$$

À présent, en notant $\lambda_{\min}(\Gamma_p)$ la plus petite valeur propre de Γ_p , on a d'une part

$$\gamma(0) = \mathbb{E}(X_h^2) = \mathbb{E}(\langle v_h, \mathbf{X}_p \rangle^2) = v_h^\top \Gamma_p v_h \geq \lambda_{\min}(\Gamma_p) \|v_h\|_2^2.$$

Comme Γ_p est inversible on a $\lambda_{\min}(\Gamma_p) > 0$ et donc $\sup_{h,k} |v_{h,k}| < \infty$. D'autre part

$$\gamma(0) = \text{Cov}\left(X_h, \sum_{k=1}^p v_{h,k} X_k\right) = \sum_{k=1}^p v_{h,k} \gamma(k-h)$$

et donc

$$\gamma(0) \leq \sum_{k=1}^p |v_{h,k}| |\gamma(k-h)| \leq \left(\sup_{h,k} |v_{h,k}| \right) \sum_{k=1}^p |\gamma(k-h)|.$$

Comme $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$, on obtient $\gamma(0) \leq 0$, ce qui est impossible car $\gamma(0) > 0$. \square

5.3 Algorithme de Cholesky

Lorsque $A = \Gamma_p$ est inversible, le coefficient φ_p de prédiction est unique et peut être calculé en résolvant l'équation de Yule-Walker $\Gamma_p \varphi_p = \gamma_p$. Cela revient à déterminer A^{-1} . Comme les formules de Cramer sont trop coûteuses en temps de calcul, la résolution pratique du système d'équations linéaires $Ax = b$ est plutôt faisable en utilisant un algorithme comme le pivot de Gauss (ou élimination de Gauss), ou encore une décomposition LU (pour Lower-triangular \times Upper-triangular). La plupart des algorithmes réduisent le problème aux matrices triangulaires. Le coût du calcul peut être amélioré en utilisant un algorithme qui tire partie de la structure de A . L'**algorithme de Cholesky** utilise le fait que A est symétrique positive. La **décomposition de Cholesky**³ de A , introduite par Cholesky vers 1924, affirme l'existence d'une matrice triangulaire inférieure L à termes diagonaux ≥ 0 , facile à calculer, telle que $A = LL^\top$. Si A est inversible, alors L est inversible, unique, et ses termes diagonaux sont > 0 . Une fois L calculée, on résout l'équation $Ax = b$ en x en résolvant l'équation triangulaire $Ly = b$ en y , puis l'équation triangulaire $L^\top z = y$ en z .

Sans perte de généralité, on peut utiliser une décomposition de la forme,

$$A = LDL^\top$$

où L est triangulaire inférieure à termes diagonaux $= 1$, et où D est diagonale à termes diagonaux ≥ 0 . Cette décomposition modifiée évite le calcul de racines carrées. Le lien entre les deux décompositions est

$$LDL^\top = LD^{1/2}(LD^{1/2})^\top,$$

où $D^{1/2} = \text{diag}(D_{1,1}^{1/2}, \dots, D_{p,p}^{1/2})$. Les colonnes de $LD^{1/2}$ s'obtiennent en multipliant celles de L par la racine des coefficients diagonaux de D .

Théorème 5.6 : Décomposition et algorithme de Cholesky

Si $A \in \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ est symétrique à valeurs propres > 0 alors

$$A = LDL^\top$$

où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale $= 1$ et D diagonale à diagonale > 0 , calculables par récurrence avec l'algorithme de Cholesky :

$$\begin{aligned} D_{k,k} &= A_{k,k} - \sum_{r=1}^{k-1} L_{k,r}^2 D_{r,r} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq p \\ L_{j,k} &= \frac{1}{D_{k,k}} \left(A_{j,k} - \sum_{r=1}^{k-1} L_{j,r} L_{k,r} D_{r,r} \right) \quad \text{pour } 1 \leq k < j \leq p. \end{aligned}$$

La décomposition s'étend aux matrices A à valeurs propres ≥ 0 en posant $L_{j,k} = 0$ si $D_{k,k} = 0$ (se produit si A est singulière), et dans ce cas L a une diagonale dans $\{0, 1\}$.

On prendra garde à ne pas confondre la décomposition de Cholesky $A = LDL^\top$ avec la diagonalisation de A en base orthonormée. Dans la décomposition de Cholesky, la matrice L n'est pas orthogonale en général, et les termes diagonaux de la matrice D ne sont pas les valeurs propres de A en général. La décomposition de Cholesky est moins coûteuse

3. On dit parfois **factorisation de Cholesky** («*factorization*» en anglais).

que la diagonalisation en base orthonormée. Elle permet de résoudre plus efficacement des systèmes d'équations linéaires mais aussi de simuler efficacement des vecteurs gaussiens.

Démonstration. Supposons qu'il existe L et D comme indiqué telles que $A = LDL^\top$. La définition du produit matriciel et la structure de L et D donnent, pour tout $1 \leq k \leq p$,

$$A_{k,k} = \sum_{r=1}^p L_{k,r} D_{r,r} L_{r,k}^\top = \sum_{r=1}^{k-1} L_{k,r}^2 D_{r,r} + D_{k,k},$$

tandis que pour tout $1 \leq k < j \leq p$,

$$A_{j,k} = \sum_{r=1}^p L_{j,r} D_{r,r} L_{r,k}^\top = \sum_{r=1}^{k-1} L_{j,r} L_{k,r} D_{r,r} + L_{j,k} D_{k,k}.$$

On retrouve bien les formules de Cholesky. Réciproquement, remarquablement, ces formules permettent, à partir de la matrice A , le calcul des matrices D et L en partant de $L_{1,1} = 1$ et $D_{1,1} = A_{1,1}$, et en procédant ligne par ligne ou colonne par colonne dans L .

La matrice D est à diagonale > 0 car semblable au sens des formes quadratiques à la matrice symétrique A à valeurs propres > 0 : pour tout vecteur colonne $u \in \mathbb{R}^p$,

$$\langle u, Au \rangle = u^\top Au = \langle L^\top u, DL^\top u \rangle.$$

La matrice L est inversible car triangulaire inférieure à diagonale > 0 (en fait = 1). \square

La complexité de l'algorithme de Cholesky est $\mathcal{O}(p^3)$. Bareiss⁴ a montré vers 1969 qu'il est possible de faire chuter la complexité à $\mathcal{O}(p^2)$ en tenant compte de la structure Toeplitz de $A = \Gamma_{p+1}$ (provient de la stationnarité).

Il se trouve que la décomposition de Cholesky $\Gamma_{p+1} = L_{p+1} D_{p+1} L_{p+1}^\top$ de Γ_{p+1} possède une expression remarquable en fonction des variances de prédiction et des coefficients de prédiction, comme le montre le théorème suivant. Cette expression remarquable provient de la stationnarité, et reste valable pour toute matrice de covariance Toeplitz.

Théorème 5.7 : Décomposition de Cholesky de Γ_{p+1}

Pour tout $p \geq 0$ on a

$$\Gamma_{p+1} = L_{p+1} D_{p+1} L_{p+1}^\top,$$

où

$$D_{p+1} = \text{diag}(\sigma_0^2, \dots, \sigma_p^2) \quad \text{et} \quad L_{p+1} = \Phi_{p+1}^{-1}$$

et où Φ_{p+1} est la matrice triangulaire inférieure suivante :

$$\Phi_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\varphi_{1,1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ -\varphi_{p,p} & -\varphi_{p,p-1} & \cdots & -\varphi_{p,1} & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus Γ_{p+1} est inversible si et seulement si D_{p+1} est inversible, ce qui se produit si

4. Cet algorithme est aussi une version d'un algorithme de Schur, datant de 1917, qui constitue à son tour une preuve algorithmique des théorèmes 4.23 de Carathéodory-Toeplitz et 4.6 de Herglotz, cf. [Am].

et seulement si $\sigma_p > 0$, et dans ce cas

$$\Gamma_{p+1}^{-1} = \Phi_{p+1}^\top D_{p+1}^{-1} \Phi_{p+1} \quad \text{où} \quad D_{p+1}^{-1} = \text{diag}(\sigma_0^{-2}, \dots, \sigma_p^{-2}).$$

Note : à partir de Γ_{p+1} , on peut calculer L_{p+1} en utilisant l'algorithme de Cholesky, puis on peut inverser L_{p+1} , ce qui fournit $(\varphi_{r,k})_{1 \leq k \leq r \leq p}$, sans équations de Yule-Walker !

Démonstration. La matrice Φ_{p+1} est inversible car triangulaire à diagonale $\neq 0$ (car $= 1$). La matrice L_{p+1} hérite de Φ_{p+1} le caractère triangulaire inférieur à diagonale $= 1$. Par convention $\sigma_0^2 = \gamma(0)$, et on a $\Gamma_1 = \gamma(0) = \sigma_0^2 = D_1$. La matrice Γ_{p+1} est inversible ssi D_{p+1} est inversible, c'est-à-dire ssi $\min\{(D_{p+1})_{k,k} : 1 \leq k \leq p+1\} = \min\{\sigma_0^2, \dots, \sigma_p^2\} = \sigma_p^2 > 0$.

Établissons à présent que $\Phi_{p+1} \Gamma_{p+1} \Phi_{p+1}^\top = D_{p+1}$. Comme Φ_{p+1} est déterministe, on a, par définition de Γ_{p+1} , en posant $\mathbf{X}_{p+1} = (X_1, \dots, X_{p+1})^\top$,

$$\Phi_{p+1} \Gamma_{p+1} \Phi_{p+1}^\top = \Phi_{p+1} \mathbb{E}(\mathbf{X}_{p+1} \mathbf{X}_{p+1}^\top) \Phi_{p+1}^\top = \mathbb{E}(\Phi_{p+1} \mathbf{X}_{p+1} (\Phi_{p+1} \mathbf{X}_{p+1})^\top).$$

Calculons à présent $\Phi_{p+1} \mathbf{X}_{p+1}$. On a

$$\begin{aligned} \Phi_{p+1} \mathbf{X}_{p+1} &= \Phi_{p+1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{p+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 - \varphi_{1,1} X_1 \\ \vdots \\ X_{p+1} - \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{p+1-k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1 - \text{proj}(X_1, H_{0,0}) \\ X_2 - \text{proj}(X_2, H_{1,1}) \\ \vdots \\ X_{p+1} - \text{proj}(X_{p+1}, H_{p,p}) \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{p+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

car par définition des coefficients de prédiction $\varphi_1, \dots, \varphi_p$,

$$X_{k+1} - \text{proj}(X_{k+1}, \underbrace{H_{k,k}}_{H_{k+1-1,k}}) = X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \varphi_{k,j} X_{k+1-j} = X_{k+1} - \sum_{j=1}^k \varphi_{k,k+1-j} X_j$$

(par convention $H_{0,0} = \{0\}$ ce qui donne $\text{proj}(X_1, H_{0,0}) = 0$). À présent, si $j < k$ alors

$$V_j = X_j - \text{proj}(X_j, H_{j-1,j-1}) \in H_{k-1,k-1} \perp X_k - \text{proj}(X_k, H_{k-1,k-1}) = V_k,$$

et donc V_1, \dots, V_{p+1} sont orthogonaux dans \mathbb{L}^2 . De plus, comme on a (prendre $t = k$)

$$\sigma_{k-1}^2 = \|X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,k-1})\|_2^2 = \|X_k - \text{proj}(X_k, H_{k-1,k-1})\|_2^2 = \|V_k\|_2^2,$$

il vient

$$\mathbb{E}(\Phi_{p+1} \mathbf{X}_{p+1} (\Phi_{p+1} \mathbf{X}_{p+1})^\top) = \mathbb{E}(\langle V_j, V_k \rangle)_{1 \leq j, k \leq p+1} = \text{diag}(\sigma_0^2, \dots, \sigma_p^2) = D_{p+1}.$$

□

Exemple 5.8 : Processus AR(1) causal

Lorsque X est un processus AR(1) causal solution de $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ avec $|\varphi| < 1$ et $Z \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$, alors d'après la remarque 5.1, $\varphi_p = (\varphi, 0, \dots, 0)^\top$ pour tout $p \geq 1$, et comme $\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \varphi^{j+h} = \sigma^2 \varphi^h / (1 - \varphi^2)$ pour tout $h \geq 0$, on obtient $\sigma_0^2 = \sigma^2 / (1 - \varphi^2)$ et $\sigma_p^2 = \gamma(0) - \varphi_p^\top \gamma_p = \gamma(0) - \varphi \gamma(1) = \sigma^2$ pour tout $p \geq 1$, d'où

$$D_p = \text{diag}\left(\frac{\sigma^2}{1 - \varphi^2}, \sigma^2, \dots, \sigma^2\right) \quad \text{et} \quad \Phi_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\varphi & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

pour tout $p \geq 1$. De ces formules on tire la formule $\Phi_p \gamma_p = (\gamma(1), 0, \dots, 0)^\top$ puis $D_p^{-1} \Phi_p \gamma_p = (\varphi, 0, \dots, 0)^\top$ et on retrouve alors bien la formule de Yule-Walker :

$$\varphi_p = \Gamma_p^{-1} \gamma_p = \Phi_p^T D_p^{-1} \Phi_p \gamma_p = (\varphi, 0, \dots, 0)^\top.$$

10→11

5.4 Algorithme de Levinson-Durbin

L'**algorithme de Levinson-Durbin** a le mérite d'être récursif, ce qui permet de calculer des prédicteurs successifs sans avoir besoin de tout recalculer. Proposé par Levinson vers 1947 et amélioré par Durbin vers 1960, il s'agit d'un algorithme d'algèbre linéaire permettant de résoudre des équations liées à une matrice de Toeplitz. Il est appliqué ici au cadre spécial des processus stochastiques stationnaires, pour lesquels la matrice de covariance est une matrice de Toeplitz.

Rappelons qu'on souhaite calculer $(\varphi_p)_{p \geq 1}$ et $(\sigma_p^2)_{p \geq 1}$ telles que

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-k} \quad \text{et} \quad \sigma_p^2 = \|E_{t,p}^+\|_2^2 = \text{Var}(E_{t,p}^+),$$

où

$$E_{t,p}^+ = X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$$

est l'erreur de prédiction progressive (ou directe). L'algorithme de Levinson-Durbin exploite une symétrie par retournement du temps. Pour tous $t \in \mathbb{Z}$ et $p \geq 0$,

$$E_{t,p}^- = X_t - \text{proj}(X_t, H_{t+p,p})$$

est appelée **erreur de prédiction rétrograde** car X_t est prédit par sa projection sur le futur $H_{t+p,p} = \text{vect}\{X_{t+1}, \dots, X_{t+p}\}$ et non pas sur le passé $H_{t-1,p}$ comme dans l'erreur de prédiction progressive $E_{t,p}^+ = X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$. Si $p = 0$ alors $\text{proj}(X_t, H_{t,0}) = \text{proj}(X_t, \{0\}) = 0$ et $E_{t,p}^- = X_t$.

Théorème 5.9 : Algorithme de Levinson-Durbin

Si Γ_p est inversible pour tout $p \geq 1$, alors les suites $(\varphi_p)_{p \geq 1}$ et $(\sigma_p^2)_{p \geq 1}$ sont calculables

par récurrence en utilisant les formules suivantes :

$$\varphi_{p+1,p+1} = \kappa_{p+1} \quad \text{et} \quad \varphi_{p+1,k} = \varphi_{p,k} - \kappa_{p+1}\varphi_{p,p-(k-1)} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq p$$

$$\sigma_{p+1}^2 = \sigma_p^2(1 - \kappa_{p+1}^2)$$

où k_{p+1} est une quantité auxiliaire calculée par récurrence par

$$\kappa_{p+1} = \frac{\gamma(p+1) - \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k}\gamma(p-(k-1))}{\sigma_p^2}$$

avec les valeurs initiales $\kappa_1 = \gamma(1)/\gamma(0)$, $\varphi_{1,1} = \kappa_1$, $\sigma_1^2 = \sigma_0^2(1 - \kappa_1^2)$ (et $\sigma_0^2 = \gamma(0)$).

Note : ne surtout pas apprendre ces formules par cœur !

Note : pour $p = 0$ la meilleure prédition de X_t est $0 = \mathbb{E}(X_t)$ tandis que la variance de l'erreur de prédition est $\sigma_0^2 = \mathbb{E}((X_t - 0)^2) = \gamma(0)$.

Démonstration. *Formules pour φ .* Considérons la décomposition orthogonale « rétrograde » suivante (penser à la suite $X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, X_{t-(p+1)}$)

$$H_{t-1,p+1} = H_{t-1,p} \overset{\perp}{\oplus} \underbrace{\text{vect}\{X_{t-(p+1)} - \text{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p})\}}_{E_{t-(p+1),p}^-}$$

Cette décomposition orthogonale rétrograde permet d'écrire⁵

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \underbrace{\text{proj}(X_t, \text{vect}\{E_{t-(p+1),p}^-\})}_{=\kappa_{p+1}E_{t-(p+1),p}^-}$$

où⁶ $\kappa_{p+1} := \langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle / \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2$, ou encore, grâce à la définition de $E_{t-(p+1),p}^-$,

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \kappa_{p+1}(X_{t-(p+1)} - \text{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p})).$$

D'autre part, par définition de φ_p on a

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-k}.$$

Par stationnarité, les équations de Yule-Walker (théorème 5.2) sont réversibles, et donc les coefficients de prédition progressifs et rétrogrades coïncident (propriété \star) :

$$\text{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}) \stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-(p+1)+k} = \sum_{k=1}^p \varphi_{p,p-(k-1)} X_{t-k}.$$

$$\dots, X_{t-(p+1)}, \underbrace{X_{t-p}, \dots, X_{t-1}}_{H_{t-1,p}}, X_t, \underbrace{X_{t+1}, \dots, X_{t+p}}_{H_{t+p,p}}, \dots$$

On a donc, en utilisant les trois dernières équations ci-dessus,

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \sum_{k=1}^p (\varphi_{p,k} - \kappa_{p+1}\varphi_{p-(k-1),p}) X_{t-k} + \kappa_{p+1} X_{t-(p+1)}.$$

5. On utilise le fait que la projection orthogonale sur la somme de sous-espaces orthogonaux est égale à la somme des projections orthogonales sur chacun des sous-espaces (ici le dernier est de dimension 1).

6. La formule pour la projection sur un sous-espace de dimension 1 est expliquée dans la figure 5.2.

Comme Γ_p est inversible, les coefficients sont uniques. En identifiant les coefficients ci-dessus avec $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \sum_{k=1}^{p+1} \varphi_{p+1,k} X_{t-k}$ il vient $\varphi_{p+1,p+1} = \kappa_{p+1}$ et

$$\varphi_{p+1,k} = \varphi_{p,k} - \kappa_{p+1} \varphi_{p-(k-1),p} \quad (1 \leq k \leq p).$$

Formule pour κ . Rappelons que $\kappa_{p+1} = \langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle / \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2$. D'une part,

$$\begin{aligned} \langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle &= \langle X_t, X_{t-(p+1)} - \text{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}) \rangle \\ &= \gamma(p+1) - \langle X_t, \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-(p+1)+k} \rangle \\ &= \gamma(p+1) - \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} \gamma(p-(k-1)), \end{aligned}$$

et d'autre part, comme $\text{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}) \perp E_{t-(p+1),p}^-$,

$$\begin{aligned} \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2 &= \langle X_{t-(p+1)}, X_{t-(p+1)} - \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-(p+1)+k} \rangle \\ &= \gamma(0) - \sum_{k=1}^n \varphi_{p,k} \gamma(k) \\ &\stackrel{\star\star}{=} \sigma_p^2 = \|E_{t,p}^+\|_2^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé en $(\star\star)$ les équations de Yule-Walker du théorème 5.2, ce qui donne

$$\kappa_{p+1} = \frac{\gamma(p+1) - \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} \gamma(p-(k-1))}{\sigma_p^2}.$$

Formule pour σ (facultatif). Rappelons que $\sigma_p^2 = \|E_{t,p}^+\|_2^2$. On écrit

$$\begin{aligned} E_{t,p+1}^+ &= X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) \\ &= X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) - \kappa_{p+1} E_{t-(p+1),p}^- \\ &= E_{t,p}^+ - \kappa_{p+1} E_{t-(p+1),p}^-, \end{aligned}$$

ce qui donne, par le théorème de Pythagore,

$$\sigma_{p+1}^2 = \|E_{t,p+1}^+\|_2^2 = \|E_{t,p}^+\|_2^2 + \kappa_{p+1}^2 \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2 - 2\kappa_{p+1} \langle E_{t,p}^+, E_{t-(p+1),p}^- \rangle.$$

Comme $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \perp E_{t-(p+1),p}^-$ on a, grâce aux formules de κ_{p+1} et $\|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2$,

$$\begin{aligned} \langle E_{t,p}^+, E_{t-(p+1),p}^- \rangle &= \langle X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}), E_{t-(p+1),p}^- \rangle \\ &= \langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle \\ &= \kappa_{p+1} \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2 \\ &= \kappa_{p+1} \sigma_p^2, \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient d'un calcul déjà effectué plus haut, d'où enfin

$$\sigma_{p+1}^2 = \sigma_p^2 (1 - \kappa_{p+1}^2).$$

□

5.5 Algorithme de Gram-Schmidt (ou des innovations)

La prédiction linéaire optimale ne doit pas être confondue avec la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, que nous étudions à présent. Dans cette section, $(X_n)_{n \geq 1}$ est un processus du second ordre de moyenne nulle, pas forcément stationnaire. Pour simplifier, on note, dans toute cette section, pour tout $n \geq 0$,

$$H_n := \text{vect}\{X_1, \dots, X_n\} \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 := \|X_{n+1} - \text{proj}(X_{n+1}, H_n)\|_2^2,$$

avec la convention naturelle $H_0 := \{0\}$. Les vecteurs $(X_k - \text{proj}(X_k, H_{k-1}))_{k \geq 1}$ sont deux à deux orthogonaux dans L^2 car pour tous $1 \leq j < k \leq n$ on a

$$X_j - \text{proj}(X_j, H_{j-1}) \in H_j \subset H_{k-1} \perp X_k - \text{proj}(X_k, H_{k-1}).$$

Considérons la représentation suivante en termes orthogonaux :

$$\begin{aligned} H_n &= \text{vect}\{X_1, X_2 - \text{proj}(X_2, H_1), \dots, X_n - \text{proj}(X_n, H_{n-1})\} \\ &= \bigoplus_{1 \leq k \leq n}^\perp \text{vect}\{X_k - \text{proj}(X_k, H_{k-1})\} \\ &= \bigoplus_{1 \leq k \leq n}^\perp \text{vect}\{X_{n-k+1} - \text{proj}(X_{n-k+1}, H_{n-k})\}. \end{aligned}$$

Or la projection orthogonale sur la somme de sous-espaces deux à deux orthogonaux est égale à la somme des projections orthogonales sur chacun des sous-espaces. Ici les sous-espaces sont tous de dimension 1. Il existe donc un vecteur de coefficients déterministe $\theta_n = (\theta_{n,1}, \dots, \theta_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\text{proj}(X_{n+1}, H_n) = \sum_{k=1}^n \theta_{n,k} (X_{n-k+1} - \text{proj}(X_{n-k+1}, H_{n-k})).$$

La numérotations des coordonnées de θ_n est similaire à celle des φ_p : on part de X_n , proche de X_{n+1} , pour arriver enfin à X_1 . Le calcul des projets orthogonaux successifs peut être mené en utilisant l'**algorithme de Gram-Schmidt**. Cet algorithme, qui date du dix-neuvième siècle, est purement hilbertien. Nous l'appliquons ici à l'exemple particulier des processus stochastiques du second ordre (l'espace de Hilbert est L^2), où il est connu également sous le nom d'**algorithme des innovations**. Il est disponible pour tout processus du second ordre, stationnaire ou pas, et ne repose donc pas sur la nature Toeplitz de la matrice de covariance des processus stationnaires, contrairement à l'algorithme de Levinson-Durbin.

Théorème 5.10 : Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ un processus du second ordre de moyenne nulle, **pas forcément stationnaire**. Soit $\gamma(j, k) = \text{Cov}(X_j, X_k) = \mathbb{E}(X_j X_k) = \langle X_j, X_k \rangle$. Si la matrice

$$(\gamma(j, k))_{1 \leq j, k \leq n}$$

est inversible pour tout $n \geq 1$, alors les suites $(\sigma_n^2)_{n \geq 0}$ et $(\theta_n)_{n \geq 1}$ sont calculables **par**

récurrence à partir de $n = 1$ et $\sigma_0^2 = \gamma(1, 1)$ avec les formules :

$$\theta_{n,n-k} = \frac{\gamma(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} \sigma_j^2}{\sigma_k^2}$$

$$\sigma_n^2 = \gamma(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 \sigma_j^2,$$

où pour tout $n \geq 1$, le calcul se fait pour $k = 0$, puis $k = 1, \dots$, puis enfin $k = n - 1$.

Note : ne surtout pas apprendre ces formules par cœur !

Note : ici on utilise la convention $\sum_{\emptyset} = 0$.

Note : l'algorithme de Gram-Schmidt consiste à calculer successivement les coefficients θ_n de $\text{proj}(X_{n+1}, H_n)$ sur $X_1, X_2 - \text{proj}(X_2, H_1), \dots, X_n - \text{proj}(X_n, H_{n-1})$. Il est **récursif**. Il est cependant différent de l'algorithme de Levinson-Durbin, récursif aussi, qui consiste à calculer les coefficients φ_n de $\text{proj}(X_{n+1}, H_n)$ sur X_1, \dots, X_n .

Démonstration. Le théorème de Pythagore donne

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \|X_{n+1} - \text{proj}(X_{n+1}, H_n)\|_2^2 \\ &= \|X_{n+1}\|_2^2 - \|\text{proj}(X_{n+1}, H_n)\|_2^2 \\ &= \gamma(n+1, n+1) - \sum_{k=1}^n \theta_{n,k}^2 \sigma_{n-k}^2 \\ &= \gamma(n+1, n+1) - \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{n,n-k}^2 \sigma_k^2 \end{aligned}$$

qui est bien la formule annoncée pour σ_n^2 . La matrice covariance $(\gamma(j, k))_{1 \leq j, k \leq n+1}$ du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_{n+1}) est la matrice de Gram des vecteurs X_1, \dots, X_{n+1} dans L^2 . Elle est inversible ssi ces vecteurs sont linéairement indépendants, ce qui signifie que le parallélépipède engendré par X_1, \dots, X_{n+1} est de dimension pleine $n + 1$, ce qui signifie que ses hauteurs $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont > 0 . On peut donc diviser par σ_k^2 dans les formules sans souci. Établissons à présent la formule pour $\theta_{n,n-k}$. À nouveau grâce à la même orthogonalité, on obtient, pour tout $0 \leq k < n$,

$$\begin{aligned} \langle \text{proj}(X_{n+1}, H_n), X_{k+1} - \text{proj}(X_{k+1}, H_k) \rangle \\ = \sum_{k'=1}^n \theta_{n,k'} \langle X_{n-k'+1} - \text{proj}(X_{n-k'+1}, H_{n-k'}), X_{k+1} - \text{proj}(X_{k+1}, H_k) \rangle \\ = \theta_{n,n-k} \sigma_k^2. \end{aligned}$$

Or $\langle X_{n+1} - \text{proj}(X_{n+1}, H_n), X_{k+1} - \text{proj}(X_{k+1}, H_k) \rangle = 0$, et donc

$$\begin{aligned} \theta_{n,n-k} &= \frac{\langle X_{n+1}, X_{k+1} - \text{proj}(X_{k+1}, H_k) \rangle}{\sigma_k^2} \\ &= \frac{\gamma(n+1, k+1) - \langle X_{n+1}, \text{proj}(X_{k+1}, H_k) \rangle}{\sigma_k^2}. \end{aligned}$$

Dans cette formule, on peut remplacer les projections par l'expression suivante

$$\begin{aligned}\text{proj}(X_{k+1}, H_k) &= \sum_{j=1}^k \theta_{k,j} (X_{k+1-j} - \text{proj}(X_{k+1-j}, H_{k-j})) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} (X_{j+1} - \text{proj}(X_{j+1}, H_j))\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\theta_{n,n-k} &= \frac{\gamma(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \langle X_{n+1}, X_{j+1} - \text{proj}(X_{j+1}, H_j) \rangle}{\sigma_k^2} \\ &= \frac{\gamma(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} \sigma_j^2}{\sigma_k^2}.\end{aligned}$$

Ceci est bien la formule annoncée pour $\theta_{n,n-k}$ (par convention, $\sum_{\emptyset} = 0$). □

11 → 12

Exemple 5.11 : Processus MA(1)

Si X est un processus MA(1) solution de $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ où $Z \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$, alors

$$\gamma(j, k) = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{j=k} + \theta\sigma^2\mathbf{1}_{|j-k|=1}.$$

Le théorème 5.10 donne alors après calcul

$$\theta_{n,k} = \frac{\theta\sigma^2}{\sigma_{n-1}^2}\mathbf{1}_{k=1} \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = \sigma^2(1 + \theta^2) - \frac{\theta^2\sigma^4}{\sigma_{n-1}^2}\mathbf{1}_{n>0}.$$

Si $v_n := \sigma_n^2/\sigma^2$ alors $v_0 = 1 + \theta^2$, $v_{n+1} = 1 + \theta^2 - \theta^2/v_n$, et $\theta_{n,1} = \theta/v_{n-1}$, et le prédicteur linéaire optimal $\text{proj}(X_n, H_{n-1})$ vérifie donc la récurrence affine suivante :

$$\begin{aligned}\text{proj}(X_{n+1}, H_n) &= \sum_{k=1}^n \theta_{n,k} (X_{n+1-k} - \text{proj}(X_{n+1-k}, H_{n-k})) \\ &= \frac{\theta(X_n - \text{proj}(X_n, H_{n-1}))}{v_{n-1}}.\end{aligned}$$

5.6 Compléments

Définition 5.12 : Coefficient d'autocorrélation partielle

Le coefficient $\kappa_p (= \varphi_{p,p})$ de l'algorithme de Levinson-Durbin est appelé **coefficient d'autocorrélation partielle**.

Théorème 5.13 : Coefficient d'autocorrélation partielle

Pour tous $p \geq 0$ et $t \in \mathbb{Z}$,

$$\kappa_{p+1} (= \varphi_{p+1,p+1}) = \frac{\langle E_{t,p}^+, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t,p}^+\|_2 \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2} = \frac{\text{Cov}(E_{t,p}^+, E_{t-(p+1),p}^-)}{\sqrt{\text{Var}(E_{t,p}^+)} \sqrt{\text{Var}(E_{t-(p+1),p}^-)}}.$$

En particulier, on a $|\kappa_p| \leq 1$ (inégalité de Cauchy–Schwarz).

Note : $E_{t,p}^+$ et $E_{t-(p+1),p}^-$ sont relatives à des projections sur le même espace $H_{t-1,p}$.

Note : $\kappa_1 = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t-1})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)} \sqrt{\text{Var}(X_{t-1})}} = \rho(1)$ (fonction d'autocorrélation du processus).

Note : pour un AR(m) causal on trouve $\kappa_p = \varphi_{p,p} \mathbf{1}_{1 \leq p < m} + \varphi_m \mathbf{1}_{p=m}$.

Démonstration. La définition de κ_{p+1} donnée dans la preuve du théorème 5.9, le fait que $X_t = E_{t,p}^+ + \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$, et $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \in H_{t-1,p} \perp E_{t-(p+1),p}^-$, donnent

$$\kappa_{p+1} = \frac{\langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2} = \frac{\langle E_{t,p}^+, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2}.$$

Or la preuve du théorème 5.9 donne $\|E_{t,p}^+\|_2^2 = \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2 (= \sigma_p^2)$. □

CHAPITRE 6

Estimation (x_1)

Mots-clés : Estimation ; moyenne empirique ; autocovariance empirique.

Dans ce chapitre, $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire réel de moyenne μ et d'autocovariance γ . On cherche à estimer μ et γ à partir de l'observation de X_1, \dots, X_n . Pour cela, on construit des estimateurs, c'est-à-dire des fonctions mesurables de X_1, \dots, X_n , qui approchent les quantités d'intérêt, et dont on étudie les propriétés quand $n \gg 1$. Soulignons que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont dépendantes. Cependant, elles ont même moyenne, et la matrice de covariance du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) est de type Toeplitz : $\Gamma_{j,k} = \text{Cov}(X_j, X_k) = \gamma(j - k)$. Tout se passe comme si nous devions estimer le vecteur moyenne et la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) à partir d'un échantillon de taille 1. On tire partie de la stationnarité, qui fait chuter le nombre de paramètres : la moyenne (μ, \dots, μ) ne dépend que d'un seul paramètre μ au lieu de n paramètres en général, tandis que la matrice de covariance $\Gamma_n = (\gamma(j - k))_{1 \leq j, k \leq n}$ ne dépend que de n paramètres $\gamma(0), \dots, \gamma(n - 1)$ au lieu des $n(n - 1)/2$ paramètres en général. Principe général : on peut estimer un signal de petite dimension plongé dans un espace de grande dimension à condition d'avoir une information structurelle (stationnarité ici).

6.1 Estimation de la moyenne

L'estimateur naturel de la moyenne μ est la **moyenne empirique** définie par

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k.$$

Si $\hat{\theta}_n$ est un estimateur de θ alors on dispose de la **décomposition biais-variance** :

$$\mathbb{E}((\hat{\theta}_n - \theta)^2) = \text{Var}(\hat{\theta}_n) + (\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) - \theta)^2.$$

Autrement dit l'**écart quadratique moyen** est la somme de la variance (erreur statistique) et du carré du biais (erreur systématique). La moyenne empirique \bar{X}_n est un estimateur sans biais de $\theta = \mu$ car grâce à la propriété de stationnarité on a $\mathbb{E}(X_1) = \dots = \mathbb{E}(X_n) = \mu$, ce qui donne, grâce à la linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \mu.$$

6. ESTIMATION (x1)

Ainsi, la variance et l'écart quadratique moyen coïncident : $\text{Var}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}((\bar{X}_n - \mu)^2)$. Le biais de \bar{X}_n ne fait intervenir que les lois marginales de dimension 1 de X et n'est donc pas sensible à l'autocovariance.

On rappelle qu'un processus stationnaire $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **bruit blanc très fort** $\text{BB}(\mu, \sigma^2)$ lorsque les variables $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2 .

Théorème 6.1 : Estimation de la moyenne pour les BB très forts

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un $\text{BB}(\mu, \sigma^2)$ très fort alors la moyenne empirique \bar{X}_n vérifie :

1. Consistance forte : $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mu$;
2. Convergence dans L^2 à vitesse $1/\sqrt{n}$:

$$\|\bar{X}_n - \mu\|_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathbb{E}((\bar{X}_n - \mu)^2) = \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n};$$

3. Fluctuations asymptotiques gaussiennes de la version centrée et réduite :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu) = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X}_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

(les deux membres, droite et gauche, sont de moyenne 0 et de variance 1).

Démonstration.

1. Il s'agit de la loi forte des grands nombres. Elle reste vraie quand X est un bruit blanc fort, mais cela n'est pas évident ;
2. Il s'agit d'une conséquence de la stationnarité et de l'absence de corrélation :

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \text{Cov}(X_j, X_k) = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

La propriété reste vraie de manière évidente si $X \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$.

3. Il s'agit du théorème limite central.

□

La fluctuation gaussienne permet de construire des intervalles de confiance asymptotiques pour μ . La proximité non asymptotique de \bar{X}_n est quantifiable à l'aide d'inégalités de concentration de la mesure, comme celle de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall r > 0, \quad \mathbb{P}(|\bar{X}_n - \mu| > r) \leq \frac{\sigma^2}{nr^2}.$$

La majoration en $1/r^2$ peut être remplacée par une majoration exponentielle lorsque la loi commune des X_t possède des moments exponentiels finis. Cette inégalité permet de construire des intervalles de confiance non-asymptotiques.

D'autre part, il est possible de quantifier la vitesse de convergence des fluctuations vers la loi gaussienne. Si par exemple $\tau := \mathbb{E}(|X_1|^3) < \infty$, alors le théorème de Berry-Esseen affirme qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu) \leq t\right) - \mathbb{P}(Z \leq t) \right| \leq \frac{c\tau}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Lorsque σ n'est pas connu, les intervalles de confiance pour μ construits avec l'inégalité de Tchebychev ou avec la fluctuation asymptotique gaussienne ne sont pas utilisables car ils font intervenir σ . Si $\hat{\sigma}_n$ est un estimateur de σ tel que $\hat{\sigma}_n \rightarrow \sigma$ en probabilité quand $n \rightarrow \infty$, alors le lemme de Slutsky¹ permet de remplacer σ par $\hat{\sigma}_n$ dans le résultat de fluctuation asymptotique :

$$\frac{\sqrt{n}}{\hat{\sigma}_n} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Théorème 6.2 : Moyenne empirique et écart quadratique moyen

Soit X un processus stationnaire de moyenne μ et d'autocovariance γ .

1. Si $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$ alors

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}((\bar{X}_n - \mu)^2) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

c'est-à-dire

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \mu;$$

2. Si $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ c'est-à-dire si $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$, alors

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}((\bar{X}_n - \mu)^2) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h)}{n} = \frac{2\pi f(0)}{n}$$

c'est-à-dire

$$\|\bar{X}_n - \mu\|_2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi f(0)}{n}}$$

où f est la densité spectrale du processus X . En particulier, si $X = \mu + F_\alpha Z$ avec $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ et $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors

$$\text{Var}(\bar{X}_n) \sim \frac{\sigma^2}{n} \left(\sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h \right)^2.$$

Note : ici les observations X_1, \dots, X_n ne sont **pas indépendantes** en général.

Démonstration. Grâce à la stationnarité, on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(\bar{X}_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \mathbb{E}((X_j - \mu)(X_k - \mu)) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \gamma(j - k) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} (n - |h|) \gamma(h) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|h|}{n} \right) \gamma(h). \end{aligned}$$

1. Lemme de Slutsky : si $U_n \rightarrow c$ en probabilité avec c constante et si $V_n \rightarrow V$ en loi alors $f(U_n, V_n) \rightarrow f(c, V)$ en loi, pour toute fonction f continue. Exemple : $f(u, v) = uv$.

6. ESTIMATION (x1)

Si $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} |\gamma(h)| = 0$ (critère de Cesàro), d'où

$$\text{Var}(\bar{X}_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} |\gamma(h)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Si $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$, alors, par convergence dominée,

$$n\text{Var}(\bar{X}_n) = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} g_n(h) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h)$$

où $g_n(h) := \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h) \mathbf{1}_{-n < |h| < n}$ car pour tout $h \in \mathbb{Z}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(h) = \gamma(h)$ avec $|g_n(h)| \leq |\gamma(h)|$ et $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$. De plus le théorème 4.6 de Herglotz donne

$$\sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) = 2\pi \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ih0} \gamma(h) = 2\pi f(0).$$

Enfin, dans le cas d'un processus linéaire $X = \mu + F_\alpha Z$ avec $Z \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ et $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors $\gamma_X = \gamma_{X-\mu} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et par le théorème 4.12 :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_h = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+h} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{k, k' \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k'} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h \right)^2$$

□

Théorème 6.3 : Moyenne empirique et normalité asymptotique

Soit $X = \mu + F_\alpha Z$ un processus linéaire obtenu à partir d'un bruit blanc **très fort** $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$, et de coefficients $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tels que $\sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h \neq 0$, alors

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \tau^2) \quad \text{où} \quad \tau^2 = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) = \sigma^2 \left(\sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h \right)^2.$$

Cela permet de construire des intervalles de confiance (asymptotiques) pour μ , à condition toutefois de connaître τ , ou un estimateur de τ (lemme de Slutsky).

Démonstration. On se contente ici du cas où Z est gaussien. Dans ce cas,

$$X_t = \mu + \sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h Z_{t-h} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2 \sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h^2\right)$$

et surtout

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \sim \mathcal{N}\left(0, \sum_{|h| < n} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h)\right).$$

Or pour les variables aléatoires gaussiennes centrées, la convergence en loi est équivalente à la convergence de la variance, ce qui est immédiat en utilisant les fonctions caractéristiques. Au delà du cas gaussien, on procède également en utilisant les fonctions caractéristiques, mais il faut contrôler des termes de reste. □

6.2 Estimation de l'autocovariance

Dans le cas où les variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2 , si μ est connue alors l'estimateur naturel de la variance σ^2 est donné par $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)^2$, qui est convergent d'après la loi des grands nombres, et sans biais, tandis que si μ n'est pas connue alors $\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2$ est un estimateur sans biais.

Dans le cas d'un processus stationnaire $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ général, on estime l'autocovariance γ avec l'**autocovariance empirique** définie par

$$\hat{\gamma}_n(h) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-h} (X_{k+h} - \bar{X}_n)(X_k - \bar{X}_n) & \text{si } 0 \leq h < n; \\ \hat{\gamma}_n(-h) & \text{si } -n < h \leq 0, \end{cases}$$

Ceci conduit à l'**autocorrélation empirique**, définie pour tout h tel que $|h| < n$ par

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}_n(h)}{\hat{\gamma}_n(0)}.$$

La **matrice de covariance empirique** $\hat{\Gamma}_n = (\hat{\gamma}(j-k))_{1 \leq j, k \leq n}$ est symétrique et de type positif. En général, l'autocovariance empirique est un estimateur biaisé. Lorsque X est un bruit blanc fort alors il est bien connu qu'on peut rendre $\hat{\gamma}$ sans biais en remplaçant le coefficient de normalisation $1/n$ par $1/(n-h-1)$. L'autocovariance empirique est asymptotiquement sans biais pour une large classe de processus linéaires.

Théorème 6.4 : Autocorrélation empirique et normalité asymptotique

Si X est de la forme $X = \mu + F_\alpha Z$ où $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$ très fort et $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et si $\mathbb{E}(Z_t^4) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ ou si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k| \alpha_k^2 < \infty$ alors pour tout $h > 0$ fixé,

$$\sqrt{n} \left(\begin{pmatrix} \hat{\rho}(1) \\ \vdots \\ \hat{\rho}(h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \rho(h) \end{pmatrix} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, T)$$

où la matrice de covariance asymptotique T est donnée par la **formule de Bartlett**

$$T_{j,k} = \sum_{r=1}^{\infty} [\rho(r+j) + \rho(r-j) - 2\rho(j)\rho(r)][\rho(r+k) + \rho(r-k) - 2\rho(k)\rho(r)].$$

En particulier $T_{k,k} = \sum_{r=1}^{\infty} [\rho(r+k) + \rho(r-k) - 2\rho(k)\rho(r)]^2$, et

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}(k) - \rho(k)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, T_{k,k}).$$

6.3 Application aux tests

Faisons l'hypothèse H suivante : les X_t sont i.i.d. d'espérance 0 et de variance σ^2 . Sous l'hypothèse H , on a $\rho(h) = \mathbf{1}_{h=0}$, ce qui donne $T_{j,k} = \mathbf{1}_{j=k}$, et par conséquent, d'après le théorème 6.4, $\sqrt{n}\hat{\rho}(1), \dots, \sqrt{n}\hat{\rho}(h)$ sont approximativement i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ quand n est grand. Il n'y a plus de σ car il s'agit ici de l'autocorrélation. Il en découle que sous l'hypothèse H , pour tout $0 < \alpha < 1$, quand $n \gg 1$, la probabilité que

$$\sqrt{n}\hat{\rho}(1), \dots, \sqrt{n}\hat{\rho}(h)$$

6. ESTIMATION (x1)

appartiennent tous à l'intervalle $I_{n,\alpha} = [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$ est proche de $(1 - \alpha)^h$, où $q_{1-\alpha/2}$ est le quantile $1 - \alpha/2$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $\alpha = 0.05$ on a $q_{1-0.05/2} = q_{0.975} = 1.96$.

Le test du Portmanteau consiste à considérer une statistique moyennisée

$$S_n = n \sum_{k=1}^h \hat{\rho}_k^2.$$

Sous l'hypothèse H , la variable S_n converge en loi quand $n \rightarrow \infty$ vers une loi $\chi^2(h)$. On peut donc choisir $0 < \alpha < 1$ et tester si S_n appartient à l'intervalle $]-\infty, q_{1-\alpha}]$ où $q_{1-\alpha}$ est le quantile $1 - \alpha$ de la loi $\chi^2(h)$.

Révisions et étude de cas (x1)

Ce chapitre n'est pas encore rédigé.

Rappels d'analyse et probabilités

B.1 Espaces de suites

On dit que $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est sommable lorsque $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n \leq k \leq n} |x_k| < \infty$. Dans ce cas, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{-m \leq k \leq n} x_k$ existe. Pour tout $p \in [1, \infty]$ on définit

$$\ell^p(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^p < \infty\} & \text{si } p < \infty \\ \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < \infty\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

C'est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach) pour la norme

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Ces espaces sont emboités de manière croissante : pour tous $p, q \in [1, \infty]$,

$$p \leq q \Rightarrow \ell^p(\mathbb{Z}) \subset \ell^q(\mathbb{Z}).$$

Une astuce mnémotechnique pour le retrouver rapidement consiste à penser que le terme général d'une série convergente est borné, de module < 1 pour $|k| \gg 1$.

L'inégalité de Hölder affirme que pour tous $p, q \in [1, \infty]$ avec $1/p + 1/q = 1$,

$$\forall x \in \ell^p(\mathbb{Z}), \forall y \in \ell^q(\mathbb{Z}), \quad \|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

où $(xy)_k = x_k y_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Il est parfois commode de définir les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ pour les suites à valeurs dans \mathbb{C} plutôt que dans \mathbb{R} . L'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ possède une structure d'espace de Hilbert donnée par le produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \bar{y}_k$. On peut noter si nécessaire $\ell_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{Z})$ pour indiquer qu'il s'agit de la version complexe.

B.2 Espaces de fonctions

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et \mathbf{L}^0 l'ensemble des variables aléatoires $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ (quotient par l'égalité presque sûre). Pour tout $p \in [1, \infty]$ on définit

$$\mathbf{L}^p = \begin{cases} \{X \in \mathbf{L}^0 : \mathbb{E}(|X|^p) < \infty\} & \text{si } p < \infty \\ \{X \in \mathbf{L}^0 : \text{ess sup } |X| < \infty\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

où $\text{esssup}(X) = \inf\{c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} : X \leq c \text{ p.s.}\}$. L'ensemble L^p est un espace vectoriel normé complet (on dit espace de Banach) pour la norme

$$\|X\|_p := \begin{cases} \mathbb{E}(|X|^p)^{1/p} & \text{si } p < \infty \\ \text{ess sup}(|X|) & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

L'inégalité de Hölder affirme que si $X \in L^p$ et $Y \in L^q$ avec $p, q \in [1, \infty]$ vérifiant $r = 1/(1/p + 1/q) \geq 1$ avec la convention $1/\infty = 0$ et $1/0 = \infty$, alors $XY \in L^r$ et

$$\|XY\|_r \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

En posant $Y = 1 \in L^q$ pour tout $q \in [1, \infty]$ on obtient que les espaces sont emboités de manière décroissante : pour tous $p, q \in [1, \infty]$, si $p \leq q$ alors $L^q \subset L^p$ (pour le retrouver rapidement, penser au fait que toute v.a. bornée est intégrable). Pour $p = q = 1/2$ on obtient $r = 1/(1/p + 1/q) = 1$ et l'inégalité de Hölder devient :

$$\forall X, Y \in L^2, \quad XY \in L^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(|XY|) = \|XY\|_1 \leq \|X\|_2 \|Y\|_2.$$

Notons que $\ell^p(\mathbb{Z}) = L^p(\mathbb{Z})$ où \mathbb{Z} est muni de la tribu de ses parties et de la mesure de comptage. D'autre part, tout comme pour les espaces ℓ^p , il est parfois commode de définir les espaces L^p pour les fonctions à valeurs dans \mathbb{C} plutôt que dans \mathbb{R} , et on peut noter si nécessaire $L_{\mathbb{C}}^p$ pour indiquer qu'il s'agit de la version complexe.

L'inégalité précédente permet de définir l'application

$$(X, Y) \in L^2 \times L^2 \mapsto \langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY) \in \mathbb{R}.$$

Elle constitue un produit scalaire qui fait de L^2 un espace de Hilbert. L'inégalité de Cauchy–Schwarz affirme que pour tous $X, Y \in L^2$,

$$|\mathbb{E}(XY)| = |\langle X, Y \rangle| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}(|X|^2)} \sqrt{\mathbb{E}(|Y|^2)}.$$

Le théorème de Pythagore s'écrit

$$\|X + Y\|_2^2 = \|X\|_2^2 + \|Y\|_2^2 + 2\langle X, Y \rangle.$$

ce qui donne l'identité du parallélogramme :

$$\|X - Y\|_2^2 + \|X + Y\|_2^2 = 2\|X\|_2^2 + 2\|Y\|_2^2.$$

L'inégalité de Jensen affirme que si φ est convexe alors pour tout $X \in L^1$, on a

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Exemples courants : $|\mathbb{E}(X)|^p \leq \mathbb{E}(|X|^p)$, pour tout $p \geq 1$, $e^{\mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}(e^X)$ si X réelle, $-\log(\mathbb{E}(X)) \leq -\mathbb{E}(\log(X))$ si $X > 0$.

Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans K sont indépendantesssi

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$$

pour tous $f, g \in \mathcal{F}$, où \mathcal{F} est une classe de fonctions assez grande et pour lesquelles toutes les espérances dans cette formule ont un sens. Par exemple, on peut prendre pour \mathcal{F} l'ensemble des fonctions mesurables bornées, ou l'ensemble des fonctions mesurables positives. On peut aussi prendre les fonctions trigonométriques (fonctions caractéristiques!).

Si $X, Y \in L^2$ alors $XY \in L^1$, grâce à l'inégalité de Cauchy–Schwarz. D'autre part, si $X, Y \in L^1$ sont indépendantes, alors $XY \in L^1$ car $\mathbb{E}|XY| = \mathbb{E}|X|\mathbb{E}|Y| < \infty$.

B.3 Covariance

La variance de $X \in L^2$ est définie par

$$\text{Var}(X) = \|X - \mathbb{E}(X)\|_2^2 = \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2) = \mathbb{E}(|X|^2) - |\mathbb{E}(X)|^2.$$

On a aussi la formule variationnelle

$$\text{Var}(X) = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|X - c\|_2^2 \quad \text{atteint pour } c = \mathbb{E}(X).$$

La covariance de $X, Y \in L^2$ est définie par

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \langle X - \mathbb{E}(X), Y - \mathbb{E}(Y) \rangle \\ &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

On a

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \quad \text{et} \quad \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y).$$

On dit que X et Y ne sont pas corrélées lorsque $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Si X et Y sont indépendantes alors X et Y ne sont pas corrélées, mais la réciproque est fausse en général, sauf si le couple (X, Y) est un vecteur gaussien.

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur aléatoire de \mathbb{C}^n alors

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \text{Cov}(X_j, X_k) = \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j) + \sum_{1 \leq j \neq k \leq n} \text{Cov}(X_j, X_k).$$

Géométriquement, pour les vecteurs aléatoires centrés de carré (du module) intégrable, covariance nulle signifie orthogonalité. Si X_1, \dots, X_n ne sont centrés, de variance unité, et non corrélées, alors $\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \|X_1 + \dots + X_n\|_2^2 = n$. Penser au fait que la diagonale $[(0, \dots, 0), (1, \dots, 1)]$ du cube $[0, 1]^n$ de \mathbb{R}^n a pour longueur \sqrt{n} .

B.4 Vecteur moyenne et matrice de covariance

Le **vecteur moyenne** μ_X et la matrice de covariance Γ_X d'un vecteur aléatoire (colonne) de \mathbb{R}^n sont définis par

$$\mu_X = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))^\top \quad \text{et} \quad \Gamma_X = (\text{Cov}(X_j, X_k))_{1 \leq j, k \leq n}.$$

La matrice de covariance Γ_X est réelle et symétrique.

Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est symétrique de type positif sur \mathbb{R} : pour tous indices j, k , tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$,

$$A(j, k) = A(k, j) \quad \text{et} \quad \langle Av, v \rangle = \sum_{1 \leq j, k \leq n} v_j v_k A(j, k) \geq 0;$$

2. A est symétrique de type positif sur \mathbb{C} : pour tous indices j, k , tout vecteur $v \in \mathbb{C}^n$,

$$A(j, k) = A(k, j) \quad \text{et} \quad \langle Av, v \rangle = \sum_{1 \leq j, k \leq n} v_j \overline{v_k} A(j, k) \geq 0;$$

3. A est symétrique et toutes ses valeurs propres sont ≥ 0 ;
4. A est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n ;
5. $A = LL^\top$ où $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire inférieure (décomposition Cholesky).

La décomposition de Cholesky est un cas particulier de la décomposition LU.

Le **spectre** $\text{spec}(A) \subset \mathbb{C}$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des valeurs propres de A . Les **Valeurs propres** de A sont les racines dans \mathbb{C} de son **polynôme caractéristique**

$$P(z) = \det(A - zI).$$

On a $\lambda \in \text{spec}(A)$ ssi

$$\ker(A - \lambda I) \neq \{0\},$$

c'est-à-dire ssi il existe un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$, appelé **vecteur propre** associé à λ , tel que $v \neq 0$ et $Av = \lambda v$. Le **théorème spectral** de l'algèbre linéaire assure que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique admet une base orthonormale de vecteurs propres réels : il existe une matrice orthogonale $O \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telle que $O^{-1} = O^\top$, telle que

$$D = O^\top AO = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad A = ODO^\top.$$

Ici les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A , tandis que les colonnes v_1, \dots, v_n de O sont les vecteurs propres orthonormés associés, et pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle Ax, x \rangle = \left\langle DO^\top x, O^\top x \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, v_k \rangle v_k.$$

Les **formules variationnelles de Rayleigh-Courant-Fischer** assurent que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique,

$$\min\{\lambda \text{ valeur propre de } A\} = \min_{x: \|x\|_2=1} \langle Ax, x \rangle$$

et

$$\max\{\lambda \text{ valeur propre de } A\} = \max_{x: \|x\|_2=1} \langle Ax, x \rangle.$$

Bibliographie

- [Ar] Y. Aragon. *Séries temporelles avec R* (bibliothèque d'étude 519.5 ARA) (disponible sur Internet)
- [Am] G. Ammar. *Classical foundations of algorithms for solving positive definite Toeplitz equations* CALCOLO (1996), volume 33, issue 1-2, pp 99–113 (disponible sur Internet)
- [C] A. Charpentier. *Cours de séries temporelles – Théorie et application* (disponible sur Internet)
- [LL] C. Lévy-Leduc. *Introduction à l'étude des séries temporelles* (disponible sur Internet)
- [OPV] G. Oppenheim, A. Philippe, M.-C. Viano. *Cours de séries temporelles* (dispo. sur Internet)
- [LMR] C. Lévy-Leduc, É. Moulines, F. Roueff. *Séries temporelles : théorie et méthodes* (dispo. sur Internet)
- [BD1] P. Brockwell, R. Davis. *Time Series : Theory and Methods* (bib. rech. 519.5 BRO)
- [BD2] P. Brockwell, R. Davis. *Intro. to time series and forecasting* (bib. rech. 519.5 BRO)
- [CC] J. Cryer, K.-S. Chan. *Time Series Analysis – With Applications in R* (bib. étu. 519.5 CRY)
- [BJ] G. Box, G. Jenkins. *Time Series Analysis – Forecasting and Control* (bib. rec. 519.5 BRO)

Index

A

- algorithme de Cholesky, 71
- algorithme de Gram-Schmidt, 77
- algorithme de Levinson-Durbin, 74
- algorithme des innovations, 77
- analyse harmonique, 61
- autocorrélation empirique, 85
- autocovariance empirique, 85

B

- black swan, 16
- bruit, 6
- bruit blanc, 13, 58
- bruit blanc faible, 13
- bruit blanc fort, 13
- bruit blanc moyennement fort, 13
- bruit blanc très fort, 13

C

- chronogramme, 2
- coefficient d'autocorrélation partielle, 79
- coefficient de Fourier, 61
- coefficients de Fourier, 51
- cygnes noirs, 16

D

- décomposition biais-variance, 81
- décomposition de Cholesky, 19, 62, 71
- Décomposition de Wold, 21
- densité spectrale, 54, 55

E

- écart quadratique moyen, 81
- erreur de prédiction progressive, 66
- erreur de prédiction rétrograde, 74
- espérance, 11
- estimation par moindre carrés, 5

F

- factorisation de Cholesky, 71
- filtrage, 34
- filtrage linéaire, 23
- filtre spectral, 34
- fonction d'autocorrélation, 12
- fonction d'autocovariance, 11, 12

fonction moyenne, 11

formule de Bartlett, 85

formules variationnelles de Rayleigh-Courant-Fischer, 92

fortement stationnaire, 7

fraction rationnelle, 31, 36, 39, 40, 43, 58, 59

H

- hermitienne, 53, 54
- hétéroscléasticité, 3
- homomorphisme d'algèbres, 29

I

- innovation, 20
- irréductible, 40

L

- lissage par convolution, 23

M

- marche aléatoire, 17
- matrice de covariance, 11
- matrice de covariance empirique, 85
- matrice de Toeplitz, 18
- mémoire longue, 16
- mesure signée finie, 51
- mesure spectrale, 54, 55
- moindres carrés, 5, 65
- moyenne empirique, 81
- moyenne mobile, 16

O

- opérateur, 6
- opérateur différence, 6
- opérateur différence d'ordre n , 6
- opérateur différence saisonnier, 6, 7
- opérateur retard, 6

P

- polynôme caractéristique, 92
- polynômes trigonométriques, 52
- prédicteur direct, 65
- prédicteur progressif, 65
- processus AR, 16, 35
- processus ARIMA, 7

processus ARMA, 7, 16, 35
processus ARMA(p, q), 35
processus causal, 40
Processus déterministe, 19
processus déterministe, 21
processus détestiminstre, 69
processus du second ordre, 11
processus faiblement stationnaire, 11
processus gaussien, 13
processus harmonique, 13, 20, 56
processus inversible, 40
processus linéaire, 26
processus MA, 16, 35
processus markovien, 16
processus régulier, 69
processus SARIMA, 7
processus stationnaire, 5, 11
Processus stationnaire non déterministe, 20
processus stochastique, 7
produit de Cauchy, 29
produit de convolution, 28

R

résidus d'estimation, 5

S

saisonnalité, 6
série chronologique, 1
série de Fourier, 61
série temporelle, 1
séries temporelles à mémoire longue, 45
spectre (d'une matrice), 92
stationnaire, 6
suite récurrente aléatoire, 16
suite sommable, 24
symétrique de type positif, 18
symétriques de type positif, 51
synthèse spectrale, 61

T

tendance, 5
théorème de Filtrage, 24
théorème de Herglotz, 54
théorème de Wiener-Khinchine-Kolmogorov, 34
théorème spectral, 92
trajectoire du processus, 7
transformée de Fourier, 61

V

valeur propre, 92
vecteur moyenne, 91
vecteur propre, 92

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Exercices de travaux dirigés

Année 2016/2017



Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine

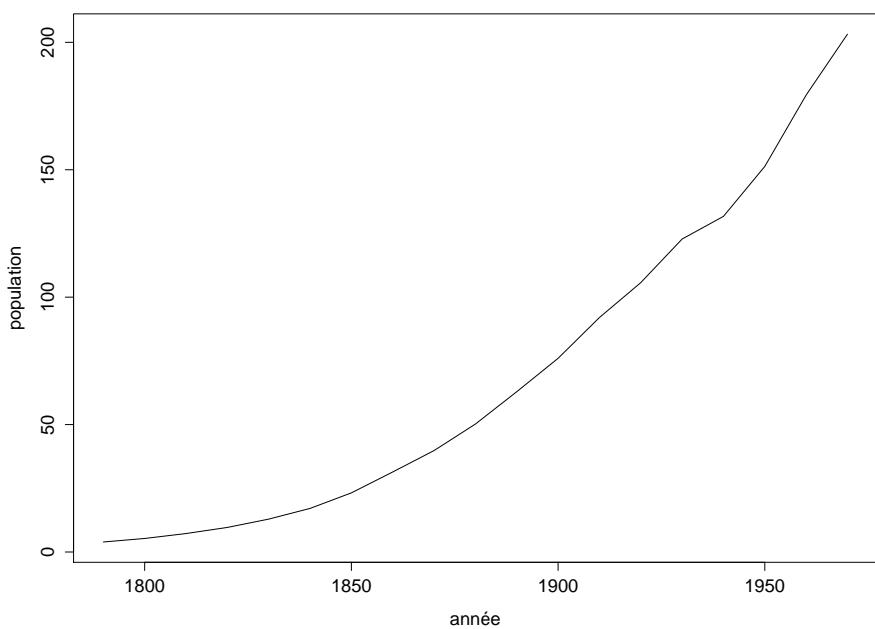


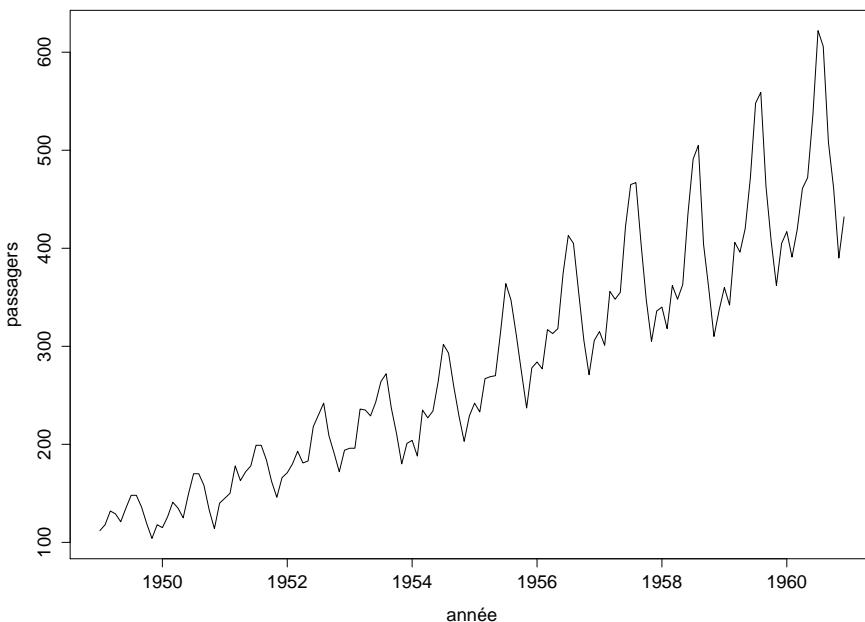
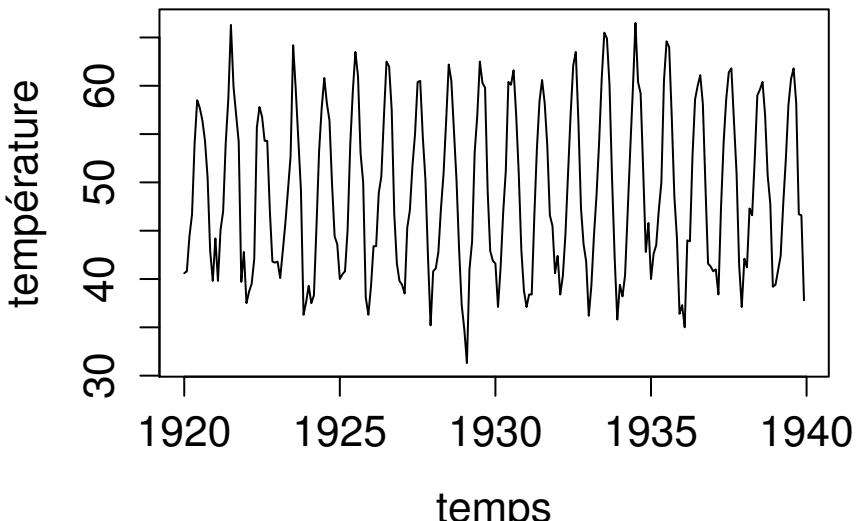
- Auteurs principaux des exercices et solutions :
 - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
 - Céline Duval (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
 - Céline Lévy-Leduc (enseignant Paris-Dauphine, 2010–2012)
- Contributeurs ou chasseurs de coquilles :
 - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
 - Stéphane Ivanoff (enseignant Paris-Dauphine, 2013–2015)
 - Camille Pagnard (enseignant Paris-Dauphine, 2014–)
 - Dylan Possamaï (enseignant Paris-Dauphine, 2012–)
 - Tan, Xiaolu (enseignant, Paris-Dauphine, 2016–)

FEUILLE D'EXERCICE 1

Tendance, stationnarité, autocovariance, opérateur retard

Exercice 1.1 (Quelques exemples). Pensez-vous que les données représentées dans les trois figures suivantes (population des USA, température à Nottingham, nombre de passagers aériens) sont les réalisations de processus stationnaires ?





Pensez-vous qu'une droite horizontale est la réalisation d'un processus stationnaire ? Même question pour une sinusoïde.

Exercice 1.2 (Stationnarité et stationnarité stricte). Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, et $Y = X\mathbf{1}_{U=1} - X\mathbf{1}_{U=0}$ où U est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X .

1. Montrer que X et Y ont même loi ;
2. Montrer que $\text{Cov}(X, Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes ;
3. En déduire un processus qui est bruit blanc (faible) mais pas bruit blanc fort.

Exercice 1.3 (Marche aléatoire). Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire de dérive μ : $X_t = \mu + X_{t-1} + Z_t$ pour tout $t \geq 1$, où $X_0 = 0$ et où $(Z_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est un bruit blanc fort.

1. Calculer la fonction d'autocovariance γ_X de X . Est-ce que X est stationnaire ?
2. Le processus $(\Delta X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est-il stationnaire ?

Exercice 1.4 (Somme de processus stationnaires). Soient $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires, décorrélés (c'est-à-dire que $\text{cov}(X_t, Y_s) = 0$ pour tous s, t). Montrer que le processus $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $Z_t = X_t + Y_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire, et exprimer son autocovariance en fonction de celles de X et de Y .

Exercice 1.5 (Stationnarité de processus). Trouver les processus stationnaires parmi les processus suivants :

1. $X_t = Z_t$ si t est pair, et $X_t = Z_t + 1$ si t est impair, avec $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stationnaire ;
2. $X_t = Z_1 + \dots + Z_t$ où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort ;
3. $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $\theta \in \mathbb{R}$ une constante ;
4. $X_t = Z_t Z_{t-1}$ où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort ;
5. $Y_t = (-1)^t Z_t$ et $X_t = Y_t + Z_t$ où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort.

Exercice 1.6 (Processus harmonique). Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ le processus défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$ où A et B sont des variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance σ^2 , et où $\theta \in \mathbb{R}$ est une constante. Le processus X est-il stationnaire ? Calculer sa fonction d'autocovariance.

Exercice 1.7 (Propriété de la fonction d'autocovariance).

1. Montrer que la fonction d'autocovariance $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ d'un processus stationnaire est paire et de type positif (en fait l'équivalence est vraie mais admise ici) ;
2. Montrer que la fonction γ définie par $\gamma(0) = 1$, $\gamma(h) = \rho$ pour $|h| = 1$ et $\gamma(h) = 0$ sinon, est une fonction d'autocovariance ssi $|\rho| \leq 1/2$. Donner un exemple de processus stationnaire ayant une telle fonction d'autocovariance ;
3. Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions d'autocovariance d'un processus stationnaire ?
 - a) $\gamma(h) = 1$ si $h = 0$ et $\gamma(h) = 1/h$ si $h \neq 0$;
 - b) $\gamma(h) = 1 + \cos(h\pi/2)$;
 - c) $\gamma(h) = (-1)^{|h|}$.

Exercice 1.8 (Propriété de la fonction d'autocovariance – Bis). On pose

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \dots, \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \rho \\ \rho & \cdots & \rho & 1 \end{pmatrix}, \dots$$

1. À quelle condition sur ρ la matrice σ_n est-elle une matrice de covariance pour tout n (indication : décomposer $\sigma_t = \alpha I + A$ où A a un spectre simple à calculer) ;
2. Construire un processus stationnaire de matrices d'autocovariance $(\sigma_n)_{n \geq 1}$

Exercice 1.9 (Estimation de tendance et de saisonnalité). On considère le processus modélisé par $Y_t = \beta t + s_t + U_t$ où $\beta \in \mathbb{R}$, où s_t est une fonction périodique de période 4, et où $U = (U_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.

1. le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ?
2. Montrer que $Z = (1 - B^4)Y$ est stationnaire et calculer son autocovariance en fonction de celle de U .

Exercice 1.10 (Tendance). Soit X un processus avec tendance polynomiale d'ordre k :

$$X_t = \sum_{i=0}^k a_i t^i + U_t,$$

où les coefficients a_i appartiennent à \mathbb{R} et (U_t) est un processus stationnaire.

1. Montrer que le processus obtenu par l'application de $(1 - B)$ à (X_t) , où B désigne l'opérateur retard, admet une tendance polynomiale d'ordre $k - 1$. Que se passe-t-il si on applique $(1 - B)^p$ à (X_t) pour $p \in \mathbb{N}$?
2. On considère maintenant le processus $Y_t = X_t + S_t$ où S_t est une fonction d -périodique. Comment rendre le processus (Y_t) stationnaire ?

FEUILLE D'EXERCICE 2

Filtrage

Exercice 2.1 (Filtrage). On veut montrer la proposition suivante : si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire, et si $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une suite de réels absolument sommables c'est-à-dire que $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| < \infty$, alors $Y_t = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \sum_{i=-n}^m a_i X_{t-i}$ définit un nouveau processus stationnaire. Ceci nécessite de préciser en quel sens est prise la limite.

1. Montrer que $Y_t \in L^1$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En déduire que Y_t est bien défini p.s. ;
2. Montrer que $Y_t \in L^2$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$;
3. Montrer que (Y_t) est un processus stationnaire tel que :

$$\mathbb{E}(Y) = \mu_Y = \mu_X \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i, \quad \text{et} \quad \gamma_Y(h) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h + j - i).$$

En déduire la preuve de la proposition exprimée au départ.

Exercice 2.2 (Géométrique et processus MA). Soit (Z_t) un $\text{BB}(0, \sigma^2)$ et

$$X_t = \sum_{i=0}^t \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}).$$

1. Discuter selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ de la stationnarité de (X_t) ;
2. Lorsque $\lambda \in]-1, 1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire (Y_t) tel que

$$(X_t - Y_t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Exercice 2.3 (Processus AR). On recherche un processus (X_t) solution de l'équation d'autorégression $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ où (Z_t) est un bruit blanc de variance σ^2 .

1. Lorsque $|\phi| < 1$, montrer qu'il existe une unique solution stationnaire ;
2. À partir de cette solution stationnaire, montrer qu'il est possible de construire une infinité de solutions non-stationnaires ;
3. Dans le cas où $|\phi| > 1$, montrer l'existence d'une unique solution stationnaire à cette équation. Cette solution est-elle causale ?
4. Lorsque $|\phi| = 1$, montrer qu'il ne peut pas exister de solution stationnaire.

Exercice 2.4 (Filtre gaussien). Soit $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible, c'est-à-dire des variables aléatoires centrées, réduites, et décorrélatées, et $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire $X_t := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ est bien définie dans L^2 et est de variance $\|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2$. Montrer que si de plus $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un vecteur gaussien alors $X_t \sim \mathcal{N}(0, \|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2)$.

Exercice 2.5 (Filtre à queues lourdes).

1. Pour tout réel $\alpha > 0$, on dit qu'une mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} est **α -stable** lorsque pour tout entier $n \geq 1$ et toutes variables aléatoires X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi μ , la variable aléatoire $n^{-1/\alpha}(X_1 + \dots + X_n)$ est également de loi μ . Montrer que les lois gaussiennes centrées sont 2-stables et que les lois de Cauchy sont 1-stables ;
2. Montrer que si X_1 est une v.a.r. telle qu'il existe des réels $c, \alpha > 0$ tels que $\Phi_X(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}) = \mathrm{e}^{-c|t|^\alpha}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors la loi de X_1 est α -stable. On note $\mu_{\alpha,c}$ sa loi. Montrer que si X_1, \dots, X_n sont des v.a.r. indépendantes de lois $\mu_{\alpha,c_1}, \dots, \mu_{\alpha,c_n}$ alors pour tous $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$, la v.a.r. $\beta_1 X_1 + \dots + \beta_n X_n$ suit la loi $\mu_{\alpha,|\beta_1|^{\alpha}c_1+\dots+|\beta_n|^{\alpha}c_n}$;
3. Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de même loi $\mu_{\alpha,c}$ avec $c > 0$ et $\alpha \geq 1$. Montrer que pour tout $\eta \in \ell^\alpha(\mathbb{Z})$ et tout $t \in \mathbb{Z}$, il fait sens de dire que $F_\eta Z_t := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \eta_k Z_{t-k}$ suit la loi $\mu_{\alpha,c\|\eta\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}^\alpha}$. Que se passe-t-il pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 1$? Peut-on définir le filtre $(F_\eta Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ en tant que processus stationnaire ?

Exercice 2.6 (Filtre de Kalman-Bucy – Tiré des petites classes de l'École Polytechnique).

1. Montrer que si $(X, Z, Z_0, \dots, Z_{n-1})$ est un vecteur gaussien de \mathbb{R}^{n+2} tel que

$$\text{Loi}(X | Z_0, \dots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}(\mu, \gamma^2) \quad \text{et} \quad \text{Loi}(Z | X, Z_0, \dots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}(X, \delta^2)$$

alors

$$\text{Loi}(X | Z, Z_0, \dots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}\left(\rho^2\left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{Z}{\delta^2}\right), \rho^2\right) \quad \text{où} \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta^2};$$

2. Un mobile se déplace sur \mathbb{R} avec un mouvement théoriquement perturbé défini par

$$X_0 = 0, \quad X_n = a + X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geq 1,$$

où $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. L'observation du mobile est entachée d'erreur :

$$Y_n = X_n + \eta_n, \quad n \geq 1,$$

où $(\eta_n)_{n \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$, indépendantes de $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$. Notre objectif est de construire la meilleure estimation de X_n étant donnée l'information $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ associée aux observations, ainsi que l'erreur associée à cette estimation :

$$\hat{X}_n := \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_n), \quad \rho_n^2 := \mathbb{E}((X_n - \hat{X}_n)^2).$$

- a) Déterminer la loi conditionnelle $\text{Loi}(X_1 | Y_1)$ et en déduire \hat{X}_1 et ρ_1 ;
- b) Montrer que $\text{Loi}(X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(\hat{X}_{n-1}, \rho_{n-1}^2)$;
- c) En déduire les lois conditionnelles $\text{Loi}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})$ et $\text{Loi}(X_n | \mathcal{F}_n)$;
- d) En déduire que

$$\hat{X}_n = \rho_n^2 \left(\frac{a + \hat{X}_{n-1}}{\sigma^2 + \rho_{n-1}^2} + \frac{Y_n}{\alpha^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_n^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\sigma^2 + \rho_{n-1}^2}.$$

Exercice 2.7 (Filtre de Kalman-Bucy multivarié – Tiré de Pardoux (2008) § 5.5.2). On s'intéresse à la trajectoire à temps discret d'un point mobile dans \mathbb{R}^d , modélisée par une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d . On dispose d'observations instrumentales bruitées modélisées par une suite $(Y_n)_{n \geq 0}$ de vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^k . On modélise la loi de ces suites en utilisant les équations de récurrence linéaires de premier ordre suivantes :

$$X_n = AX_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad Y_n = HX_n + \eta_n, \quad n \geq 1,$$

où les matrices $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ sont déterministes, les vecteurs aléatoires $X_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2, \dots$ sont mutuellement indépendants, avec $X_0 \sim \mathcal{N}(m_0, P_0)$, et, pour tout $n \geq 1$, $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, Q)$ et $\eta_n \sim \mathcal{N}(0, R)$, avec R inversible (donc symétrique définie positive).

1. Complément de Schur en algèbre linéaire : dans une matrice par blocs

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \quad \text{avec } D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) \text{ inversible}$$

on appelle complément de Schur du bloc D la matrice $S := A - BD^{-1}C$. En utilisant

$$L := \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix},$$

montrer que M est inversible si et seulement si S est inversible. En utilisant

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

montrer que lorsque M est symétrique alors M est définie positive si et seulement si le bloc D et son complément de Schur S le sont ;

2. Lois conditionnelles des vecteurs gaussiens : montrer que si

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{21} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right)$$

est un vecteur aléatoire gaussien de \mathbb{R}^{d+k} avec Σ_{22} inversible alors

$$\text{Loi}(X | Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \hat{\Sigma})$$

où

$$\hat{X} := \bar{X} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y}) \quad \text{et} \quad \hat{\Sigma} := \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}.$$

3. Lois conditionnelles des vecteurs gaussiens : montrer que si $(X, Y, Z)^\top$ est un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^{d+k+\ell}$ avec Y et Z indépendants alors

$$\text{Loi}(X | Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \hat{\Sigma}) \quad \text{et} \quad \text{Loi}(X | Y, Z) = \mathcal{N}(\hat{\tilde{X}}, \hat{\tilde{\Sigma}})$$

où \hat{X} et $\hat{\Sigma}$ sont comme dans la question précédente, et où, en notant $\bar{X} := \mathbb{E}(X)$,

$$\hat{\tilde{X}} := \hat{X} + \mathbb{E}(X - \bar{X} | Z) \quad \text{et} \quad \hat{\tilde{\Sigma}} := \hat{\Sigma} - \text{Cov}(\mathbb{E}(X - \bar{X} | Z)).$$

4. Filtrage : montrer que $\text{Loi}(X_n | Y_1, \dots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \Lambda_n)$ pour tout $n \geq 1$, où les suites $(\hat{X}_n)_{n \geq 0}$ et $(\Lambda_n)_{n \geq 0}$ vérifient les équations de récurrence

$$\hat{X}_{n+1} = A\hat{X}_n + \Sigma_n H^\top (H\Sigma_n H^\top + R)^{-1} (Y_{n+1} - HA\hat{X}_n)$$

$$\Lambda_{n+1} = \Sigma_n - \Sigma_n H^\top (H\Sigma_n H^\top + R)^{-1} H\Sigma_n$$

où $\Sigma_n := A\Lambda_n A^\top + Q$, avec les conditions initiales $\hat{X}_0 = m_0$ et $\Lambda_0 = P_0$;

5. La méthode est-elle utilisable si $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ et $(\eta_n)_{n \geq 1}$ ne sont plus stationnaires ?

3

FEUILLE D'EXERCICE

Équations et processus ARMA

Exercice 3.1 (ARMAda ou ARMArtial). Soit (Z_t) un bruit blanc. Pour chacune des équations suivantes, existe-t-il un processus stationnaire (X_t) solution ?

1. $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t$;
2. $X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}$;
3. $X_t + 0.6X_{t-2} = Z_t + 1.2Z_{t-1}$;
4. $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = Z_t$.

Exercice 3.2 (ARMA(1,1)). On considère l'équation

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

où (Z_t) est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 et ϕ et θ sont des réels.

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il un processus (X_t) stationnaire solution de l'équation ci-dessus ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ? inversible ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution (X_t) sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.
4. Calculer la fonction d'autocorrélation de (X_t) .

Exercice 3.3 (Inspiré de l'examen partiel 2016-2017). Soit $Z \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$.

1. Préciser les polynômes Φ et Θ de l'équation ARMA(1, 2)

$$X_t - 3X_{t-1} = Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

et montrer qu'il existe une unique solution stationnaire ;

2. Cette solution est-elle causale ? Est-ce que Φ s'annule sur le disque unité ?
3. Calculer explicitement cette solution en fonction de Z ;
4. Cette solution est-elle inversible ?

Exercice 3.4 (Inspiré de l'examen partiel 2016-2017). Soit $p \geq 1$ un entier et $Z \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$.

1. Préciser les polynômes Φ et Θ de l'équation AR(p) $X_t - X_{t-p} = Z_t$. Est-ce que Φ s'annule sur le cercle unité ? Peut-on en déduire que l'équation n'a pas de solution ?

3. ÉQUATIONS ET PROCESSUS ARMA

2. Démontrer par l'absurde que l'équation n'a pas de solution stationnaire.

Exercice 3.5 (Produit d'ARMA). On considère (X_t) et (Y_t) deux processus centrés et indépendants *i.e.* X_t et Y_s sont indépendants pour tous t, s . On définit le processus (Z_t) par $Z_t = X_t Y_t$. Soient (ϵ_t) et (η_t) deux bruits blancs. On suppose que (X_t) et (Y_t) sont des ARMA(1,1) de paramètres respectifs ϕ_1, θ_1 et ϕ_2, θ_2 et de bruits blancs respectifs $(\epsilon_t), (\eta_t)$.

1. À quelles conditions peut-on écrire $X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j \epsilon_{t-j}$ et $Y_t = \sum_{j \geq 0} \tilde{\psi}_j \eta_{t-j}$? Supposons ces conditions vérifiées dans la suite;
2. À quelles conditions X et Y sont inversibles? Supposons ces conditions vérifiées dans la suite;
3. Montrer que les processus (ϵ_t) et (η_t) sont décorrélés;
4. Calculer la fonction d'autocorrélation du processus (Z_t) .

Exercice 3.6 (ARMA(2,1)). On considère le processus (X_t) solution de

$$(1 - B + B^2/4)X_t = (1 + B)Z_t,$$

où (Z_t) est un bruit blanc de variance σ^2 .

1. Montrer que l'on peut écrire X_t sous la forme $X_t = \sum_{k \geq 0} \psi_k Z_{t-k}$.
2. Calculer les coefficients $(\psi_k)_{k \geq 0}$.
3. Calculer la fonction d'autocovariance de (X_t) .

Exercice 3.7 (Solution MA(1) d'une équation AR(∞) à filtre exponentiel). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |\lambda| < 1$ et soit $\varphi_k = -\lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit Z un BB($0, \sigma^2$). Montrer que processus MA(1) $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$ est solution de l'équation AR(∞)

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k}.$$

Notons qu'en quelque sorte, dans cette équation AR(∞), on a $\Theta(z) = 1$, tandis que $\Phi(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k = 1/(1 - \lambda z)$ (pour $|\lambda z| < 1$) n'est pas un polynôme. L'équation $\Phi(z) = 0$ en z n'a pas de solution. La formule $\Theta(z)/\Phi(z) = 1 - \lambda z$ suggère bien que le processus linéaire $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$, qui est un MA(1), est solution de l'équation AR(∞). Nous savions qu'un AR(1) causal est un MA(∞). Nous avons le cas dual ici : un AR(∞) causal est un MA(1). Plus généralement, l'analyse des ARMA(∞, ∞) peut être menée en étudiant les inverses des suites sommables à support infini, ce qui conduit à utiliser des outils d'analyse complexe comme les fonctions méromorphes et les séries de Laurent.

Exercice 3.8 (Processus stationnaires vectoriels – Tiré de l'examen final 2015-2016). Soit $d \geq 1$ un entier et $\sigma^2 > 0$ un réel. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, soit $Z_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})^\top$ un vecteur aléatoire centré de \mathbb{R}^d . On suppose que pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$ et tous $j, k \in \{1, \dots, d\}$ on a

$$\mathbb{E}(Z_{s,j} Z_{t,k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{s=t, j=k}.$$

1. Soit $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que $\|\Phi\|_{2 \rightarrow 2} := \max_{x \in \mathbb{R}^d: \|x\|_2=1} \|\Phi x\|_2 < 1$. Construire un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs vectorielles solution de l'équation AR(1) vectorielle $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Démontrer qu'il est unique en un sens à définir;
2. Soit X le processus obtenu dans la question précédente. Supposons que Φ est diagonale. Donner une condition suffisante sur Z pour que les processus marginaux $(X_{t,1})_{t \in \mathbb{Z}}, \dots, (X_{t,d})_{t \in \mathbb{Z}}$ soient indépendants (justifier la réponse).

Mesure et densité spectrales

Sauf mention explicite du contraire, les suites et les coefficients sont réels.

Exercice 4.1 (Processus AR(1)). Soit (X_t) une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ où $(Z_t) \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ avec $|\varphi| \neq 1$.

1. Calculer la densité spectrale du bruit blanc Z ;
2. Démontrer que si Y est un processus stationnaire et si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors la mesure spectrale ν_{F_α} du filtre $F_\alpha Y$ est absolument continue par rapport à la mesure spectrale ν_Y de Y , et sa densité est donnée par

$$\lambda \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{d\nu_{F_\alpha Y}(\lambda)}{d\nu_Y(\lambda)} = \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{-ij\lambda} \right|^2.$$

En particulier, en déduire que si Y possède une densité spectrale alors $F_\alpha Y$ également, et donner une formule liant les deux.

3. Calculer la densité spectrale de X ;
4. Montrer qu'il existe un processus stationnaire \tilde{X} de même autocovariance que X , solution de l'équation AR(1) $\tilde{X}_t = \phi^{-1} \tilde{X}_{t-1} + Z'_t$, où $(Z'_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit à préciser. Quelle est sa densité spectrale ? Que se passe-t-il si X est gaussien ?;
5. Mêmes questions lorsque (X_t) est solution de $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ avec $|\theta| > 1$.

Exercice 4.2 (Herglotz). Démontrer en utilisant le théorème de Herglotz que la fonction

$$h \in \mathbb{Z} \mapsto \rho(h) := \mathbf{1}_{h=0} + \alpha \mathbf{1}_{|h|=1} \in \mathbb{R},$$

est une fonction d'autocovariance si et seulement si $|\alpha| \leq 1/2$.

Exercice 4.3 (Somme). Soient (X_t) et (Y_t) deux processus stationnaires, centrés et indépendants.

1. Justifier la stationnarité du processus $S_t := X_t + Y_t$;
2. Calculer la mesure (et la densité le cas échéant) spectrale de S en fonction de celles de X et Y ;
3. Montrer que le processus $Z_t := X_t Y_t$ est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance ;
4. On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions f et g supposées 2π -périodiques est défini par

$$f \star g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x-u)du.$$

Calculer $f_X \star f_Y$ et en déduire f_Z .

Exercice 4.4 (Harmonique). Soit (X_t) le processus défini par

$$X_t := A \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + B \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + Y_t,$$

où A et B sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, centrées, et de variance σ^2 et où Y est un processus stationnaire indépendants de A et B .

1. Calculer la fonction d'autocovariance et la mesure spectrale de X lorsque Y est un bruit blanc de variance σ_Y^2 . Indication : masses de Dirac.
2. Même question quand Y est un MA(1) de paramètre θ .

Exercice 4.5 (Bestiaire). Parmi les fonctions suivantes, lesquelles peuvent être des densités spectrales ?

1. $f(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$.
2. $f(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2}$.
3. $f(\lambda) = 476 + \cos(14\lambda)$.

Exercice 4.6 (Bande). Soit un processus stationnaire Y de densité spectrale $f(\lambda)$ t.q.

$$0 \leq m \leq f(\lambda) \leq M < +\infty.$$

Pour $n \geq 1$ on note γ_n la matrice de covariance de (Y_1, \dots, Y_n) . Montrer que les valeurs propres de γ_n sont dans un intervalle dont on précisera les bornes.

5

FEUILLE D'EXERCICE

Prédiction

Exercice 5.1 (Processus déterministes).

1. Montrer que pour tout processus du second ordre $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, les propriétés suivantes sont équivalentes (on dit alors que le processus est déterministe) :
 - a) pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t \in H_{t-1} := \overline{\text{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}}$;
 - b) pour tout $t \in \mathbb{Z}$, dans L^2 , $X_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1})$.
2. Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - a) X est déterministe ;
 - b) il existe un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = 0$;
 - c) pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = 0$;
3. Montrer qu'un processus harmonique est toujours déterministe ;
4. Donner un exemple de processus non déterministe.

Exercice 5.2 (Lissage exponentiel). Soient X_1, \dots, X_n des v.a.r. On veut prédire la valeur X_{n+1} située dans le futur de la série observée X_1, \dots, X_n .

1. Considérons l'estimateur des moindres carrés pondérés

$$\arg \min_{a \in \mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - a)^2$$

où λ est un réel fixé tel que $0 < \lambda < 1$, qui joue le rôle de paramètre de lissage¹. Montrer que cet estimateur des moindres carrés pondérés vaut

$$\frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k}.$$

2. En pratique on utilise une formule approchée plus simple basée sur le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} = 1 - \lambda$. Montrer que l'**estimateur de lissage exponentiel simple**

$$\hat{X}_n := (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k}$$

vérifie l'agréable formule de mise à jour récursive suivante :

$$\hat{X}_{n+1} = \lambda \hat{X}_n + (1 - \lambda) X_{n+1} = \hat{X}_n + \underbrace{(1 - \lambda)(X_{n+1} - \hat{X}_n)}_{\text{innovation}}.$$

1. Les poids affectés à X_n, X_{n-1}, \dots, X_1 sont décroissants $1 = \lambda^0, \dots, \lambda^{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

3. Montrer la formule du **lissage exponentiel double** :

$$\hat{X}_n = (1 - \lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \lambda^k X_{n-k} = (1 - \lambda) \hat{X}_n + (1 - \lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} k \lambda^k X_{n-k}.$$

4. À présent on approche la série temporelle par une droite au voisinage de n . Montrer que pour tout paramètre de lissage $0 < \lambda < 1$, l'estimateur des moindres carrés

$$(\hat{a}_n, \hat{b}_n) := \arg \min_{a, b \in \mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - (ak + b))^2$$

vérifie, quand $n \rightarrow \infty$,

$$\hat{a}_n \sim \frac{1 - \lambda}{\lambda} (\hat{X}_n - \hat{X}_n) \quad \text{et} \quad \hat{b}_n \sim 2\hat{X}_n - \hat{X}_n.$$

Exercice 5.3 (Inversibilité de la matrice d'autocovariance). On souhaite démontrer la propriété suivante : si $(\gamma_n)_{n \geq 1} = (\gamma(i-j))_{1 \leq i,j \leq n}$ sont les matrices d'autocovariance d'un processus stationnaire centré $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ d'autocovariance γ telle que $\gamma(0) > 0$ et $\gamma(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow \infty$, alors γ_n est inversible pour tout n . Supposons donc qu'il existe $r \geq 1$ tel que γ_r soit inversible et γ_{r+1} soit singulière.

1. Montrer que pour tout $n \geq r+1$, il existe $b^{(n)} \in \mathbb{R}^r$ tel que

$$X_n = \sum_{j=1}^r b_j^{(n)} X_j;$$

2. Montrer que les b_j sont uniformément bornés ;

3. Conclure lorsque $\gamma(0) > 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$.

Exercice 5.4 (Prédiction de processus autorégressifs). Soient $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré et $H_n = \text{vect}(X_1, \dots, X_n)$. On rappelle que le prédicteur à un pas \hat{X}_{n+1} est défini par $\hat{X}_{n+1} = 0$ si $n = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\hat{X}_{n+1} = \varphi_{n,1} X_n + \dots + \varphi_{n,n} X_1,$$

où les $\varphi_{n,i}$ vérifient les équations dites de Yule-Walker

$$\gamma_n \varphi_n = \gamma_n$$

avec $\gamma_n = (\gamma(i-j))_{1 \leq i,j \leq n}$, $\gamma_n = (\gamma(1), \dots, \gamma(n))^\top$, et $\varphi_n = (\varphi_{n,1}, \dots, \varphi_{n,n})^\top$.

1. On suppose que $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus AR(1) causal tel que $X_t - \varphi_1 X_{t-1} = Z_t$ où $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Calculer \hat{X}_2 . Montrer que $\hat{X}_3 = \varphi_1 X_2$. Montrer de façon plus générale que $\hat{X}_n = \varphi_1 X_n$ pour tout $n \geq 1$
2. On suppose que $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus AR(2) causal tel que $X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = Z_t$, où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 . Calculer \hat{X}_2 . Montrer que $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}$
3. Lorsque $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un AR(p) causal, montrer que pour tout $n \geq p$, $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_{n-1} + \dots + \varphi_p X_{n-p+1}$.

Exercice 5.5 (Prédiction de processus ARMA). Soient $\mathcal{M}_n = \overline{\text{vect}(X_j : -\infty < j \leq n)}$ et $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus ARMA(p, q) causal et inversible satisfaisant : $\Phi(B)X = \theta(B)Z$ où $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 . On pose : $\tilde{X}_t = \text{proj}_{\mathcal{M}_n} X_t$.

1. Montrer que pour tout $h \geq 1$ on a

$$\tilde{X}_{n+h} = - \sum_{j \geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j} \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{n+h} = \sum_{j \geq h} \psi_j Z_{n+h-j},$$

où $\sum_{j \geq 0} \pi_j z^j = \frac{\Phi(z)}{\theta(z)}$ et $\sum_{j \geq 0} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\Phi(z)} q$, $|z| \leq 1$. De plus, montrer que

$$\mathbb{E}((X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2;$$

2. Calculer \tilde{X}_{n+1} pour un AR(p) causal et un MA(1) inversible.

Exercice 5.6 (Prédiction d'un MA(1) et algorithme des innovations). On rappelle ci-dessous l'algorithme des innovations. Celui-ci est lié à l'algorithme de Gram-Schmidt et peut s'appliquer à un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ non-stationnaire. On suppose que ce processus est de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance

$$\kappa(i, j) = \mathbb{E}(X_i X_j).$$

Rappelons que $\mathcal{H}_n = \text{vect}(X_1, \dots, X_n)$ et $v_n = \|X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}\|^2$. On a, en posant $\hat{X}_1 = 0$,

$$\mathcal{H}_n = \text{vect}(X_1 - \hat{X}_1, X_2 - \hat{X}_2, \dots, X_n - \hat{X}_n), \text{ pour tout } n \geq 1$$

de telle sorte que

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}).$$

L'algorithme des innovations est une méthode récursive de calcul de $(\theta_{n,j})_{1 \leq j \leq n}$ et v_n :

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{j=1}^n \theta_{n,j} (X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 & = \kappa(1, 1); \\ \theta_{n,n-k} & = v_k^{-1} (\kappa(n+1, k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j} \theta_{n,n-j} v_j), \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ v_n & = \kappa(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j. \end{cases}$$

Proposer une façon de prédire un MA(1) en utilisant l'algorithme des innovations.

6

FEUILLE D'EXERCICE

Estimation

Exercice 6.1 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance). Soit $Y_t = \theta + X_t$, où (X_t) est un AR(1) défini par $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, où $|\phi| < 1$ et les Z_t sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On cherche à estimer θ à partir de Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} . On note $\hat{\theta}_n$ la moyenne empirique de Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} définie par

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{V}(\hat{\theta}_n)$ et donner l'expression de γ défini par

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \gamma).$$

2. On choisit $\phi = 0.6$ et $\sigma^2 = 2$. Lorsqu'on observe $n = 100$ valeurs, on obtient $\hat{\theta}_n = 0.271$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ . Peut-on dire que $\theta = 0$?
3. On propose un autre estimateur de θ défini par $\tilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)}$ où $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})^\top$, $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^\top$ et γ_n est la matrice de covariance de $Y^{(n)}$. Justifier le choix de cet estimateur ;
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{V}(\tilde{\theta}_n)$. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 6.2 (Comparaison de différents estimateurs dans le cas d'un MA(1)). Soit un processus MA(1) défini par $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ où $|\theta| < 1$ et (Z_t) est un bruit blanc.

1. Proposer un estimateur $\hat{\theta}_n^{(1)}$ de θ en utilisant la méthode des moments (c'est-à-dire en utilisant un estimateur de la fonction d'autocorrélation) ;
2. Donner le comportement asymptotique de $\hat{\rho}(1)$;
3. En déduire le comportement asymptotique de $\hat{\theta}_n^{(1)}$;
4. Calculer l'efficacité relative de $\hat{\theta}_n^{(1)}$ et $\hat{\theta}_n^{(2)}$ obtenu en utilisant l'algorithme des innovations dont on admettra qu'il satisfait :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(2)} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1);$$

5. Calculer l'efficacité relative de $\hat{\theta}_n^{(2)}$ et $\hat{\theta}_n^{(3)}$ obtenu obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance dont on admettra qu'il satisfait :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(3)} - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1 - \theta^2).$$

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Correction succincte des exercices de travaux dirigés

Année 2016/2017



Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine



- Auteurs principaux des exercices et solutions :
 - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
 - Céline Duval (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
 - Céline Lévy-Leduc (enseignant Paris-Dauphine, 2010–2012)
- Contributateurs ou chasseurs de coquilles :
 - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
 - Stéphane Ivanoff (enseignant Paris-Dauphine, 2013–2015)
 - Camille Pagnard (enseignant Paris-Dauphine, 2014–)
 - Dylan Possamaï (enseignant Paris-Dauphine, 2012–)
 - Tan, Xiaolu (enseignant, Paris-Dauphine, 2016–)

Tendance, stationnarité, autocovariance, opérateur retard

Solution succincte de l'exercice 1.1 (Quelques exemples). Évidemment, il est impossible de réfuter la stationnarité sans imposer un modèle structurel (partie déterministe + bruit par exemple). La série de la population comporte une tendance et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. La série de la température à Nottingham comporte une saisonnalité et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. La série des accidents de la route comporte à la fois une saisonnalité et une tendance et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. Dans les trois cas, il faudrait utiliser un modèle avec une partie déterministe, et un bruit éventuellement stationnaire.

Une droite horizontale peut très bien être la réalisation d'un processus stationnaire constamment égal à une variable aléatoire donnée (constante ou pas). Une sinusoïde peut très bien être la réalisation d'un processus stationnaire comme le processus harmonique. La morale est que l'observation d'une trajectoire fournit un échantillon de taille 1 de la loi de la trajectoire, et ne nous renseigne donc pas beaucoup sur la variabilité du processus, sauf à faire une hypothèse de structure qui va réduire la dimension intrinsèque du signal et permettre de convertir l'observation d'une seule trajectoire en un échantillon de taille importante de paramètres de structure. Plus généralement, et bien au delà des séries temporelles, on peut espérer reconstituer approximativement un signal observé dans un espace de grande dimension à condition que sa dimension structurelle ou intrinsèque soit assez petite par rapport à la dimension de l'espace dans lequel on l'observe. Cette idée très générale est à la base des méthodes statistiques pour l'analyse des données de grande dimension : sparsité, compressed sensing, pénalisation ℓ^1 ou variation totale, etc.

Solution succincte de l'exercice 1.2 (Stationnarité et stationnarité stricte).

1. Condi. : $\mathbb{P}(Y \in I) = \mathbb{P}(X \in I)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(-X \in I)\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X \in I)$ car $X \stackrel{\text{loi}}{=} -X$;
2. Par linéarité : $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U=1}) - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U=0}) = 0$ mais $\text{Loi}(Y|X = x) = \frac{1}{2}(\delta_{-x} + \delta_x) \neq \text{Loi}(Y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Soit $X_0 = X$ et $X_t = \varepsilon_t X$ si $t \neq 0$, où les $(\varepsilon_t)_{t \neq 0}$ sont i.i.d. Rademacher $\mathbb{P}(\varepsilon_t = \pm 1) = 1/2$ et indépendantes de X . On a $\mathbb{E}(X_t) = 0$ et $\text{Var}(X_t) = 1$ pour tout t . De plus, pour tous $s \neq t$, si $s \neq 0$ et $t \neq 0$ alors $\text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\varepsilon_s)\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, tandis que si $s = 0$ ou si $t = 0$ alors d'après ce qui précède $\text{Cov}(X_s, X_t) = 0$.

Solution succincte de l'exercice 1.3 (Marche aléatoire).

1. Pour tout $t \geq 0$, on a $X_t = t\mu + Z_1 + \dots + Z_t = t\mu + S_t$ d'où $\mathbb{E}(X_t) = t\mu$, et pour tout $s \leq t$, $\gamma_X(t, t+h) = \mathbb{E}((X_t - t\mu)(X_{t+h} - (t+h)\mu)) = \mathbb{E}(S_t(S_t + S'_h)) = \mathbb{E}(S_t^2) = \sigma^2 t$ qui dépend de t . Ainsi, même si $\mu = 0$, le processus n'est pas stationnaire.
2. On a $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu + Z_t$ qui est stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 1.4 (Somme de processus stationnaires). Par linéarité de l'espérance $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ qui est constante tandis que par bilinéarité de la covariance

$$\gamma_Z(t, t+h) = \gamma_X(t, t+h) + \gamma_Y(t, t+h) + \text{Cov}(X_t, Y_{t+h}) + \text{Cov}(Y_t, X_{t+h}) = \gamma_x(h) + \gamma_Y(h)$$

qui ne dépend pas de t et donc Z est stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 1.5 (Stationnarité de processus).

1. Non stationnaire car μ_X non constante ;
2. Non stationnaire car $\gamma_X(t, t+h) = \mathbb{E}((Z_1 + \dots + Z_t)^2) = \sigma^2 t$ dépend de t ;
3. Stationnaire MA(1) car $\mu_X = 0$ et $\gamma_X(t, t+h) = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{|h|=1}$
4. Stationnaire bruit blanc (faible) car $\mu_X = 0$ et $\gamma_X(t, t+h) = \sigma^4\mathbf{1}_{h=0}$
5. Non stationnaire car $X_t = 2Z_t\mathbf{1}_t$ pair d'où $\text{Var}(X_t) = 4\sigma^2\mathbf{1}_t$ pair non constante.

Solution succincte de l'exercice 1.6 (Processus harmonique). On a

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(A) \cos(\theta t) + \mathbb{E}(B) \sin(\theta t) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_X(t, t+h) &= \mathbb{E}(A^2) \cos(\theta t) \cos(\theta(t+h)) + \mathbb{E}(B^2) \sin(\theta t) \sin(\theta(t+h)) + \underbrace{\mathbb{E}(AB)}_{=0} \cdots \\ &= \sigma^2 \Re(\mathbf{e}^{i\theta t} \mathbf{e}^{-i\theta(t+h)}) \\ &= \sigma^2 \Re(\mathbf{e}^{-i\theta h}) \\ &= \sigma^2 \cos(\theta h) \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t . Le processus est donc stationnaire (à trajectoires régulières !)

Solution succincte de l'exercice 1.7 (Propriété de la fonction d'autocovariance).

1. On a $\gamma(-h) = \text{Cov}(X_{-h}, X_0) = \text{Cov}(X_0, X_h) = \gamma(h)$, et pour tout $n \geq 1$ et $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \langle v, \gamma_n v \rangle \rangle = \sum_{1 \leq j, k \leq n} v_j \gamma(k-j) v_k = \sum_{1 \leq j, k \leq n} \text{Cov}(v_j X_j, v_k X_k) = \text{Var} \left(\sum_{j=1}^n v_j X_j \right) \geq 0;$$

2. La symétrie est vérifiée. Dire que ρ est de type positif revient à dire que pour tout $n \geq 0$, la matrice de Toeplitz symétrique tridiagonale suivante est de type positif :

$$\gamma_n = (\gamma(j-k))_{1 \leq j, k \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & & & \\ \rho & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \rho & \\ & & \rho & 1 & \end{pmatrix}.$$

Bien que praticable, la diagonalisation des matrices tridiagonales est une chose bien délicate. Faisons autrement : montrons que si $|\rho| \leq 1/2$ alors γ est la fonction

d'autocovariance d'un processus X solution de l'équation MA(1) : $X_t = \theta X_{t-1} + Z_t$. On sait (exercice déjà vu) que $\gamma_X(h) = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{h=\pm 1}$, ce qui donne $\sigma^2\theta = \rho$ et $\sigma^2(1 + \theta^2) = 1$, d'où, en éliminant la variable σ : $\rho(1 + \theta^2) = \theta$, qui est un trinôme du second degré en θ de discriminant $\delta = 1 - 4\rho^2$, qui est ≥ 0 ssi $|\rho| \leq 1/2$ (ce qui donne une ou deux valeurs possibles pour le paramètre réel θ). Faisons maintenant l'hypothèse alternative que $|\rho| > 1/2$ et trouvons une valeur de n et un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle v, \gamma_n v \rangle < 0$. Pour $\rho > 1/2$, en tâtonnant, on trouve que $v = (-1, 1, -1, \dots)^\top$ c'est-à-dire $v_j = (-1)^j$ convient car alors

$$\langle v, \gamma_n v \rangle = \sum_{1 \leq j, k \leq n} (-1)^{j+k} \gamma_n(j, k) = n - 2(n-1)\rho = (n-1) \left(\frac{n}{n-1} - 2\rho \right)$$

qui est < 0 si $|\rho| > 1/2$ dès que $n > \frac{2\rho}{2\rho-1}$. Si $\rho < -1/2$, idem avec $v = (1, 1, 1, \dots)$;

3. a) Non car γ est impaire alors que toute fonction d'autocovariance est paire ;
- b) Fonction d'autocovariance de la somme $X + Y$ où X et Y sont des processus harmoniques indépendants à paramètres bien choisis (combinaison d'exercices déjà vus) ;
- c) Fonction d'autocovariance d'un processus harmonique à paramètres bien choisis.

Solution succincte de l'exercice 1.8 (Propriété de la fonction d'autocovariance – Bis).

1. $\sigma_n = (1 - \rho)I_n + \rho J_n$. La matrice $J_n = (1)_{1 \leq j, k \leq n}$ est symétrique de type positif, de rang 1, avec pour valeurs propres 0 de multiplicité $n - 1$ et $\text{Tr}(J_n) = n$ de multiplicité 1. Par conséquent, la matrice symétrique σ_n a pour valeurs propres $1 - \rho$ avec multiplicité $n - 1$ et $1 - \rho + \rho n$ avec multiplicité 1. La CNS recherchée est donc $\min(1 - \rho, 1 + (n - 1)\rho) \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire $-1/(n - 1) \leq \rho \leq 1$ pour tout $n \geq 2$, soit $\rho \in [0, 1]$. À ce sujet on rappelle le concept de matrice à diagonale dominante, et le théorème des disques de Gershgorin (démonstration en exercice) : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\text{spec}(A) \subset \bigcup_{k=1}^n \bar{D}(A_{k,k}, \sum_{j \neq k} |A_{k,j}|)$; Autrement, supposons que σ_t est bien la matrice de variance covariance d'un processus X stationnaire. L'inégalité de Cauchy–Schwarz assure que $\rho^2 = \text{Cov}(X_0, X_1)^2 \leq \text{Var}(X_0)\text{Var}(X_1) = 1$. De plus, puisque σ_t est symétrique de type positif pour tout $t \geq 2$, on doit avoir :

$$(1, \dots, 1)\sigma_t \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = t(1 + (t - 1)\rho) \geq 0$$

D'où $\rho \geq \sup_{t \geq 2} -1/(t - 1) = 0$. De cette manière on prouve que la condition $0 \leq \rho \leq 1$ est nécessaire, la question suivante prouve la suffisance.

2. Soit $X \sim \text{BB}(0, 1 - \rho)$, de sorte que $\gamma_X = (1 - \rho)\mathbf{1}_{h=0}$, et Y un processus indépendant (non corrélé suffit) de X tel que $\text{Var}(Y_0) = \rho$ et $Y_t = Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors $\gamma_Y = \rho\mathbf{1}$, et, grâce à l'exercice sur la somme de processus, $\gamma_{X+Y} = (1 - \rho)\mathbf{1}_{h=0} + \rho\mathbf{1}$.

Solution succincte de l'exercice 1.9 (Estimation de tendance et de saisonnalité).

1. Le processus Y n'est pas stationnaire car sa moyenne dépend du temps : $\mu_Y(t) = \beta t + s_t$ (même si $\beta = 0$, on a $s \neq 0$ car s de période (minimale) 4) ;

2. On a $(1 - B^4)(\beta t + s_t) = \beta t + s_t - \beta(t-4) - s_{t-4} = 4\beta$ d'où $(1 - B^4)Y = 4\beta + (1 - B^4)U$.
 On a $\gamma_{(1-B^4)Y}(t, t+h) = \gamma_{(1-B^4)U}(t, t+h) = \text{Cov}(U_t - U_{t-4}, U_{t+h} - U_{t+h-4}) = \gamma_U(h) - \gamma_U(h-4) - \gamma_U(h+4) + \gamma_U(h)$. En fait, $(1 - B^4)U$ est un filtre de U égal à $F_\alpha U$ où $\alpha_h = \mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=4}$.

Solution succincte de l'exercice 1.10 (Tendance).

1. $(1 - B)X_t = \sum_{i=0}^k a_i(t^i - (t-1)^i) + U_t - U_{t-1}$ or par la formule du binôme

$$t^i - (t-1)^i = t^i - \sum_{j=0}^i t^j (-1)^{i-j} \binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{i-1} t^j (-1)^{1+i-j} \binom{i}{j},$$

de degré $i - 1$, et donc $(1 - B)X$ a une tendance polynomiale de degré $k - 1$. Par récurrence, il en découle que $(1 - B)^p X$ a une tendance polynomiale de degré $k - p$ pour tout $p \in \{0, \dots, k\}$, et plus de tendance polynomiale si $p > k$. L'opérateur $(1 - B)^p$ élimine donc toute tendance polynomiale de degré $< p$;

2. On applique l'opérateur différence saisonnier $1 - B^d$:

$$(1 - B^d)X_t = X_t - X_{t-d} + S_t - S_{t-d} = X_t - X_{t-d}.$$

2

FEUILLE D'EXERCICE

Filtrage

Solution succincte de l'exercice 2.1 (Filtrage).

- Pour tout intervalle fini $I \subset \mathbb{Z}$ on pose $Y_t^I = \sum_{i \in I} a_i X_{t-i}$ de sorte que

$$\mathbb{E} |Y_t^I - Y_t^J| \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|) \sum_{i \in (I \cup J) \setminus I \cap J} |a_i|.$$

Or $\sup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|) \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|^2) = \mathbb{E}(|X_0|^2) < \infty$ car X est stationnaire. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{-n, \dots, n\} \subset I \cap J$ implique $\sum_{i \in (I \cup J) \setminus I \cap J} |a_i| \leq \varepsilon$, grâce au critère de Cauchy pour la série $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| < \infty$. Comme L^1 est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet), il en découle que $Y_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X_{t-i} = \sum_{I \rightarrow \mathbb{Z}} Y_t^I$ est bien définie dans L^1 . Montons à présent que cette série converge p.s. et que sa somme p.s. coïncide avec sa somme dans L^1 . Le théorème de convergence monotone (ou bien de Fubini–Tonelli) donne, dans $[0, \infty]$,

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| |X_{t-i}| \right) \leq \sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) \sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| \leq \mathbb{E}(X_0^2) \|a\|_1 < \infty,$$

et donc $\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| |X_{t-i}| < \infty$ p.s. et donc $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X_{t-i}$ converge p.s. Enfin, la limite p.s. est identique à la limite L^1 par convergence dominée. Le processus en entier Y est défini p.s. sur l'ensemble p.s. obtenu en prenant l'intersection des ensembles p.s. obtenus pour chaque t dans \mathbb{Z} , qui a le bon goût d'être dénombrable ;

Alternativement pour montrer que Y_t est bien définie, en utilisant le théorème de Fubini–Tonelli, on obtient $\mathbb{E} [\sum |a_i X_{t-i}|] = \sum |a_i| \mathbb{E} [|X_{t-i}|] \leq \sum |a_i| \sqrt{\mu_X^2 + \gamma_X(0)} < \infty$, ce qui assure, à nouveau via le théorème de Fubini–Tonelli que la variable aléatoire $Y_t := \sum a_i X_{t-i}$ est bien définie et intégrable (on peut la voir comme une fonction définie en intégrant $a_i X_{t-i}$ sur \mathbb{Z} relativement à la mesure de comptage).

- La partie «Cauchy» fonctionne dans tout $L^{p \geq 1}$:

$$\|Y_t^I - Y_t^J\|_p \leq \sum_{i \in (I \cup J) \setminus I \cap J} \|a_i X_i\|_p \leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|X_i\|_p \sum_{i \in (I \cup J) \setminus I \cap J} |a_i|.$$

Sinon, en appliquant successivement le théorème de Fubini–Tonelli et l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient :

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i,j} a_i a_j |X_{t-i} X_{t-j}| \right)^2 \right] \leq \sum_{i,j} |a_i a_j| \mathbb{E} [|X_{t-i} X_{t-j}|] \leq \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |a_i| \right)^2 (\mu_X^2 + \gamma_X(0)) < \infty$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par continuité du produit scalaire dans L^2 ,

$$\begin{aligned}\mu_Y(t) &= \langle 1, Y_t \rangle_{L^2} \\ &= \left\langle 1, \lim_{I \rightarrow \mathbb{Z}} Y_t^I \right\rangle_{L^2} \\ &= \lim_{I \rightarrow \mathbb{Z}} \left\langle 1, \sum_{i \in I} a_i X_{t-i} \right\rangle_{L^2} \\ &= \lim_{I \rightarrow \mathbb{Z}} \sum_{i \in I} a_i \mathbb{E}(X_{t-i}) \\ &= \mu_X \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i\end{aligned}$$

qui est constante. Pour l'autocovariance, on écrit, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\gamma_Y(t, t+h) + \mu_Y^2 &= \left\langle \lim_{I \rightarrow \mathbb{Z}} Y_t^I, \lim_{J \rightarrow \mathbb{Z}} Y_{t+h}^J \right\rangle_{L^2} \\ &= \lim_{I, J \rightarrow \mathbb{Z}} \sum_{i \in I, j \in J} a_i a_j \mathbb{E}(X_{t-i} X_{t+h-j}) \\ &= \lim_{I, J \rightarrow \mathbb{Z}} \sum_{i \in I, j \in J} a_i a_j (\gamma_X(h+i-j) + \mu_X^2) \\ &= \mu_Y^2 + \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h+i-j) \\ &= \mu_Y^2 + \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h+j-i)\end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t , et le processus Y est donc stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 2.2 (Géométrique).

1. On a $\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. D'autre part, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\gamma_X(t, t+h) &= \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j} \mathbb{E}((Z_{t-i} - Z_{t-i-1})(Z_{t+h-j} - Z_{t+h-j-1})) \\ &= \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j} (2\gamma_Z(h) - \gamma_Z(h-1) - \gamma_Z(h+1)) \\ &= \sigma^2 (2\mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=1} - \mathbf{1}_{h=-1}) \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j} \\ &= \sigma^2 (2\mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=1} - \mathbf{1}_{h=-1}) \begin{cases} \frac{1-\lambda^{t+1}}{1-\lambda} \frac{1-\lambda^{t+h+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1, \\ (1+t)(1+t+h) & \text{si } t = 1, \end{cases}\end{aligned}$$

qui dépend de t si $\lambda \neq 0$. Le seul cas stationnaire est $\lambda = 0$ (donne $X = 0$) ;

2. Si $|\lambda| < 1$ alors $\alpha_i = \lambda^i \mathbf{1}_{i \geq 0} \in \ell^1$ et le filtre $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}) = F_{\alpha}(BZ)$ est bien défini, stationnaire, et vérifie $X_t - Y_t \rightarrow 0$ dans L^2 quand $t \rightarrow \infty$:

$$\left\| \sum_{i>t} \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}) \right\|_2 \leq \sum_{i>t} |\lambda|^i \|Z_{t-i} - Z_{t-i-1}\|_2 = \sqrt{2} \sigma \lambda^{t+1} \frac{1-\lambda^\infty}{1-\lambda} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Solution succincte de l'exercice 2.3 (Processus AR).

- Établissons tout d'abord l'unicité. Si X et X' sont deux solutions stationnaires, alors $(X - X')_t = \phi(X - X')_{t-1} = \phi^n(X - X')_{t-n}$ pour tout $n \geq 1$, d'où

$$\text{Var}((X - X)_t) \leq 2|\phi|^{2n}(\text{Var}(X_t) + \text{Var}(X'_t)) = 2|\phi|^{2n}(\gamma_X(0) + \gamma_{X'}(0)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

car $|\phi| < 1$, d'où $X_t = X'_t$ p.s. d'où $X = X'$ p.s. Pour construire la solution,

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t = \phi(\phi X_{t-2} + Z_{t-1}) = \dots = \phi^{n+1} X_{t-n} + \sum_{k=1}^n \phi^k Z_{t-k},$$

et la somme du membre de droite converge p.s. et dans L^2 quand $n \rightarrow \infty$ vers le filtre $F_\phi Z$ où $\phi_k = \phi^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ car $\phi \in \ell^1$ car $|\phi| < \infty$. On vérifie alors directement que

$$(F_\phi Z)_t = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n Z_{t-n}$$

est solution. Il s'agit d'une solution stationnaire causale. Notons que $\phi^{n+1} X_{t-n}$ converge vers 0 p.s. et dans L^2 lorsque X est stationnaire (\Rightarrow unicité à nouveau);

- L'équation sans second membre $X_t = \phi X_{t-1}$ (c'est-à-dire pour $\sigma = 0$) a pour unique solution stationnaire le processus identiquement nul 0. Si Y est une solution non stationnaire de cette équation, alors $Y + F_\phi Z$ est solution non stationnaire de l'équation avec second membre $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$. Pour construire Y , on se donne une v.a.r. Y_0 non identiquement nulle et on en déduit que $Y_t = \phi^t Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{E}(Y_t) = \phi^t \mathbb{E}(Y_0)$ et $\text{Var}(Y_t) = |\phi|^{2t} \text{Var}(Y_0)$, et Y_0 n'est pas identiquement nulle, le processus Y n'est pas stationnaire. Ainsi, nous avons construit une infinité non dénombrable de solutions non stationnaires de l'équation $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$;
- L'équation $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ s'écrit $X_{t-1} = \phi^{-1} X_t - \phi^{-1} Z_{t-1}$. Quitte à renverser le temps et à remplacer ϕ et Z_t par ϕ^{-1} et $\phi^{-1} Z_{t-1}$, on déduit du cas $|\phi| < 1$ que le cas $|\phi| > 1$ admet une unique solution stationnaire donnée par le filtre

$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-n} (-\phi^{-1}) Z_{-(t-n)} = - \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-(n+1)} Z_{t+n}.$$

Elle n'est pas causale;

- Si X est solution stationnaire de l'équation avec $|\phi| = 1$ alors, en itérant l'équation,

$$\text{Var}(X_t - \phi^{n+1} X_{t-n}) = \text{Var}\left(\sum_{k=1}^n \phi^k Z_{t-k}\right) \leq \sum_{k=1}^n |\phi|^{2k} \sigma^2 = n \sigma^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

(marche aléatoire!), ce qui contredit une conséquence de la stationnarité de X :

$$\text{Var}(X_t - \phi^{n+1} X_{t-n}) \leq 2\gamma_X(0) + 2|\phi|^{2(n+1)} \gamma_X(0) = \mathcal{O}(1).$$

Solution succincte de l'exercice 2.4. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\alpha_k Z_{t-k}\|_{L^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| \|Z_{t-k}\|_{L^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| = \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$$

qui n'est pas forcément fini car $\ell^1(\mathbb{Z}) \not\subseteq \ell^2(\mathbb{Z})$. La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ est absolument convergente dans L^2 si et seulement si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Pour toute partie $K \subset \mathbb{Z}$ finie et tout $t \in \mathbb{Z}$, le théorème de Pythagore dans L^2 donne

$$\left\| \sum_{k \in K} \alpha_k Z_{t-k} \right\|_{L^2}^2 = \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \|Z_{t-k}\|_2^2 = \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2,$$

quantité qui tend vers 0 quand $K \subset [-a, a]^c$ avec $a \rightarrow \infty$ car $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 = \|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 < \infty$. La série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ converge donc dans L^2 en vertu du critère de Cauchy.

Si de plus Z est gaussien, alors $\sum_{k \in K} \alpha_k Z_{t-k} \sim \mathcal{N}(0, (\sum_{k \in K} |\alpha_k|^2))$ et en utilisant les fonctions caractéristiques et en passant à la limite sur K , il vient que $X_t \sim \mathcal{N}(0, \|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2)$.

Solution succincte de l'exercice 2.5 (Filtre à queues lourdes).

1. La fonction caractéristique de $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ vaut $\Phi_{X_1}(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX_1}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où, pour tout $n \geq 1$, $\beta > 0$, $t \in \mathbb{R}$ et X_1, \dots, X_n i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$\Phi_{\beta(X_1+\dots+X_n)}(t) = (\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\beta t X_1}))^n = (\Phi_{X_1}(\beta t))^n = \mathrm{e}^{-\frac{n\beta^2}{2}t^2},$$

égal à $\Phi_{X_1}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$ lorsque $\beta = n^{-1/2}$ c'est-à-dire que la loi gaussienne standard est 2-stable. Ceci reste valable pour la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ par simple dilatation.

Si X_1 suit la loi de Cauchy (ou de Lorentz) de paramètre $c > 0$, de densité $x \in \mathbb{R} \mapsto 1/(\pi c(1 + x^2/c^2))$, alors sa fonction caractéristique est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\Phi_{X_1}(t) = \mathrm{e}^{-c|t|}$, et le raisonnement précédent indique de cette loi est 1-stable.

2. Fonctions caractéristiques à nouveau !
3. Pour toute partie finie $K \subset \mathbb{Z}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\Phi_{\sum_{k \in K} \eta_k Z_{t-k}}(t) = \prod_{k \in K} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\eta_k t Z_{t-k}}) = \prod_{k \in K} \Phi_{Z_{t-k}}(\eta_k t) = \mathrm{e}^{-|t|^\alpha c \sum_{k \in K} |\eta_k|^\alpha},$$

qui converge vers $\mathrm{e}^{-|t|^\alpha c \|\eta\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}^\alpha}$ quand K tend vers \mathbb{Z} , ce qui garantit la convergence en loi de $\sum_{k \in K} \eta_k Z_{t-k}$ quand K tend vers \mathbb{Z} .

Si $\alpha = 2$ alors $\eta \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $(F_\eta Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire gaussien, filtre du bruit blanc gaussien Z . Le processus $(F_\eta Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est bien défini dans L^2 . Il est possible de le définir dans L^1 (et presque sûrement) lorsque $\eta \in \ell^1(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^2(\mathbb{Z})$.

Si $\alpha = 1$ alors $\eta \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et $\mu_{\alpha,c}$ est une loi de Cauchy, qui n'a pas de moyenne ni de variance, et dans ce cas $F_\eta Z_t$ n'a ni moyenne ni variance. Par conséquent, quelque soit la manière de définir le processus $(F_\eta Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, il ne serait pas du second ordre et donc pas stationnaire, ce qui ne l'empêcherait pas d'être éventuellement fortement stationnaire au sens de l'égalité des lois marginales de dimension finies !

Solution succincte de l'exercice 2.6 (Filtre de Kalman-Bucy).

1. Posons $Y = (Z_0, \dots, Z_{n-1})$. On a par hypothèse

$$f_{X|Y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\gamma^2}} \quad \text{et} \quad f_{Z|X,Y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2\delta^2}}.$$

Note : si μ ne dépend pas de Y alors X et Y sont indépendants et donc $f_{X|Y} = f_X$, mais de toute manière, par la suite μ dépendra de Y . À présent, on écrit

$$f_{X|Z,Y} = \frac{f_{X,Z,Y}}{f_{X,Y} f_{Z,Y}} = f_{Z|X,Y} \frac{f_{X,Y}}{f_{Z,Y}} = f_{Z|X,Y} \frac{f_{X|Y} f_Y}{f_{Z,Y}}$$

Or

$$f_{Z,Y} = \int f_{X,Z,Y} dx = \int f_{Z|X,Y} f_{X,Y} dx = f_Y \int f_{Z|X,Y} f_{X|Y} dx$$

et

$$\int f_{Z|X,Y} f_{X|Y} dx = \frac{1}{2\pi\delta\gamma} \int e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\gamma^2} - \frac{(y-x)^2}{2\delta^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\delta^2 + \gamma^2)}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2(\delta^2 + \gamma^2)}}.$$

Le résultat voulu s'obtient en regroupant ces petits calculs.

2. a) Si $(X, Z, Z_0) = (X_1, Y_1, 0)$ alors

$$\text{Loi}(X | Z_0) = \mathcal{N}(a, \sigma^2) \quad \text{et} \quad \text{Loi}(Z | X) = \mathcal{N}(X, \alpha^2),$$

d'où

$$\text{Loi}(Y_1 | X_1) = \text{Loi}(X | Z) = \text{Loi}(X | Z, Z_0) = \mathcal{N}(\rho^2(a/\sigma^2 + Z/\alpha^2), \rho^2)$$

avec $1/\rho^2 = 1/\sigma^2 + 1/\alpha^2$. Donc $\hat{X}_1 = \mathbb{E}(X_1 | Y_1) = \rho^2(a/\sigma^2 + Y_1/\alpha^2)$ et

$$\rho_1 = \mathbb{E}(\mathbb{E}((X_1 - \hat{X}_1)^2 | Y_1)) = \rho^2.$$

- b) Par construction des suites (X_n) et (Y_n) le vecteur $(X_{n-1}, Y_{n-1}, \dots, Y_1)$ est un vecteur gaussien donc $\text{Loi}(X_{n-1} | Y_1, \dots, Y_{n-1})$ est gaussienne. Sa moyenne et sa variance sont la moyenne et la variance conditionnelles de X_{n-1} sachant \mathcal{F}_{n-1} .

- c) De $X_n = a + X_{n-1} + \varepsilon_n$ et du fait que ε_n est indépendant de \mathcal{F}_{n-1} on tire

$$\text{Loi}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(a, \sigma^2) * \text{Loi}(X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(a + \hat{X}_{n-1}, \sigma^2 + \rho_{n-1}^2)$$

En posant $(X, Z, Z_0, \dots, Z_{n-1}) = (X_n, Y_n, Y_1, \dots, Y_{n-1})$ il vient

$$\text{Loi}(X_n | \mathcal{F}_n) = \mathcal{N}\left(\rho^2\left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{Y_n}{\alpha^2}\right), \rho^2\right)$$

avec $\mu = a + \hat{X}_{n-1}$, $\gamma = \sigma^2 + \rho_{n-1}^2$, et $1/\rho^2 = 1/\gamma^2 + 1/\alpha^2$.

3. Découle des formules trouvées pour $\text{Loi}(X_n | \mathcal{F}_n)$ et $\text{Loi}(X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})$.

Solution succincte de l'exercice 2.7 (Filtre de Kalman-Bucy multivarié).

1. Comme D est inversible, on peut considérer la matrice triangulaire inférieure par blocs (qui est inversible car ses blocs diagonaux le sont)

$$L := \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix},$$

et utiliser le produit matriciel par bloc pour obtenir

$$ML = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Il en découle que M est inversible si et seulement si S est inversible, or dans ce cas

$$\begin{pmatrix} S & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} & -S^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'obtenir la formule d'inversion par bloc

$$M^{-1} = L \begin{pmatrix} S & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} & -S^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CS^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}$$

ou encore plus simplement

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Supposons à présent que M est symétrique. Alors $C = B^\top$ et les matrices D et S sont symétriques. Si de plus M est définie positive alors d'une part D est définie positive en tant que bloc de M , et d'autre part M est inversible et la formule de l'inversion par blocs de M montre que S^{-1} est définie positive en tant que bloc de M^{-1} , et donc S est définie positive. Réciproquement, si D et S sont définies positives, alors en la seconde formule d'inversion par blocs $M^{-1} = T^\top \text{diag}(S^{-1}, D^{-1})T$ où T est triangulaire par bloc et inversible indique que M^{-1} est semblable à une matrice définie positive, et elle est donc définie positive, et c'est donc aussi le cas de M .

2. Soit $\tilde{X} := X - \hat{X}$. Le vecteur aléatoire $(\tilde{X}, Y - \bar{Y})$ est gaussien et

$$\text{Cov}(\tilde{X}, Y) = \mathbb{E}(((X - \bar{X}) + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y}))(Y - \bar{Y})^\top) = \Sigma_{12} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22} = 0,$$

par conséquent \tilde{X} et Y sont indépendants. Ainsi on dispose de la décomposition $X = \hat{X} + \tilde{X}$ avec \tilde{X} indépendant de Y et \hat{X} fonction affine de Y . Il en découle que $\text{Loi}(X | Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \text{Cov}(\tilde{X}))$. Enfin on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{X}) &= \text{Cov}(X - \hat{X}) \\ &= \text{Cov}(X - \bar{X} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y})) \\ &= \Sigma_{11} - 2\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\ &= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}. \end{aligned}$$

Au passage on obtient une réponse alternative et probabiliste à la question 1.

3. La question 2 donne $\text{Loi}(X | Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \hat{\Sigma})$. Intéressons nous à présent à la loi conditionnelle $\text{Loi}(X | Y, Z)$, qui est gaussienne. Nous pouvons supposer sans perdre de généralité que Z est centré. Comme Y et Z sont indépendants et que l'un d'entre eux au moins est centré, ils sont orthogonaux dans L^2 et donc la projection orthogonale $\hat{\tilde{X}} := \mathbb{E}(X | Y, Z)$ de X sur le sous-espace $L^2(\sigma(Y, Z))$ de L^2 est la somme des projections orthogonales $\mathbb{E}(X | Y) = \hat{X}$ (de X sur $L^2(\sigma(Y))$) et $\mathbb{E}(X - \hat{X} | Z)$ (de X sur $L^2(\sigma(Z))$). Reste à calculer la matrice de covariance. Comme

$$X - \hat{X} = X - \hat{\tilde{X}} + \mathbb{E}(X - \hat{X} | Z)$$

avec $X - \hat{X}$ et $\mathbb{E}(X - \hat{X} | Z)$ orthogonaux dans $L^2(\sigma(Z))$, il vient

$$\text{Cov}(X - \hat{X}) = \text{Cov}(X - \hat{\tilde{X}}) + \text{Cov}(\mathbb{E}(X - \hat{X} | Z))$$

ce qui conduit au résultat désiré en utilisant la question 2.

4. Comme le vecteur aléatoire (X_n, Y_1, \dots, Y_n) est gaussien, il découle de la question 2 que $\text{Loi}(X_n | Y_1, \dots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \Lambda_n)$ avec \hat{X}_n fonction affine de Y_1, \dots, Y_n et $\Lambda_n = \text{Cov}(X_n - \hat{X}_n)$. Il reste à calculer $(\hat{X}_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ en fonction de (\hat{X}_n, Λ_n) .

Comme $X_{n+1} = AX_n + \varepsilon_{n+1}$ avec ε_{n+1} centré et indépendant de (X_n, Y_1, \dots, Y_n) et donc aussi de \hat{X}_n , il vient, d'après la question 2,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n) = \mathbb{E}(AX_n | Y_1, \dots, Y_n) = A\hat{X}_n$$

et

$$\text{Cov}(X_{n+1} - A\hat{X}_n) = A\Lambda_n A^\top + Q.$$

Il reste à introduire Y_{n+1} dans le conditionnement. Pour cela, on considère le vecteur aléatoire gaussien $(Y_1, \dots, Y_n, Y'_{n+1})$ où $Y'_{n+1} := Y_{n+1} - \mathbb{E}(Y_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n)$, qui engendre la même tribu que (Y_1, \dots, Y_{n+1}) et dont la dernière coordonnée Y'_{n+1} est indépendante des n premières (on parle d'innovation). Notons que

$$Y'_{n+1} = Y_{n+1} - HA\hat{X}_n = HA\tilde{X}_n + H\varepsilon_{n+1} + \eta_{n+1}$$

où $\tilde{X}_n = X_n - \hat{X}_n$. À présent, en utilisant la question 3 on obtient

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= A\hat{X}_n + \mathbb{E}(X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}) | Y'_{n+1}) \\ \Lambda_{n+1} &= A\Lambda_n A^\top + Q - \text{Cov}(\hat{X}_{n+1} - A\hat{X}_n).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}Y'^{\top}_{n+1}) &= A\mathbb{E}(X_n(X_n - \hat{X}_n)^\top)A^\top H^\top + QH^\top \\ &= A\Lambda_n A^\top H^\top + QH^\top \\ \mathbb{E}(Y'_{n+1}Y'^{\top}_{n+1}) &= HA\Lambda_n A^\top H^\top + HQH^\top + R,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= A\hat{X}_n \\ &\quad + (A\Lambda_n A^\top + Q)H^\top(H(A\Lambda_n A^\top + Q)H^\top + R)^{-1}(Y_{n+1} - HA\hat{X}_n) \\ \Lambda_{n+1} &= A\Lambda_n A^\top + Q \\ &\quad - (A\Lambda_n A^\top + Q)H^\top(H(A\Lambda_n A^\top + Q)H^\top + R)^{-1}H(A\Lambda_n A^\top + Q).\end{aligned}$$

5. Oui, l'approche reste valable lorsque les bruits sont indépendants et de variance variable (on dit que le bruit est hétérosédastique) et c'est une propriété remarquable du filtre de Kalman-Bucy. De plus, certains aspects, notamment markoviens, subsistent bien au delà du cas gaussien homogène, cf. par exemple le livre de Pardoux.

3

FEUILLE D'EXERCICE

Équations et processus ARMA

Solution succincte de l'exercice 3.1 (ARMAda ou ARMArtial).

1. L'équation $1 + 0.2z - 0.48z^2 = 0$ a pour solutions $-5/4$ et $5/3$, qui ne sont pas de module 1 donc il existe un processus stationnaire solution ;
2. L'équation $1 + 1.9z + 0.88z^2 = 0$ a pour solutions $-10/11$ et $-5/4$, qui ne sont pas de module 1 donc il existe un processus stationnaire solution ;
3. L'équation $1 + 0.6z = 0$ a pour solution $-5/3$ qui n'est pas de module 1 dont il existe une solution stationnaire ;
4. L'équation $1 + 1.8z + 0.81z^2 = 0$ a pour solution $-10/9$ (racine double) qui n'est pas de module 1 donc il existe une solution stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 3.2 (ARMA(1,1)).

1. Une solution stationnaire existe (elle est alors unique, et c'est un processus linéaire) lorsque le polynôme $\Phi(z) = P_{\alpha_\phi}(z) = 1 - \phi z$ n'a pas de racine de module 1, c'est-à-dire lorsque $|\phi| \neq 1$ puisque Φ a une unique racine $z_1 = 1/\phi$;
2. La solution stationnaire est causale lorsque Φ n'a pas de racine de module ≤ 1 , c'est-à-dire lorsque $|z_1| > 1$, c'est-à-dire $|\phi| < 1$. La solution stationnaire est inversible lorsque $\theta(z) = 1 + \theta z$ n'a pas de racine de module ≤ 1 , c'est-à-dire lorsque l'unique racine $-1/\theta$ de θ est de module > 1 , c'est-à-dire lorsque $|\theta| < 1$;
3. D'après un théorème du cours, la solution X s'obtient en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle de l'équation ARMA

$$z \mapsto \frac{1 + \theta z}{1 - \phi z}$$

dans un voisinage du cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On distingue les cas $|\phi| < 1$ et $|\phi| > 1$.

Cas $|\phi| < 1$. Si $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et

$$\frac{1}{1 - \phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k$$

et donc

$$\frac{1 + \theta z}{1 - \phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k + \theta z \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1} (\phi + \theta) z^k$$

d'où

$$\psi_k = \mathbf{1}_{h=0} + \phi^{k-1}(\phi + \theta)\mathbf{1}_{h>0}.$$

Cas $|\phi| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|(\phi z)^{-1}| < 1$ et

$$\frac{1}{1 - \phi z} = -\frac{1}{\phi z} \frac{1}{1 - (\phi z)^{-1}} = -\frac{1}{\phi z} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k}.$$

et donc

$$\frac{1 + \theta z}{1 - \phi z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} - \theta z \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} = -\theta \phi^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k-1}(\phi + \theta)z^{-k}$$

d'où

$$\psi_k = -\theta \phi^{-1} \mathbf{1}_{k=0} + \phi^{-k-1}(\phi + \theta) \mathbf{1}_{k<0}.$$

Dans les deux cas, $F_\phi^{-1} \circ F_\theta = F_\psi$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k Z_{t-k}$$

où la convergence a lieu p.s. et dans L^2 . On retrouve bien $X = Z$ si $\theta = -\phi$.

- Pour tout $h \in \mathbb{Z}$, comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$,

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\phi Z}(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{h+j}$$

Cette formule permet d'établir que $\gamma_X(h)$ décroît géométriquement (exponentielle) quand $|h| \rightarrow \infty$, en utilisant le fait que ψ_k décroît géométriquement quand $|k| \rightarrow \infty$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 3.3.

- On a $\Phi(z) = 1 - 3z$ et $\Theta(z) = 1 - (10/3)z + z^2$. Le polynôme Φ a une seule racine, égale à $1/3$. Il ne s'annule donc pas sur le cercle unité, et donc, d'après le cours, l'équation ARMA(1, 2) admet une unique solution stationnaire, qui est un processus linéaire filtre de Z .
- Le polynôme Φ s'annule sur le disque unité. Comme l'absence d'annulation sur le disque unité du polynôme Φ est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire de causalité, on ne peut pas en déduire que la solution n'est pas causale.

Le cours affirme que la solution s'obtient en développant en série de puissances de z autour du cercle unité la fraction rationnelle de l'équation. Or on remarque que $1/3$ est également racine de Θ , et pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$,

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \frac{(1 - 3z)(1 - \frac{1}{3}z)}{1 - 3z} = 1 - \frac{1}{3}z.$$

Le dénominateur de cette fraction rationnelle irréductible ne s'annule pas sur le disque unité, et donc la solution est causale! Ainsi il faut toujours simplifier les racines communes à Φ et Θ car la solution ne dépend que de la fraction rationnelle irréductible.

- La fraction rationnelle irréductible indique que la solution est donnée pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = Z_t - (1/3)Z_{t-1}$. Ce processus est manifestement un filtre causal de Z .

-
4. Le polynôme Θ s'annule sur le disque unité. Comme l'absence d'annulation sur le disque unité du polynôme Θ est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire d'inversibilité, on ne peut pas en déduire que la solution n'est pas inversible. En revanche, le numérateur de la fraction rationnelle irréductible est formé par le polynôme constant 1, qui ne s'annule pas, et donc le processus X est inversible ! L'expression de Z comme filtre causal de X s'obtient en développant l'inverse de la fraction rationnelle irréductible en séries de puissances de z autour du cercle unité. Comme pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ on a $|(1/3)z| < 1$, il vient le développement en série de puissances $\Phi(z)/\Theta(z) = 1/(1 - (1/3)z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} z^k$, qui donne enfin la formule renversée $Z_t = (((\Phi/\Theta)(B))X)_t = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} X_{t-k}$, qui est bien un filtre causal de X .

Solution succincte de l'exercice 3.4.

1. On a $\Theta(z) = 1$ (comme pour toute équation AR). D'autre part $\Phi(z) = 1 - z^p$, dont les racines $\{e^{i2\pi k/p} : 0 \leq k \leq p-1\}$, appelées racines p -ième de l'unité, sont de module 1. Comme l'absence d'annulation de Φ sur le cercle unité est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire pour l'existence (et unicité) d'une solution stationnaire, on ne peut pas en déduire que l'équation n'admet pas de solution stationnaire.
2. Tentons d'établir qu'il n'existe pas de solution stationnaire en raisonnant par l'absurde. Si X est une solution stationnaire, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $r \geq 1$,

$$X_t = X_{t-p} + Z_t = X_{t-2p} + Z_t + Z_{t-p} = \cdots = X_{t-rp} + \sum_{k=0}^{r-1} Z_{t-kp}.$$

Or d'une part, en utilisant le théorème de Pythagore dans L^2 , il vient

$$\|X_t - X_{t-2p}\|_2^2 = \|Z_t + Z_{t-p} + \cdots + Z_{t-(r-1)p}\|_2^2 = r\sigma^2 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \infty,$$

tandis que d'autre part, en utilisant la stationnarité de X ,

$$\|X_t - X_{t-2p}\|_2^2 = \gamma_X(0) - 2\gamma_X(2p) + \gamma_X(0) \leq 4\gamma_X(0) = \mathcal{O}_{r \rightarrow \infty}(1),$$

ce qui est bien contradictoire. Il n'y a donc pas de solution stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 3.5 (Produit d'ARMA).

1. Il s'agit de la causalité. D'après le cours, cela a lieu lorsque les polynômes $\Phi_1(z) = 1 - \varphi_1 z$ et $\Phi_2(z) = 1 - \varphi_2 z$ ne s'annulent pas sur le disque unité fermé. La condition est donc $\min(|\varphi_1|, |\varphi_2|) > 1$ car les racines sont $-1/\varphi_1$ et $-1/\varphi_2$. Cette condition inclut la condition d'existence de la solution stationnaire : $\Phi_1(z) = 1 - \phi_1 z$ et $\Phi_2(z) = 1 - \phi_2 z$ de ne pas s'annuler sur le cercle unité ;
2. Il s'agit de l'inversibilité : le bruit blanc ε (respectivement η) est un filtre linéaire causal du processus X (respectivement Y). D'après le cours, cela a lieu lorsque les polynômes $\Theta_1(z) = 1 + \theta_1 z$ et $\Theta_2(z) = 1 + \theta_2 z$ ne s'annulent pas sur le disque unité fermé. La condition est donc $\min(|\Theta_1|, |\Theta_2|) > 1$ car les racines sont $-1/\theta_1$ et $-1/\theta_2$;
3. Comme X et Y sont inversibles on a $\varepsilon = F_\psi X$ et $\eta = F_{\tilde{\psi}} Y$ où $\psi, \tilde{\psi} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (et à support dans \mathbb{N}), et donc pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, par continuité du produit scalaire,

$$\text{Cov}(\varepsilon_s, \eta_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_s, \eta_t) = \sum_{h,k \in \mathbb{Z}} \psi_h \tilde{\psi}_k \mathbb{E}(X_{s-h} Y_{t-k}) \sum_{h,k \in \mathbb{Z}} \psi_h \tilde{\psi}_k \mathbb{E}(X_{s-h}) \mathbb{E}(Y_{t-k}) = 0.$$

3. ÉQUATIONS ET PROCESSUS ARMA

4. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$, par indépendance, $\mu_Z(t) = \mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et

$$\begin{aligned}\gamma_Z(t, t+h) &= \mathbb{E}(X_t Y_t X_{t+h} Y_{t+h}) \\ &= \mathbb{E}(X_t X_{t+h})\mathbb{E}(Y_t Y_{t+h}) \\ &= \gamma_X(h)\gamma_Y(h) \\ &= \sigma_1^2 \left(\sum_{j \geq 0} \psi_j \psi_{j+h} \right) \sigma_2^2 \left(\sum_{j \geq 0} \tilde{\psi}_j \tilde{\psi}_{j+h} \right),\end{aligned}$$

qui ne dépendent pas de t (le processus Z est stationnaire).

Solution succincte de l'exercice 3.6 (ARMA(2,1)).

1. On a $P_\varphi(z) = 1 - z + z^2/4 = (1 - z/2)^2$ qui ne s'annule qu'en $z = 2$ (racine double). Comme cette racine est de module > 2 , il en découle que l'équation ARMA ci-dessus admet une unique solution stationnaire, qui est causale ;
2. Les $(\psi_k)_{k \geq 0}$ s'obtiennent en développant en série de puissance de z autour du cercle unité la fraction rationnelle de l'ARMA : (ici $|z/2| < 1$ si $|z| = 1$)

$$\begin{aligned}\frac{P_\theta(z)}{P_\varphi(z)} &= \frac{1+z}{(1-z/2)^2} \\ &= (1+z) \sum_{k \geq 0} (k+1) 2^{-k} z^k \\ &= 1 + \sum_{k \geq 1} \underbrace{((k+1)2^{-k} + k2^{-(k-1)})}_{(3k+1)2^{-k}} z^k,\end{aligned}$$

d'où $\psi = \mathbf{1}_{k=0} + (3k+1)2^{-k}\mathbf{1}_{k>0}$. Note : $(1-u)^{-2} = \sum_{k \geq 0} (k+1)u^k$ si $|u| < 1$;

3. Pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{k \geq 0} \psi_k \psi_{k+h} = \sigma^2 \psi_h + \sigma^2 2^{-h} \sum_{k \geq 1} (3k+1)(3(k+h)+1) 2^{-2k} = \dots.$$

Solution succincte de l'exercice 3.7 (Filtrage exponentiel et AR(∞)). On vérifie directement que ce processus MA(1) est solution de l'équation AR(∞) : pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k Z_{t-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} Z_{t-1-k} = Z_t - \lambda Z_{t-1} = X_t.$$

Solution succincte de l'exercice 3.8.

1. Par analogie avec le cas scalaire ($d = 1$) on aimeraient poser

$$X_t = \sum_{k \geq 0} \Phi^k Z_{t-k}.$$

C'est une série dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)$ dont la norme $\|Y\|_{L^2} := \mathbb{E}(\|Y\|_2^2)^{1/2}$ dérive du produit scalaire $\mathbb{E}(X \cdot Y)$. Elle converge absolument car

$$\left\| \sum_{k \geq 0} \Phi^k Z_{t-k} \right\|_{L^2} \leq \sum_{k \geq 0} \|\Phi^k\|_{2 \rightarrow 2} \|Z_{t-k}\|_{L^2} \leq \sum_{k \geq 0} \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}^k \sqrt{d\sigma^2} = \frac{\sqrt{d}\sigma}{1 - \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}},$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire pour la norme de L^2 , la sous-multiplicativité de la norme de matrice puis le fait que $\|Z_t\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^d \mathbb{E}(Z_{t,j}^2) = d\sigma^2$. Le processus X est donc bien défini dans L^2 . Il est bien solution de l'équation AR(1) vectorielle car par continuité de l'application linéaire $Y \in L^2 \mapsto \Phi Y \in L^2$, on a

$$\Phi X_{t-1} = \sum_{k \geq 0} \Phi^{k+1} Z_{t-1-k} = \sum_{k \geq 1} \Phi^k Z_{t-k} = X_t - Z_t.$$

Notons que X a une norme constante en ce sens que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \|X_t\|_{L^2}^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{j,k \geq 0} \Phi^j Z_{t-j} \cdot \Phi^k \cdot Z_{t-k} \right) = \sum_{j,k \geq 0} \sum_{u,v,w=1}^d \Phi_{u,v}^j \Phi_{u,w}^k \mathbb{E}(Z_{t-j,v} Z_{t-k,w}) \\ &= \sigma^2 \sum_{k \geq 0} \sum_{u,v} (\Phi_{u,v}^k)^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{k \geq 0} \text{Tr}(\Phi^k (\Phi^k)^\top). \end{aligned}$$

Si X' est une solution de l'équation dans L^2 , de norme constante, alors

$$X'_t = Z_t + \Phi X'_{t-1} = \dots = \sum_{k=0}^n \Phi^k Z_{t-k} + \Phi^{n+1} X'_{t-(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \sum_{k \geq 0} \Phi^k Z_{t-k} = X_t$$

car $\|\Phi^{n+1} X'_{t-(n+1)}\|_{L^2} \leq \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}^{n+1} \|X'_{t-(n+1)}\|_{L^2} = \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}^{n+1} \|X'_0\|_{L^2} = o(1)$ et il y a donc unicité parmi les solutions dans L^2 de norme constante.

2. Si les processus $(Z_{t,1})_{t \in \mathbb{Z}}, \dots, (Z_{t,d})_{t \in \mathbb{Z}}$ sont indépendants et si Φ est diagonale, alors les processus $(X_{t,1})_{t \in \mathbb{Z}}, \dots, (X_{t,d})_{t \in \mathbb{Z}}$ sont des AR(1) indépendants de coefficients respectifs $\Phi_{1,1}, \dots, \Phi_{d,d}$ car dans ce cas $\Phi^k Z_{t-k} = (\Phi_{1,1}^k Z_{t-k,1}, \dots, \Phi_{d,d}^k Z_{t-k,d})^\top$.

4

FEUILLE D'EXERCICE

Mesure et densité spectrales

Sauf mention explicite du contraire, les suites et les coefficients sont réels.

Solution succincte de l'exercice 4.1 (Processus AR(1)).

1. On a $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$ d'où $f_Z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$. La densité spectrale est constante et attribue le même poids $\sigma^2/(2\pi)$ à toute fréquence λ , d'où le nom de **bruit blanc** en identifiant une fréquence à une couleur par analogie avec la nature ondulatoire de la lumière (penser à la physique des rayonnements électromagnétiques) ;
2. On sait déjà par un exercice précédent (ou par le cours) que pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_{F_\alpha Y}(h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Y(h+k-j)$$

et cette formule fait sens car $\|\gamma_Y(h)\|_\infty \leq \gamma_Y(0) < \infty$ et $\|\alpha\|_1 < \infty$. D'autre part, par définition de ν_Y , on a, pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_Y(h) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{iu(h+k-j)} d\nu_Y(u).$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \gamma_{F_\alpha Y}(h) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \int_{[-\pi, \pi]} e^{iu(h+k-j)} d\nu_Y(u) \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k e^{iu(h+k-j)} d\nu_Y(u) \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} e^{iuh} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{-iuj} \right|^2 d\nu_Y(u) \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} e^{iuh} \underbrace{\left| P_\alpha(e^{-iu}) \right|^2}_{d\nu_{F_\alpha Y}(u)} d\nu_Y(u), \end{aligned}$$

Enfin si Y admet une densité spectrale f_Y alors

$$d\nu_{F_\alpha Y}(u) = \left| P_\alpha(e^{-iu}) \right|^2 d\nu_Y(u) = \underbrace{\left| P_\alpha(e^{-iu}) \right|^2 f_Y(u)}_{f_{F_\alpha Y}} du.$$

3. Si $|\phi| < 1$ alors $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = \phi^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{-i\lambda}\phi)^j \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \mathrm{e}^{-i\lambda}\phi|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Si $|\phi| > 1$ alors $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = -(\phi)^{-k+1} \mathbf{1}_{k \geq 1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et donc

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| - \sum_{j \leq 0} \mathrm{e}^{-ij\lambda} \phi^{j-1} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi |\phi|^2} \left| \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-i\lambda}\phi^{-1}} \right|^2, \quad \lambda \in [-\pi, \pi];$$

4. L'équation AR(1) vérifiée par X donne

$$X_t = \phi^{-1} X_{t+1} - \phi^{-1} Z_{t+1}.$$

Notons que $(-\phi^{-1} Z'_{t+1})_{t \in \mathbb{Z}} \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2/\phi^2)$. Pour transformer cette équation autorégressive rétrograde en équation autorégressive progressive, on procède à un retournement temporel en posant $\tilde{X}_t := X_{-t}$, ce qui donne

$$\tilde{X}_{-t} = \phi^{-1} \tilde{X}_{-t-1} - \phi^{-1} Z_{t+1},$$

soit, en posant $t' := -t$,

$$\tilde{X}_{t'} = \phi^{-1} \tilde{X}_{t'-1} - \phi^{-1} Z_{-t'+1}.$$

Il ne reste plus qu'à observer que $(Z'_{t'})_{t' \in \mathbb{Z}} := (-\phi^{-1} Z_{-t'+1})_{t' \in \mathbb{Z}} \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2/\phi^2)$.

L'autocovariance d'un processus stationnaire est paire, et donc le retourné en temps du processus a la même autocovariance que le processus, et donc la même densité spectrale car la densité spectrale caractérise l'autocovariance.

Si X est de plus gaussien, alors sa loi est caractérisée par sa moyenne et son autocovariance, et donc X et son retourné en temps \tilde{X} ont même loi.

5. Si X est solution de l'équation MA(1) $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1} = F_\theta Z$ où $\theta_k = \mathbf{1}_{k=0} - \theta \mathbf{1}_{k=1}$ alors $\theta \in \ell^1$ car θ est à support fini, et

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-ij\lambda} \theta_j \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 1 - \mathrm{e}^{-i\lambda}\theta \right|^2.$$

Solution succincte de l'exercice 4.2 (Herglotz). Il s'agit d'une réplique d'une partie d'un exercice précédent sur l'autocovariance résolu par algèbre linéaire. Une fonction $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire si elle est symétrique (c'est-à-dire paire) et de type positif. Or le théorème de Herglotz indique à son tour que cela a lieu si la fonction constitue la suite des coefficients de Fourier d'une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$ (appelée mesure spectrale). Dans le cas de ρ , la condition $|\alpha| \leq 1/2$ est suffisante car la formule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ith} \frac{1 + 2\alpha \cos(t)}{2\pi} dt = \mathbf{1}_{h=0} + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ith} (\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}) dt = \mathbf{1}_{h=0} + \alpha \mathbf{1}_{|h|=1}$$

montre que ρ est alors la suite des coefficients de Fourier de la mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$ de densité $t \mapsto (1 + 2\alpha \cos(t))/(2\pi)$. En fait, il s'agit de la fonction d'autocovariance d'un processus MA(1) de paramètres θ et σ^2 tels que $(1 + \theta^2)\frac{\sigma^2}{2\pi} = 1$ et $2\theta\frac{\sigma^2}{2\pi} = \alpha$.

Supposons réciproquement que $|\alpha| > 1/2$ et montrons que ρ ne peut pas être la suite des coefficients de Fourier d'une mesure positive finie ν sur $[-\pi, \pi]$. On raisonne par l'absurde : si c'était le cas, alors avec $a = -\text{signe}(\alpha) \in \{\pm 1\}$,

$$0 \leq \int_{[-\pi, \pi]} \underbrace{(1 + 2a \cos(t))}_{\geq 0} \nu(dt) = \hat{\nu}(0) + a(\hat{\nu}(-1) + \hat{\nu}(1)) = 1 + 2a\alpha = 1 - 2|\alpha| < 0.$$

Solution succincte de l'exercice 4.3 (Somme).

1. $\mu_{X+Y}(t) = \mu_X + \mu_Y$ cte, $\gamma_{X+Y}(t, t+h) = \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$ ne dépend pas de t ;
2. $\nu_{X+Y} = \nu_X + \nu_Y$ et $f_{X+Y} = f_X + f_Y$ car ν et f dépendent linéairement de γ ;
3. $\mu_{XY}(t) = \mu_X \mu_Y$ et la quantité suivante ne dépend pas de t :

$$\begin{aligned} \gamma_{XY}(t, t+h) &= \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) \mathbb{E}(Y_t Y_{t+h}) - \mu_X \mu_Y \mu_X \mu_Y \\ &= (\gamma_X(h) + \mu_X^2)(\gamma_Y(h) + \mu_Y^2) - \mu_X^2 \mu_Y^2 \\ &= \gamma_X(h) \gamma_Y(h) + \mu_Y^2 \gamma_X(h) + \mu_X^2 \gamma_Y(h) \end{aligned}$$

4. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, en utilisant les théorèmes de Fubini–Tonelli et de Herglotz,

$$\begin{aligned} (f_X \star f_Y)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(u) f_Y(t-u) du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) e^{-ihu} \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_Y(k) e^{-ik(t-u)} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h, k \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) \gamma_Y(k) e^{-ikt} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iu(h-k)} du}_{\mathbf{1}_{h=k}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) \gamma_Y(h) e^{-iht} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-iht} (\gamma_{XY}(h) - \mu_Y^2 \gamma_X(h) - \mu_X^2 \gamma_Y(h)) \\ &= f_{XY}(t) - \mu_Y^2 f_X(t) - \mu_X^2 f_Y(t) \end{aligned}$$

d'où

$$f_{XY} = f_X \star f_Y + \mu_Y^2 f_X + \mu_X^2 f_Y.$$

Solution succincte de l'exercice 4.4 (Harmonique).

1. L'indépendance donne $\gamma_X = \gamma_{X-Y} + \gamma_Y$, et par ailleurs, comme on sait que le processus harmonique $X - Y$ est stationnaire centré, on peut recalculer rapidement son autocovariance en utilisant les propriétés de A et B (posons $\theta = \pi/3$) :

$$\begin{aligned} \gamma_{X-Y}(h) &= \mathbb{E}((X - Y)_0 (X - Y)_h) \\ &= \mathbb{E}(A(A \Re e^{ih\theta} + B \Im e^{ih\theta})) \\ &= \sigma^2 \Re e^{ih\theta} \\ &= \sigma^2 \cos(\theta h). \end{aligned}$$

Donc $\nu_{X-Y} = \frac{\sigma^2}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta)$ car

$$\int_{[-\pi, \pi]} e^{iht} \nu_{X-Y}(dt) = \frac{\sigma^2}{2} (e^{-i\theta h} + e^{i\theta h}) = \sigma^2 \Re(e^{i\theta h}) = \sigma^2 \cos(h\theta).$$

D'où $\nu_X = \nu_{X-Y} + \nu_Y = \frac{\sigma^2}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta) + \nu_Y$. Si Y est un $\text{BB}(0, \sigma_Y^2)$ alors $\nu_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2\pi}dt$ et donc dans ce cas ν_X comporte à la fois une partie à densité et des masses de Dirac (par conséquent X n'a pas de densité spectrale, tout comme $X - Y$).

2. Si X est un MA(1) $X = F_\alpha Z$ où $\alpha = \mathbf{1}_{h=0} + \theta \mathbf{1}_{h=1}$ et donc f_X existe et vaut

$$f_X(t) = |P_\alpha(e^{-it})|^2 f_Z(t) = |1 + \theta e^{-it}|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = (1 + 2\theta \cos(t) + \theta^2) \frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

Solution succincte de l'exercice 4.5 (Bestiaire).

1. $f(\pi) = 1 - \frac{\pi^2}{2} < 0$ ce qui n'est pas permis pour une densité spectrale ;
2. $f(-\pi) = 1 - \frac{\pi^2}{2} < 0$ ce qui n'est pas permis pour une densité spectrale ;
3. continue et positive donc définit une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$, qui est donc la mesure spectrale d'un processus d'après le théorème de Herglotz, qui admet donc f comme densité spectrale.

Solution succincte de l'exercice 4.6 (Bande). On a $\text{spec}(\gamma_n) \subset [2\pi m, 2\pi M]$ car pour tout $n \geq 1$ et tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_n v, v \rangle &= \sum_{j,k=1}^n (\gamma_n)_{j,k} v_j v_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n \gamma_Y(j-k) v_j v_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n v_j v_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} f(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j,k=1}^n v_j v_k e^{i(j-k)t} \right) f(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n v_j e^{ijt} \right|^2 f(t) dt \\ &\in [m, M] \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^n v_j e^{ijt} \right|^2 dt \\ &= [m, M] \sum_{j,k=1}^n v_j v_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t} dt}_{(2\pi)\mathbf{1}_{j=k}} \\ &= [m, M](2\pi) \|v\|_2^2. \end{aligned}$$

Prédiction

Solution succincte de l'exercice 5.1 (Processus déterministes).

1. Découle de $\text{proj}(X_t, H_{t-1}) = \arg \min_{Y \in H_{t-1}} \|X_t - Y\|_2$;
2. La quantité $\mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = \|X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1})\|_2^2$ ne dépend pas de t par stationnarité, et son annulation est équivalente à $X_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1})$ dans L^2 ;
3. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$, où A et B sont des v.a.r. fixée, non corrélées, de moyenne 0, et de variance σ^2 , et où θ est un paramètre réel fixé. À présent les formules trigonométriques $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ et $2 \cos(a) \sin(b) = \sin(a+b) + \sin(b-a)$ donnent, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = 2 \cos(\theta) X_{t-1} - X_{t-2} \in H_{t-1}, \quad \text{d'où} \quad X_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1}).$$

Ainsi X est déterministe. Ceci n'est pas étonnant : les trajectoires du processus sont des sinusoïdes dont la seule source d'aléa est l'amplitude, ce qui fait qu'à chaque instant, il est possible de prédire le futur de la trajectoire à partir de son passé.

4. Un bruit blanc à variance non nulle n'est jamais déterministe. En effet, si $Z \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$ alors $Z_t \perp H_{t-1} := \overline{\text{vect}\{Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots\}}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ d'où $\text{proj}(Z_t, H_{t-1}) = 0$ et $\|Z_t - \text{proj}(Z_t, H_{t-1})\|_2^2 = \|Z_t\|_2^2 = \sigma^2 > 0$.

Solution succincte de l'exercice 5.2 (Lissage exponentiel).

1. En posant $f(a) := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - a)^2$, il vient

$$f'(a) = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - a)$$

qui s'annule lorsque $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k} = a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k = a \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}$.

2. Pour établir la formule de mise à jour récursive, on écrit

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= (1 - \lambda) \sum_{k=0}^n \lambda^k X_{n+1-k} \\ &= (1 - \lambda) \sum_{k=0}^n \lambda^k X_{n-(k-1)} \\ &= (1 - \lambda) X_{n+1} + \lambda \hat{X}_n \end{aligned}$$

3. On a, en faisant le changement de variables $(k, s) = (k, k + k')$,

$$\begin{aligned}\hat{\hat{X}}_n &:= (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \hat{X}_{n-k} \\ &= (1 - \lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \sum_{k'=0}^{n-k-1} \lambda^{k'} X_{n-k-k'} \\ &= (1 - \lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n-k-1} \lambda^{k+k'} X_{n-(k+k')} \\ &= (1 - \lambda)^2 \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \lambda^s X_{n-s}.\end{aligned}$$

4. La fonction $f(a, b) := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - (ak + b))^2$ vérifie

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2} \partial_1 f(a, b) &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - (ak + b)) k \sim \sum_{k=0}^{n-1} k \lambda^k X_{n-k} - a \frac{\lambda(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3} - b \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \\ -\frac{1}{2} \partial_2 f(a, b) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - (ak + b)) \sim \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k} - a \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} - b \frac{1}{1-\lambda}\end{aligned}$$

car (dérivées à l'origine de la transformée de Laplace de la loi géométrique)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k = \frac{1}{1-\lambda}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \lambda^k = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \lambda^k = \frac{\lambda(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3}.$$

Supposons à présent que (a, b) est un point critique de f . On a alors

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} k \lambda^k X_{n-k} \sim \frac{1+\lambda}{1-\lambda} a + b$$

et

$$(1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k} \sim \frac{\lambda}{1-\lambda} a + b,$$

d'où

$$a \sim \frac{1-\lambda}{\lambda} (\hat{\hat{X}}_n - (1-\lambda) \hat{X}_n - \lambda \hat{X}_n) = \frac{1-\lambda}{\lambda} (\hat{\hat{X}}_n - \hat{X}_n)$$

et

$$b \sim \hat{X}_n - \frac{\lambda}{1-\lambda} a \sim 2\hat{X}_n - \hat{\hat{X}}_n.$$

Solution succincte de l'exercice 5.3 (Inversibilité de la matrice d'autocovariance).

1. Comme γ_{r+1} est singulière, il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $v \neq 0$ et $\langle \gamma_{r+1}v, v \rangle = 0$. On a nécessairement $v_{r+1} \neq 0$ car sinon γ_r serait singulière. Comme $\langle \gamma_{r+1}v, v \rangle = \sum_{j,k=1}^{r+1} \gamma(j-k)v_j v_k = \text{Var}(\sum_{j=1}^{r+1} v_j X_j)$ on obtient $\sum_{j=1}^{r+1} v_j X_j = 0$ p.s. À présent, si $v_{r+1} \neq 0$, alors, en posant $b_j^{(r+1)} = v_j/v_{r+1}$, il vient, p.s.

$$X_{r+1} = \sum_{j=1}^{r+1} b_j^{(r+1)} X_j.$$

Ensuite, pour tout $n \geq r+1$, on procède de même pour exprimer X_n comme combinaison linéaire de X_{n-1}, \dots, X_{n-r} , puis X_{n-1} comme combinaison linéaire de $X_{n-2}, \dots, X_{n-r-1}$, etc, jusqu'à éliminer tous les X_j avec $j > r+1$.

2. De la question précédente on tire $\lambda_{\min}(\gamma_r) > 0$ et

$$\gamma(0) = \text{Var}(X_{n+1}) = \langle \gamma_r b^{(n)}, b^{(n)} \rangle \geq \lambda_{\min}(\gamma_r) \|b^{(n)}\|_2 \geq \lambda_{\min}(\gamma_r) \|b^{(n)}\|_\infty$$

d'où

$$\sup_{n \geq r+1, 1 \leq j \leq r} |b_j^{(n)}| = \sup_{n \geq r+1} \|b^{(n)}\|_\infty \leq \frac{\gamma(0)}{\lambda_{\min}(\gamma_r)} < \infty.$$

3. On a en utilisant les deux questions précédentes

$$0 < \gamma(0) = \text{Var}(X_{n+1}) = \sum_{j=1}^r \gamma(n+1-j) b_j^{(n)} \leq \sup_{1 \leq j \leq r, n \geq r+1} |b_j^{(n)}| \max_{n-r+1 \leq k \leq n} |\gamma(k)|$$

or le second membre tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ si $\gamma(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

Solution succincte de l'exercice 5.4 (Prédiction de processus autorégressifs).

1. $\hat{X}_2 = \varphi_{1,1} X_1$ où $\varphi_{1,1}$ est solution de $\gamma_1 \varphi_{1,1} = \gamma(1)$, et comme $\gamma_1 = \gamma(0)$, il vient $\varphi_{1,1} = \gamma(1)/\gamma(0) = \rho(1)$, d'où enfin $\hat{X}_2 = \rho(1) X_1$. Notons que $\rho(1) = \varphi_1$ car l'équation AR(1) donne $\gamma(1) = \mathbb{E}(X_1 X_0) = \mathbb{E}((\varphi_1 X_0 + Z_1) X_0) = \varphi_1 \gamma(0)$ par causalité car $X_0 \in \text{vect}(Z_0, Z_{-1}, \dots)$.

Montrons que $\hat{X}_3 = \varphi_1 X_2$. On a $X_3 - \varphi_1 X_2 \in \text{vect}(X_1, X_2)$, et il suffit d'établir que $X_3 - \varphi_1 X_2 \perp X_1$ et $\varphi_1 X_2 \perp X_2$. Or en utilisant l'équation AR(1) et la causalité on obtient $\langle X_3 - \varphi_1 X_2, X_1 \rangle = \langle Z_3, X_1 \rangle = 0$ et $\langle X_3 - \varphi_1 X_2, X_2 \rangle = \langle Z_3, X_2 \rangle = 0$.

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n$, car $\varphi_1 X_n \in \text{vect}(X_1, \dots, X_n)$ et l'équation AR(1) et la causalité donnent pour tout $Y \in \text{vect}(X_1, \dots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - \varphi_1 X_n, Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

2. On a $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}$ car $\varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1} \in \text{vect}(X_1, \dots, X_n)$ tandis que l'équation AR(2) et la causalité donnent pour tout $Y \in \text{vect}(X_1, \dots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - (\varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}), Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

3. Toujours la même idée poussée encore plus loin : On a $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \dots + \varphi_p X_{n-p+1}$ car $\varphi_1 X_n + \dots + \varphi_p X_{n-p+1} \in \text{vect}(X_1, \dots, X_n)$ tandis que l'équation AR(p) et la causalité donnent pour tout $Y \in \text{vect}(X_1, \dots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - (\varphi_1 X_n + \dots + \varphi_p X_{n-p+1}), Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

Solution succincte de l'exercice 5.5 (Prédiction de processus ARMA).

1. Par causalité et inversibilité on obtient

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j Z_{t-j} \quad \text{et} \quad Z_t = \sum_{j \geq 0} \pi_j X_{t-j}$$

d'où

$$X_{n+h} = \sum_{j \geq 0} \psi_j Z_{n+h-j} \quad \text{et} \quad Z_{n+h} = X_{n+h} + \sum_{j \geq 1} \pi_j X_{n+h-j}.$$

En appliquant $\text{proj}_{\mathcal{M}_n}$ on obtient

$$\tilde{X}_{n+h} = \sum_{j \geq 0} \psi_j \text{proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j})$$

or $\mathcal{M}_n = \text{vect}(Z_j : -\infty < j \leq n)$ par causalité, et donc $\text{proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j}) = Z_{n+h-j}$ si $n + h - j \leq n$ c'est-à-dire si $j \geq h$, tandis que comme Z est un bruit blanc, on a $Z_{n+h-j} \perp \mathcal{M}_n$ c'est-à-dire $\text{proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j}) = 0$ si $n + h - j > n$ c'est-à-dire si $j < h$. On obtient bien la formule attendue $\tilde{X}_{n+h} = \sum_{j \geq h} \psi_j Z_{n+h-j}$.

En appliquant $\text{proj}_{\mathcal{M}_n}$ cette fois-ci à la formule de Z_{n+h} ci-dessus il vient

$$\text{proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h}) = \tilde{X}_{n+h} + \sum_{j \geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j}$$

or comme $h \geq 1$ on a $Z_{n+h} \perp \mathcal{M}_n$ d'où $\tilde{X}_{n+h} = -\sum_{j \geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j}$.

On a enfin

$$X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h} = \sum_{j \geq 0} \psi_j Z_{n+h-j} - \sum_{j \geq h} \psi_j Z_{n+h-j} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j Z_{n+h-j}$$

d'où

$$\mathbb{E}((X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2.$$

2. Notons tout d'abord qu'un AR(p) causal est toujours inversible car $\theta(z) = 1$, et un MA(1) inversible est toujours causal car $\Phi(z) = 1$.

Pour un AR(p), on a $\theta(z) = 1$ et $\Phi(z) = 1 - (\varphi_1 z + \dots + \varphi_p z^p)$ donc $\pi_0 = 1$, $\pi_j = -\varphi_j$ si $1 \leq j \leq p$ et $\pi_j = 0$ si $j > p$, d'où

$$\tilde{X}_{n+h} = + \sum_{j=1}^p \varphi_j \tilde{X}_{n+h-j}$$

et en particulier

$$\tilde{X}_{n+1} = + \sum_{j=1}^p \varphi_j \tilde{X}_{n+1-j}$$

et comme $n + 1 - j \leq n$ pour $j \geq 1$ il vient $\tilde{X}_{n+1-j} = X_{n+1-j}$, d'où

$$\tilde{X}_{n+1} = + \sum_{j=1}^p \varphi_j X_{n+1-j} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1})^2) = \sigma^2 \psi_0^2 = \sigma^2.$$

Pour un MA(1) inversible on obtient comme précédemment que

$$\tilde{X}_{n+1} = - \sum_{j \geq 1} \pi_j X_{n+1-j}$$

or on a $\sum_{j \geq 0} \pi_j z^j = 1/(1 + \theta_1 z) = \sum_{j \geq 0} (-\theta_1 z)^j$ d'où $\pi_j = (-\theta_1)^j$, ce qui donne

$$\tilde{X}_{n+1} = - \sum_{j \geq 1} (-\theta_1)^j X_{n+1-j} = - \sum_{j \geq 0} (-\theta_1)^{j+1} X_{n-j}$$

tandis que comme $\psi_j = \mathbf{1}_{j=0}$ il vient

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1})^2) = \sigma^2.$$

Solution succincte de l'exercice 5.6 (Prédiction d'un MA(1) et algorithme des innovations). L'autocovariance d'un MA(1) vérifie

$$\kappa(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |i - j| > 1 \\ \sigma^2(1 + \theta^2) & \text{si } i = j \\ \theta\sigma^2 & \text{si } j = i \pm 1 \end{cases}$$

On a $v_0 = \kappa(1, 1) = \sigma^2(1 + \theta^2)$.

Étape $k = 0$. On a $\theta_{n,n} = 0$ si $n \geq 2$ car

$$\theta_{n,n} = v_0^{-1} \left(\kappa(n+1, 1) - \sum_{\emptyset} \right) = v_0^{-1} \kappa(n+1, 1).$$

Étape $k = 1$. On a $\theta_{n,n-1} = 0$ si $n \geq 3$ car

$$\theta_{n,n-1} = v_1^{-1} \left(\kappa(n+1, 2) - \sum_{j=0}^{1-1} \theta_{1,1-j} \theta_{n,n-j} v_j \right) = v_1^{-1} \left(\underbrace{\kappa(n+1, 2)}_{=0 \text{ si } n \geq 3} - \underbrace{\theta_{1,1} \theta_{n,n} v_0}_{=0 \text{ si } n \geq 2} \right).$$

Étape $k = 2$. Pour $n \geq 4$ on trouve $\theta_{n,n-2} = 0$ si $n \geq 4$, car en utilisant le fait que $\kappa(n+1, 3) = 0$ et $\theta_{n,n} = \theta_{n,n-1} = 0$ (obtenu précédemment),

$$\theta_{n,n-2} = v_2^{-1} \left(\kappa(n+1, 3) - \sum_{j=0}^{2-1} \theta_{2,2-j} \theta_{n,n-j} v_j \right) = 0.$$

Plus généralement, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ on montre par récurrence que $\theta_{n,n-k} = 0$ si $n \geq k+2$ et $k \geq 0$ c'est-à-dire que

$$\theta_{n,j} = 0, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Il en découle que pour $k = n-1$,

$$\theta_{n,1} = v_{n-1}^{-1} \left(\kappa(n+1, n) - \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2} \theta_{n-1,n-1-j} \theta_{n,n-j} v_j}_{=0} \right) = v_{n-1}^{-1} \kappa(n+1, n),$$

et donc pour notre MA(1) on a

$$\theta_{n,1} = v_{n-1}^{-1} \theta \sigma^2.$$

Ceci permet d'obtenir une formule de récurrence pour v_n pour notre MA(1) car

$$\begin{aligned} v_n &= \kappa(n+1, n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j \\ &= \sigma^2(1 + \theta^2) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j \\ &= \sigma^2(1 + \theta^2) - \theta_{n,1}^2 v_{n-1} \\ &= \sigma^2(1 + \theta^2) - v_{n-1}^{-2} \theta^2 \sigma^4 v_{n-1} \\ &= \sigma^2(1 + \theta^2) - v_{n-1}^{-1} \theta^2 \sigma^4. \end{aligned}$$

En conclusion, on a, pour notre MA(1),

$$\hat{X}_{n+1} = \theta_{n,1}(X_n - \hat{X}_n) = \theta \sigma^2(X_n - \hat{X}_n) v_{n-1}^{-1}$$

où v_{n-1} est calculé par récurrence avec l'équation précédente.

6

FEUILLE D'EXERCICE

Estimation

Solution succincte de l'exercice 6.1 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance).

1. Comme $|\phi| < 1$, le processus stationnaire X solution de l'équation AR(1) est un filtre causal de Z , et par conséquent, d'après un théorème du cours, on dispose du théorème de la limite centrale suivant :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \gamma)$$

où $\gamma = 2\pi f_X(0)$ et où f_X est la densité spectrale de X , qui est donnée ici par $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1-\varphi e^{-i\lambda}|^2}$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$, d'où enfin $\gamma = \sigma^2/(1-\varphi)^2$. Alternativement, on peut mener le calcul de la variance asymptotique directement :

$$\begin{aligned} n\mathbb{V}(\hat{\theta}) &= \frac{1}{n} \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \gamma_X(j-i) \\ &= \sum_{h=-n+1}^{n-1} \frac{n-h}{n} \gamma_X(h) \\ &= \sum_{h=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right) \gamma_X(h) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CVD}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ih\lambda} \gamma_X(h) \Big|_{\lambda=0} \\ &= 2\pi f_X(0) \end{aligned}$$

où la dernière identité provient d'un exercice précédent sur la densité spectrale ;

2. La convergence en loi précédente permet de construire un intervalle de confiance asymptotique $I_{n,\alpha}$ suivant de niveau de confiance $1 - \alpha$. En effet, on écrit

$$\mathbb{P}\left(\theta \in \hat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}} J_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\gamma}} (\hat{\theta} - \theta) \in J_\alpha\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z \in J_\alpha) = 1 - \alpha$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $J_\alpha = [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$ où q_p est le quantile d'ordre p de $\mathcal{N}(0, 1)$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(Z \leq q_p) = p$, ce qui donne

$$I_{n,\alpha} = \left[\hat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}} q_{1-\alpha/2}, \hat{\theta} + \sqrt{\frac{\gamma}{n}} q_{1-\alpha/2} \right]$$

Cet intervalle de confiance permet de tester l'hypothèse statistique $H_0 : \theta = 0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta \neq 0$. Pour $\alpha = 5\%$ on a $q_{1-\alpha/2} \approx 1.96$, ce qui donne avec les valeurs fournies pour n et $\hat{\theta}$ l'intervalle $[-0.422, 0.963]$. Comme 0 appartient à cet intervalle, on accepte H_0 avec un niveau de confiance de 5%;

3. Si $X^{(n)} = (X_0, \dots, X_{n-1})$ alors $\text{Cov}(X^{(n)}) = \text{Cov}(Y^{(n)}) = \gamma_n$, d'où

$$\tilde{Y}_n^{(n)} := \gamma_n^{-1/2} Y^{(n)} = \theta \gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n + \gamma_n^{-1/2} X^{(n)} = \theta A + Z^{(n)}$$

où $Z^{(n)} = \gamma_n^{-1/2} X^{(n)}$ vérifie $\text{Cov}(Z^{(n)}) = I_n$. On a donc

$$(A^\top A)^{-1} A \tilde{Y}_n^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1/2} \gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1/2} \gamma_n^{-1/2} Y^{(n)} = \tilde{\theta}_n.$$

Il s'agit donc tout simplement d'un estimateur par projection orthogonale obtenu par moindres carrés $\min_\theta \| \theta A - \tilde{Y}_n^{(n)} \|$, bien connu pour le modèle linéaire;

4. On a $\mathbb{E}(\tilde{\theta}_n) = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n) \theta = \theta$ et

$$\mathbb{E}((\tilde{\theta}_n)^2) = \frac{1}{(\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2} \mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2).$$

Or comme $\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)})^\top = Y^{(n)\top} \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n$ (il s'agit d'un réel), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)} Y^{(n)\top} \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n) \\ &= \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbb{E}(Y^{(n)} Y^{(n)\top}) \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} (\gamma_n + \theta \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top) \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n + \theta (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{V}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n}.$$

Or d'après le cours (décomposition de Cholesky LDL de γ_n), on a

$$\gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \text{Diag} \left(\frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}, \sigma^2, \dots, \sigma^2 \right)^{-1} \Phi_n \quad \text{où} \quad \Phi_n(i, j) = \mathbf{1}_{i=j} - \phi \mathbf{1}_{i=j+1}.$$

En notant que $\Phi_n \mathbf{1}_n = (1 - \phi, \dots, 1 - \phi, 1)^\top$, ceci permet d'établir la formule

$$\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n = (\Phi_n \mathbf{1}_n)^\top D_n \Phi_n \mathbf{1}_n = (1 - \phi)^2 \frac{1 - \phi^2}{\sigma^2} + (n - 2)(1 - \phi)^2 \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}.$$

Donc finalement

$$n \mathbb{V}(\tilde{\theta}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\sigma^2}{(1 - \phi)^2}.$$

Ainsi, les estimateurs $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$ sont asymptotiquement de même variance.

Solution succincte de l'exercice 6.2 (Comparaison de différents estimateurs pour un MA(1)).

1. On sait que $\gamma_X = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{h=\pm 1}$, ce qui donne $\hat{\gamma}(0) = \hat{\sigma}^2(1 + \hat{\theta}^2)$ et $\hat{\gamma}(1) = \hat{\sigma}^2\hat{\theta}$, d'où on tire

$$\hat{\rho}(1) = \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\hat{\theta}}{1 + \hat{\theta}^2}.$$

Cela donne l'équation du second degré $\widehat{\rho}(1)\widehat{\theta}^2 - \widehat{\theta} + \widehat{\rho}(1) = 0$ en $\widehat{\theta}$ dont le discriminant $\delta = 1 - 4\widehat{\rho}(1)^2$ est ≥ 0 ssi $|\widehat{\rho}(1)| \leq 1/2$. Si $|\widehat{\rho}(1)| \leq 1/2$ les solutions sont

$$\widehat{\theta} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\widehat{\rho}(1)}}{2\widehat{\rho}(1)}$$

et comme on souhaite que $|\theta| < 1$, on impose $|\widehat{\theta}| < 1$ ce qui donne

$$\widehat{\theta} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\widehat{\rho}(1)}}{2\widehat{\rho}(1)}.$$

Si $\widehat{\rho}(1) = 1/2$ alors $\widehat{\theta} = 1$ tandis que si $\widehat{\rho}(1) = -1/2$ alors $\widehat{\theta} = -1$. Pour rendre l'estimateur «continu», on pose finalement

$$\widehat{\theta} = g(\widehat{\rho}(1))$$

où

$$g(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u > 1/2, \\ \frac{1-\sqrt{1-4u^2}}{2u} & \text{si } |u| < 1/2, \\ +1 & \text{si } u < -1/2. \end{cases}$$

2. D'après le cours (formule de Bartlett)

$$\sqrt{n}(\widehat{\rho}(1) - \rho(1)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, w_{1,1})$$

où

$$w_{i,j} = \sum_{k \geq 1} [\rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k)] [\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)].$$

Comme X est un MA(1) on a $\rho(h) = 0$ si $|h| > 1$ et donc (note : $\rho(0) = 1$)

$$w_{1,1} = \underbrace{(\rho(0) + 0 - 2\rho(1)^2)^2}_{k=1} + \underbrace{(\rho(1) + 0 - 0)^2}_{k=2} = 1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4,$$

ce qui donne

$$\sqrt{n}(\widehat{\rho}(1) - \rho(1)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4).$$

3. On a $\widehat{\theta}^{(1)} = g(\widehat{\rho}(1))$. La méthode-delta donne

$$\sqrt{n}(g(\widehat{\rho}(1)) - g(\rho(1))) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, g'(\rho(1))^2 w_{1,1}).$$

$$= \sigma_1^2(\theta)$$

Un calcul donne

$$\sigma_1^2(\theta) = g'(\rho(1))^2 w_{1,1} = \frac{1 + \theta^2 + 4\theta^4 + \theta^6 + \theta^8}{(1 - \theta^2)^2}.$$

4. On a $\sigma_2^2(\theta) = 1$. L'estimateur $\widehat{\theta}_2$ est meilleur que $\widehat{\theta}_1$ ssi $(1 =)\sigma_2^2(\theta) \leq \sigma_1^2(\theta)$ c.-à-d. ssi $1 + \theta^2 + 4\theta^4 + \theta^6 + \theta^8 \geq (1 - \theta^2)^2 = 1 - 2\theta^2 + \theta^4$, ce qui est toujours vrai.
5. On a $\sigma_3(\theta)^2 = 1 - \theta^2$. L'estimateur $\widehat{\theta}_3$ est meilleur que $\widehat{\theta}_2$ ssi $(1 - \theta^2 =)\sigma_3(\theta)^2 \leq \sigma_1(\theta)^2 (= 1)$ ce qui est toujours vrai.

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Annales d'examens

Année 2016/2017



Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine



- Auteurs des sujets et corrigés :
 - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
 - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
- Chasseurs de coquilles :
 - Pagnard, Camille (enseignant, Paris-Dauphine, 2014–)
 - Possamaï, Dylan (enseignant, Paris-Dauphine, 2013–)
 - Tan, Xiaolu (enseignant, Paris-Dauphine, 2016–)

Examen partiel

Durée : 2 heures

Conditions : sans calculatrice ni documents

Exercice 1 (Filtrage d'un bruit blanc). Soit $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires (réelles) indépendantes, identiquement distribuées, de carré intégrable, et telles que

$$\mathbb{E}[\xi_t] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[\xi_t^2] = \sigma^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ le processus défini par

$$\varepsilon_t = U\xi_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où U est une variable aléatoire de carré intégrable, indépendante de $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et telle que

$$\mathbb{E}[U^2] = \rho^2.$$

1. Montrer que $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible dont on explicitera la variance.
2. Le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est-il un bruit blanc fort ?

On définit le filtre $\psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ par $\psi_k = 2^{-k}$ pour $k \geq 1$ et $\psi_k = 0$ pour $k \leq 0$.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

est bien définie et de carré intégrable.

4. Montrer que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire et causal.
5. Calculer l'autocovariance $\gamma_X(h)$ de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ en fonction de σ^2 et ρ^2 .

Exercice 2 (Modèle AR(1) bruité). Soit $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus MA(1) s'écrivant

$$Z_t = U_t + \theta U_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{*}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $(U_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance σ^2 .

1. Justifier le fait que $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.
2. Calculer la fonction d'autocovariance de $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

On admettra dans la suite qu'un processus stationnaire ayant la même fonction d'autocovariance que $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un MA(1) admettant la représentation (*).

On considère le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par

$$Y_t = 2Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance $\frac{5}{18}$. On suppose que $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est entaché d'une erreur d'observation : on observe

$$X_t = Y_t + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance $\frac{1}{6}$ et non-corrélé¹ avec $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

1. C'est-à-dire $\mathbb{E}[\varepsilon_t \eta_\ell] = 0$ pour tous $t, \ell \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer que le processus $(W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par

$$W_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

est un processus MA(1), c'est-à-dire qu'il admet la représentation $(*)$ pour des valeurs θ et σ^2 que l'on déterminera.

4. En déduire que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est solution d'une équation ARMA que l'on explicitera.

Exercice 3 (Construction d'un processus stationnaire). Soient U une variable aléatoire sur $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ de loi \mathbb{P}_U , et Z une variable aléatoire réelle, indépendante de U , de carré intégrable et centrée. On pose

$$X_t = Z \exp(itU), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans \mathbb{C} est stationnaire centré.
2. Montrer que la fonction d'autocovariance de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est donnée par

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}[Z^2] \int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega} \mathbb{P}_U(d\omega), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

3. Montrer que si la loi \mathbb{P}_U est symétrique², alors γ_X est réelle et paire.
4. Montrer que si ξ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, alors la fonction caractéristique $\Phi_\xi(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi}]$ de ξ définit pour $t \in \mathbb{Z}$ la fonction de covariance d'un processus stationnaire à valeurs dans \mathbb{C} .

2. La loi \mathbb{P}_U est symétrique si pour toute $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ bornée, on a $\int_{\mathbb{T}} \varphi(\omega) \mathbb{P}_U(d\omega) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(-\omega) \mathbb{P}_U(d\omega)$.

English version

Exercise 1 (White noise filtering). Let $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of (real-valued) square integrable, independent random variables, with same distribution, and such that

$$\mathbb{E}[\xi_t] = 0 \text{ and } \mathbb{E}[\xi_t^2] = \sigma^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Let $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be the random process defined by

$$\varepsilon_t = U \xi_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where U is a square integrable random variable, independent of $(\xi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ and such that

$$\mathbb{E}[U^2] = \rho^2.$$

1. Show that the process $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a weak white noise and compute its variance.
2. Is $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ a strong white noise?

Let us define $\psi = (\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ by $\psi_k = 2^{-k}$ for $k \geq 1$ and $\psi_k = 0$ for $k \leq 0$.

3. Show that for every $t \in \mathbb{Z}$, the random variable

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

is well-defined and square integrable.

4. Show that the process $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is stationary and causal.
5. Compute the autocovariance γ_X of $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ and express it with σ^2 and ρ^2 .

Exercise 2 (Noisy AR(1) process). Let $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a MA(1) process with representation

$$Z_t = U_t + \theta U_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{*}$$

where $\theta \in \mathbb{R}$ et $(U_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance σ^2 .

1. Show that $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is stationary.
2. Compute the autocovariance function of $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

We will admit in the sequel that a stationary process with the same autocovariance function as $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a MA(1) process admitting representation (*). Let us consider the random process $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ defined by

$$Y_t = 2Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

where $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance $\frac{5}{18}$. We assume that $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is blurred by a systematic experimental noise: we observe

$$X_t = Y_t + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance $\frac{1}{6}$ and uncorrelated³ with $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

3. Show that the process $(W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ defined by

$$W_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

is a MA(1) process i.e. satisfies (*) for a set of values θ and σ^2 to be determined.

3. This means that $\mathbb{E}[\varepsilon_t \eta_t] = 0$ for every $t \in \mathbb{Z}$.

4. Derive that $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a solution to an ARMA equation to be determined.

Exercise 3 (Constructing a stationary process). Let U be a random variable on $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ with law \mathbb{P}_U , and let Z be a square integrable, real-valued random variable, independent of U and centred. Set

$$X_t = Z \exp(itU), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Show that the process $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ with values in \mathbb{C} is stationary and centred.
2. Show that the autocovariance function of $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is given by

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}[Z^2] \int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega} \mathbb{P}_U(d\omega), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

3. Show that if the law \mathbb{P}_U is symmetric⁴, then γ_X is real-valued and even.
4. Show that if ξ is a random variable with values in $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, then the characteristic function $\Phi_\xi(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi}]$ of ξ defines for every $t \in \mathbb{Z}$ the autocovariance function of a stationary process with values in \mathbb{C} .

4. The law \mathbb{P}_U is symmetric if, for every bounded $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, one has $\int_{\mathbb{T}} \varphi(\omega) \mathbb{P}_U(d\omega) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(-\omega) \mathbb{P}_U(d\omega)$.

Examen final

Durée : 2 heures

Conditions : sans calculatrice ni documents

Il sera tenu grand compte de la présentation et de la rédaction

Exercice 1. Soient $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ deux processus liés par la relation suivante

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + X_t + \varepsilon_t, \\ X_t &= \psi X_{t-1} + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $\eta = (\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont deux bruit blancs faibles décorrélés¹, de variance 1, et ϕ et ψ sont deux réels distincts dans $]0, 1[$.

1. Montrer que X est bien défini et stationnaire.
2. Montrer que $W = (W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par

$$W_t = X_t + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

est stationnaire.

3. En déduire que Y est bien défini et stationnaire.

On note B l'opérateur retard, défini par $BX_t = X_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par

$$Z_t = (1 - \phi B)(1 - \psi B)Y_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

5. En déduire que Z est un processus MA(1), c'est-à-dire qu'il vérifie

$$Z_t = \zeta_t + \vartheta \zeta_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $\zeta = (\zeta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$.

6. En déduire que Y est un processus ARMA(p, q) dont on précisera les ordres p et q .
7. On suppose

$$\vartheta + \phi \neq 0 \text{ et } \vartheta + \psi \neq 0.$$

Montrer sans calcul qu'il existe une représentation causale de Y .

8. Montrer que l'on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1 - \phi x)(1 - \psi x)} = \frac{1}{\phi - \psi} \left(\frac{\phi}{1 - \phi x} - \frac{\psi}{1 - \psi x} \right).$$

9. En déduire la représentation causale

$$Y_t = \sum_{\ell \geq 0} a_\ell \zeta_{t-\ell}$$

pour une suite $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ de $\ell^1(\mathbb{Z})$ que l'on explicitera.

1. C'est-à-dire pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{E}[\varepsilon_t \eta_s] = 0$.

Exercice 2. Soit $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus vérifiant

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort de variance $\sigma^2 > 0$ et $\phi \in]-1, 1[$.

1. Montrer que Y est bien défini.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On pose

$$X_t = \mu + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2. Montrer que $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire. Calculer sa moyenne et sa fonction d'autocovariance en fonction de μ , σ^2 et ϕ .
3. Justifier l'existence de la densité spectrale f_X de X et l'exprimer avec σ^2 et ϕ .

Pour un entier $n \geq 1$, on observe (une réalisation) du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) .

4. Montrer que l'estimateur $\hat{\mu}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ en probabilité lorsque $n \rightarrow \infty$.
5. En notant $\mathcal{N}(0, v^2)$ la loi normale centrée de variance v^2 , montrer que

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, v^2)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, et expliciter v^2 en fonction de σ^2 et ϕ .

6. On suppose σ^2 et ϕ connus. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Construire un intervalle de confiance pour μ asymptotiquement de niveau $1 - \alpha$.
7. Pour quelle valeur limite de ϕ obtient-on l'intervalle de confiance ayant la plus grande précision ?
8. On ne suppose plus ϕ et σ^2 connus. Proposer la construction d'un intervalle de confiance pour μ asymptotiquement de niveau $1 - \alpha$.

English version

Exercise 1. Let $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ and $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be two stochastic processes that satisfy

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi Y_{t-1} + X_t + \varepsilon_t, \\ X_t &= \psi X_{t-1} + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

where $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ and $\eta = (\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ are two uncorrelated² weak white noises with unit variance, and ϕ and ψ are two distinct real numbers in $(0, 1)$.

1. Show that X is well-defined and stationary.
2. Show that $W = (W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ defined by

$$W_t = X_t + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

is stationary.

3. Derive that Y is well-defined and stationary.

We write B for the delay operator, defined by $BX_t = X_{t-1}$ for $t \in \mathbb{Z}$.

4. Show that $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ defined by

$$Z_t = (1 - \phi B)(1 - \psi B)Y_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

is stationary and compute its autocovariance function.

5. Derive that Z is a MA(1) process, meaning that it can be written as

$$Z_t = \zeta_t + \vartheta \zeta_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where $\zeta = (\zeta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a white noise with variance $\sigma^2 > 0$ and $\vartheta \in \mathbb{R}$.

6. Derive that Y is a ARMA(p, q) process and identify its parameters p and q .

7. We assume that

$$\vartheta + \phi \neq 0 \text{ and } \vartheta + \psi \neq 0.$$

Prove (with no calculation) that there exists a causal representation for Y

8. Prove the decomposition

$$\frac{1}{(1 - \phi x)(1 - \psi x)} = \frac{1}{\phi - \psi} \left(\frac{\phi}{1 - \phi x} - \frac{\psi}{1 - \psi x} \right).$$

9. Derive the causal representation

$$Y_t = \sum_{\ell \geq 0} a_\ell \zeta_{t-\ell}$$

for a sequence $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}}$ of $\ell^1(\mathbb{Z})$ to be determined.

Exercise 2. Let $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a stochastic process such that

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a strong white noise with variance $\sigma^2 > 0$ and $\phi \in (-1, 1)$.

2. This means that for every $s, t \in \mathbb{Z}$, we have $\mathbb{E}[\varepsilon_t \eta_s] = 0$.

1. Show that Y is well-defined.

Let $\mu \in \mathbb{R}$ and

$$X_t = \mu + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2. Show that $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is stationary. Compute its mean and autocovariance function as a function of μ , σ^2 and ϕ .
3. Prove the existence of a spectral density f_X de X and express it with σ^2 and ϕ .

For an integer $n \geq 1$, one observes (a realisation) of the random vector (X_1, \dots, X_n) .

4. Prove that the estimator $\hat{\mu}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ converges to μ in probability as $n \rightarrow \infty$.
5. Prove that

$$\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, v^2)$$

as $n \rightarrow \infty$, where $\mathcal{N}(0, v^2)$ denotes the centred Gaussian law with variance v^2 and compute v^2 as a function of σ^2 and ϕ .

6. We assume that σ^2 and ϕ are known. Let $\alpha \in (0, 1)$. Build a confidence interval for μ that is asymptotically of confidence level $1 - \alpha$.
7. For which limiting value for ϕ do we have the best accuracy for this interval?
8. We do not assume ϕ nor σ^2 known anymore. Give a suggestion for constructing a confidence interval for μ that is asymptotically of confidence level $1 - \alpha$.

Examen partiel

Durée : 2 heures

Date : mercredi 20 novembre 2013

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 .

Exercice 1.

1. Qu'est-ce qu'un processus causal ? Donner une condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le processus linéaire $X_t = aZ_{t+1} + bZ_t + cZ_{t-1}$ soit causal ;
2. Calculer $(1 - B)^{2014}X_t$ où B est l'opérateur retard et où $X_t = t^{2013} - 1 + Z_t$;
3. Si Z_t est de plus gaussienne pour tout $t \in \mathbb{Z}$, est-ce que $X_t = Z_t^2$ est du second ordre ? Stationnaire ?
4. Trouver une solution de l'équation ARMA(1, 1) $X_t = 2X_{t-1} + Z_t - Z_{t-1}$. Est-elle causale ? Inversible ? ;
5. Calculer la densité spectrale d'un MA(1).

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k = \lambda^k$ si $k \geq 0$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$.

1. Si $|\lambda| < 1$, montrer que le processus $X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ est bien défini ;
2. Calculer les fonctions moyenne et d'autocovariance du processus X de la question précédente. Ce processus est-il stationnaire ? Causal ? ;
3. Que se passe-t-il si $\lambda = 1$?

Exercice 3. Soit l'équation AR(∞) $X_t = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k}$ où $0 < \lambda < 1$.

1. Écrire l'équation AR(∞) sous la forme $F_{\alpha}X = F_{\beta}Z$;
2. Trouver un processus linéaire solution de l'équation AR(∞).

Examen final

Durée : 2 heures

Date : jeudi 23 janvier 2014

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1. Soit $Z \sim BB(0, \sigma^2)$, et B l'opérateur retard.

1. Exprimer $Y_t = (1 - B)X_t$ en fonction de Z_t , où $X_t = t + 1 + Z_t$;
2. Le processus Y_t est-il stationnaire ? Préciser sa moyenne et son autocovariance ;
3. Soit $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$. A-t-on $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$? (Justifier) ;
4. Montrer que si $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$, alors on peut définir $F_\alpha Z$ dans L^2 .

Exercice 2. Soit Z un $BB(0, \sigma^2)$.

1. On considère l'équation ARMA(1, 1) $X_t = Z_t + 2Z_{t-1} + (1/2)X_{t-1}$. Trouver une solution stationnaire X . Est-elle unique ? Causale ? Inversible ?
2. Exprimer l'équation et sa solution X avec des filtres, et avec l'opérateur retard B ;
3. Exprimer l'autocovariance γ_X de X en fonction de α tel que $X = F_\alpha Z$;
4. Comment se comporte $\text{Cov}(X_s, X_t)$ quand $|t - s| \rightarrow \infty$?
5. Calculer le prédicteur $\text{proj}(X_2, H_{1,1})$, puis en déduire $\text{proj}(X_t, H_{t-1,1})$, $t \in \mathbb{Z}$

Exercice 3. Soit $Z \sim BB(0, \sigma^2)$ et $\alpha, \beta \in]-1, 1[$, et B l'opérateur retard. Trouver une solution stationnaire de l'équation ARMA(∞, ∞) suivante : $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k B^k X = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k B^k Z$.

Exercice 4. Soient A et B des v.a.r. indépendantes de moyenne 0 et de variance σ^2 , et $\theta \in [-\pi, \pi]$ une constante. On considère le processus «harmonique» $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$.

1. Montrer que X est stationnaire et calculer son autocovariance γ_X ;
2. Calculer la matrice de covariance Γ_n de (X_1, \dots, X_n) lorsque $\theta = \pi$;
3. Calculer la mesure spectrale de X . Préciser la densité spectrale si possible ;
4. Est-ce que $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$?
5. Tracer une trajectoire du processus $Y_t = A \cos(\theta t)$ en figurant $A(\omega)$ et θ ;

Exercice 5. Soit X un processus stationnaire réel de moyenne μ et d'autocovariance γ .

1. Donner la définition de la moyenne empirique \bar{X}_n ;
2. Calculer le biais de \bar{X}_n en fonction de μ et γ ;
3. Calculer l'écart quadratique moyen de \bar{X}_n en fonction de μ et γ .
4. Que se passe-t-il lorsque $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$?
5. Que se passe-t-il lorsque $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$?

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures

Date : lundi 1^{er} septembre 2014

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 .

Ce sujet reprend des éléments de l'examen partiel et de l'examen final de l'année.

Exercice 1.

1. Qu'est-ce qu'un processus causal ? Donner une condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le processus linéaire $X_t = aZ_{t+10} + bZ_t + cZ_{t-10}$ soit causal ;
2. Calculer $(B - 1)^{2014}X_t$ où B est l'opérateur retard et où $X_t = t^{2013} - 1 + Z_t$;
3. Si Z_t est de plus gaussienne pour tout $t \in \mathbb{Z}$, est-ce que $X_t = Z_t^4$ est du second ordre ? Stationnaire ? Que se passe-t-il si Z est un bruit blanc fort ?
4. Trouver une solution de l'équation ARMA(1, 1) $2X_t = 4X_{t-1} + 2Z_t - 2Z_{t-1}$. Est-elle causale ? Inversible ? ;
5. Calculer la densité spectrale d'un MA(1).

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k = \lambda^k$ si $k \geq 0$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$.

1. Si $|\lambda| < 1$, montrer que le processus $X_t = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 Z_{t-k}$ est bien défini ;
2. Calculer les fonctions moyenne et d'autocovariance du processus X de la question précédente. Ce processus est-il stationnaire ? Causal ? ;
3. Que se passe-t-il si $\lambda = 1$?

Exercice 3. Soit l'équation AR(∞) $X_t = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} X_{t-k}$ où $0 < \lambda < 1$.

1. Écrire l'équation AR(∞) sous la forme $F_{\alpha}X = F_{\beta}Z$;
2. Trouver un processus linéaire solution de l'équation AR(∞).

Exercice 4. Soient A et B des v.a.r. indépendantes de moyenne 0 et de variance σ^2 , et $\theta \in [-\pi, \pi]$ une constante. On considère le processus «harmonique» $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$.

1. Montrer que X est stationnaire et calculer son autocovariance γ_X ;
2. Calculer la matrice de covariance Γ_n de (X_1, \dots, X_n) lorsque $\theta = \pi$;
3. Calculer la mesure spectrale de X . Préciser la densité spectrale si possible ;
4. Est-ce que $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$?
5. Tracer une trajectoire du processus $Y_t = A \cos(\theta t)$ en figurant $A(\omega)$ et θ ;

Exercice 5. Soit X un processus stationnaire réel de moyenne μ et d'autocovariance γ .

1. Donner la définition de la moyenne empirique \bar{X}_n ;
2. Calculer le biais de \bar{X}_n en fonction de μ et γ ;
3. Calculer l'écart quadratique moyen de \bar{X}_n en fonction de μ et γ .
4. Que se passe-t-il lorsque $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h) = 0$?
5. Que se passe-t-il lorsque $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$?

Examen partiel

Durée : 2 heures

Date : mercredi 19 novembre 2014

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Version française

Exercice 1. Soit $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ des v.a.r. i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, et a, b des réels.

1. Calculer le processus $\Delta_3 S_t$ où $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ et où $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Est-ce que $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort ;
3. Si $p \in \mathbb{N}$, est-ce que $(Z_k^p)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort, et calculer le cas échéant la moyenne et la fonction d'autocovariance du processus ;
4. Calculer la fonction d'autocovariance de $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ où $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. Dans quel cas $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est causal ? inversible ? (justifier).

Exercice 2.

1. Trouver une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (ici $\varphi \in \mathbb{R}$) ;
2. Exprimer l'autocovariance et la densité spectrale de la solution quand $|\varphi| < 1$;
3. Résoudre l'équation ARMA(1, 1) suivante : $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
5. Soit Z un BruitBlanc($0, \sigma^2$), $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et $X_t = F_\alpha Z$. Est-ce que γ_X vérifie la propriété précédente de décroissance exponentielle ? (justifier).

English version

Exercise 1. Let $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ be i.i.d. r.r.v. of normal law $\mathcal{N}(0, 1)$, and let a, b be two reals.

1. Compute the process $\Delta_3 S_t$ where $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ and where $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Is $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ a white noise? Justify your answer and precise weak or strong;
3. If $p \in \mathbb{N}$, is $(Z_k^p)_{k \in \mathbb{Z}}$ a white noise ? Justify your answer, precise weak or strong, and compute if possible the mean and autocovariance;
4. Compute the autocovariance of $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. In which case $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ is causal? invertible? (justify your answers).

Exercise 2.

1. Find a stationary solution of the AR(1) equation $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (here $\varphi \in \mathbb{R}$);
2. Express the autocovariance and the spectral density of the solution when $|\varphi| < 1$;
3. Solve the ARMA(1, 1) equation $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Show that there exists $C > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ for all $h \in \mathbb{Z}$;
5. Let Z be a WhiteNoise($0, \sigma^2$), let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, and let $X_t = F_\alpha Z$. Does γ_X satisfies the exponential decay mentioned in the preceding question? (justify your answer).

Examen final

Durée : 2 heures

Date : vendredi 23 janvier 2015

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1. On considère l'équation ARMA(p, q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où les polynômes Φ et Θ s'écrivent $\Phi(z) = 1 - \varphi_1z - \dots - \varphi_p z^p$ et $\Theta(z) = 1 + \theta_1z + \dots + \theta_q z^q$. Dans cet exercice, on admet tous les résultats du chapitre 2 sur le filtrage (il ne faut donc pas les démontrer).

1. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, alors l'équation possède une unique solution stationnaire ;
2. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, alors la solution stationnaire est causale ;
3. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité et si Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé alors la solution stationnaire est inversible ;
4. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité et si X est la solution stationnaire de l'équation alors X est également solution de l'équation ARMA(p', q') de polynômes Φ/Q et Θ/Q où Q est le PGCD des polynômes Φ et Θ . Préciser p', q' .

Exercice 2. On considère à présent l'équation ARMA(2,1) $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Calculer une solution stationnaire X . Est-elle causale ? Inversible ? ;
2. Calculer l'autocovariance γ_X de X , puis $\text{proj}(X_s, H_{t-1,1})$. Étudier le cas où $s \rightarrow \infty$;
3. Si Z est un BB fort gaussien, et si \bar{X}_n désigne la moyenne empirique calculée avec X_1, \dots, X_n , démontrer que $\sqrt{n}\bar{X}_n$ converge en loi vers une loi gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Donner une application concrète.

Exercice 3. Soit X le processus linéaire solution de ARMA(p, q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où Z est un bruit blanc centré de variance σ^2 , et où Φ et Θ ne s'annulent pas sur le cercle unité. On numérote les racines a_1, \dots, a_p et b_1, \dots, b_q de Φ et de Θ de la manière suivante :

$$|a_1| \leq \dots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \dots \leq |a_p| \quad \text{et} \quad |b_1| \leq \dots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \dots \leq |b_q|$$

où $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$. On pose $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$ et on considère un bruit blanc Z_* centré de variance σ_*^2 . Soient Φ_* et Θ_* les polynômes définis par

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \bar{a_j}z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1}z) \quad \text{et} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \bar{b_j}z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1}z).$$

1. Montrer que l'équation ARMA(p, q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_* , qui est causale et inversible ;
2. Montrer que X et X_* ont même mesure spectrale et même autocovariance.

English version

Exercise 1. Let us consider the ARMA(p, q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where the polynomials Φ and Θ take the form $\Phi(z) = 1 - \varphi_1z - \dots - \varphi_p z^p$ and $\Theta(z) = 1 + \theta_1z + \dots + \theta_q z^q$. In this exercice, we admit all the results of chapter 2 on filtering (do not prove them here).

1. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle then the equation admits a unique stationary solution;
2. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the closed unit disc then the stationary solution is causal;
3. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle and if Θ does not vanish on the closed unit disc then the stationary solution is invertible;
4. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle and if X is the stationary solution then X is also the stationary solution of the ARMA(p', q') equation with polynomials Φ/Q and Θ/Q where Q is the GCD of Φ and Θ . Give p', q' .

Exercise 2. Let us consider the ARMA(2, 1) equation $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Compute a stationary solution. Is it causal? Invertible?;
2. Compute the autocovariance γ_X of X , and then $\text{proj}(X_s, H_{t-1,1})$ for $(s, t) = (2015, 1)$;
3. If Z is a strong Gaussian white noise, and if \bar{X}_n denotes the empirical mean computed with X_1, \dots, X_n , then prove that $\sqrt{n}\bar{X}_n$ converges in law to a Gaussian law and compute the mean and variance of the limit. Give a practical application.

Exercise 3. Let X be the linear process solution of the ARMA(p, q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where Z is a centered white noise of variance σ^2 , and where Φ and Θ do not vanish on the unit circle. We label the roots a_1, \dots, a_p and b_1, \dots, b_q of Φ and Θ as follows:

$$|a_1| \leq \dots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \dots \leq |a_p| \quad \text{and} \quad |b_1| \leq \dots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \dots \leq |b_q|$$

where $0 \leq r \leq p$ and $0 \leq s \leq q$. Let us define $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$. We consider a centered white noise Z_* of variance σ_*^2 . Let Φ_* and Θ_* be the polynomials defined by

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j}z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1}z) \quad \text{and} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j}z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1}z).$$

1. Prove that the ARMA(p, q) equation $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ admits a unique stationary solution denote X_* , which is causal and invertible;
2. Prove that X and X_* have identical spectral measure and autocovariance.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures

Date : lundi 1^{er} septembre 2015

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Ce sujet reprend des éléments des sujets et exercices de l'année.

Exercice 1 (ARMA(1, 1)). Soit l'équation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où ϕ et θ sont des réels, et où Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 .

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il une solution (X_t) stationnaire ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution (X_t) sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.
4. Calculer la fonction d'autocorrélation de (X_t) , et préciser le comportement de cette fonction à l'infini.

Exercice 2 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance pour un AR(1)). Soit Z un bruit blanc fort gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2 . Soit

$$Y_t = \theta + X_t,$$

où (X_t) est un AR(1) défini par $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, où $|\phi| < 1$. On cherche à estimer θ à partir de Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} . On note $\hat{\theta}_n$ la moyenne empirique de Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} définie par

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}(\hat{\theta}_n)$ et donner l'expression de γ défini par

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \gamma).$$

2. Lorsque $\phi = 0.6$, $\sigma^2 = 2$, et $n = 200$, on obtient $\hat{\theta}_n = 0.1$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ . Peut-on dire que $\theta = 0$?
3. Soit Γ_n la matrice de covariance du vecteur aléatoire $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})^\top$. Montrer que Γ_n est inversible ;
4. On propose un autre estimateur de θ défini par

$$\tilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)} \quad \text{où} \quad \mathbf{1}_n := (1, \dots, 1)^\top.$$

Montrer que $\tilde{\theta}_n$ est l'estimateur des moindres carrés $\min_\theta \|\theta \Gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n - \Gamma_n^{-1/2} Y^{(n)}\|$;

5. Montrer que $\mathbb{E}(\tilde{\theta}_n) = \theta$ et

$$\text{Var}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n};$$

6. En utilisant la décomposition de Cholesky

$$\Gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \text{Diag} \left(\frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}, \sigma^2, \dots, \sigma^2 \right)^{-1} \Phi_n \quad \text{où} \quad \Phi_n(i, j) := \mathbf{1}_{i=j} - \phi \mathbf{1}_{i=j+1},$$

montrer que $\tilde{\theta}_n$ et $\hat{\theta}_n$ ont asymptotiquement la même variance.

English version

Exercise 1 (ARMA(1, 1)). Let us consider the equation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, where ϕ and θ are reals, and where Z is a white noise of mean 0 and variance σ^2 .

1. Under which conditions on ϕ and θ there exists a stationary solution (X_t) ?
2. Under which condition this stationary solution is causal?

In the sequel we suppose that these condition are satisfied.

3. Give a representation of the the solution (X_t) as a series of the form $\sum \psi_k Z_{t-k}$. Discuss the convergence of the series and the nature of the convergence. Give the value of the coefficients $(\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.
4. Compute the autocorrelation function (X_t) . How it behaves at infinity?

Exercise 2 (Estimation of the mean and confidence interval for an AR(1)). Let Z be a strong Gaussian white noise with mean 0 and variance σ^2 . Let

$$Y_t = \theta + X_t,$$

where (X_t) is an AR(1) process solution of $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, where $|\phi| < 1$. We would like to estimate θ with Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} . Let $\hat{\theta}_n$ be the empirical mean of Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1} , namely

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Compute $\lim_{n \rightarrow \infty} n \text{Var}(\hat{\theta}_n)$ and provide the expression of γ defined by

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{law}} \mathcal{N}(0, \gamma).$$

2. When $\phi = 0.6$, $\sigma^2 = 2$, and $n = 200$, we get $\hat{\theta}_n = 0.1$. Construct a 95% asymptotic confidence interval for θ . Can we say that $\theta = 0$?
3. Show that the covariance matrix Γ_n of $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1})^\top$ is invertible;
4. We consider now another estimator of θ defined by

$$\tilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)} \quad \text{où } \mathbf{1}_n := (1, \dots, 1)^\top.$$

Show that $\tilde{\theta}_n$ is the least square estimator $\min_\theta \|\theta \Gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n - \Gamma_n^{-1/2} Y^{(n)}\|$;

5. Show that $\mathbb{E}(\tilde{\theta}_n) = 0$ and

$$\text{Var}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n};$$

6. By using the Cholesky decomposition

$$\Gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \text{Diag} \left(\frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}, \sigma^2, \dots, \sigma^2 \right)^{-1} \Phi_n \quad \text{where } \Phi_n(i, j) := \mathbf{1}_{i=j} - \phi \mathbf{1}_{i=j+1},$$

show that $\tilde{\theta}_n$ et $\hat{\theta}_n$ have asymptotically the same variance.

Examen partiel

Durée : 2 heures

Date : mercredi 4 novembre 2015 8h30-10h30

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 .

Exercice 1.

1. Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $X = F_\alpha Z$. À quelle condition le processus X est causal ? Inversible ? À la fois causal et inversible ? ;
2. Calculer $\Delta^2 X_t$ où $\Delta = 1 - B$ est l'opérateur différence et où $X_t = 1 + t + Z_t$;
3. Montrer que si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont des processus stationnaires indépendants alors le processus produit $(X_t Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire. Calculer son autocovariance ;
4. Montrer que l'autocovariance d'un processus MA(1) est la transformée de Fourier d'une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$ qu'on calculera.

Exercice 2.

Soit l'équation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où ϕ et θ sont des réels.

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il une solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ stationnaire ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$;
4. Calculer l'autocovariance de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, et donner son comportement à l'infini.

Exercice 3.

1. Démontrer que lorsque Z est gaussien alors pour tous $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $t \in \mathbb{Z}$, la v.a.r. $(F_\alpha Z)_t$ est gaussienne, et calculer sa moyenne et sa variance ;
2. Démontrer que lorsque les v.a.r. $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d. et dans L^4 alors pour tous $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $t \in \mathbb{Z}$, la v.a.r. $(F_\alpha Z)_t$ possède un moment d'ordre 4 qu'on calculera.

[English version](#)

In the whole text, $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a white noise of zero mean and variance σ^2 .

Exercise 1.

1. Let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $X = F_\alpha Z$. Under which condition the process X is causal ? Invertible ? Both causal and invertible ?;
2. Compute $\Delta^2 X_t$ where $\Delta = 1 - B$ is the difference operator and where $X_t = 1 + t + Z_t$;
3. Show that if $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ and $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ are independent stationary processes then the product process $(X_t Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is also stationary and compute its autocovariance;
4. Show that the autocovariance of an MA(1) process is the Fourier transform of a finite positive measure on $[-\pi, \pi]$, and compute this measure.

Exercise 2. We consider the equation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, where ϕ and θ are reals.

1. Under which condition on ϕ and θ there exists a stationary solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$?
2. Under which condition this solution is causal?

In the sequel we assume that these conditions are satisfied.

3. Give a representation of the solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ in terms of a series $\sum \psi_k Z_{t-k}$. Justify the convergence of the series, and make precise the notion of convergence and the value of the coefficients $(\psi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$;
4. Compute the autocovariance of $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, and give its behavior at infinity.

Exercise 3.

1. Show that when Z is gaussian then for any $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $t \in \mathbb{Z}$, the r.r.v. $(F_\alpha Z)_t$ is gaussian, and compute its mean and variance;
2. Show that when the r.r.v. $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ are i.i.d. and in L^4 then for all $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $t \in \mathbb{Z}$, the r.r.v. $(F_\alpha Z)_t$ admits a finite moment of order 4 and compute it.

Examen final

Durée : 2 heures

Date : lundi 11 janvier 2016

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1 (Sport). Soit Z un bruit blanc de moyenne 0 et de variance $\sigma^2 > 0$.

1. Soient θ et φ des réels fixés tels que $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$. Démontrer que l'équation ARMA(1, 1) $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ n'a pas de solution stationnaire ;
2. Soient θ et φ des réels fixés dans l'intervalle $] -1, 1[$. Démontrer que la solution stationnaire de l'équation ARMA(1, 1) $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ est aussi solution de l'équation ARMA(∞, ∞) $X_t + \sum_{k=1}^{\infty} (-\theta)^k X_{t-k} = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k Z_{t-k}$;
3. Calculer une solution stationnaire de l'équation ARMA(2, 1) $X_t = \frac{1}{4}X_{t-2} + Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1}$; Est-elle unique ? Causale ? Inversible ? Construire des solutions non stationnaires ;
4. Démontrer que si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire ARMA(p, q) dont le polynôme Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé alors il existe des constantes $C, c > 0$ telles que $|\gamma_X(h)| \leq Ce^{-c|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$;
5. Démontrer que pour toute variable aléatoire réelle Y de moyenne 0 et de variance 1, le processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $X_t = Y$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire et vérifie $\lim_{|h| \rightarrow \infty} |\gamma_X(h)| > 0$, puis préciser si X est solution d'une équation ARMA ;
6. Démontrer que si X est un processus stationnaire avec $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors la quantité $n \text{Var}(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n))$ converge quand $n \rightarrow \infty$ vers une valeur et la préciser.

Exercice 2 (Autocorrélation partielle). Soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne 0 et d'autocovariance γ_X avec $\gamma_X(0) > 0$. On pose, pour tous $t \in \mathbb{Z}$ et $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} H_{t-1,p} &:= \text{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\} \\ E_{t,p}^+ &:= X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \\ E_{t-(p+1),p}^- &:= X_{t-(p+1)} - \text{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}). \end{aligned}$$

1. Démontrer que

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \kappa_{p+1} E_{t-(p+1),p}^- \quad \text{où} \quad \kappa_{p+1} := \frac{\langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2};$$

2. Démontrer que

$$\kappa_{p+1} = \frac{\langle E_{t,p}^+, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t,p}^+\|_2 \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2} \in [-1, 1].$$

Exercice 3 (Processus stationnaires vectoriels). Soit $d \geq 1$ un entier et $\sigma^2 > 0$ un réel. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, soit $Z_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})^\top$ un vecteur aléatoire centré de \mathbb{R}^d . On suppose que pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$ et tous $j, k \in \{1, \dots, d\}$ on a $\mathbb{E}(Z_{s,j} Z_{t,k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{s=t, j=k}$.

1. Soit $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que $\|\Phi\|_{2 \rightarrow 2} := \max_{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_2=1} \|\Phi x\|_2 < 1$. Construire un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs vectorielles solution de l'équation AR(1) vectorielle $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Démontrer qu'il est unique en un sens à définir ;
2. Soit X le processus obtenu dans la question précédente. Supposons que Φ est diagonale. Donner une condition suffisante sur Z pour que les processus marginaux $(X_{t,1})_{t \in \mathbb{Z}}, \dots, (X_{t,d})_{t \in \mathbb{Z}}$ soient indépendants (justifier la réponse).

English version

Exercise 1 (Sport). Let Z be a white noise of mean 0 and variance $\sigma^2 > 0$.

1. Let θ and φ be fixed reals such that $|\varphi| = 1$ and $\varphi + \theta \neq 0$. Prove that the ARMA(1, 1) equation $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ does not have a stationary solution;
2. Let θ and φ be fixed reals in the interval $] -1, 1 [$. Prove that the stationary solution of the ARMA(1, 1) equation $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ is also solution of the ARMA(∞, ∞) equation $X_t + \sum_{k=1}^{\infty} (-\theta)^k X_{t-k} = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k Z_{t-k}$;
3. Compute a stationary solution of the ARMA(2, 1) equation $X_t = \frac{1}{4}X_{t-2} + Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1}$; Is it unique ? Causal ? Invertible ? Construct non stationary solutions;
4. Prove that if $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is an ARMA(p, q) stationary process with a polynomial Φ which does not vanish on the closed unit disc, then there exist constants $C, c > 0$ such that $|\gamma_X(h)| \leq Ce^{-c|h|}$ for any $h \in \mathbb{Z}$;
5. Prove that for any real random variable Y of mean 0 and variance 1, the process $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ defined by $X_t = Y$ for any $t \in \mathbb{Z}$ is stationary and satisfies $\lim_{|h| \rightarrow \infty} |\gamma_X(h)| > 0$, and specify if it solves an ARMA equation;
6. Prove that if X is a stationary process with $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$ then $n\text{Var}(\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n))$ converges as $n \rightarrow \infty$ to some value and specify this value.

Exercise 2 (Partial autocorrelation). Let $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a stationary process of mean 0 and autocovariance γ_X with $\gamma_X(0) > 0$. We set, for any $t \in \mathbb{Z}$ and $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} H_{t-1,p} &:= \text{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\} \\ E_{t,p}^+ &:= X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \\ E_{t-(p+1),p}^- &:= X_{t-(p+1)} - \text{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}). \end{aligned}$$

1. Prove that

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \kappa_{p+1} E_{t-(p+1),p}^- \quad \text{where} \quad \kappa_{p+1} := \frac{\langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2};$$

2. Prove that

$$\kappa_{p+1} = \frac{\langle E_{t,p}^+, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t,p}^+\|_2 \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2} \in [-1, 1].$$

Exercise 3 (Multivariate stationary processes). Let $d \geq 1$ be an integer and $\sigma^2 > 0$ be a real. For any $t \in \mathbb{Z}$, let $Z_t = (Z_{t,1}, \dots, Z_{t,d})^\top$ be a centered random vector of \mathbb{R}^d . We suppose that for any $s, t \in \mathbb{Z}$ and any $j, k \in \{1, \dots, d\}$ we have $\mathbb{E}(Z_{s,j} Z_{t,k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{s=t, j=k}$.

1. Let $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ be a square matrix such that $\|\Phi\|_{2 \rightarrow 2} := \max_{x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_2=1} \|\Phi x\|_2 < 1$. Construct a vector valued process $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ solution of the vectorial AR(1) equation $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Prove that it is unique in some sense;
2. Let X be as before. Suppose that Φ is diagonal. Give a sufficient condition on Z in order to make the marginal processes $(X_{t,1})_{t \in \mathbb{Z}}, \dots, (X_{t,d})_{t \in \mathbb{Z}}$ independent (justify).

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures

Date : vendredi 15 juillet 2016

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note :

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
- Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
- Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
- Ce sujet reprend des éléments des sujets des années antérieures

Exercice 1. Soit $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ des v.a.r. i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, et a, b des réels.

1. Calculer le processus $\Delta_3 S_t$ où $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ et où $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Est-ce que $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort ;
3. Si $p \in \mathbb{N}$, est-ce que $(Z_k^p)_{k \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort, et calculer le cas échéant la moyenne et la fonction d'autocovariance du processus ;
4. Calculer la fonction d'autocovariance de $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ où $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. Dans quel cas $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est causal ? inversible ? (justifier).

Exercice 2.

1. Trouver une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (ici $\varphi \in \mathbb{R}$) ;
2. Exprimer l'autocovariance et la densité spectrale de la solution quand $|\varphi| < 1$;
3. Résoudre l'équation ARMA(1, 1) suivante : $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
5. Soit Z un BruitBlanc($0, \sigma^2$), $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et $X_t = F_\alpha Z$. Est-ce que γ_X vérifie la propriété précédente de décroissance exponentielle ? (justifier).

Exercice 3. On considère l'équation ARMA(2,1) $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Calculer une solution stationnaire X . Est-elle causale ? Inversible ? ;
2. Calculer l'autocovariance γ_X de X , puis $\text{proj}(X_s, H_{t-1,1})$. Étudier le cas où $s \rightarrow \infty$;
3. Si Z est un BB fort gaussien, et si \bar{X}_n désigne la moyenne empirique calculée avec X_1, \dots, X_n , démontrer que $\sqrt{n}\bar{X}_n$ converge en loi vers une loi gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Donner une application concrète.

Exercice 4. Soit X le processus linéaire solution de ARMA(p, q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où Z est un bruit blanc centré de variance σ^2 , et où Φ et Θ ne s'annulent pas sur le cercle unité. On numérote les racines a_1, \dots, a_p et b_1, \dots, b_q de Φ et de Θ de la manière suivante :

$$|a_1| \leq \dots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \dots \leq |a_p| \quad \text{et} \quad |b_1| \leq \dots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \dots \leq |b_q|$$

où $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$. On pose $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$ et on considère un bruit blanc Z_* centré de variance σ_*^2 . Soient Φ_* et Θ_* les polynômes définis par

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j} z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1} z) \quad \text{et} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j} z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1} z).$$

1. Montrer que l'équation ARMA(p, q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_* , qui est causale et inversible ;
2. Montrer que X et X_* ont même mesure spectrale et même autocovariance.

English version

- Exercise 1.** Let $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ be i.i.d. r.r.v. of normal law $\mathcal{N}(0, 1)$, and let a, b be two reals.
1. Compute the process $\Delta_3 S_t$ where $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ and where $\Delta_3 = 1 - B^3$;
 2. Is $(Z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ a white noise? Justify your answer and precise weak or strong;
 3. If $p \in \mathbb{N}$, is $(Z_k^p)_{k \in \mathbb{Z}}$ a white noise? Justify your answer, precise weak or strong, and compute if possible the mean and autocovariance;
 4. Compute the autocovariance of $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ where $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
 5. In which case $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ is causal? invertible? (justify your answers).

Exercise 2.

1. Find a stationary solution of the AR(1) equation $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (here $\varphi \in \mathbb{R}$);
2. Express the autocovariance and the spectral density of the solution when $|\varphi| < 1$;
3. Solve the ARMA(1, 1) equation $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Show that there exists $C > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ for all $h \in \mathbb{Z}$;
5. Let Z be a WhiteNoise($0, \sigma^2$), let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, and let $X_t = F_\alpha Z$. Does γ_X satisfies the exponential decay mentioned in the preceding question? (justify your answer).

- Exercise 3.** Let us consider the ARMA(2, 1) equation $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Compute a stationary solution. Is it causal? Invertible?;
2. Compute the autocovariance γ_X of X , and then $\text{proj}(X_s, H_{t-1,1})$ for $(s, t) = (2015, 1)$;
3. If Z is a strong Gaussian white noise, and if \bar{X}_n denotes the empirical mean computed with X_1, \dots, X_n , then prove that $\sqrt{n}\bar{X}_n$ converges in law to a Gaussian law and compute the mean and variance of the limit. Give a practical application.

- Exercise 4.** Let X be the linear process solution of the ARMA(p, q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where Z is a centered white noise of variance σ^2 , and where Φ and Θ do not vanish on the unit circle. We label the roots a_1, \dots, a_p and b_1, \dots, b_q of Φ and Θ as follows:

$$|a_1| \leq \dots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \dots \leq |a_p| \quad \text{and} \quad |b_1| \leq \dots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \dots \leq |b_q|$$

where $0 \leq r \leq p$ and $0 \leq s \leq q$. Let us define $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$. We consider a centered white noise Z_* of variance σ_*^2 . Let Φ_* and Θ_* be the polynomials defined by

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j}z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1}z) \quad \text{and} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j}z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1}z).$$

1. Prove that the ARMA(p, q) equation $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ admits a unique stationary solution denote X_* , which is causal and invertible;
2. Prove that X and X_* have identical spectral measure and autocovariance.

Examen partiel

Durée : 2 heures

Date : lundi 31 octobre 2016

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note :

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
- Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
- Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
- Ce sujet reprend des éléments des sujets des années antérieures

Dans tout ce qui suit $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$.

Exercice 1. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ le processus défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = Z_t + at^{2016} + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer explicitement $\Delta^{2017} X$ en fonction de Z , a , b (justifier la réponse).
2. Existe-t-il une solution stationnaire à l'équation ARMA(1, 2) (justifier la réponse)

$$X_t - 3X_{t-1} = Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2} \quad ?$$

Si oui, la calculer, préciser son unicité, causalité, et inversibilité.

3. Existe-t-il une solution stationnaire à l'équation AR(p) $X_t - X_{t-p} = Z_t$, $p \geq 1$?

Exercice 2 (Inversibilité d'un processus linéaire). Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $X = F_\alpha Z$.

1. Donner en détail la démonstration du fait que X est bien défini p.s. et dans L^2 ;
2. Donner en détail la démonstration du fait que le processus X est stationnaire et donner en détail le calcul de sa fonction d'autocovariance γ_X en fonction de σ ;
3. À quelle condition sur α le processus X est un filtre causal de Z ?
4. Lorsque la série de puissances P_α est un polynôme, donner une condition suffisante sur P_α pour que X soit un filtre inversible de Z (justifier la réponse)
5. Lorsque la série de puissances P_α est géométrique, c'est-à-dire que $\alpha_k = \rho^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ pour un $\rho \in [0, 1[$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, démontrer que X est un filtre inversible de Z .

Exercice 3 (Déterminisme des processus harmoniques). Dans cet exercice on note $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus du second ordre. On dit que X est *déterministe* lorsqu'on a la propriété $X_t \in H_{t-1} := \overline{\text{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où l'adhérence est prise dans L^2 , autrement dit $X_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1})$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où $\text{proj}(\cdot, H_{t-1})$ est la projection orthogonale dans L^2 sur le sous-espace vectoriel fermé H_{t-1} . On dit que X est *harmonique* lorsqu'il existe des variables aléatoires A et B non corrélées, centrées, de même variance σ^2 , et une constante réelle θ telles que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$.

1. Démontrer que si X est harmonique alors il est stationnaire et déterministe ;
2. Démontrer que si X est stationnaire alors il y a équivalence entre...
 - (a) X n'est pas déterministe ;
 - (b) il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$;
 - (c) pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$.

English version

In all the sequel $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a white noise of mean 0 and variance σ^2 .

Exercise 1. The questions of this exercise are independent (but not equally distributed).

1. Let $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be the process defined for every $t \in \mathbb{Z}$ by $X_t = Z_t + at^{2016} + b$ where $a, b \in \mathbb{R}$. Compute explicitly $\Delta^{2017} X$ in terms of Z, a, b (justify the answer).
2. Is there any stationary solution to the ARMA(1, 2) equation (justify the answer)

$$X_t - 3X_{t-1} = Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2} \quad ?$$

If yes, compute it, and discuss its uniqueness, causality, and invertibility.

3. Is there any stationary solution to the AR(p) equation $X_t - X_{t-p} = Z_t, p \geq 1$?

Exercise 2 (Invertiblility of a linear process). Let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $X = F_\alpha Z$.

1. Give in detail the proof that X is well defined, a.s. and in L^2 ;
2. Give in detail the proof that X is stationary and give in detail the computation of its autocovariance γ_X in terms of σ ;
3. Under which condition on α the process X is a causal filter of Z ?
4. When the power series P_α is a polynomial, give a sufficient condition on P_α to ensure that X is an invertible filter of Z (justify the answer)
5. When the power series P_α is geometric, namely $\alpha_k = \rho^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ for some $\rho \in [0, 1[$ and any $k \in \mathbb{Z}$, prove that X is an invertible filter of Z .

Exercise 3 (Harmonic processes determinism). In all this exercise $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a second order process. We say that X is *deterministic* when $X_t \in H_{t-1} := \overline{\text{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \dots\}}$ for any $t \in \mathbb{Z}$, where the closure is taken in L^2 , in other words $X_t = \text{proj}(X_t, H_{t-1})$ for any $t \in \mathbb{Z}$, where $\text{proj}(\cdot, H_{t-1})$ is the orthogonal projection in L^2 on the closed sub vector space H_{t-1} . We say that X is *harmonic* when for some random variables A and B which are not correlated, centered, and with same variance σ^2 , and for some real constant θ , we have $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$ for any $t \in \mathbb{Z}$.

1. Prove that if X is harmonic then it is stationary and deterministic.
2. Prove that if X is stationary then the following properties are equivalent:
 - (a) X is not deterministic;
 - (b) there exists $t \in \mathbb{Z}$ such that $\mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$;
 - (c) for any $t \in \mathbb{Z}$ we have $\mathbb{E}((X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$.

Examen final

Durée : 2 heures

Date : lundi 9 janvier 2017

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note :

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
- Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
- Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
- Ce sujet reprend des éléments des annales, du cours, et des exercices de TD

Dans ce qui suit $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de v.a.r. i.i.d. centrées de variance σ^2 .

Exercice 1 (ARMA). On considère l'équation $X_t - 2X_{t-1} = Z_t - \frac{5}{2}Z_{t-1} + Z_{t-2}$.

1. Calculer la fraction rationnelle de l'équation, démontrer que l'équation possède une unique solution stationnaire, et la calculer;
2. Trouver $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $Z = F_\alpha X$ et $\alpha_k = 0$ pour tout $k \notin \mathbb{N}$.

Exercice 2 (Densité spectrale).

1. Calculer la mesure spectrale du processus harmonique $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$ où A et B sont des v.a.r. centrées, de variance σ^2 , et non corrélées, et où $\theta \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur du paramètre θ le processus admet-il une densité spectrale ?
2. Démontrer que pour tout $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le filtre $X = F_\alpha Z$ possède une densité spectrale donnée par $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |P_\alpha(e^{-i\lambda})|^2$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$, où $P_\alpha(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$;
3. Soit X une solution stationnaire de l'équation $X_t - 2X_{t-1} = Z_t - 3Z_{t-1}$. Construire un processus linéaire X^* associé à un bruit blanc Z^* , causal et inversible, de même autocovariance que X , et solution de l'équation $X_t^* - \frac{1}{2}X_{t-1}^* = Z_t^* - \frac{1}{3}Z_{t-1}^*$.

Exercice 3 (Prédiction d'un processus AR). Soit $m \geq 1$ un entier et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $|\varphi| < 1$.

1. Montrer qu'il existe une solution stationnaire unique à l'équation AR(m) $X_t = \varphi X_{t-m} + Z_t$ et qu'il s'agit d'un filtre causal de Z ;
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout entier $p \geq m$, dans L^2 ,

$$\text{proj}(X_t, \text{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\}) = \varphi X_{t-m}.$$

Exercice 4 (Cauchy). On rappelle qu'une v.a.r. W de loi de Cauchy de paramètre $c > 0$ a pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{c\pi(1+x^2/c^2)}$ et pour fonction caractéristique $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(e^{i\theta W}) = e^{-c|\theta|}$. Elle n'a pas d'espérance ni de variance.

1. Démontrer que si W_1, \dots, W_n sont des v.a.r. indépendantes de lois de Cauchy de paramètres $c_1 > 0, \dots, c_n > 0$ alors pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, la v.a.r. $\lambda_1 W_1 + \dots + \lambda_n W_n$ suit la loi de Cauchy de paramètre $|\lambda_1|c_1 + \dots + |\lambda_n|c_n$;
2. Soit $(W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi de Cauchy de paramètre $c > 0$. Démontrer que pour tout $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et tout $t \in \mathbb{Z}$, la formule $F_\alpha W_t := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k W_{t-k}$ définit une v.a.r. de loi de Cauchy de paramètre $c\|\alpha\|_1$. Peut-on définir le filtre $(F_\alpha W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ en tant que processus stationnaire ?

Exercice 5 (Processus ARCH¹). Soit $a > 0$ et $b > 0$ des réels. En raisonnant par récurrence, trouver un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ solution de l'équation non-linéaire

$$X_t = \sqrt{a + bX_{t-1}^2} Z_t \quad \text{pour tout } t \geq 1.$$

(indication : éléver au carré). Calculer sa moyenne et sa variance pour tout t .

1. AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity, utilisés par exemple en finance mathématique.

English version

In all the sequel $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a sequence of i.i.d. r.r.v. of mean 0 and variance σ^2 .

Exercise 1 (ARMA equation). Let us consider the following ARMA equation:

$$X_t - 2X_{t-1} = Z_t - \frac{5}{2}Z_{t-1} + Z_{t-2}.$$

1. Compute the rational fraction of the equation, prove that it admits a unique stationary solution; and compute it;
2. Find $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ such that $Z = F_\alpha X$ and $\alpha_k = 0$ for any $k \notin \mathbb{N}$.

Exercise 2 (Spectral density).

1. Compute the spectral measure of the harmonic process $X_t = A \cos(\theta t) + B \sin(\theta t)$ where A and B are centered and uncorrelated r.r.v. of variance σ^2 , and where $\theta \in \mathbb{R}$. For which values of θ the process admits a spectral density?
2. Prove that for every $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, the filter $X = F_\alpha Z$ admits a spectral density given by $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |P_\alpha(e^{-i\lambda})|^2$ for every $\alpha \in [-\pi, \pi]$, where $P_\alpha(z) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$;
3. Let X be the stationary solution of the equation $X_t - 2X_{t-1} = Z_t - 3Z_{t-1}$. Construct a linear process X^* with respect to a white noise Z^* , causal and invertible, with same autocovariance as X , and solution of the equation $X_t^* - \frac{1}{2}X_{t-1}^* = Z_t^* - \frac{1}{3}Z_{t-1}^*$.

Exercise 3 (Prediction of an AR process). Let $m \geq 1$ be an integer and $\varphi \in \mathbb{R}$, $|\varphi| < 1$.

1. Prove that there exists a stationary solution to the AR(m) equation $X_t = \varphi X_{t-m} + Z_t$ and that it is a causal filter of Z ;
2. Prove that for any $t \in \mathbb{Z}$ and any integer $p \geq m$, in L^2 ,

$$\text{proj}(X_t, \text{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\}) = \varphi X_{t-m}.$$

Exercise 4 (Cauchy). A Cauchy r.r.v. W of parameter $c > 0$ has density $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{c\pi(1+x^2/c^2)}$ and characteristic function $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}(e^{i\theta W}) = e^{-c|\theta|}$. It has no mean and no variance.

1. Prove that if W_1, \dots, W_n are independent Cauchy r.r.v. of parameter $c_1 > 0, \dots, c_n > 0$ then for any $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, the r.r.v. $\lambda_1 W_1 + \dots + \lambda_n W_n$ follows the Cauchy law of parameter $|\lambda_1|c_1 + \dots + |\lambda_n|c_n$;
2. Let $(W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of i.i.d. Cauchy r.r.v. of parameter $c > 0$. Prove that for any $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $t \in \mathbb{Z}$, the formula $F_\alpha W_t := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k W_{t-k}$ defines a Cauchy r.r.v. of parameter $c\|\alpha\|_1$. Can we define the filter $(F_\alpha W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ as a stationary process?

Exercise 5 (ARCH² process). Let a, b be real numbers with $a > 0$ and $b > 0$. Construct by induction a processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ solution of the nonlinear equation

$$X_t = \sqrt{a + bX_{t-1}^2} Z_t \quad \text{for every } t \geq 1.$$

(indication: take the square). Compute its mean and variance for any t .

2. AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity, used for instance in mathematical finance.

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Correction succincte des sujets d'examens

Année 2016/2017



Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine



- Auteurs des sujets et corrigés :
 - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
 - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
- Chasseurs de coquilles :
 - Pagnard, Camille (enseignant, Paris-Dauphine, 2014–)
 - Possamaï, Dylan (enseignant, Paris-Dauphine, 2013–)
 - Tan, Xiaolu (enseignant, Paris-Dauphine, 2016–)

Examen partiel

Durée : 2 heures

Conditions : sans calculatrice ni documents

Solution succincte de l'exercice 1.

1. On a, par indépendance

$$\gamma_\varepsilon(h) = \mathbb{E}[U^2 \xi_t \xi_{t+h}] = \mathbb{E}[U^2] \mathbb{E}[\xi_t \xi_{t+h}] = \rho^2 \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}.$$

2. Si U est p.s. égale à une constante, alors les ε_t sont i.i.d. et ε est un BB fort. Sinon,

$$\mathbb{E}[\varepsilon_0^2 \varepsilon_1^2] = \mathbb{E}[U^4] \mathbb{E}[\varepsilon_0^2]^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\varepsilon_0^2] \mathbb{E}[\varepsilon_1^2] = \mathbb{E}[U^2]^2 \mathbb{E}[\varepsilon_0^2]^2 \neq \mathbb{E}[U^4] \mathbb{E}[\varepsilon_0^2]^2$$

sauf si U est p.s. égale à une constante (Schwarz). Donc ε n'est pas un BB fort.

3. On a $\psi \in \ell^1(\mathbb{Z})$. On applique le théorème de filtrage.
4. On applique le théorème de filtrage.
5. Le processus X est stationnaire par le théorème de filtrage. Il est centré car ε est centré. De plus (formule du cours)

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \gamma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k \psi_{k+h}.$$

Pour $h \geq 0$, cette dernière quantité est égale à

$$\sigma^2 \gamma^2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{k+h}} = \frac{1}{3} \sigma^2 \gamma^2 2^{-h}.$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. C'est une conséquence immédiate du théorème de filtrage.
2. On a

$$\gamma_Z(h) = \text{Cov}(U_t + \theta U_{t-1}, U_{t+h} + \theta U_{t+h-1}) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \theta^2) & \text{si } h = 0 \\ \theta \sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Le processus W est stationnaire comme somme de processus stationnaires décorrélés (ϵ qui est un bruit blanc faible d'une part et $\eta - 2B\eta$ qui est un MA(1), où l'on a noté B l'opérateur de retard). De plus

$$\gamma_W(0) = \frac{10}{9}, \quad \gamma_W(1) = \gamma_W(-1) = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \gamma_W(h) = 0 \quad \text{pour } |h| \geq 2.$$

Donc W est un processus stationnaire, ayant même fonction d'autocovariance qu'un MA(1). C'est un MA(1) d'après la question 1, et il peut s'écrire $W_t = U_t + \theta U_{t-1}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et U un bruit blanc de variance σ^2 , à condition d'avoir

$$\frac{10}{9} = (1 + \theta^2)\sigma^2 \quad \text{et} \quad \theta \sigma^2 = \frac{1}{3}.$$

4. On a

$$\begin{aligned} X_t &= Y_t + \eta_t = 2Y_{t-1} + \varepsilon_t + \eta_t \\ &= 2Y_{t-1} + 2\eta_{t-1} + (\varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}) \\ &= 2Y_{t-1} + 2\eta_{t-1} + W_t \\ &= 2X_{t-1} + W_t. \end{aligned}$$

Donc $X_t - 2X_{t-1} = U_t + \theta U_{t-1}$ et on a bien la décomposition recherchée.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. X est borné donc de carré intégrable. De plus

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Ze^{itU}] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[e^{itU}] = 0$$

puisque Z et U sont indépendantes et Z est centré. Pour la stationnarité, puisque X est centré, il suffit de montrer que $\mathbb{E}[X_{t+h}\bar{X}_t]$ ne dépend pas de t . On a

$$\mathbb{E}[X_{t+h}\bar{X}_t] = \mathbb{E}[Z^2 e^{i(t+h)U} e^{-itU}] = \mathbb{E}[Z^2 e^{ihU}].$$

2. On a, d'après la question précédente

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}[X_{t+h}\bar{X}_t] = \mathbb{E}[Z^2]\mathbb{E}[e^{ihU}] = \mathbb{E}[Z^2] \int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega} \mathbb{P}_U(d\omega).$$

3. On a

$$\overline{\gamma(h)} = \mathbb{E}[Z^2] \overline{\int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega} \mathbb{P}_U(d\omega)} = \int_{\mathbb{T}} e^{-ih\omega} \mathbb{P}_U(d\omega) = \int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega} \mathbb{P}_U(d\omega) = \gamma(h),$$

donc γ est réelle. On a de même $\gamma(h) = \gamma(-h)$.

4. Soit Z une v.a.r. centrée telle que $\mathbb{E}[Z^2] = 1$, indépendantes de ξ . D'après ce qui précède, le processus $X_t = Ze^{i\xi_t}$ a pour fonction de covariance $h \rightsquigarrow \Phi_{\xi}(h)$.

Examen final

Durée : 2 heures

Conditions : sans calculatrice ni documents

Il sera tenu grand compte de la présentation et de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Le processus X est un AR(1) bien défini et stationnaire car $|\phi| \neq 1$;
2. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$ on a

$$\mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(X_t) + \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t W_{t+h}) &= \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) + \mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_{t+h}) + \mathbb{E}(X_t \epsilon_{t+h}) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) \\ &= \gamma_X(h) + \gamma_\epsilon(h) + 0 + 0,\end{aligned}$$

qui ne dépendent pas de t , et donc W est bien stationnaire. Notons que les identités $\mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = \gamma_X(h)$ et $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_{t+h}) = \gamma_\epsilon(h)$ proviennent du fait que X et ϵ sont centrés et stationnaires, tandis que les identités

$$\mathbb{E}(X_t \epsilon_{t+h}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \mathbb{E}(\eta_{t-k} \epsilon_{t+h}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \mathbb{E}(\epsilon_t \eta_{t+h-k}) = 0$$

proviennent du fait que ϵ et η sont centrés et décorellés et $X = F_\alpha \eta$ avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$;

3. Le processus Y est solution de l'équation AR(1) $\Phi(B)Y = W$ où $\Phi(z) = 1 - \phi z$ mais W n'est pas un BB. L'équation s'écrit aussi $F_\alpha Y = W$ où $\alpha = \mathbf{1}_0 - \phi \mathbf{1}_1$. Le polynôme Φ a une unique racine, $1/\phi$, qui est de module $\neq 1$, ce qui fait qu'il existe $\beta = \alpha^{-1} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et on obtient une solution stationnaire $Y = F_\beta W$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a $|\phi z| < 1$ car $|\phi| < 1$, et donc $1/\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k$ et cette série converge absolument, ce qui fait que $\beta_k = \phi^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, et la solution trouvée s'écrit donc $Y_t = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k W_{t-k}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Si Y' est une autre solution stationnaire, alors $F_\alpha Y = W = F_\alpha Y'$ et donc $Y' = F_\beta F_\alpha Y' = F_\beta F_\alpha Y = Y$ (cette injectivité du filtrage ne repose pas sur le fait que W est un BB ou pas);
4. Le processus Z est stationnaire car filtre du processus stationnaire Y . En fait

$$Z = (1 - \psi B)(1 - \phi B)Y = (1 - \psi B)W = (1 - \psi B)X + (1 - \psi B)\epsilon = \eta + (1 - \psi B)\epsilon$$

d'où (notons que $(1 - \psi B)\epsilon$ est un MA(1))

$$\gamma_Z(h) = \gamma_\eta(h) + \gamma_{(1-\psi B)\epsilon} = \mathbf{1}_0 + (1 - \psi^2)\mathbf{1}_0 - \psi \mathbf{1}_{\pm 1};$$

5. D'après la question précédente, le processus Z a pour autocovariance

$$(2 - \psi^2)\mathbf{1}_0 - \psi \mathbf{1}_{\pm 1} = \sigma^2(1 - \vartheta^2) + \sigma \vartheta \mathbf{1}_{\pm 1}$$

où $\sigma^2 = 2$ et $\sigma \vartheta = -\psi$, et c'est l'autocovariance d'un MA(1) d'équation $Z_t = \zeta_t + \vartheta \zeta_{t-1}$ où $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 ;

6. On a $Z = (1 - \phi B)(1 - \psi B)Y$ et Z est un processus MA(1) donc Y est un ARMA(2, 1);
7. Le polynôme de la partie AR de l'équation ARMA de Y est $(1 - \phi z)(1 - \psi z)$. Ses racines $1/\phi$ et $1/\psi$ sont de module > 1 , par conséquent l'équation ARMA de Y admet une solution stationnaire causale;

8. Il suffit de développer;
9. Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et $|\psi z| < 1$ et donc le développement en série de puissances suivant est absolument convergent :

$$\frac{1}{(1 - \phi z)(1 - \psi z)} = \frac{1}{\phi - \psi} \sum_{k=0}^{\infty} (\phi^{k+1} - \psi^{k+1}) z^k =: \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k z^k.$$

D'où, en observant que $\rho_0 = 1$,

$$f(z) := \frac{1 + \vartheta z}{(1 - \phi z)(1 - \psi z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho_k - \vartheta \rho_{k-1}) z^k,$$

et ainsi on tire de $(1 + \vartheta B)\zeta = Z = (1 - \psi B)(1 - \phi B)Y$ la représentation

$$Y = f(B)\zeta = F_a\zeta \quad \text{avec} \quad a_\ell = \mathbf{1}_{\ell=0} + (\rho_\ell - \vartheta \rho_{\ell-1}) \mathbf{1}_{\ell \geq 1}.$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. Il s'agit d'une équation AR(1) de polynôme $\Phi(z) = 1 - \phi z$ dont l'unique racine $1/\phi$ est de module $\neq 1$. L'équation admet donc une unique solution stationnaire. Exprimons explicitement la solution. On $Y = f(B)Z$ où $f(z) = 1/(1 - \phi z)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ on a $|\phi z| < 1$ car $|\phi| < 1$ et donc $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k$ et la série est absolument convergente. Il en découle que $Y = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \epsilon_{t-k}$;

2. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) = \mu.$$

En posant $\alpha_k = \phi^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il vient, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_X(t, t+h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}(Y_t Y_{t+h}) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_e(h+k-j) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{2k+h} = \frac{\sigma^2 \phi^h}{1 - \phi^2}.$$

Comme $\mu_X(t)$ et $\gamma_X(t, t+h)$ ne dépendent pas de t , il en découle que X est stationnaire. On a enfin $\gamma_X(h) = \sigma^2 \phi^{|h|}/(1 - \phi^2)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$;

3. Comme d'après la question précédente $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on en déduit d'après un théorème du cours que X admet une densité spectrale f_X donnée pour tout $u \in [-\pi, \pi]$ par

$$\begin{aligned} f_X(u) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ihu} \gamma_X(h) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi(1 - \phi^2)} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ihu} \phi^{|h|} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi(1 - \phi^2)} \left(1 + \sum_{h=1}^{\infty} ((e^{-iu}\phi)^h + (e^{iu}\phi)^h) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi(1 - \phi^2)} \left(1 + \frac{e^{-iu}\phi}{1 - e^{-iu}\phi} + \frac{e^{iu}\phi}{1 - e^{iu}\phi} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi(1 - \phi^2)} \frac{(1 - e^{-iu}\phi)(1 - e^{iu}\phi) + e^{-iu}\phi(1 - e^{iu}\phi) + e^{iu}\phi(1 - e^{-iu}\phi)}{|1 - e^{-iu}\phi|^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi |1 - e^{-iu}\phi|^2}. \end{aligned}$$

Alternativement, un autre théorème du cours affirme que le processus linéaire (filtre d'un bruit blanc) $X = F_\alpha \epsilon$ admet une densité spectrale donnée par

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi} |P_\alpha(e^{-iu})|^2$$

où $P_\alpha(z) := \sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h z^h = 1/(1 - \phi z)$ si $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Ici $\alpha_k = \phi^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ d'où

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \phi e^{-iu}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi(1 + \phi^2 - 2\phi \cos(u))}.$$

Alternativement, un autre théorème du cours affirme qu'un processus ARMA(p, q) stationnaire de fraction rationnelle $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \mapsto \Theta(z)/\Phi(z)$ et de bruit blanc de variance σ^2 admet toujours une densité spectrale, donnée par la formule

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-iu})|^2}{|\Phi(e^{-iu})|^2}.$$

Dans le cas de notre processus AR(1) X on a $\Theta = 1$ et $\Phi(z) = 1 - \phi z$ de sorte que

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \phi e^{-iu}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi(1 + \phi^2 - 2\phi \cos(u))};$$

4. L'estimateur est sans biais (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(\hat{\mu}_n) = \mu$) et

$$n\text{Var}(\hat{\mu}_n) = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \gamma_X(j-k) = \sum_{h=-n+1}^{n-1} \frac{n-|h|}{n} \gamma_X(h) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \mathbf{1}_{|h| < n} \gamma_X(h)$$

d'où par convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\text{Var}(\hat{\mu}_n) = \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) = 2\pi f_X(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}.$$

En particulier par l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\mathbb{P}(|\hat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\hat{\mu}_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0;$$

5. D'après un théorème du cours, comme ϵ est un bruit blanc fort, la variable aléatoire $\sqrt{n}(\hat{\mu}_n - \mu)$ converge en loi quand $n \rightarrow \infty$ vers la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, v^2)$ où $v^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n\text{Var}(\hat{\mu}_n) = 2\pi f_X(0) = \sigma^2/(1 - \phi^2)$;
6. L'intervalle est $\hat{\mu}_n + n^{-1/2}vq_\alpha[-1, 1]$ où q_α est le quantile $1 - \alpha/2$ de $\mathcal{N}(0, 1)$;
7. Le rayon de l'intervalle vaut $n^{-1/2}vq_\alpha$ avec $v = \sigma^2/(1 - \phi^2)$, et ce rayon atteint donc son minimum $n^{-1/2}\sigma q_\alpha$ quand $\phi = 0$ (dans ce cas $Y = \epsilon$);
8. On utilise le lemme de Slutsky pour remplacer σ^2 et ϕ par un estimateur (cela est fait dans un exercice de TD en utilisant les équations de Yule-Walker par exemple).

Examen partiel

Durée : 2 heures

Date : mercredi 20 novembre 2013

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Par définition, X est un processus causal de Z ssi X_t est une combinaison linéaire de $(Z_s)_{s \leq t}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Donc ici X est causal de Z ssi $a = 0$;
2. L'opérateur $(1 - B)^{n+1} = \Delta^{n+1}$ élimine toute tendance polynomiale de degré au plus n , et donc par la formule du binôme,

$$(1-B)^{n+1}(t^n - 1 + Z_t) = (1-B)^{n+1}Z_t = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-B)^k Z_t = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k Z_{t-k};$$

3. Comme Z est gaussien, Z_t a tous ses moments finis, et donc X est du second ordre. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Z_t^2) = \sigma^2$ et $\gamma_X(t, t+h) = \mathbb{E}(Z_t^2 Z_{t+h}^2) - \sigma^4$, qui peut dépendre de t a priori. Dans le cas spécial où Z est un bruit blanc fort alors cette quantité vaut $= \tau_4 \mathbf{1}_{h=0} + \sigma^4 \mathbf{1}_{h \neq 0} - \sigma^4 = (\tau_4 - \sigma^4) \mathbf{1}_{h=0}$, où τ_4 est le moment d'ordre 4 de la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, et X est alors stationnaire.
4. Les polynômes associés sont $\varphi(z) = 1 - 2z$ et $\theta(z) = 1 - z$. La seule racine de φ est $1/2$, et appartient à l'intérieur du disque unité (la solution sera non causale). La seule racine de θ est 1, qui appartient au cercle unité (on ne peut pas dire que la solution est inversible). La fraction rationnelle est

$$\frac{\theta(z)}{\varphi(z)} = \frac{1-z}{1-2z} = -\frac{z-1}{2z} \frac{1}{1-1/(2z)} = (z-1) \sum_{k=0}^{\infty} (2z)^{-(k+1)} = 2^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k+1)} z^{-k}.$$

La solution de notre ARMA(1,1) est

$$X_t = 2^{-1} Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k+1)} Z_{t+k}.$$

Autre méthode : rechercher la solution sous la forme $F_a Z_t = \sum_{h \in \mathbb{Z}} a_h Z_{t-h}$ avec $a_k = 0$ pour tout $k > 0$ (anti-causalité en quelque sorte), en identifiant les coefficients dans l'équation en séries de puissances de z suivante : $(1-2z)(a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \dots) = 1 - z$. Cela donne $a_0 - 2a_{-1} = 1$, $-2a_0 = -1$, $a_{-k} - 2a_{-k-1} = 0$ pour tout $k \geq 1$, d'où $a_0 = 1/2$, $a_{-1} = -1/2^2$, $a_{-(k+1)} = (1/2)a_{-k} = -1/2^{k+2}$ pour tout $k \geq 1$.

5. Soit $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ un MA(1). La moyenne est nulle et l'autocovariance

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = \mathbb{E}((Z_t + \theta Z_{t-1})(Z_{t+h} + \theta Z_{t+h-1})) = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \theta\sigma^2\mathbf{1}_{h=\pm 1}$$

Comme $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, sa densité spectrale vaut, pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) e^{-ihu} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + \theta^2 + \theta(e^{-iu} + e^{+iu})) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + \theta^2 + 2\theta \cos(u)).$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a $X = F_\alpha Z$, qui est bien défini si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (théorème de filtrage du cours). On a $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ssi $|\lambda| < 1$ (série géométrique) ;
2. Le processus X est stationnaire car processus linéaire (filtre d'un bruit blanc, lui-même stationnaire). Le processus est causal car X_t est fonction de $Z_{s \leq t}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. La moyenne de X est nulle, et l'autocovariance pour $h \geq 0$ vaut

$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \gamma_Z(h+j-k) \alpha_j \alpha_k = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_{h+j} = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \lambda^{h+j} = \sigma^2 \frac{\lambda^{|h|}}{1 - \lambda^2}.$$

3. Si $\lambda = 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} Z_{t-k}$ diverge dans L^2 : $\mathbb{E}((Z_t + \dots + Z_{t-k})^2) = \sigma^2 k$.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. $\alpha_k = \lambda^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ et $\beta_k = \mathbf{1}_{k=0}$;
2. La fonction $\varphi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k z^k = 1/(1 - \lambda z)$ (pour $|\lambda z| < 1$) n'est pas un polynôme, et on ne peut pas appliquer le théorème du cours. Cependant, par analogie, $\varphi(z) = 0$ n'a pas de racine, et $\theta(z) = 1$, et donc $\theta(z)/\varphi(z) = 1 - \lambda z$, ce qui suggère que le processus $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$, qui est un MA(1), est solution de notre équation AR(∞). On le vérifie directement :

$$Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k Z_{t-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} Z_{t-1-k} = Z_t - \lambda Z_{t-1} = X_t.$$

Examen final

Durée : 2 heures

Date : jeudi 23 janvier 2014

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. $(1 - B)X_t = X_t - X_{t-1} = t + 1 + Z_t - (t + Z_{t-1}) = 1 + Z_t - Z_{t-1} = 1 + (I - B)Z_t$;
2. Y_t est un MA(1) de paramètre $\theta = -1$, de moyenne $\mu_Y = 1$, et d'autocovariance $\gamma_Y(h) = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{|h|=1} = \sigma^2(2\mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{|h|=1})$;
3. Pas forcément. Contre-ex. : $\alpha_k = (1/k)\mathbf{1}_{k>0}$ (série harmonique). On a $\ell^1(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^2(\mathbb{Z})$;
4. Comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2\mathbf{1}_{h=0}$, on obtient $\mathbb{E}(|\sum_{k \in K} \alpha_k Z_{t-k}|^2) = \sigma^2 \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2$ pour toute partie finie $K \subset \mathbb{Z}$ (on peut alternativement invoquer l'orthogonalité et le théorème de Pythagore). Donc grâce au critère de Cauchy dans l'espace complet L^2 , on obtient que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ converge dans L^2 , et on note sa somme $(F_\alpha Z)_t$.

Solution succincte de l'exercice 2.

1. Le polynôme $P_\varphi(z) = 1 - (1/2)z$ a une seule racine, 2, de module > 1. L'équation admet donc une unique solution stationnaire, causale, de la forme $X = F_\alpha Z$ (processus linéaire) avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$. D'autre part, $P_\theta(z) = 1 + 2z$ admet une unique racine, $-1/2$, de module < 1, mais cela ne signifie pas que la solution n'est pas inversible. Pour calculer α , comme $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$, il suffit de résoudre le système triangulaire $(1 - (1/2)z)(\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots) = 1 + 2z$, c'est-à-dire $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 - (1/2)\alpha_0 = 2$, $\alpha_k - (1/2)\alpha_{k-1} = 0$ pour tout $k \geq 2$, ce qui donne $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2 + 1/2 = 5/2$, $\alpha_k = 5(1/2)^k$ pour tout $k \geq 1$. Alternativement, on peut développer la fraction rationnelle de l'équation : comme $|(1/2)z| = 1/2 < 1$ pour $|z| = 1$, on obtient

$$\frac{P_\theta(z)}{P_\varphi(z)} = \frac{1 + 2z}{1 - (1/2)z} = (1 + 2z) \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} ((1/2)^k + 2(1/2)^{k-1}) z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 5(1/2)^k z^k;$$

Il est agréable de vérifier qu'on a bien $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (série géométrique convergente). Il est aussi judicieux de vérifier la formule pour $z = 1$, ce qui donne $6 = 6$:

2. Avec des filtres, l'équation s'écrit sous la forme $F_\varphi Z = F_\theta Z$ où $\varphi_k = \mathbf{1}_{k=0} - (1/2)\mathbf{1}_{k=1}$ et $\theta_k = \mathbf{1}_{k=0} + 2\mathbf{1}_{k=1}$, et la solution s'écrit $X = F_{\varphi^{-1}*} Z$, tandis qu'avec l'opérateur retard B , l'équation s'écrit $P_\varphi(B)X = P_\theta(B)Z$, où P_φ et P_θ sont comme dans la réponse à la question précédente, et la solution s'écrit $X = (P_\theta/P_\varphi)(B)Z$;
3. D'après le théorème de filtrage des processus stationnaires, pour $h \geq 0$,

$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{h+j};$$

4. D'après la question précédente, pour tout $h \geq 0$, $\gamma_X(h) = \sigma^2(\alpha_h + \sum_{j=1}^{\infty} 25(1/2)^{2j+h})$ d'où, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, $\gamma_X(h) = \sigma^2(\mathbf{1}_{h=0} + 5(1/2)^{|h|}\mathbf{1}_{|h| \neq 0} + (25/3)(1/2)^{|h|})$. Ainsi, $\gamma_X(h) \rightarrow 0$ exponentiellement vite quand $|h| = |t - s| \rightarrow \infty$;

5. On a $H_{t-1,p} = \text{Vect}(X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$ et donc $H_{1,1} = \text{Vect}(X_1)$. Par conséquent, on a

$$\text{proj}(X_2, H_{1,1}) = \frac{\langle X_2, X_1 \rangle}{\|X\|_2^2} X_1 = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} X_1.$$

On pouvait aussi utiliser le théorème de Yule-Walker avec $p = 1$. Reste à calculer $\gamma_X(0)$ et $\gamma_X(1)$, soit via une formule ci-dessus pour $\gamma_X(h)$, soit directement

$$\gamma_X(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 = \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} 5^2 (1/2)^{2j} \right) = \sigma^2 \left(1 + \frac{25}{3} \right) = \frac{28}{3} \sigma^2.$$

et

$$\gamma_X(1) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+1} = \sigma^2 \left(\frac{5}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} 25 (1/2)^{2j+1} \right) = \sigma^2 \left(\frac{5}{2} + \frac{25}{6} \right) = \frac{20}{3} \sigma^2$$

et donc $\text{proj}(X_2, H_1) = \frac{5}{7} X_1$. Par stationnarité, $\text{proj}(X_t, H_{t-1,1}) = \frac{5}{7} X_{t-1}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 3. On a $P_\varphi(z) = 1/(1 - \alpha z)$ et $P_\theta(z) = 1/(1 - \beta z)$. Si $|z| = 1$ alors $|\beta z| < 1$ et

$$\frac{P_\theta(z)}{P_\varphi(z)} = \frac{1 - \alpha z}{1 - \beta z} = (1 - \alpha z) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1} (\beta - \alpha) z^k.$$

Si $\eta_k = \mathbf{1}_{k=0} + (\beta - \alpha) \beta^{k-1} \mathbf{1}_{k>0}$ alors $\eta \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Cela fournit le candidat $X = F_\eta Z$, dont on vérifie sans difficulté qu'il est bien solution. Cette solution est causale. Lorsque $\alpha = \beta$, on a $\eta_k = \mathbf{1}_{k=0}$ et donc $X = F_\eta = Z$ est solution, ce qui est bien naturel.

Solution succincte de l'exercice 4.

1. Le processus est centré car $\mathbb{E}(X_t) = \cos(\theta t) \mathbb{E}(A) + \sin(\theta t) \mathbb{E}(B) = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) &= \cos(\theta t) \cos(\theta(t+h)) \mathbb{E}(A^2) + \sin(\theta t) \sin(\theta(t+h)) \mathbb{E}(B^2) + (\dots) \underbrace{\mathbb{E}(AB)}_{=0} \\ &= \sigma^2 \text{Re}(e^{i\theta t} e^{-i\theta(t+h)}) = \sigma^2 \text{Re}(e^{-i\theta h}) = \sigma^2 \cos(\theta h), \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t . Donc le processus est stationnaire et $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h)$;

2. $\Gamma_n(j, k) = \gamma_X(j-k) = \sigma^2 \cos(\pi(j-k)) = \sigma^2 (-1)^{j-k}$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$. La matrice Γ_n est réelle $n \times n$ symétrique à diagonales constantes (matrice de Toeplitz). La valeur diagonale principale est σ^2 , et les valeurs suivantes sont $-\sigma^2, +\sigma^2, -\sigma^2, \dots$;
3. $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h) = \frac{\sigma^2}{2} (e^{-i\theta h} + e^{i\theta h}) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{iuh} d\mu(u)$ pour $\mu = \frac{\sigma^2}{2} (\delta_{-\theta} + \delta_\theta)$ (Bernoulli!). La densité spectrale n'existe pas (présence de masses de Dirac);
4. $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(h)|$ diverge car $|\cos(\theta h)| \not\rightarrow 0$ (facile à voir quand $\theta \in \mathbb{Q}\pi$) donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$. On peut aussi utiliser le fait que la densité spectrale n'existe pas (question précédente) et donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$ car sinon cela contredirait le théorème de Herglotz;
5. Courbe représentative de $t \mapsto A(\omega) \cos(\theta t)$. Amplitude $A(\omega)$ et fréquence θ .

Solution succincte de l'exercice 5.

1. $\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$;
2. $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} (\mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)) = \mu$ dont le biais de \bar{X}_n est nul;

3. La variance et l'ÉQM sont identiques car le biais est nul.

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \mathbb{E}((X_j - \mu)(X_k - \mu)) = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \gamma(j-k) = \frac{1}{n} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(\frac{n-|s|}{n} \right) \gamma(s);$$

4. Si $\gamma(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow \infty$ alors le critère de Cesàro donne $\frac{1}{n} \sum_{s=-n+1}^{n-1} |\gamma(s)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et donc $\text{Var}(\bar{X}_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{s=-n+1}^{n-1} |\gamma(s)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$;
5. Si $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors par convergence dominée, $n\text{Var}(\bar{X}_n) \rightarrow \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures

Date : lundi 1^{er} septembre 2014

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Par définition, X est un processus causal de Z ssi X_t est une combinaison linéaire de $(Z_s)_{s \leq t}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Donc ici X est causal de Z ssi $a = 0$;
2. L'opérateur $(B-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} \Delta^{n+1}$ élimine toute tendance polynomiale de degré au plus n , et donc par la formule du binôme,

$$(B-1)^{n+1}(t^n - 1 + Z_t) = (B-1)^{n+1}Z_t = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} B^k Z_t = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} Z_{t-k};$$

3. Comme Z est gaussien, Z_t a tous ses moments finis, et donc X est du second ordre. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Z_t^4) =: m_4$ et $\mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = \mathbb{E}(Z_t^4 Z_{t+h}^4)$, qui peut dépendre de t a priori. Dans le cas spécial où Z est un bruit blanc fort alors cette quantité vaut $= m_8 \mathbf{1}_{h=0} + m_4^2 \mathbf{1}_{h \neq 0}$, où m_k est le moment d'ordre k de la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, ce qui donne $\gamma_X(t, t+h) = (m_8 - m_4^2) \mathbf{1}_{h=0}$, et X est stationnaire.
4. L'équation se simplifie en $X_t = 2X_{t-1} + Z_t - Z_{t-1}$. Les polynômes associés sont $\varphi(z) = 1 - 2z$ et $\theta(z) = 1 - z$. La seule racine de φ est $1/2$, et appartient à l'intérieur du disque unité (la solution sera non causale). La seule racine de θ est 1 , qui appartient au cercle unité (on ne peut pas dire que la solution est inversible). La fraction rationnelle est

$$\frac{\theta(z)}{\varphi(z)} = \frac{1-z}{1-2z} = -\frac{z-1}{2z} \frac{1}{1-1/(2z)} = (z-1) \sum_{k=0}^{\infty} (2z)^{-(k+1)} = 2^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k+1)} z^{-k}.$$

La solution de notre ARMA(1,1) est

$$X_t = 2^{-1} Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k+1)} Z_{t+k}.$$

Autre méthode : rechercher la solution sous la forme $F_a Z_t = \sum_{h \in \mathbb{Z}} a_h Z_{t-h}$ avec $a_k = 0$ pour tout $k > 0$ (anti-causalité en quelque sorte), en identifiant les coefficients dans l'équation en séries de puissances de z suivante : $(1-2z)(a_0 + a_{-1}z^{-1} + a_{-2}z^{-2} + \dots) = 1 - z$. Cela donne $a_0 - 2a_{-1} = 1$, $-2a_0 = -1$, $a_{-k} - 2a_{-k-1} = 0$ pour tout $k \geq 1$, d'où $a_0 = 1/2$, $a_{-1} = -1/2^2$, $a_{-(k+1)} = (1/2)a_{-k} = -1/2^{k+2}$ pour tout $k \geq 1$.

5. Soit $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ un MA(1). La moyenne est nulle et l'autocovariance

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = \mathbb{E}((Z_t + \theta Z_{t-1})(Z_{t+h} + \theta Z_{t+h-1})) = \sigma^2(1 + \theta^2) \mathbf{1}_{h=0} + \theta \sigma^2 \mathbf{1}_{h=\pm 1}$$

Comme $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, sa densité spectrale vaut, pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) e^{-ihu} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + \theta^2 + \theta(e^{-iu} + e^{+iu})) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + \theta^2 + 2\theta \cos(u)).$$

Autre méthode : $f_X(u) = f_Z(u) |P(e^{-iu})|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 + \theta e^{-iu}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + \theta e^{-iu})(1 + \theta e^{iu}) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + \theta^2 + \theta 2 \cos(u))$.

Solution succincte de l'exercice 2. On note α^2 la suite définie par $\alpha_k^2 = (\alpha_k)^2$.

1. On a $X = F_{\alpha^2}Z$, qui est bien défini si $\alpha^2 \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (théorème de filtrage du cours) c'est-à-dire si $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On a $\alpha \in \ell^p(\mathbb{Z})$ pour (tout) $p \geq 1$ ssi $|\lambda| < 1$ (série géométrique) ;
2. Le processus X est stationnaire car processus linéaire (filtre d'un bruit blanc, lui-même stationnaire). Le processus est causal car X_t est fonction de $Z_{s \leq t}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. La moyenne de X est nulle, et l'autocovariance pour $h \geq 0$ vaut

$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \gamma_Z(h+j-k) \alpha_j^2 \alpha_k^2 = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j^2 \alpha_{h+j}^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j} \lambda^{2(h+j)} = \sigma^2 \frac{\lambda^{2|h|}}{1 - \lambda^4}.$$

3. Si $\lambda = 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} Z_{t-k}$ diverge dans L^2 : $\mathbb{E}((Z_t + \dots + Z_{t-k})^2) = \sigma^2 k$.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. $\alpha_k = \lambda^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ et $\beta_k = \mathbf{1}_{k=0}$;
2. La fonction $\varphi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} z^k = 1/(1 - \lambda^2 z)$ (pour $|\lambda^2 z| < 1$) n'est pas un polynôme, et on ne peut pas appliquer le théorème du cours. Cependant, par analogie, $\varphi(z) = 0$ n'a pas de racine, et $\theta(z) = 1$, et donc $\theta(z)/\varphi(z) = 1 - \lambda^2 z$, ce qui suggère que le processus $X_t = Z_t - \lambda^2 Z_{t-1}$, qui est un MA(1), est solution de notre équation AR(∞). On le vérifie directement :

$$Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} Z_{t-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2(k+1)} Z_{t-1-k} = Z_t - \lambda^2 Z_{t-1} = X_t.$$

Solution succincte de l'exercice 4.

1. Le processus est centré car $\mathbb{E}(X_t) = \cos(\theta t)\mathbb{E}(A) + \sin(\theta t)\mathbb{E}(B) = 0$. D'autre part
- $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) &= \cos(\theta t) \cos(\theta(t+h)) \mathbb{E}(A^2) + \sin(\theta t) \sin(\theta(t+h)) \mathbb{E}(B^2) + (\dots) \underbrace{\mathbb{E}(AB)}_{=0} \\ &= \sigma^2 \operatorname{Re}(e^{i\theta t} e^{-i\theta(t+h)}) = \sigma^2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta h}) = \sigma^2 \cos(\theta h), \end{aligned}$$
- qui ne dépend pas de t . Donc le processus est stationnaire et $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h)$;
2. $\Gamma_n(j, k) = \gamma_X(j-k) = \sigma^2 \cos(\pi(j-k)) = \sigma^2 (-1)^{j-k}$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$. La matrice Γ_n est réelle $n \times n$ symétrique à diagonales constantes (matrice de Toeplitz). La valeur diagonale principale est σ^2 , et les valeurs suivantes sont $-\sigma^2, +\sigma^2, -\sigma^2, \dots$;
 3. $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h) = \frac{\sigma^2}{2} (e^{-i\theta h} + e^{i\theta h}) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{iuh} d\mu(u)$ pour $\mu = \frac{\sigma^2}{2} (\delta_{-\theta} + \delta_{\theta})$ (Bernoulli!). La densité spectrale n'existe pas (présence de masses de Dirac) ;
 4. $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(h)|$ diverge car $|\cos(\theta h)| \not\rightarrow 0$ (facile à voir quand $\theta \in \mathbb{Q}\pi$) donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$. On peut aussi utiliser le fait que la densité spectrale n'existe pas (question précédente) et donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$ car sinon cela contredirait le théorème de Herglotz ;
 5. Courbe représentative de $t \mapsto A(\omega) \cos(\theta t)$. Amplitude $A(\omega)$ et fréquence θ .

Solution succincte de l'exercice 5.

1. $\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n)$;
2. $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} (\mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)) = \mu$ dont le biais de \bar{X}_n est nul ;

3. La variance et l'ÉQM sont identiques car le biais est nul.

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \mathbb{E}((X_j - \mu)(X_k - \mu)) = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \gamma(j-k) = \frac{1}{n} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(\frac{n-|s|}{n} \right) \gamma(s);$$

4. Si $\gamma(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow \infty$ alors le critère de Cesàro donne $\frac{1}{n} \sum_{s=-n+1}^{n-1} |\gamma(s)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et donc $\text{Var}(\bar{X}_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{s=-n+1}^{n-1} |\gamma(s)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$;
5. Si $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors par convergence dominée, $n\text{Var}(\bar{X}_n) \rightarrow \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h)$ quand $n \rightarrow \infty$.

Examen partiel

Durée : 2 heures

Date : mercredi 19 novembre 2014

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Comme $t \mapsto \cos((2/3)\pi t)$ est de période 3, on a $\Delta_3 S_t = 0 + \Delta_3 Z_t = Z_t - Z_{t-3}$;
2. Comme les v.a.r. $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même moyenne et variance, il s'agit bien d'un bruit blanc fort. La moyenne vaut 0 car les variables sont centrées, et la variance vaut 1 car les variables sont réduites;
3. Les v.a.r. $(Z_t^p)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même moyenne et variance : il s'agit donc d'un bruit blanc fort. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$ on a $\mu(h) = \mathbb{E}(Z_0^p)$ ($= 0$ si p impair) et $\gamma(h) = (\mathbb{E}(Z_0^{2p}) - \mathbb{E}(Z_0^p)^2) \mathbf{1}_{h=0}$;
4. $\gamma_X(h) = 0$ si $|h| > 2$, et $\gamma_X(0) = \text{Var}(aZ_{-1} + bZ_1) = a^2 + b^2$, $\gamma_X(-1) = \gamma_X(1) = \mathbb{E}((aZ_0 + bZ_2)(aZ_1 + bZ_3)) = 0$, et $\gamma_X(-2) = \gamma_X(2) = \mathbb{E}(bZ_2 aZ_2) = ab$.
5. X est causalssi X_t ne dépend que de $(Z_s)_{s \leq t}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, ce qui a lieu si $b = 0$. Le filtre X de Z est inversiblessi Z est un filtre causal de X , ce qui a lieu si $a = 0$.

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a $X_t = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} + \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $|\varphi| < 1$ alors le premier terme du membre de droite est une série absolument convergence dans L^2 (et p.s.) ce qui suggère que $X_t = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k}$ est solution, ce qui se vérifie directement. Lorsque $|\varphi| > 1$ on procède de même en renversant le temps à partir de l'équation $X_{t-1} = \varphi^{-1} X_t - \varphi^{-1} Z_t$, ce qui conduit à la solution non-causale $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{-k} Z_{t+k}$. Lorsque $|\varphi| = 1$ alors il ne peut pas exister de solution stationnaire car sinon l'équation $\sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} = X_t - \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}$ donnerait en prenant la variance $(n+1)\sigma^2 \leq 4\gamma_X(0)$ ce qui est impossible lorsque $n \gg 1$;
2. $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = \varphi^k \mathbf{1}_{k \in \mathbb{N}}$ donc pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \varphi^{2j+h} = \sigma^2 \frac{\varphi^h}{1-\varphi^2}.$$

Pour la densité spectrale, on écrit, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(t) = |P_\alpha(e^{-itj})|^2 f_Z(t) = \left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi^j e^{-itj} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{1}{1 - \varphi e^{-it}} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\varphi \cos(t) + \varphi^2}.$$

3. L'équation s'écrit sous forme standard

$$X_t = \frac{1}{2} X_{t-1} + Z_t + \frac{1}{2} Z_{t-1}$$

et donc $\Phi(z) = P_{\alpha_\varphi}(z) = 1 - z/2$ et $\Theta(z) = P_{\alpha_\theta}(z) = 1 + z/2$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a $|z/2| < 1$ et donc $\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^k$ d'où

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} z^k.$$

Cela donne la solution causale $X_t = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} Z_{t-k}$;

4. On a $X = F_\psi Z$ où $\psi_k = \mathbf{1}_{k=0} + \mathbf{1}_{k>0} 2^{-k+1}$. Or pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \psi_j \psi_{h+j}$$

car $\gamma_Z = \sigma^2 \mathbf{1}_0$. Comme $|\psi_k| \leq 2\rho^k$ pour tout $k \geq 0$, avec $\rho = 1/2$, on obtient

$$\left| \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \psi_j \psi_{h+j} \right| \leq \sigma^2 2\rho^h \sum_{j \geq 0} \rho^{2j} = \sigma^2 2\rho^h \frac{1}{1 - \rho^2} = C\rho^h.$$

5. Prenons $\alpha_k = k^{-a} \mathbf{1}_{k \geq 1}$ pour $a > 1$, de sorte que $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Pour tout $h \geq 0$, on a

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k(k+h))^a} \geq \sigma^2 \int_1^\infty \frac{dx}{(x+h)^{2a}} = \frac{\sigma^2}{(2a-1)(1+h)^{2a-1}},$$

qui décroît polynomialement et non pas exponentiellement quand $|h| \rightarrow \infty$.

Examen final

Durée : 2 heures

Date : vendredi 23 janvier 2015

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1. Soit α_φ et α_θ les suites associées à Φ et Θ , de sorte que $P_{\alpha_\varphi} = \Phi$ et $P_{\alpha_\theta} = \Theta$.

1. Si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, alors α_φ est inversible pour le produit de convolution $*$ dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ et son inverse α_φ^{-1} est donné par le développement en série de puissances de z de la fraction rationnelle $\Theta(z)/\Phi(z)$ (qui converge dans un voisinage du cercle unité). Le processus linéaire $X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\theta} Z$ est solution car $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\varphi * \alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\theta} Z$. Pour l'unicité, si X est une solution stationnaire, alors comme α_φ^{-1} existe et $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\theta} Z$, on obtient $X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z$;
2. Si Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, alors α_φ^{-1} est porté par \mathbb{N} , et comme α_θ est porté par \mathbb{N} aussi (c'est un polynôme) il en est de même de leur produit de convolution, ce qui signifie que X est causal;
3. Si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité et si Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, alors α_θ est inversible pour le produit de convolution, son inverse est porté par \mathbb{N} , et comme α_φ est également porté par \mathbb{N} (c'est un polynôme), il en va de même pour $\alpha_\theta^{-1} * \alpha_\varphi$, et donc X est inversible car $Z = F_{\alpha_\theta^{-1} * \alpha_\varphi} X$;
4. Les équations ARMA de même fraction rationnelle ont mêmes solutions. $(p', q') = (p - m, q - m)$ où $m = \deg(Q)$.

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a $\Phi(z) = (1 - z + (1/4)z^2) = (z - 2)^2/4$ et $\Theta(z) = 1 - z/2 = -(z - 2)/2$ dont l'unique racine est 2 (elle est double pour Φ). Comme Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, l'équation ARMA possède une unique solution stationnaire notée X , processus linéaire de Z . Comme de plus Φ ne s'annule pas sur le disque unité, X est causale. Comme Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, X est inversible. Le calcul de X se fait en développant en série de puissances la fraction rationnelle de l'ARMA, dans un voisinage du cercle unité. Ici $|z| = 1$ implique que $|z/2| < 1$ ce qui permet le développement en série géométrique suivant :

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = -\frac{4(z-2)}{2(z-2)^2} = \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k.$$

d'où, en posant $\alpha_k = 2^{-k} \mathbf{1}_{k \geq 0}$,

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Z_{t-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$$

Elle est manifestement causale. On vérifie facilement directement qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation irréductible $X_t - (1/2)X_{t-1} = Z_t$ qui est AR(1) :

$$X_t - (1/2)X_{t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Z_{t-k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} Z_{t-1-k} = Z_t.$$

La solution est manifestement inversible car on a

$$Z_t = (\Phi/\Theta)(B)X_t = (1 - B/2)X_t = X_t - (1/2)X_{t-1};$$

2. Pour tout $h \geq 0$ on a

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\alpha Z}(h) = \sigma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+h} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k-h} = \sigma^2 2^{-h} \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = \frac{4}{3} \frac{\sigma^2}{2^h}.$$

Donc $\gamma_X(h) = (4/3)\sigma^2 2^{-|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$. On a $H_{t-1,1} = \text{vect}\{X_{t-1}\}$ d'où

$$\text{proj}(X_s, H_{t-1,1}) = \frac{\langle X_s, X_{t-1} \rangle}{\|X_{t-1}\|^2} X_{t-1} = \frac{\gamma_X(s-t+1)}{\gamma_X(0)} X_{t-1} = 2^{-|s-t-1|} X_{t-1}.$$

Cette variable aléatoire tend presque sûrement vers 0 quand $s \rightarrow \infty$.

3. Un calcul (à faire !) montre que $\text{Var}(\sqrt{n}X_n) \rightarrow \sigma^2 (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k)^2 = 4\sigma^2$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme Z est un BB fort gaussien, la variable $\sqrt{n}X_n$ est gaussienne. Comme sa moyenne est nulle et sa variance converge vers $4\sigma^2$, elle converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 4\sigma^2)$. Cette propriété permet de mettre en place un test pour savoir si le bruit blanc est fort (elle reste vraie si le bruit blanc est fort mais pas gaussien).

Solution succincte de l'exercice 3.

1. Les polynômes Φ_* et Θ_* ont pour racines respectives

$$\frac{1}{\bar{a}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{a}_r}, a_{r+1}, \dots, a_p \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{b}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{b}_s}, b_{s+1}, \dots, b_q,$$

qui sont toutes à l'extérieur du disque unité : l'application $z \mapsto 1/\bar{z}$ conserve l'argument et inverse le module. Donc l'équation ARMA(p, q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)X_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_* . À présent, comme Φ_* et Θ_* ne s'annulent pas sur le disque unité fermé, le processus ARMA(p, q) X_* est causal et inversible ;

2. Par définition, on a

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j z^j = -\varphi_p \prod_{j=1}^p (z - a_j) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j z^j = \theta_q \prod_{j=1}^q (z - b_j).$$

Comme $\Phi(0) = \Theta(0) = 1$, on a $|a_1 \cdots a_p \varphi_p| = |b_1 \cdots b_q \theta_q| = 1$, et

$$|\Phi(z)| = \prod_{j=1}^p \left| \frac{z - a_j}{a_j} \right| = \prod_{j=1}^p \left| 1 - a_j^{-1} z \right| \quad \text{et} \quad |\Theta(z)| = \prod_{j=1}^q \left| \frac{z - b_j}{b_j} \right| = \prod_{j=1}^q \left| 1 - b_j^{-1} z \right|.$$

Il en découle que pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|P_\theta(e^{-iu})|^2}{|P_\varphi(e^{-iu})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\prod_{j=1}^q |1 - b_j^{-1} e^{-iu}|^2}{\prod_{j=1}^p |1 - a_j^{-1} e^{-iu}|^2} = \frac{\sigma_*^2 |\Theta_*(e^{-iu})|^2}{2\pi |\Phi_*(e^{-iu})|^2} = f_{X_*}(u),$$

où on a utilisé $|1 - c^{-1} e^{-iu}| = |c|^{-1} |c - e^{-iu}| = |c|^{-1} |e^{iu} c - 1| = |c|^{-1} |1 - \bar{c} e^{-iu}|$ pour déplacer les racines de l'intérieur vers l'extérieur du disque unité, sans perturber la valeur du module. Il en découle que $\gamma_X = \gamma_{X_*}$ car l'autocovariance n'est rien d'autre que la suite des coefficients de Fourier de la mesure spectrale.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures

Date : lundi 1^{er} septembre 2015

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1 (ARMA(1,1)).

1. Une solution stationnaire existe (elle est alors unique, et c'est un processus linéaire) lorsque le polynôme $\Phi(z) = P_{\alpha_\phi}(z) = 1 - \phi z$ n'a pas de racine de module 1, c'est-à-dire lorsque $|\phi| \neq 1$ car Φ a une unique racine $z_1 = 1/\phi$ de module $1/|\phi|$;
2. La solution stationnaire est causale lorsque Φ n'a pas de racine de module ≤ 1 , c'est-à-dire lorsque $|z_1| > 1$, autrement dit lorsque $|\phi| < 1$;
3. D'après un théorème du cours, la solution stationnaire X de l'équation ARMA $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ s'obtient en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle de l'équation ARMA $z \mapsto \Theta(z)/\Phi(z) = (1+\theta z)/(1-\phi z)$ dans un voisinage du cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On distingue les cas $|\phi| < 1$ et $|\phi| > 1$.

Cas $|\phi| < 1$. Si $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et $1/(1 - \phi z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k$, d'où

$$\frac{1 + \theta z}{1 - \phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k + \theta z \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1}(\phi + \theta)z^k$$

d'où

$$\psi_k = \mathbf{1}_{h=0} + \phi^{k-1}(\phi + \theta)\mathbf{1}_{h>0}.$$

Cas $|\phi| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|(\phi z)^{-1}| < 1$ et

$$\frac{1}{1 - \phi z} = -\frac{1}{\phi z} \frac{1}{1 - (\phi z)^{-1}} = -\frac{1}{\phi z} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k}.$$

et donc

$$\frac{1 + \theta z}{1 - \phi z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} - \theta z \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} = -\theta \phi^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k-1}(\phi + \theta)z^{-k}$$

d'où

$$\psi_k = -\theta \phi^{-1} \mathbf{1}_{k=0} + \phi^{-k-1}(\phi + \theta) \mathbf{1}_{k<0}.$$

Dans les deux cas, $F_{\phi}^{-1} \circ F_{\theta} = F_{\psi}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k Z_{t-k},$$

et la convergence a lieu p.s. et dans L^2 . On retrouve bien $X = Z$ si $\theta = -\phi$.

4. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$, comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$,

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_{\psi}Z}(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{h+j}$$

Cette formule permet d'établir que $\gamma_X(h)$ décroît géométriquement (exponentielle) quand $|h| \rightarrow \infty$, en utilisant le fait que ψ_k décroît géométriquement quand $|k| \rightarrow \infty$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C \rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 2 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance pour un AR(1)).

1. Comme $|\phi| < 1$, le processus stationnaire X solution de l'équation AR(1) est un filtre causal du bruit blanc fort gaussien Z , et par conséquent, d'après un théorème du cours, on dispose du théorème de la limite centrale suivant :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \gamma)$$

où $\gamma = 2\pi f_X(0)$ et où f_X est la densité spectrale de X , qui est donnée ici par $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1-\varphi e^{-i\lambda}|^2}$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$, d'où enfin $\gamma = 2\pi f_X(0) = \sigma^2/(1-\varphi)^2$. On peut mener le calcul de la variance asymptotique directement :

$$\begin{aligned} n\text{Var}(\hat{\theta}) &= \frac{1}{n} \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} \gamma_X(j-i) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \frac{n-h}{n} \gamma_X(h) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{h}{n}\right) \gamma_X(h) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CVD}} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ih\lambda} \gamma_X(h) \Big|_{\lambda=0} \\ &= 2\pi f_X(0). \end{aligned}$$

2. La convergence en loi précédente permet de construire un intervalle de confiance asymptotique $I_{n,\alpha}$ suivant de niveau de confiance $1 - \alpha$. En effet, on écrit

$$\mathbb{P}\left(\theta \in \hat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}} J_\alpha, \hat{\theta} + \sqrt{\frac{\gamma}{n}} J_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\gamma}}(\hat{\theta} - \theta) \in J_\alpha\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(Z \in J_\alpha) = 1 - \alpha$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $J_\alpha = [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$ où q_p est le quantile d'ordre p de $\mathcal{N}(0, 1)$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(Z \leq q_p) = p$, ce qui donne

$$I_{n,\alpha} = \left[\hat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}} q_{1-\alpha/2}, \hat{\theta} + \sqrt{\frac{\gamma}{n}} q_{1-\alpha/2}\right]$$

Cet intervalle de confiance permet de tester l'hypothèse statistique $H_0 : \theta = 0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta \neq 0$. Pour $\alpha = 5\%$ on a $q_{1-\alpha/2} \approx 1.96$, ce qui donne avec les valeurs fournies pour n et $\hat{\theta}$ l'intervalle $[-0.39, 0.59]$. Comme 0 appartient à cet intervalle, on accepte H_0 avec un niveau de confiance de 5%;

3. Un théorème du cours affirme que Γ_n est inversible pour tout n si et seulement si $\gamma_X(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow \infty$, ce qui est le cas pour les processus ARMA(p, q) ;
4. Si $X^{(n)} = (X_0, \dots, X_{n-1})$ alors $\text{Cov}(X^{(n)}) = \text{Cov}(Y^{(n)}) = \Gamma_n$, d'où

$$\tilde{Y}_n^{(n)} := \Gamma_n^{-1/2} Y^{(n)} = \theta \Gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n + \Gamma_n^{-1/2} X^{(n)} = \theta A + Z^{(n)}$$

où $Z^{(n)} = \Gamma_n^{-1/2} X^{(n)}$ vérifie $\text{Cov}(Z^{(n)}) = I_n$. On a donc

$$(A^\top A)^{-1} A \tilde{Y}_n^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1/2} \Gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1/2} \Gamma_n^{-1/2} Y^{(n)} = \tilde{\theta}_n.$$

Il s'agit donc tout simplement d'un estimateur par projection orthogonale obtenu par moindres carrés $\min_\theta \|\theta A - \tilde{Y}_n^{(n)}\|$, bien connu pour le modèle linéaire ;

5. On a $\mathbb{E}(\tilde{\theta}_n) = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n) \theta = \theta$ et

$$\mathbb{E}((\tilde{\theta}_n)^2) = \frac{1}{(\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2} \mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2).$$

Or comme $\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^\top = Y^{(n)\top} \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n$ (il s'agit d'un réel), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)} Y^{(n)\top} \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n) \\ &= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbb{E}(Y^{(n)} Y^{(n)\top}) \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} (\Gamma_n + \theta \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top) \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n + \theta (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2\end{aligned}$$

d'où

$$\text{Var}(\tilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n}.$$

6. La décomposition de Cholesky donne, en observant que $\Phi_n \mathbf{1}_n = (1-\phi, \dots, 1-\phi, 1)^\top$,

$$\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n = (\Phi_n \mathbf{1}_n)^\top D_n \Phi_n \mathbf{1}_n = (1-\phi)^2 \frac{1-\phi^2}{\sigma^2} + (n-2)(1-\phi)^2 \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2},$$

d'où

$$n \text{Var}(\tilde{\theta}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{(1-\phi)^2}.$$

Ainsi, les estimateurs $\hat{\theta}_n$ et $\tilde{\theta}_n$ sont asymptotiquement de même variance.

Examen partiel

Durée : 2 heures

Date : mercredi 4 novembre 2015 8h30-10h30

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1. Proche d'un exercice du partiel de 2013-2014.

1. Par définition, X est un processus causal de Z ssi $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$. D'autre part, par définition, $X = F_\alpha Z$ est inversible ssi il existe $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $Z = F_\beta X$ est un processus causal de X c'est-à-dire que $\beta_k = 0$ si $k < 0$. Si $X = F_\alpha Z$ est à la fois causal et inversible alors $Z = F_\beta X = F_\beta F_\alpha Z = F_{\beta * \alpha} Z$ d'où $\beta = \alpha^{-1}$. Ainsi, un filtre α d'un BB est à la fois causal et inversible ssi α est à support dans \mathbb{N} et admet un inverse (pour le produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$) à support dans \mathbb{N} ;
2. L'opérateur $(1 - B)^{n+1} = \Delta^{n+1}$ élimine toute tendance polynomiale de degré au plus n , d'où $\Delta^2 Z_t = \Delta(Z_t - Z_{t-1}) = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$, ou encore, avec $n = 1$,

$$(1 - B)^{n+1}(1 + t + Z_t) = (1 - B)^{n+1}Z_t = (1 - 2B + B^2)Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2};$$

3. Exercice vu en travaux dirigés. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mu_{XY}(t) = \mathbb{E}(X_t Y_t) = \mathbb{E}(X_t) \mathbb{E}(Y_t) = \mu_X(t) \mu_Y(t) = \mu_X \mu_Y$$

grâce à l'indépendance et à la stationnarité de X et Y , et

$$\begin{aligned} \gamma_{XY}(t, t+h) &= \mathbb{E}(X_{t+h} Y_{t+h} X_t Y_t) - (\mu_X \mu_Y)^2 \\ &= \mathbb{E}(X_{t+h} X_t) \mathbb{E}(Y_{t+h} Y_t) - \mu_X^2 \mu_Y^2 \\ &= \gamma_X(h) + \mu_X^2 + \gamma_Y(h) + \mu_Y^2 - \mu_X^2 \mu_Y^2, \end{aligned}$$

qui ne dépendent pas de t , d'où la stationnarité de XY ;

4. Soit $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ un MA(1). La moyenne est nulle et l'autocovariance est

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = \mathbb{E}((Z_t + \theta Z_{t-1})(Z_{t+h} + \theta Z_{t+h-1})) = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \theta\sigma^2\mathbf{1}_{h=\pm 1}$$

Comme $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le théorème de Herglotz affirme que γ_X est la transformée de Fourier d'une mesure positive finie de densité donnée pour tout $u \in [-\pi, \pi]$ par

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) e^{-ihu} = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + \theta^2 + \theta(e^{-iu} + e^{+iu})) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + \theta^2 + 2\theta \cos(u)).$$

Solution succincte de l'exercice 2. Tiré de l'examen de rattrapage de 2014-2015.

1. Une solution stationnaire existe (elle est alors unique, et c'est un processus linéaire) lorsque le polynôme $\Phi(z) = P_{\alpha_\phi}(z) = 1 - \phi z$ n'a pas de racine de module 1, c'est-à-dire lorsque $|\phi| \neq 1$ car Φ a une unique racine $z_1 = 1/\phi$ de module $1/|\phi|$;
2. La solution stationnaire est causale lorsque Φ n'a pas de racine de module ≤ 1 , c'est-à-dire lorsque $|z_1| > 1$, autrement dit lorsque $|\phi| < 1$;

3. D'après un théorème du cours, la solution stationnaire X de l'équation ARMA $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ s'obtient en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle de l'équation ARMA $z \mapsto \Theta(z)/\Phi(z) = (1+\theta z)/(1-\phi z)$ dans un voisinage du cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On distingue les cas $|\phi| < 1$ et $|\phi| > 1$.

Cas $|\phi| < 1$. Si $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et $1/(1-\phi z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k$, d'où

$$\frac{1+\theta z}{1-\phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k + \theta z \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1}(\phi + \theta)z^k$$

d'où

$$\psi_k = \mathbf{1}_{h=0} + \phi^{k-1}(\phi + \theta) \mathbf{1}_{h>0}.$$

Cas $|\phi| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|(\phi z)^{-1}| < 1$ et

$$\frac{1}{1-\phi z} = -\frac{1}{\phi z} \frac{1}{1-(\phi z)^{-1}} = -\frac{1}{\phi z} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k}.$$

et donc

$$\frac{1+\theta z}{1-\phi z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} - \theta z \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} = -\theta \phi^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k-1}(\phi + \theta) z^{-k}$$

d'où

$$\psi_k = -\theta \phi^{-1} \mathbf{1}_{k=0} + \phi^{-k-1}(\phi + \theta) \mathbf{1}_{k<0}.$$

Dans les deux cas, $F_{\phi}^{-1} \circ F_{\theta} = F_{\psi}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k Z_{t-k},$$

et la convergence a lieu p.s. et dans L^2 . On retrouve bien $X = Z$ si $\theta = -\phi$.

4. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$, comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$,

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_{\psi}Z}(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{h+j}$$

Cette formule permet d'établir que $\gamma_X(h)$ décroît géométriquement (exponentielle) quand $|h| \rightarrow \infty$, en utilisant le fait que ψ_k décroît géométriquement quand $|k| \rightarrow \infty$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C \rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tous $n, m \in \mathbb{N}$, la v.a.r. $X_{t,n,m} := \sum_{k=-n}^m \alpha_k Z_{t-k}$ est gaussienne de moyenne 0 et de variance

$$\mathbb{E}(X_{t,n,m}^2) = \sum_{-n \leq j, k \leq m} \alpha_j \alpha_k \text{Cov}(Z_{t-j}, Z_{t-k}) = \sum_{-n \leq k \leq m} \alpha_k^2 \text{Var}(Z_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{k=-n}^m \alpha_k^2$$

car $Z \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$. Comme $X_{t,n,m}$ converge dans L^2 et donc en loi vers $(F_{\alpha}X)_t$ quand $n, m \rightarrow \infty$, il en découle que $(F_{\alpha}X)_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \|\alpha\|_2^2)$, car pour les suites de v.a.r. gaussiennes, la convergence en loi est équivalente à la convergence des moyennes et des variances et la limite est toujours gaussienne ;

2. Soit $\kappa := \mathbb{E}(Z_t^4)$ (valable pour tout $t \in \mathbb{Z}$). Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a

$$M_t := \mathbb{E}((F_\alpha Z)_t^4) = \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \alpha_{k_3} \alpha_{k_4} \mathbb{E}(Z_{t-k_1} Z_{t-k_2} Z_{t-k_3} Z_{t-k_4}).$$

Or si la suite finie k_1, k_2, k_3, k_4 comporte une valeur n'apparaissant qu'une fois alors par indépendance et centrage $\mathbb{E}(Z_{t-k_1} Z_{t-k_2} Z_{t-k_3} Z_{t-k_4}) = 0$. Il suffit donc de considérer le cas où deux valeurs distinctes $u \neq v$ apparaissent deux fois, qui donne $\mathbb{E}(Z_{t-k_1} Z_{t-k_2} Z_{t-k_3} Z_{t-k_4}) = \mathbb{E}(Z_{t-u}^2 Z_{t-v}^2) = \sigma^4$, et le cas où une seule valeur apparaît quatre fois ($k_1 = k_2 = k_3 = k_4$), qui donne $\mathbb{E}(Z_{t-k_1} Z_{t-k_2} Z_{t-k_3} Z_{t-k_4}) = \mathbb{E}(Z_{t-k_1}^4) = \kappa$.

$$\begin{aligned} M_t &= \sum_{\substack{u, v \in \mathbb{Z} \\ u < v}} \binom{4}{2} \alpha_u^2 \alpha_v^2 \sigma^4 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^4 3\sigma^4 \\ &= 3\sigma^4 (\|\alpha\|_2^4 - \|\alpha\|_4^4) + \kappa \|\alpha\|_4^4 \\ &= 3\sigma^4 \|\alpha\|_2^4 + (\kappa - 3\sigma^4) \|\alpha\|_4^4. \end{aligned}$$

Rappelons que $\ell^p \subset \ell^q$ si $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et en particulier $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^4$.

Il est possible de vérifier la véracité du calcul dans le cas gaussien. En effet, comme le moment d'ordre 4 de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ vaut 3, il vient $\kappa = 3\sigma^4$ et donc $M_t = 3\sigma^4 \|\alpha\|_2^4$, ce qui correspond bien au fait que dans le cas gaussien, M_t est le moment d'ordre 4 de la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \|\alpha\|_2^2)$ d'après la première question !

Examen final

Durée : 2 heures

Date : lundi 11 janvier 2016

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

- On raisonne par l'absurde. Si X est solution stationnaire de l'équation, alors l'utilisation récursive de $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}$ donne, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1} \\ &= \varphi(\varphi X_{t-2} + Z_{t-1} + \theta Z_{t-2}) + X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1} \\ &= \varphi^2 X_{t-2} + Z_t + (\varphi + \theta)Z_{t-1} + \varphi\theta Z_{t-2} \\ &\vdots \\ &= \varphi^n X_{t-n} + Z_t + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{k-1}(\varphi + \theta)Z_{t-k} + \varphi^{n-1}\theta Z_{t-n}, \end{aligned}$$

d'où

$$X_t - \varphi^n X_{t-n} = Z_t + (\varphi + \theta) \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{k-1} Z_{t-k} + \varphi^{n-1} \theta Z_{t-n}$$

d'où, en calculant la variance des deux membres,

$$(1 + \varphi^{2n})\gamma_X(0) - 2\varphi^n\gamma_X(n) = \sigma^2 + \sigma^2(\varphi + \theta)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{2(k-1)} + \sigma^2\varphi^{2(n-1)}\theta^2,$$

or si $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$ alors on obtient une contradiction lorsque $n \rightarrow \infty$: le membre de gauche reste borné tandis que le membre de droite tend vers l'infini. Il n'y a donc pas de solution stationnaire lorqu'à la fois $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$.

- Comme $\Phi(z) := 1 - \varphi z$ et $\Theta(z) := 1 + \theta z$ ne s'annulent pas sur le cercle unité, l'équation ARMA(1, 1) admet une unique solution stationnaire donnée par le filtre $X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\theta} F_{\alpha_\varphi^{-1}} Z$. Or l'équation ARMA(∞, ∞) s'écrit $F_{\alpha_\theta^{-1}} X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} Z$;
- On a $\Phi(z) = 1 - z^2/4$ dont les racines sont ± 2 et $\Theta(z) = 1 + z/2$ dont l'unique racine est $z = -2$. Comme Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, l'équation ARMA(2, 1) admet donc une unique solution stationnaire donnée par $f(B)Z$ où

$$f(z) = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \frac{2}{2-z} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k$$

(convergence absolue pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$). Elle est manifestement causale, et cela est dû au fait que Φ ne s'annule pas sur le disque unité. Comme Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, cette solution est de plus inversible. Le processus $Y_t = X_t + c2^{-t}$ est une solution non stationnaire, pour tout $c \neq 0$ fixé.

- Comme Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, l'équation ARMA(p, q) possède une unique solution stationnaire, qui est causale, et il s'agit donc de X . De plus $X = f(B)Z$ où $f(z) = \Theta(z)/\Phi(z)$. La causalité fait que $1/\Phi(z)$ et donc $f(z)$ est une

somme finie de séries de puissances positives c'est-à-dire que $f(z) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k z^k$ où $\alpha_k = \sum_{j=1}^m c_j \kappa_j^k$ avec $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ et $\kappa_1, \dots, \kappa_m \in]-1, 1[$. En particulier, en posant $c := |c_1| + \dots + |c_m|$ et $\kappa := \max(|\kappa_1|, \dots, |\kappa_m|) \in]0, 1[$, il vient, pour tout $k \geq 0$,

$$|\alpha_k| \leq c\kappa^k.$$

À présent pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k \geq 0} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+k-j) = \sigma^2 \sum_{k \geq 0} \alpha_k \alpha_{h+k}$$

ce qui donne, pour tout $h \geq 0$,

$$|\gamma_X(h)| \leq \sigma^2 c \sum_{k \geq 0} \kappa^{2k+h} = c\sigma^2 \frac{\kappa^h}{1-\kappa^2} = C\kappa^h = Ce^{-ch}.$$

5. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Y) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_X(t, t+h) = \mathbb{E}(X_{t+h} X_t) = \mathbb{E}(Y^2) = 1,$$

qui ne dépendent pas de t , et donc le processus est stationnaire. De plus pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $\gamma_X(t) = 1$. Le processus est solution de l'équation $X_{t-1} = X_t$ qui est une équation ARMA(1, q) dégénérée avec un bruit blanc de variance nulle.

6. Comme $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le théorème de Herglotz affirme que la mesure spectrale ν_X de X admet une densité spectrale f_X donnée pour tout $u \in [-\pi, \pi]$ par la formule $f_X(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-ihu} \gamma_X(h)$. À présent, par convergence dominée,

$$n \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) = \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \gamma_X(j-k) = \sum_{h=-n+1}^{n-1} \frac{n-|h|}{n} \gamma_X(h) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma_X(h) = 2\pi f_X(0).$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a

$$H_{t-1,p+1} = H_{t-1,p} \overset{\perp}{\oplus} \text{vect}\{E_{t-(p+1),p}^-\}$$

d'où

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \text{proj}(X_t, \text{vect}\{E_{t-(p+1),p}^-\})$$

or

$$\text{proj}(X_t, \text{vect}\{E_{t-(p+1),p}^-\}) = \kappa_{p+1} E_{t-(p+1),p}^- \quad \text{où} \quad \kappa_{p+1} := \frac{\langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2};$$

2. Comme $X_t = E_{t,p}^+ + \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$, et $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \in H_{t-1,p} \perp E_{t-(p+1),p}^-$, il vient

$$\kappa_{p+1} = \frac{\langle X_t, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2} = \frac{\langle E_{t,p}^+, E_{t-(p+1),p}^- \rangle}{\|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2}.$$

Enfin $\|E_{t,p}^+\|_2^2 = \|E_{t-(p+1),p}^-\|_2^2 (= \sigma_p^2)$ d'où la formule attendue. Comme cette quantité est une corrélation, elle appartient à l'intervalle $[-1, 1]$ (inégalité de Schwarz).

Solution succincte de l'exercice 3.

1. Par analogie avec le cas scalaire ($d = 1$) on aimerait poser

$$X_t = \sum_{k \geq 0} \Phi^k Z_{t-k}.$$

C'est une série dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d)$ dont la norme $\|Y\|_{L^2} := \mathbb{E}(\|Y\|_2^2)^{1/2}$ dérive du produit scalaire $\mathbb{E}(X \cdot Y)$. Elle converge absolument car

$$\left\| \sum_{k \geq 0} \Phi^k Z_{t-k} \right\|_{L^2} \leq \sum_{k \geq 0} \|\Phi^k\|_{2 \rightarrow 2} \|Z_{t-k}\|_{L^2} \leq \sum_{k \geq 0} \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}^k \sqrt{d\sigma^2} = \frac{\sqrt{d}\sigma}{1 - \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}},$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire pour la norme de L^2 , la sous-multiplicativité de la norme de matrice puis le fait que $\|Z_t\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^d \mathbb{E}(Z_{t,j}^2) = d\sigma^2$. Le processus X est donc bien défini dans L^2 . Il est bien solution de l'équation AR(1) vectorielle car par continuité de l'application linéaire $Y \in L^2 \mapsto \Phi Y \in L^2$, on a

$$\Phi X_{t-1} = \sum_{k \geq 0} \Phi^{k+1} Z_{t-1-k} = \sum_{k \geq 1} \Phi^k Z_{t-k} = X_t - Z_t.$$

Notons que X a une norme constante en ce sens que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \|X_t\|_{L^2}^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{j,k \geq 0} \Phi^j Z_{t-j} \cdot \Phi^k \cdot Z_{t-k} \right) = \sum_{j,k \geq 0} \sum_{u,v,w=1}^d \Phi_{u,v}^j \Phi_{u,w}^k \mathbb{E}(Z_{t-j,v} Z_{t-k,w}) \\ &= \sigma^2 \sum_{k \geq 0} \sum_{u,v} (\Phi_{u,v}^k)^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{k \geq 0} \text{Tr}(\Phi^k (\Phi^k)^\top). \end{aligned}$$

Si X' est une solution de l'équation dans L^2 , de norme constante, alors

$$X'_t = Z_t + \Phi X'_{t-1} = \dots = \sum_{k=0}^n \Phi^k Z_{t-k} + \Phi^{n+1} X'_{t-(n+1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} \sum_{k \geq 0} \Phi^k Z_{t-k} = X_t$$

car $\|\Phi^{n+1} X'_{t-(n+1)}\|_{L^2} \leq \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}^{n+1} \|X'_{t-(n+1)}\|_{L^2} = \|\Phi\|_{2 \rightarrow 2}^{n+1} \|X'_0\|_{L^2} = o(1)$ et il y a donc unicité parmi les solutions dans L^2 de norme constante.

2. Si les processus $(Z_{t,1})_{t \in \mathbb{Z}}, \dots, (Z_{t,d})_{t \in \mathbb{Z}}$ sont indépendants et si Φ est diagonale, alors les processus $(X_{t,1})_{t \in \mathbb{Z}}, \dots, (X_{t,d})_{t \in \mathbb{Z}}$ sont des AR(1) indépendants de coefficients respectifs $\Phi_{1,1}, \dots, \Phi_{d,d}$ car dans ce cas $\Phi^k Z_{t-k} = (\Phi_{1,1}^k Z_{t-k,1}, \dots, \Phi_{d,d}^k Z_{t-k,d})^\top$.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures

Date : vendredi 15 juillet 2016

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note :

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
- Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
- Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
- Ce sujet reprend des éléments des sujets des années antérieures

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Comme $t \mapsto \cos((2/3)\pi t)$ est de période 3, on a $\Delta_3 S_t = 0 + \Delta_3 Z_t = Z_t - Z_{t-3}$;
2. Comme les v.a.r. $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même moyenne et variance, il s'agit bien d'un bruit blanc fort. La moyenne vaut 0 car les variables sont centrées, et la variance vaut 1 car les variables sont réduites;
3. Les v.a.r. $(Z_t^p)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même moyenne et variance : il s'agit donc d'un bruit blanc fort. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$ on a $\mu(h) = \mathbb{E}(Z_0^p)$ ($= 0$ si p impair) et $\gamma(h) = (\mathbb{E}(Z_0^{2p}) - \mathbb{E}(Z_0^p)^2) \mathbf{1}_{h=0}$;
4. $\gamma_X(h) = 0$ si $|h| > 2$, et $\gamma_X(0) = \text{Var}(aZ_{-1} + bZ_1) = a^2 + b^2$, $\gamma_X(-1) = \gamma_X(1) = \mathbb{E}((aZ_0 + bZ_2)(aZ_1 + bZ_3)) = 0$, et $\gamma_X(-2) = \gamma_X(2) = \mathbb{E}(bZ_2 aZ_2) = ab$.
5. X est causalssi X_t ne dépend que de $(Z_s)_{s \leq t}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, ce qui a lieu si $b = 0$. Le filtre X de Z est inversiblessi Z est un filtre causal de X , ce qui a lieu si $a = 0$.

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a $X_t = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} + \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $|\varphi| < 1$ alors le premier terme du membre de droite est une série absolument convergence dans L^2 (et p.s.) ce qui suggère que $X_t = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k}$ est solution, ce qui se vérifie directement. Lorsque $|\varphi| > 1$ on procède de même en renversant le temps à partir de l'équation $X_{t-1} = \varphi^{-1} X_t - \varphi^{-1} Z_t$, ce qui conduit à la solution non-causale $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{-k} Z_{t+k}$. Lorsque $|\varphi| = 1$ alors il ne peut pas exister de solution stationnaire car sinon l'équation $\sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} = X_t - \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}$ donnerait en prenant la variance $(n+1)\sigma^2 \leq 4\gamma_X(0)$ ce qui est impossible lorsque $n \gg 1$;
2. $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = \varphi^k \mathbf{1}_{k \in \mathbb{N}}$ donc pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \varphi^{2j+h} = \sigma^2 \frac{\varphi^h}{1 - \varphi^2}.$$

Pour la densité spectrale, on écrit, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(t) = |P_\alpha(e^{-itj})|^2 f_Z(t) = \left| \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi^j e^{-itj} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{1}{1 - \varphi e^{-it}} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\varphi \cos(t) + \varphi^2}.$$

3. L'équation s'écrit sous forme standard

$$X_t = \frac{1}{2} X_{t-1} + Z_t + \frac{1}{2} Z_{t-1}$$

et donc $\Phi(z) = P_{\alpha_\varphi}(z) = 1 - z/2$ et $\Theta(z) = P_{\alpha_\theta}(z) = 1 + z/2$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a $|z/2| < 1$ et donc $\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (z/2)^k$ d'où

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} z^k.$$

Cela donne la solution causale $X_t = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1} Z_{t-k}$;

4. On a $X = F_\psi Z$ où $\psi_k = \mathbf{1}_{k=0} + \mathbf{1}_{k>0} 2^{-k+1}$. Or pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \psi_j \psi_{h+j}$$

car $\gamma_Z = \sigma^2 \mathbf{1}_0$. Comme $|\psi_k| \leq 2\rho^k$ pour tout $k \geq 0$, avec $\rho = 1/2$, on obtient

$$\left| \sigma^2 \sum_{j \geq 0} \psi_j \psi_{h+j} \right| \leq \sigma^2 2\rho^h \sum_{j \geq 0} \rho^{2j} = \sigma^2 2\rho^h \frac{1}{1-\rho^2} = C\rho^h.$$

5. Prenons $\alpha_k = k^{-a} \mathbf{1}_{k \geq 1}$ pour $a > 1$, de sorte que $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Pour tout $h \geq 0$, on a

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k(k+h))^a} \geq \sigma^2 \int_1^\infty \frac{dx}{(x+h)^{2a}} = \frac{\sigma^2}{(2a-1)(1+h)^{2a-1}},$$

qui décroît polynomialement et non pas exponentiellement quand $|h| \rightarrow \infty$.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. On a $\Phi(z) = (1 - z + (1/4)z^2) = (z - 2)^2/4$ et $\Theta(z) = 1 - z/2 = -(z - 2)/2$ dont l'unique racine est 2 (elle est double pour Φ). Comme Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, l'équation ARMA possède une unique solution stationnaire notée X , processus linéaire de Z . Comme de plus Φ ne s'annule pas sur le disque unité, X est causale. Comme Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, X est inversible. Le calcul de X se fait en développant en série de puissances la fraction rationnelle de l'ARMA, dans un voisinage du cercle unité. Ici $|z| = 1$ implique que $|z/2| < 1$ ce qui permet le développement en série géométrique suivant :

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = -\frac{4(z-2)}{2(z-2)^2} = \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k.$$

d'où, en posant $\alpha_k = 2^{-k} \mathbf{1}_{k \geq 0}$,

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Z_{t-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$$

Elle est manifestement causale. On vérifie facilement directement qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation irréductible $X_t - (1/2)X_{t-1} = Z_t$ qui est AR(1) :

$$X_t - (1/2)X_{t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Z_{t-k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} Z_{t-1-k} = Z_t.$$

La solution est manifestement inversible car on a

$$Z_t = (\Phi/\Theta)(B)X_t = (1 - B/2)X_t = X_t - (1/2)X_{t-1};$$

2. Pour tout $h \geq 0$ on a

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\alpha Z}(h) = \sigma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+h} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k-h} = \sigma^2 2^{-h} \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = \frac{4}{3} \frac{\sigma^2}{2^h}.$$

Donc $\gamma_X(h) = (4/3)\sigma^2 2^{-|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$. On a $H_{t-1,1} = \text{vect}\{X_{t-1}\}$ d'où

$$\text{proj}(X_s, H_{t-1,1}) = \frac{\langle X_s, X_{t-1} \rangle}{\|X_{t-1}\|^2} X_{t-1} = \frac{\gamma_X(s-t+1)}{\gamma_X(0)} X_{t-1} = 2^{-|s-t-1|} X_{t-1}.$$

Cette variable aléatoire tend presque sûrement vers 0 quand $s \rightarrow \infty$.

3. Un calcul (à faire !) montre que $\text{Var}(\sqrt{n}X_n) \rightarrow \sigma^2 (\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k)^2 = 4\sigma^2$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme Z est un BB fort gaussien, la variable $\sqrt{n}X_n$ est gaussienne. Comme sa moyenne est nulle et sa variance converge vers $4\sigma^2$, elle converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 4\sigma^2)$. Cette propriété permet de mettre en place un test pour savoir si le bruit blanc est fort (elle reste vraie si le bruit blanc est fort mais pas gaussien).

Solution succincte de l'exercice 4.

1. Les polynômes Φ_* et Θ_* ont pour racines respectives

$$\frac{1}{\bar{a}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{a}_r}, a_{r+1}, \dots, a_p \quad \text{et} \quad \frac{1}{\bar{b}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{b}_s}, b_{s+1}, \dots, b_q,$$

qui sont toutes à l'extérieur du disque unité : l'application $z \mapsto 1/\bar{z}$ conserve l'argument et inverse le module. Donc l'équation ARMA(p, q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)X_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_* . À présent, comme Φ_* et Θ_* ne s'annulent pas sur le disque unité fermé, le processus ARMA(p, q) X_* est causal et inversible ;

2. Par définition, on a

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^p \varphi_j z^j = -\varphi_p \prod_{j=1}^p (z - a_j) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j z^j = \theta_q \prod_{j=1}^q (z - b_j).$$

Comme $\Phi(0) = \Theta(0) = 1$, on a $|a_1 \cdots a_p \varphi_p| = |b_1 \cdots b_q \theta_q| = 1$, et

$$|\Phi(z)| = \prod_{j=1}^p \left| \frac{z - a_j}{a_j} \right| = \prod_{j=1}^p \left| 1 - a_j^{-1} z \right| \quad \text{et} \quad |\Theta(z)| = \prod_{j=1}^q \left| \frac{z - b_j}{b_j} \right| = \prod_{j=1}^q \left| 1 - b_j^{-1} z \right|.$$

Il en découle que pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|P_\theta(e^{-iu})|^2}{|P_\varphi(e^{-iu})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\prod_{j=1}^q |1 - b_j^{-1} e^{-iu}|^2}{\prod_{j=1}^p |1 - a_j^{-1} e^{-iu}|^2} = \frac{\sigma_*^2 |\Theta_*(e^{-iu})|^2}{2\pi |\Phi_*(e^{-iu})|^2} = f_{X_*}(u),$$

où on a utilisé $|1 - c^{-1} e^{-iu}| = |c|^{-1} |c - e^{-iu}| = |c|^{-1} |e^{iu} c - 1| = |c|^{-1} |1 - \bar{c} e^{-iu}|$ pour déplacer les racines de l'intérieur vers l'extérieur du disque unité, sans perturber la valeur du module. Il en découle que $\gamma_X = \gamma_{X_*}$ car l'autocovariance n'est rien d'autre que la suite des coefficients de Fourier de la mesure spectrale.

[English version](#)

Examen partiel

Durée : 2 heures

Date : lundi 31 octobre 2016

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note :

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
- Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
- Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
- Ce sujet reprend des éléments des sujets des années antérieures

Solution succincte de l'exercice 1.

1. L'opérateur différence répété Δ^{n+1} élimine toute tendance polynomiale de degré inférieur ou égal à n . Ainsi $\Delta^{2017}X = \Delta^{2017}Z = (1 - B)^{2017}Z = \sum_{k=0}^{2017} \binom{2017}{k} (-1)^k B^k Z$.
2. On a $\Phi(z) = 1 - 3z$ et $\Theta(z) = 1 - (10/3)z + z^2$. Le polynôme Φ a une seule racine, égale à $1/3$. Il ne s'annule donc pas sur le cercle unité, et donc, d'après un théorème du cours, l'équation ARMA(1, 2) admet une unique solution stationnaire (on ne peut pas pour l'instant affirmer qu'elle est causale car le polynôme s'annule sur le disque unité). Ce processus linéaire solution s'obtient en développant en série de puissances de z autour du cercle unité la fraction rationnelle irréductible de l'équation. Comme $1/3$ est à la fois racine de Φ et de Θ , on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$,

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \frac{(1 - 3z)(1 - \frac{1}{3}z)}{1 - 3z} = 1 - \frac{1}{3}z.$$

Le processus linéaire solution est donc $X_t = Z_t - (1/3)Z_{t-1}$, $t \in \mathbb{Z}$. Ce processus est manifestement un filtre causal de Z (d'ailleurs le dénominateur de la fraction rationnelle irréductible ne s'annule pas sur le disque unité). Le polynôme Θ s'annule sur le disque unité et on ne peut pas affirmer que la solution est inversible, mais le numérateur de la fraction rationnelle irréductible est constant et égal à 1 et ne s'annule donc pas, ce qui permet d'affirmer que X est inversible. L'expression de Z comme filtre causal de X s'obtient en développant l'inverse de la fraction rationnelle irréductible en série de puissance autour du cercle unité. Comme pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ on a $|(1/3)z| < 1$, il vient le développement en série de puissances $\Phi(z)/\Theta(z) = 1/(1 - (1/3)z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}z^k$, qui donne enfin la formule renversée $Z_t = (((\Phi/\Theta)(B))X)_t = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}X_{t-k}$, qui est bien un filtre causal de X .

3. On a $\Theta(z) = 1$ (comme pour toute équation AR). D'autre part $\Phi(z) = 1 - z^p$, dont les racines $\{e^{i2\pi k/p} : 0 \leq k \leq p-1\}$, appelées racines p -ième de l'unité, sont de module 1. Tentons d'établir qu'il n'existe pas de solution stationnaire en raisonnant par l'absurde. Si X est une solution stationnaire, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $r \geq 1$,

$$X_t = X_{t-p} + Z_t = X_{t-2p} + Z_t + Z_{t-p} = \dots = X_{t-rp} + \sum_{k=0}^{r-1} Z_{t-kp}.$$

Or d'une part, en utilisant le théorème de Pythagore dans L^2 , il vient

$$\|X_t - X_{t-2p}\|_2^2 = \|Z_t + Z_{t-p} + \dots + Z_{t-(r-1)p}\|_2^2 = r\sigma^2 \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \infty,$$

tandis que d'autre part, en utilisant la stationnarité de X ,

$$\|X_t - X_{t-2p}\|_2^2 = \gamma_X(0) - 2\gamma_X(2p) + \gamma_X(0) \leq 4\gamma_X(0) = \mathcal{O}_{r \rightarrow \infty}(1),$$

ce qui est bien contradictoire. Il n'y a donc pas de solution stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 2.

- Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, dans l'espace de Banach L^2 , la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ converge absolument : en effet, en utilisant la définition de α et Z ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|\alpha_k Z_{t-k}\|_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| \|Z_{t-k}\|_2 = \sigma \|\alpha\|_1 < \infty.$$

Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la série aléatoire $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ converge presque sûrement car en introduisant la variable aléatoire $S := \sum_{t \in \mathbb{Z}} |\alpha_k Z_{t-k}|$ à valeurs dans $[0, +\infty]$, il vient, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli ou de convergence monotone,

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| \mathbb{E}(|Z_{t-k}|) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k| \|Z_{t-k}\|_2 = \sigma \|\alpha\|_1 < \infty,$$

d'où $\mathbb{P}(S < \infty) = 1$, c'est-à-dire que presque sûrement la série aléatoire $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ converge absolument dans \mathbb{R} . La valeur de cette somme est identique à celle obtenue dans L^2 car la convergence L^2 et la convergence presque sûre entraînent toutes les deux la convergence en probabilité. Enfin si A_t est l'événement presque sûr qui assure la convergence pour $t \in \mathbb{Z}$, alors $\cap_{t \in \mathbb{Z}} A_t$ est également un événement presque sûr, ce qui assure que le processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est bien défini.

- Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, comme le produit scalaire dans L^2 est continu et Z est centré,

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left(\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^n \alpha_k Z_{t-k}\right) = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^n \alpha_k \mathbb{E}(Z_{t-k}) = 0.$$

Pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, on a $s, t \in \mathbb{E}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_s X_t) &= \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k Z_{s-k}, \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \alpha_{k'} Z_{t-k'} \right\rangle \\ &\stackrel{L^2}{=} \left\langle \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^n \alpha_k Z_{s-k}, \lim_{m',n' \rightarrow \infty} \sum_{k'=-m'}^{n'} \alpha_{k'} Z_{t-k'} \right\rangle \\ &\stackrel{(1)}{=} \lim_{m,n,m',n' \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^n \sum_{k'=-m'}^{n'} \alpha_k \alpha_{k'} \langle Z_{s-k}, Z_{t-k'} \rangle \\ &\stackrel{(2)}{=} \lim_{m,n,m',n' \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^n \sum_{k'=-m'}^{n'} \alpha_k \alpha_{k'} \gamma_Z(t-s+k-k') \\ &\stackrel{(3)}{=} \sigma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{t-s+k} \end{aligned}$$

où (1) provient de la continuité dans L^2 du produit scalaire, où (2) provient du fait que Z est centré, et où (3) provient du fait que $\gamma_Z = \sigma^2 \mathbf{1}_0$. Par conséquent, comme X est centré, il vient $\gamma_X(s, t) = \mathbb{E}(X_s X_t) = \sigma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{t-s+k}$, qui ne dépend pas de (s, t) qu'à travers l'écart $t - s$. Ainsi X est stationnaire, et pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{h+k}.$$

3. Par définition $X = F_\alpha Z$ est un filtre causal de Z lorsque $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$.
4. Rappelons que le filtre $X = F_\alpha Z$ de Z est inversible s'il est causal et s'il existe un filtre causal F_β tel que $Z = F_\beta X$ ($\beta = \alpha^{-1}$ lorsque α est inversible dans $\ell^1(\mathbb{Z})$). Or si P_α est un polynôme, alors X est un filtre causal de Z , et si de plus P_α ne s'annule pas sur le disque unité fermé, alors d'après le cours, α^{-1} existe et son support est inclus dans \mathbb{N} , d'où l'inversibilité de X .
5. Dans ce cas, le filtre $X = F_\alpha Z$ est causal car le support de α est inclus dans \mathbb{N} . De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a $|\rho z| < 1$, et donc

$$P_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k z^k = \frac{1}{1 - \rho z}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{P_\alpha(z)} = 1 - \rho z,$$

et ainsi $\alpha^{-1} = 1_0 - \rho 1_1$. À présent $Z = F_{\alpha^{-1}} X$ et le support de α^{-1} est inclus dans \mathbb{N} , et donc le filtre X de Z est bien inversible.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. Soit X un processus harmonique. Le processus est centré :

$$\mathbb{E}(X_t) = \cos(\theta t)\mathbb{E}(A) + \sin(\theta t)\mathbb{E}(B) = 0$$

pour tout $t \in \mathbb{Z}$. D'autre part, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) &= \cos(\theta t)\cos(\theta(t+h))\mathbb{E}(A^2) + \sin(\theta t)\sin(\theta(t+h))\mathbb{E}(B^2) \\ &\quad + (\dots) \underbrace{\mathbb{E}(AB)}_{=0} \\ &= \sigma^2 \operatorname{Re}(e^{i\theta t} e^{-i\theta(t+h)}) = \sigma^2 \operatorname{Re}(e^{-i\theta h}) = \sigma^2 \cos(\theta h), \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t , donc X est stationnaire, d'autocovariance $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$. Pour montrer que X est déterministe, on peut utiliser les formules trigonométriques (faciles à retrouver avec des nombres complexes)

$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b) \quad \text{et} \quad 2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) + \sin(b-a)$$

qui donnent, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = 2\cos(\theta)X_{t-1} - X_{t-2} \in H_{t-1}, \quad \text{d'où} \quad X_t = \operatorname{proj}(X_t, H_{t-1}).$$

Rien d'étonnant : les trajectoires du processus harmonique sont des sinusoïdes dont la seule source d'aléa est l'amplitude, ce qui fait qu'à chaque instant, il est parfaitement possible de prédire le futur de la trajectoire à partir de son passé.

2. Démontrons les équivalences de manière circulaire.

- Preuve de (c) \Rightarrow (b). Immédiat.
- Preuve de (b) \Rightarrow (a). Si $\mathbb{E}((X_t - \operatorname{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$ alors $X_t \neq \operatorname{proj}(X_t, H_{t-1})$ dans L^2 et donc X n'est pas déterministe ;
- Preuve de (a) \Rightarrow (c). Si X n'est pas déterministe alors il existe un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $X_t - \operatorname{proj}(X_t, H_{t-1}) \neq 0$ dans L^2 , et donc $\mathbb{E}((X_t - \operatorname{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) > 0$, ce qui signifie que (b) est vrai. Pour établir à présent (c), on constate tout d'abord que (c) découle immédiatement de l'éventuelle stationnarité forte de X . Lorsque X est seulement (faiblement) stationnaire, cela est moins immédiat car il faut réussir

à tirer partie du fait que les objets ne font intervenir que les informations du second ordre du processus (covariance). Plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, le sous espace vectoriel H_{t-1} est formé par l'ensemble des séries de la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k}$$

qui convergent dans L^2 . Montrons que l'ensemble Φ des coefficients $(\varphi_k)_{k \geq 1}$ qui garantit la convergence dans L^2 ne dépend pas de t . Pour tous $s \geq r \geq 1$ on a

$$\left\| \sum_{k=s}^r \varphi_k X_{t-k} \right\|_2^2 = \sum_{j,k=s}^r \varphi_j \varphi_k \gamma_X(j-k),$$

quantité qui ne dépend pas de t . Ainsi le critère de Cauchy ne dépend pas de t , ce qui signifie que Φ ne dépend pas de t . À présent on a

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1}) = \arg \inf_{Y \in H_{t-1}} \|X_t - Y\|_2^2 = \arg \inf_{\varphi \in \Phi} \sum_{j,k=0}^{\infty} \varphi_j \varphi_k \gamma_X(j-k)$$

où on a posé $Y = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k}$ et $\varphi_0 := -1$. Il en découle que

$$\|X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1})\|_2^2 = \inf_{Y \in H_{t-1}} \|X_t - Y\|_2^2 = \inf_{\varphi \in \Phi} \sum_{j,k=0}^{\infty} \varphi_j \varphi_k \gamma_X(j-k),$$

quantité qui ne dépend pas de t , et (c) est établie.

Note : si X est gaussien alors $\text{proj}(X_t, H_{t-1}) = \text{proj}(X_t, L^2(\mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$ où \mathcal{F}_{t-1} est la tribu engendrée par X_{t-1}, X_{t-2}, \dots .

[English version](#)

Examen final

Durée : 2 heures

Date : lundi 9 janvier 2017

Conditions : sans calculatrice ni documents

Note :

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
- Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
- Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
- Ce sujet reprend des éléments des annales, du cours, et des exercices de TD

Solution succincte de l'exercice 1.

1. On a $\Phi(z) = 1 - 2z$ dont l'unique racine est $1/2$, et $\Theta(z) = 1 - \frac{5}{2}z + z^2 = (1 - 2z)(1 - \frac{1}{2}z)$ dont les deux racines sont $1/2$ et 2 . Comme Φ ne s'annule pas sur le cercle unité (pas de racine de module 1), un théorème du cours dit que l'équation admet une unique solution stationnaire. C'est le processus linéaire obtenu en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle irréductible de l'équation. Or pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ on a

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \frac{(1 - 2z)(1 - \frac{1}{2}z)}{1 - 2z} = 1 - \frac{1}{2}z.$$

Ainsi l'unique solution de l'équation est donnée par le processus MA(1)

$$X_t = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}.$$

Il est plaisant de vérifier directement qu'il s'agit bien d'une solution :

$$\begin{aligned} X_t - 2X_{t-1} &= Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1} - 2(Z_{t-1} - \frac{1}{2}Z_{t-2}) \\ &= Z_t - \frac{5}{2}Z_{t-1} + Z_{t-2}. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire X_t est une fonction de Z_t, Z_{t-1}, \dots , et donc X est un filtre causal de Z . Ceci n'est pas contradictoire avec le fait que Φ possède une racine de module < 1 (en fait elle est aussi racine de Θ et se simplifie).

2. On a $X = F_\beta Z$ et le polynôme $P_\beta(z) = 1 - \frac{1}{2}z$ possède une unique racine 2 , qui est de module > 1 . L'inversion du filtre F_β est donc possible, et la formule suivante

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} z^k$$

valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ donne

$$Z_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} X_{t-k}.$$

Ainsi $\alpha_k = 2^{-k} \mathbf{1}_{k \geq 0}$. Il est agréable de vérifier que tout va bien :

$$\begin{aligned} Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} X_{t-k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} X_{t-k-1} \\ &= X_t. \end{aligned}$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h) = \sigma^2 \Re(e^{i\theta h}) = \frac{\sigma^2}{2}(e^{-i\theta h} + e^{i\theta h}) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{iuh} d\mu(u)$$

où $\mu = \frac{\sigma^2}{2}\delta_{-\theta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta_\theta$. On a montré que $\gamma_X = \hat{\mu}$, et comme μ est une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$, l'unicité de la mesure spectrale, qui provient de l'injectivité de la transformée de Fourier, nous permet d'affirmer que $\mu_X = \mu$. De plus, quelque soit $\theta \in [-\pi, \pi]$, la mesure atomique μ n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue, et donc X n'a jamais de densité spectrale.

2. Soit μ_X la mesure spectrale du filtre $X = F_\alpha Z$. Par définition, pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \gamma_X(h) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+k-j) \\ &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \int_{[-\pi, \pi]} e^{i(h+k-j)\lambda} \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda \\ &\stackrel{*}{=} \int_{[-\pi, \pi]} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k e^{i(h+k-j)\lambda} \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} e^{ih\lambda} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{-ij\lambda} \overline{\alpha_k e^{-ik\lambda}} \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} e^{ih\lambda} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j e^{-ij\lambda} \right) \overline{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\lambda} \right)} \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} e^{ih\lambda} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-ik\lambda} \right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda \\ &= \int_{[-\pi, \pi]} e^{ih\lambda} \underbrace{\frac{\sigma^2}{2\pi} |P_\alpha(e^{-i\lambda})|^2}_{d\mu(\lambda)} d\lambda. \end{aligned}$$

où la commutation $\stackrel{*}{=}$ est justifiée par le théorème de Fubini-Tonelli car la série est absolument convergente, uniformément bornée, et l'intégrale est sur un compact. Note : comme α est réel, on a $\overline{P_\alpha(z)} = P_\alpha(\bar{z})$ d'où $|P_\alpha(e^{iu})| = |P_\alpha(e^{-iu})|$, $u \in [-\pi, \pi]$. On a montré que $\gamma_X = \hat{\mu}$, et comme μ est une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$, l'unicité de la mesure spectrale, qui provient de l'injectivité de la transformée de Fourier, nous permet d'affirmer qu'il s'agit bien la mesure spectrale : $\mu = \mu_X$. Comme μ_X admet une densité $f : \lambda \in [-\pi, \pi] \mapsto f(\lambda) := \frac{\sigma^2}{2\pi} |P_\alpha(e^{-i\lambda})|^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue, il en découle que X admet une densité spectrale $f_X = f$.

3. On a $\Phi(z) = 1 - 2z$ d'unique racine $1/2$, et $\Theta = 1 - 3z$ d'unique racine $1/3$. Comme les racines sont de module $\neq 1$, un théorème du cours affirme qu'il existe une unique solution stationnaire, qui est forcément le X mentionné dans la question, et que cette solution est un filtre $X = F_\alpha Z$ où α est obtenu en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle de l'équation :

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}, |z| = 1.$$

De plus, l'autocovariance de X ne dépend que de la variance σ^2 du bruit blanc Z et du module de la fraction rationnelle de l'équation ARMA sur le cercle unité. Or on a, pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$, en posant $z := e^{i\lambda}$,

$$\begin{aligned} f_X(\lambda) &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{1-3z}{1-2z} \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|3z|^2}{|2z|^2} \left| \frac{\frac{1}{3z}-1}{\frac{1}{2z}-1} \right|^2 \\ &\stackrel{*}{=} \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{9}{4} \left| \frac{1-\frac{1}{3}z}{1-\frac{1}{2}z} \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{9}{4} \left| \frac{1-\frac{1}{3}z}{1-\frac{1}{2}z} \right|^2. \end{aligned}$$

où on a utilisé pour $\stackrel{*}{=}$ le fait que $|z| = 1$ et le fait que $\frac{1}{z} = \bar{z}$ dans ce cas, d'où

$$f_X(z) = \frac{\sigma^{*2}}{2\pi} \left| \frac{\Theta^*(z)}{\Phi^*(z)} \right|^2$$

où $\Phi^*(z) := 1 - \frac{1}{2}z$, $\Theta^*(z) := 1 - \frac{1}{3}z$, et $\sigma^{*2} := \frac{9}{4}\sigma^2$. Ces polynômes Φ^* et Θ^* ne s'annulent pas sur le disque unité fermé. Ainsi on a donc

$$f_X = f_{X^*}$$

où X^* est l'unique solution stationnaire de l'équation ARMA de polynômes Φ^* et Θ^* et de bruit blanc Z^* de variance σ^{*2} . De plus X^* est causal et inversible. Enfin X et X^* ont même densité spectrale donc même autocovariance.

Solution succincte de l'exercice 3 (Cas particulier d'un exemple du cours).

1. L'équation AR(m) a pour polynôme $\Phi(z) = 1 - \varphi z^m$ dont les racines sont $\varphi^{-1/m} e^{i2\pi k/m}$, $0 \leq k \leq m-1$, toutes de module $|\varphi|^{-1/m}$. L'hypothèse $|\varphi| < 1$ fait donc que Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé. Un théorème du cours affirme alors que l'équation AR(m) possède une unique solution stationnaire, qui est de plus causale.
2. Nous allons utiliser la caractérisation suivante du projeté orthogonal : $v = \text{proj}(u, H)$ ssi $v \in H$ et $u - v \perp H$. Posons $u = X_t$, $H = \text{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\}$, et $v = \varphi X_{t-m}$. On a clairement $v \in H$ car $1 \leq m \leq p$. D'autre part, pour tout $h \geq 1$,

$$\langle u - v, X_{t-h} \rangle = \mathbb{E}((X_t - \varphi X_{t-m}) X_{t-h}) = \mathbb{E}(Z_t X_{t-h}) = 0$$

car X est un filtre causal de Z . Or $H \subset \text{vect}\{X_{t-h} : h \geq 1\}$, d'où $u - v \perp H$.

Solution succincte de l'exercice 4 (Queueuses lourdes - inspiré d'un exercice de TD).

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{i\theta(\lambda_1 W_1 + \dots + \lambda_n W_n)}) = \mathbb{E}(e^{i\theta\lambda_1 W_1}) \cdots \mathbb{E}(e^{i\theta\lambda_n W_n}) = e^{-(c_1|\lambda_1| + \dots + c_n|\lambda_n|)|\theta|},$$

qui est bien la valeur en θ de la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre $|\lambda_1|c_1 + \dots + |\lambda_n|c_n$. Or la fonction caractéristique caractérise la loi.

2. Le théorème de filtrage du cours ne s'applique pas car la loi de Cauchy n'a pas de moyenne et encore moins de variance et donc $(W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ n'est pas un processus du second ordre. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, toute partie finie $K \subset \mathbb{Z}$, et tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(e^{i\theta \sum_{k \in K} \alpha_k W_{t-k}}) = \prod_{k \in K} \mathbb{E}(e^{i\alpha_k \theta W_{t-k}}) = e^{-c|\theta| \sum_{k \in K} |\alpha_k|},$$

qui converge vers $e^{-c|\theta| \|\alpha\|_1}$ quand $K \rightarrow \mathbb{Z}$, donc $\sum_{k \in K} \alpha_k W_{t-k}$ converge en loi quand $K \rightarrow \mathbb{Z}$ vers la loi de Cauchy de paramètre $c\|\alpha\|_1$ (théorème de Paul Lévy).

Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la v.a.r. $F_\alpha W_t$ suit une loi de Cauchy et n'a donc ni moyenne ni variance. Par conséquent, quelque soit la manière de définir le processus $(FW_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, il ne serait pas du second ordre et donc pas stationnaire, ce qui ne l'empêcherait pas d'être éventuellement fortement stationnaire !

Solution succincte de l'exercice 5. Si $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est solution alors pour tout $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} X_t^2 &= (a + bX_{t-1}^2)Z_t^2 \\ &= aZ_t^2 + bX_{t-1}^2 Z_t^2 \\ &= aZ_t^2 + b(a + bX_{t-2}^2)Z_{t-1}^2 Z_t^2 \\ &= aZ_t^2 + abZ_t^2 Z_{t-1}^2 + b^2 X_{t-2}^2 Z_{t-1}^2 Z_t^2 \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^{t-1} ab^k Z_t^2 \cdots Z_{t-k}^2 + b^t X_0^2 Z_1^2 Z_2^2. \end{aligned}$$

Autrement dit on peut établir par récurrence sur t que pour tout $t \geq 2$,

$$X_t^2 = \sum_{k=0}^{t-1} ab^k Z_t^2 \cdots Z_{t-k}^2 + b^t X_0^2 Z_1^2 Z_2^2.$$

Ceci suggère que le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini par

$$X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_t = \text{signe}(Z_t) \sqrt{\sum_{k=0}^{t-1} ab^k Z_t^2 \cdots Z_{t-k}^2}, \quad t \geq 1$$

est solution de l'équation non-linéaire, ce qui se vérifie immédiatement.

Notons que le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est causal au sens où pour tout $t \geq 0$ la variable X_t est une fonction de Z_0, \dots, Z_t . Soit \mathcal{F}_t la tribu engendrée par Z_0, \dots, Z_t . Pour tout $t \geq 1$,

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})) = \mathbb{E}\left(\sqrt{a + bX_{t-1}^2} \mathbb{E}(Z_t)\right) = 0$$

car X_{t-1} est \mathcal{F}_{t-1} -mesurable et Z_t est indépendante de \mathcal{F}_{t-1} (BB fort !) et centrée. Ensuite

$$\sigma_t^2 := \text{Var}(X_t) = \mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{E}(a + bX_{t-1}^2)\mathbb{E}(Z_t^2) = (a + b\sigma_{t-1}^2)\sigma^2 = \dots = \sum_{k=0}^{t-1} ab^k \sigma^{2(k+1)}.$$

On peut aussi obtenir ce résultat à partir de la formule $X_t^2 = \sum_{k=0}^{t-1} ab^k Z_t^2 \cdots Z_{t-k}^2$. En particulier il en découle que $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_t^2 = a\sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} (b\sigma^2)^k = \frac{a\sigma^2}{1-b\sigma^2} < \infty$ si $b\sigma^2 < 1$.

[English version](#)