

Time series analysis

Theory

Définition 1.2 : Processus fortement stationnaire

Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est **fortement stationnaire** lorsque pour tout $h \in \mathbb{Z}$ et toute suite finie $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ de longueur $n \geq 1$ quelconque, les vecteurs aléatoires $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ et $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ ont même loi.

Définition 1.4 : Stationnarité

On dit qu'un processus du second ordre $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est **faiblement stationnaire** ou tout simplement **stationnaire** lorsque pour tout $h \in \mathbb{Z}$ et toute suite finie $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{Z}$ de longueur $n \geq 1$ quelconque, les vecteurs aléatoires

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \quad \text{et} \quad (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}).$$

ont même **espérance** et **matrice de covariance**. Cela revient à dire, de manière équivalente, que μ_X est constante et γ_X est invariante par translation :

$$\forall s, t, h \in \mathbb{Z}, \quad \mu_X(t) = \mu_X(t+h) \quad \text{et} \quad \gamma_X(s, t) = \gamma_X(s+h, t+h).$$

Définition 1.3 : Second ordre : moyenne et autocovariance

Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **processus du second ordre** lorsque $\mathbb{E}(|X_t|^2) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Pour un tel processus, on définit la **fonction moyenne** $\mu_X : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ et la **fonction d'autocovariance** $\gamma_X : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) \quad \text{et} \quad \gamma_X(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t).$$

Théorème 1.7 : Stationnarité faible et forte

Un processus du second ordre fortement stationnaire est toujours stationnaire. La réciproque est fausse : il existe des processus stationnaires qui ne sont pas fortement stationnaires.

Définition 1.5 : Autocovariance

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire, sa **fonction d'autocovariance** est définie par

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto \gamma_X(h) = \gamma_X(0, h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) \quad (\forall t \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

de sorte que $\gamma_X(s, t) = \gamma_X(t - s)$ pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.6 : Fonction d'autocorrélation

Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est stationnaire, sa **fonction d'autocorrélation** est définie par

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow [-1, 1] \\ h &\mapsto \rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\text{Var}(X_{t+h})}} \quad (\forall t \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

Définition 1.9 : Bruit blanc

Un processus stationnaire $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de moyenne μ et d'autocovariance γ_Z est un...

- **bruit blanc faible** ou **bruit blanc** si $\text{Cov}(Z_s, Z_t) = 0$ pour tous $s \neq t$;
- **bruit blanc moyennement fort** si Z_s et Z_t sont indépendantes pour tous $s \neq t$, c'est-à-dire que $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont deux à deux indépendantes ;
- **bruit blanc fort** lorsque les variables $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes ;
- **bruit blanc très fort** lorsque les variables $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d.

Dans tous les cas $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$ et on note $\text{BB}(\mu, \sigma^2)$. Dans ces notes de cours, lorsque la moyenne du BB n'est pas précisée, elle vaut zéro par convention.

Définition 1.8 : Processus gaussiens

On dit que $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un **processus gaussien** lorsque $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien pour toute suite finie t_1, \dots, t_n dans \mathbb{Z} de longueur $n \geq 1$ quelconque. Un processus gaussien est toujours du second ordre.

Exemple 1.10 : Bruit blanc gaussien

Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X est un $\text{BB}(m, \sigma^2)$ fort gaussien. La figure 1.8 propose une simulation d'un bruit blanc gaussien.

Définition 1.14 : Suites récurrentes aléatoires d'ordre fini – $\text{ARMA}(p, q)$

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $T \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$. On dit qu'un processus $(X_t)_{t \in T}$ est une **suite récurrente aléatoire** d'ordre (p, q) lorsque pour tout $t > p$, la variable aléatoire X_t est une fonction du passé X_{t-1}, \dots, X_{t-p} et de bruits $Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-q}$ où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un BB. C'est le cas par exemple si pour une fonction f fixée on a

$$\forall t > p, X_t = f(X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-q}).$$

- On dit que le processus est **markovien** lorsque $(p, q) = (1, 0)$;
- On dit que le processus a une **mémoire longue** lorsque $p = \infty$;
- On dit que le processus est un **ARMA** (p, q) lorsque $T = \mathbb{Z}$ et f est linéaire ; le cas $q = 0$ correspond aux processus **AR** (p) (Auto Regressive) tandis que le cas $p = 0$ correspond aux processus **MA** (q) (Moving Average).

Théorème 1.17 : Autocovariance

Si $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire alors elle est **symétrique de type positif**, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\gamma(h) = \gamma(-h)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$;
2. pour tout $n \geq 1$, et tout $t \in \mathbb{R}^n$, la matrice $\Gamma = (\gamma(t_j - t_k))_{1 \leq j, k \leq n}$ vérifie :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \langle v, \Gamma v \rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_j \gamma(t_j - t_k) v_k \geq 0.$$

De plus $\Gamma_{1,1} = \dots = \Gamma_{n,n} = \gamma(0) \geq 0$ et $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est symétrique et de type positif, alors c'est la fonction d'autocovariance d'un processus (fortement) stationnaire gaussien.

Théorème 2.1 : Filtrage linéaire des processus bornés

Soit $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et soit $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus, borné dans L^p avec $p \geq 1$, c'est-à-dire que $\sup_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|^p) < \infty$. Posons

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \forall m, n \in \mathbb{N}, Y_{t,m,n} = \sum_{k=-m}^n \alpha_k X_{t-k}.$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ la famille $(Y_{t,m,n})_{m,n \geq 1}$ converge presque-sûrement et dans L^p lorsque $m, n \rightarrow \infty$ vers une variable aléatoire $Y_t \in L^p$:

$$Y_{t,m,n} \xrightarrow[m,n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} Y_t \in L^p \quad \text{et} \quad \lim_{m,n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|Y_{t,m,n} - Y_t|^p) = 0.$$

De plus, le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est bien défini p.s. et est borné dans L^p .

Théorème 2.2 : Filtrage de processus stationnaires

Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne $\mu_X = \mathbb{E}(X_t)$ et d'autocovariance $\gamma_X(h)$. Alors le processus $Y := F_\alpha(X)$ défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (F_\alpha X)_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k}$$

est un processus du second ordre et stationnaire, de moyenne et d'autocovariance

$$\mu_Y = \mu_X \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \quad \text{et} \quad \gamma_Y(h) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_X(h + j - k).$$

Exemple 2.3 : Processus linéaires : filtrage d'un BB

Si $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un BB($0, \sigma^2$), $\mu \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors le théorème 2.2 dit que $X = \mu + F_\alpha Z$ est un processus stationnaire de moyenne μ et d'autocovariance

$$\gamma_X(h) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_{j+h}.$$

C'est l'image d'un BB par une application linéaire : on parle de **processus linéaire**.

Définition 1.1 : Opérateurs retard et différence

L'opérateur retard B décale le processus d'un cran vers le passé :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (BX)_t = X_{t-1}.$$

L'opérateur différence Δ est défini par ^a

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (\Delta X)_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t.$$

Pour tout entier $d \geq 1$, l'opérateur différence saisonnier Δ_d est défini par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad (\Delta_d X)_t = X_t - X_{t-d} = ((1 - B^d)X)_t.$$

^a. Ici 1 ou I désigne l'opérateur identité.

Remarque 2.4 : Notation avec opérateur retard

Si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors la fonction

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$$

est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$ car

$$\left| \sum_{-n \leq k \leq n} \alpha_k z^k \right| \leq \sum_{-n \leq k \leq n} |\alpha_k| |z|^k = \sum_{-n \leq k \leq n} |\alpha_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|$$

L'opérateur F_α s'écrit aussi $f(B)$ où B est l'opérateur retard :

$$f(B)X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k B^k X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k X_{t-k}.$$

Si α est à support fini : $\text{card}\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\} < \infty$, alors $f(z)$ est bien définie pour tout $z \neq 0$, et prend des valeurs réelles si z et α sont réels. De plus f est un polynôme ssi $\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k \neq 0\}$ est une partie finie de \mathbb{N} , et dans ce cas $f(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Réciproquement, si une fonction $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en série de puissances de z sous la forme $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ alors cette série converge absolument lorsque $|z| = 1$ ssi $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et la notation $F_\alpha = f(B)$ fait sens.

Définition 2.5 : Causalité et inversibilité

Si Z est stationnaire, on dit que le filtre $X = \mu + F_\alpha Z$ de Z est un processus...

- **causal** lorsque $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$ (X_t ne dépend pas du futur de Z_t). C'est le cas par exemple des processus MA(q), $q \geq 1$, qui vérifient

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}.$$

Plus généralement, les processus linéaires causaux (Z BB) avec $\alpha_0 = 1$ sont les processus MA(∞) (un processus MA(q) est un MA(q') pour tout $q' \geq q$);

- **inversible** lorsque Z est un processus causal de X , c'est-à-dire qu'il existe un $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $Z = F_\beta(X)$ avec $\beta_k = 0$ pour tout $k < 0$. C'est le cas par exemple des processus AR(p), $p \geq 1$, qui vérifient $Z = F(X)$ car

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_p X_{t-p} = Z_t.$$

Plus généralement, les processus linéaires inversible (Z BB) avec $\alpha_0 = 1$ sont les processus AR(∞) (un AR(p) est un AR(p') pour tout $p' \geq p$).

Théorème 2.6 : Composition des opérateurs

Avec les notations du théorème 2.2, si $\alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et si X est stationnaire, alors

$$F_\alpha(F_\beta X) = F_{\alpha*\beta} X \quad \text{où} \quad (\alpha * \beta)_k = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \beta_{k-j}.$$

Lemme 2.7 : Convolution et séries de puissances

Soit $(\mathcal{F}, +, \times)$ l'algèbre usuelle des fonctions continues définies sur le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et à valeurs dans \mathbb{C} . Les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, on a $(\alpha_k z^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que la série suivante converge absolument sur le cercle unité :

$$P_\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k;$$

2. L'application $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z}) \mapsto P_\alpha \in \mathcal{F}$ est un **homomorphisme d'algèbres** :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad P_{\alpha*\beta+\lambda\gamma}(z) = P_\alpha(z)P_\beta(z) + \lambda P_\gamma(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que les séries de puissances $P_\alpha(z)$, $P_\beta(z)$, et $P_\gamma(z)$ convergent absolument. En particulier, le produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ est transformé en produit standard de fonctions dans \mathcal{F} par l'application $\alpha \mapsto P_\alpha$:

$$\forall \alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad P_{\alpha*\beta} = P_\alpha P_\beta.$$

3. L'application $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z}) \mapsto P_\alpha \in \mathcal{F}$ est injective :

$$\forall \alpha, \beta \in \ell^1(\mathbb{Z}), \quad P_\alpha = P_\beta \Rightarrow \alpha = \beta;$$

Théorème 2.8 : Inversibilité pour la convolution et séries de puissances

Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $P_\alpha(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ est un polynôme, c'est-à-dire que α est à support fini et ≥ 0 . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. α est inversible pour le produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$;
2. P_α n'a pas de racine de module 1 ;
3. $z \mapsto 1/P_\alpha(z)$ est développable en série de puissances de z , absolument convergente dans une couronne de \mathbb{C} contenant le cercle unité :

$$\frac{1}{P_\alpha(z)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k z^k, \quad \beta \in \ell^1(\mathbb{Z}).$$

Lorsque ces propriétés ont lieu, alors $\alpha^{-1} = \beta$. De plus, si P_α n'a pas de racine de module < 1 alors le support de α^{-1} est ≥ 0 , c'est-à-dire que $\{k \in \mathbb{Z} : \alpha_k^{-1} \neq 0\} \subset \mathbb{N}$.

Remarque 2.10 : Calcul pratique de l'inverse

L'équation $\alpha * \beta = e$ en β est un système infini d'équations linéaires. La preuve du théorème 2.8 montre qu'on peut déterminer β en déterminant les racines de P_α puis en effectuant des développements en série. Mais cela peut s'avérer laborieux en pratique. Dans le cas où P_α n'a pas de racine de module ≤ 1 , on sait que β est porté par \mathbb{N} , ce qui rend le système d'équations $\alpha * \beta = e$ triangulaire, et donc facile à résoudre par récurrence. En effet, si d est le degré du polynôme P_α alors on obtient une identité entre séries de puissances de z absolument convergentes sur le cercle unité :

$$(\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_d z^d)(\beta_0 + \beta_1 z + \cdots) = 1.$$

En développant le membre de droite (produit de Cauchy) et en identifiant les coefficients pour chaque puissance grâce au lemme 2.7, on obtient le système triangulaire suivant qu'on peut résoudre de haut en bas :

$$\begin{cases} \alpha_0 \beta_0 & = 1 & (\text{d'où on tire } \beta_0) \\ \alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 & = 0 & (\text{d'où on tire } \beta_1) \\ \alpha_0 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_0 & = 0 & (\text{d'où on tire } \beta_2) \\ \vdots & \downarrow \end{cases}$$

Définition 3.2 : Processus MA

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est MA(q) pour un entier $q \geq 0$ lorsqu'il est du second ordre, stationnaire, et solution de l'équation de récurrence

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^q \theta_k Z_{t-k} = (F_{\alpha_\theta} Z)_t = (\Theta(B)Z)_t$$

où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un BB($0, \sigma^2$) et où $\theta \in \mathbb{R}^q$ est un vecteur fixe. On dit que q est l'ordre du processus et que (θ, σ^2) sont ses paramètres.

Définition 3.3 : Processus AR

Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est AR(p) pour un entier $p \geq 0$ lorsqu'il est du second ordre, stationnaire, et solution de l'équation de récurrence

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^p \varphi_k X_{t-k}$$

en d'autres termes

$$Z_t = (F_{\alpha_\varphi} X)_t = (\Phi(B)X)_t$$

où $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un BB($0, \sigma^2$) et où $\varphi \in \mathbb{R}^p$ est un vecteur fixe. On dit que p est l'ordre du processus et (φ, σ^2) ses paramètres.

Théorème 3.4 : Existence des processus AR(1)

- Si $|\varphi_1| = 1$ alors l'équation des AR(1) n'a pas de solution stationnaire ;
- Si $|\varphi_1| < 1$ alors la solution est donnée par le processus linéaire causal

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1^k Z_{t-k},$$

de moyenne 0 et d'autocovariance $\gamma_X(h) = \sigma^2 \varphi_1^{|h|} / (1 - \varphi_1^2)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
C'est un MA(∞). C'est de plus l'unique solution stationnaire ;

- Si $|\varphi_1| > 1$ alors la solution est donnée par le processus linéaire non-causal

$$X_t = - \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1^{-k} Z_{t+k},$$

de moyenne 0 et d'autocovariance $\gamma_X(h) = \sigma^2 \varphi_1^{-|h|} / (\varphi_1^2 - 1)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
C'est là encore l'unique solution stationnaire.

Théorème 3.6 : Existence des processus ARMA

Soient Φ et Θ les polynômes associés à l'équation ARMA(p, q).

1. Si Φ n'a pas de racine de module 1 alors ARMA(p, q) possède une unique solution stationnaire, donnée par le processus linéaire $F_\alpha Z$ où $\alpha = \alpha_\theta * \alpha_\varphi^{-1}$ où α_φ^{-1} est l'inverse de α_φ pour $*$ (existe : théorème 2.8) ;
2. Si ARMA(p, q) admet un processus linéaire $F_\alpha Z$ avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ comme solution alors toute racine de module 1 de Φ est également racine de Θ .

Théorème 3.9 : Causalité et inversibilité des ARMA

Considérons une équation ARMA(p, q) $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\theta} Z$ et ses polynômes $\Phi = P_{\alpha_\varphi}$ et $\Theta = P_{\alpha_\theta}$. On suppose que Φ n'a pas de racines de module 1, ce qui assure l'existence d'une solution stationnaire unique $X = F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z$ (théorème 3.6). Alors

- la solution X est causale si Φ n'a pas de racine de module ≤ 1 ;
- la solution X est inversible si Θ n'a pas de racine de module ≤ 1 .

Remarque 3.7 : Fraction rationnelle d'un ARMA

La suite $\alpha = \alpha_\theta * \alpha_\varphi^{-1}$ de la solution $F_\alpha Z$ de ARMA(p, q) est liée au développement en série de la **fraction rationnelle** Θ/Φ . En effet, si Φ n'a pas de racine de module 1, alors la preuve du théorème 2.8 dit qu'il existe une couronne $D(r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ contenant le cercle unité, ne contenant aucune racine de Φ , telle que

$$\forall z \in D(r, R), \quad \frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{P_{\alpha_\varphi}(z)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_\varphi^{-1})_k z^k,$$

et ce développement en série de puissances est absolument convergent. Par conséquent, en effectuant un produit de Cauchy, on obtient, pour tout $z \in D(r, R)$,

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} &= \frac{P_{\alpha_\theta}(z)}{P_{\alpha_\varphi}(z)} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta)_k z^k \right) \left(\sum_{k' \in \mathbb{Z}} (\alpha_\varphi^{-1})_{k'} z^{k'} \right) \\ &= \sum_{k, k' \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta)_k (\alpha_\varphi^{-1})_{k'} z^{k+k'} \\ &\stackrel{h=k+k'}{=} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta)_k (\alpha_\varphi^{-1})_{h-k} \right) z^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} (\alpha_\theta * \alpha_\varphi^{-1})_h z^h \\ &= \sum_{h \in \mathbb{Z}} \alpha_h z^h. \end{aligned}$$

Cela revient à exploiter la décomposition en éléments simples de Θ/Φ . Deux équations ARMA(p, q) qui admettent une solution stationnaire et qui ont la même **fraction rationnelle** ont la même solution. Cela permet d'éliminer les racines communes de Θ et Φ par simplification, et conduit à une équation ARMA **irréductible**.

Remarque 3.11 : Résolution pratique des ARMA inversibles

La résolution pratique des ARMA(p, q) inversible peut être menée grâce à la remarque 2.10. En effet, on résout en ξ le système

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k z^k \right) (1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$$

en identifiant les coefficients, ce qui donne dans le cas causal le système triangulaire

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \theta_0 = 1 \\ -\xi_0 \varphi_1 + \xi_1 &= \theta_1 \\ -\xi_0 \varphi_2 - \xi_1 \varphi_1 + \xi_2 &= \theta_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Note : si P_{α_φ} divise P_{α_θ} (c'est-à-dire que si z_j est racine de P_{α_φ} de multiplicité m_j alors elle est aussi racine de P_{α_θ} de multiplicité $\geq m_j$) alors P_ξ est un polynôme. Dans le cas contraire, P_ξ n'est pas un polynôme et contient des puissances de z de degré arbitrairement grand. Exemple : la solution de ARMA(1, 1) quand $|\varphi_1| < 1$ est donnée par $P_\xi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_1 + \theta_1) \varphi_1^k z^k$, qui vérifie bien $(1 - \varphi_1 z) P_\xi(z) = 1 + \theta_1 z$. Ici, P_{α_φ} divise P_{α_θ} ssi $-1/\theta_1 = 1/\varphi_1$, c'est-à-dire ssi $P_\xi(z) = 1$ (et on a $P_{\alpha_\varphi} = P_{\alpha_\theta}$).

Définition 4.1 : Coefficients de Fourier

Si ν est une mesure signée finie sur $[-\pi, \pi]$ alors la suite $(\widehat{\nu}(h))_{h \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de ses **coefficients de Fourier** est définie par

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \widehat{\nu}(h) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{ihu} \nu(du) = \int \varphi_h d\nu.$$

Si $f \in L^1([-\pi, \pi], du)$ et si ν est la mesure signée finie sur $[-\pi, \pi]$ de densité f , c'est-à-dire que $d\nu(u) = f(u)du$, alors on note $\widehat{f}(h) := \widehat{\nu}(h) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{ihu} f(u)du$.

Théorème 4.3 : Injectivité de la suite des coefficients de Fourier

Si ν_1 et ν_2 sont deux mesures signées finies sur $[-\pi, \pi]$ vérifiant $\widehat{\nu}_1 = \widehat{\nu}_2$ alors $\nu_1 = \nu_2$.

Théorème 4.4 : Critère de densité et formule d'inversion

Si ν est une mesure signée finie sur $[-\pi, \pi]$ telle que $\widehat{\nu} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ alors ν admet une densité $f = \frac{d\nu}{du} \in L^1([-\pi, \pi], du)$ continue donnée pour presque tout $u \in [-\pi, \pi]$ par la série absolument convergente suivante (appelée **formule d'inversion**) :

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} e^{-iuh} \widehat{\nu}(h).$$

De plus $f \geq 0$ ssi ν est une mesure positive.

Théorème 4.5 : Paul Lévy – Critère de convergence

Si $(\nu_n)_{n \geq 1}$ est une suite de **mesures de probabilité** sur $[-\pi, \pi]$ telles que

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\nu}_n(h) = \varphi(h) \in \mathbb{C},$$

alors il existe une **mesure de probabilité** ν sur $[-\pi, \pi]$ telle que

$$\varphi = \widehat{\nu},$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n = \nu$ étroitement : pour toute $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g d\nu_n = \int g d\nu.$$

Théorème 4.6 : Herglotz – Mesure spectrale et densité spectrale

Pour tout $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. γ est symétrique de type positif :

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma(-h) = \gamma(h) \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \forall v \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_j v_k \gamma(j-k) \geq 0;$$

2. $(\gamma(h))_{h \in \mathbb{Z}}$ sont les coefficient de Fourier d'une **mesure positive finie** ν sur $[-\pi, \pi]$. En particulier ν est **paire** et $\gamma(0) = \nu([-\pi, \pi])$ car

$$\forall h \in \mathbb{Z}, \quad \gamma(h) = \int_{[-\pi, \pi]} e^{ihu} \nu(du) \in \mathbb{R}.$$

Lorsque ces propriétés ont lieu, la mesure ν est unique, et est appelée **mesure spectrale** (sa densité $f = d\nu/du$, si elle existe, est appelée **densité spectrale**).

Lorsque ces propriétés ont lieu, et si de plus $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors la densité spectrale $f = d\nu/du$ existe et est donnée par la série (uniformément convergente en u)

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{-ihu},$$

et cette fonction est paire et continue.

Définition 4.8 : Mesure/densité spectrale d'un processus stationnaire

Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire d'autocovariance γ_X alors la **mesure spectrale** de X , notée ν_X , est la mesure positive de transformée de Fourier γ_X fournie par le théorème 4.6 de Herglotz. De même, si $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, alors la **densité spectrale** de X , notée f_X , est la densité de ν_X fournie par le théorème 4.6 de Herglotz.

Théorème 4.9 : Condition pratique pour être autocovariance

Si $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant les deux propriétés

- (symétrie) $\forall h \in \mathbb{Z} : \gamma(-h) = \gamma(h)$;
- (sommabilité) $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ c'est-à-dire $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma(h)| < \infty$;

alors γ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire ssi

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad f(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \in \mathbb{Z}} \gamma(h) e^{-ihu} \geq 0$$

De plus, dans ce cas, le processus admet pour densité spectrale f .

Exemple 4.2 : Localisation et principe d'incertitude

- si $\nu = \delta_0$ (localisé) alors $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\nu}(h) = 1$ (délocalisé) ;
- si $\nu = \text{Unif}([-\pi, \pi])$ (délocalisé), alors $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\widehat{\nu}(h) = \mathbf{1}_{h=0}$ (localisé).

On voit sur ces deux exemples extrêmes que si ν est localisée dans l'espace alors $\widehat{\nu}$ ne l'est pas, et réciproquement. Plus généralement, au delà de ces deux exemples, on peut établir qu'il est impossible de localiser à la fois ν et $\widehat{\nu}$ au delà d'un certain seuil absolu, phénomène connu sous le nom de principe d'incertitude en analyse harmonique ^a.

a. En mécanique quantique, la position et l'impulsion sont liées à des opérateurs associés par une transformation de Fourier, ce qui conduit au principe d'incertitude de Heisenberg.

Remarque 4.11 : Localisation spectrale et mémoire

Si $\nu_X = \delta_0$ alors $\gamma_X = 1$ et donc X est à mémoire longue, tandis que si $\nu_X = du$ alors $\gamma_X = 2\pi\mathbf{1}_0$ et donc X est à mémoire courte (cf. ci-dessous l'exemple du bruit blanc).

Théorème 4.12 : Spectre et filtrage

Si X est stationnaire de mesure spectrale ν_X alors pour tout $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, la mesure spectrale $\nu_{F_\alpha X}$ du processus filtré stationnaire $F_\alpha X$ est absolument continue par rapport à ν_X , de densité $u \in [-\pi, \pi] \mapsto |P_\alpha(e^{-iu})|^2$ où

$$P_\alpha(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j z^j.$$

En particulier, si X possède une densité spectrale f_X alors $Y = F_\alpha X$ aussi et

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad f_Y(u) = |P_\alpha(e^{-iu})|^2 f_X(u).$$

Exemple 4.14 : Densité spectrale d'un ARMA

Si $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus ARMA(p, q) solution de l'équation

$$\Phi(B)X = \Theta(B)Z \quad \text{où} \quad Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{Z}} \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$$

et si $\Phi(z) = 1 - (\varphi_1 z + \dots + \varphi_p z^p)$ et $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$ n'ont pas de racine commune de module 1, alors $X = F_\alpha Z$ où $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\Theta(z)/\Phi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k z^k$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, et donc X , en combinant l'exemple 4.13 avec le théorème 3.6, on obtient que X a pour densité spectrale

$$\forall u \in [-\pi, \pi], \quad f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\Theta(e^{-iu})|^2}{|\Phi(e^{-iu})|^2}.$$

Cette quantité est plus facile à manier que l'autocovariance pour les ARMA. Autrement dit, la densité spectrale d'un ARMA est proportionnelle au carré du module de sa **fraction rationnelle** sur le cercle unité. En particulier, un MA(1) d'équation $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ a pour densité spectrale

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 + \theta e^{-iu}|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} (1 + 2\theta \cos(u) + \theta^2),$$

tandis qu'un AR(1) d'équation $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t$ a pour densité spectrale

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \varphi e^{-iu}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\varphi \cos(u) + \varphi^2}.$$

Théorème 4.15 : ARMA : représentation isospectrale causale inversible

Soit X le processus linéaire solution de $\text{ARMA}(p, q)$ $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où Z est un $\text{BB}(0, \sigma^2)$, et où Φ et Θ n'ont pas de racines de module 1. Soient a_1, \dots, a_p et b_1, \dots, b_q les racines de Φ et Θ , avec

$$|a_1| \leq \dots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \dots \leq |a_p|$$

et

$$|b_1| \leq \dots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \dots \leq |b_q|$$

où $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$, de sorte que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\Phi(z) = \prod_{j=1}^p (1 - a_j^{-1}z) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = \prod_{j=1}^q (1 - b_j^{-1}z).$$

Soient Φ_* et Θ_* les polynômes définis par

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j}z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1}z) \quad \text{et} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j}z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1}z).$$

Soit à présent Z_* un $\text{BB}(0, \sigma_*^2)$ où (avec la convention $\prod_{\emptyset} = 1$)

$$\sigma_*^2 = \sigma^2 \frac{\prod_{j=1}^r |a_j|^2}{\prod_{j=1}^s |b_j|^2}.$$

Alors Θ_* et Φ_* n'ont pas de racines de module ≤ 1 et le processus linéaire X_* solution de $\text{ARMA}(p, q)$ $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ est causal et inversible, et possède la même densité spectrale (donc la même autocovariance) que le processus d'origine X .

$$H_{t-1,p} = \text{vect}\{X_{t-1}, \dots, X_{t-p}\}$$

$$\sigma_p^2 = \text{dist}_{\|\cdot\|_2}(X_t, H_{t-1,p})^2 = \inf_{Y \in H_{t-1,p}} \|X_t - Y\|_2^2.$$

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-k}.$$

l'erreur de prédiction progressive (ou directe)

$$E_{t,p}^+ = X_t - \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$$

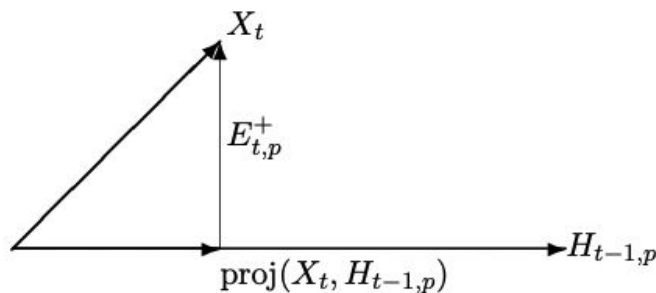


FIGURE 5.1 – Prédiction progressive et erreur progressive.

Exemple 5.1 : Processus AR(m) causal

Soit Z un BB($0, \sigma^2$) et soit X un processus AR(m) linéaire causal solution de

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \cdots + \varphi_m X_{t-m} + Z_t,$$

où $1 - (\varphi_1 z + \cdots + \varphi_m z^m) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \leq 1$. Alors, comme X est causal, on a $\mathbb{E}(Z_t X_{t-h}) = 0$ pour tout $h \geq 1$, et l'équation AR(m) donne l'identité $\mathbb{E}((X_t - \sum_{k=1}^m \varphi_k X_{t-k}) X_{t-h}) = 0$ pour tout $h \geq 1$. Ceci implique que $X_t - \sum_{k=1}^m \varphi_k X_{t-k} \perp H_{t-1,p}$ pour tout $p \geq 1$. De plus $\sum_{k=1}^m \varphi_k X_{t-k} \in H_{t-1,p}$ pour tout $m \leq p$. Donc ^a pour tout $p \geq m$, on a $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^p \varphi_k X_{t-k}$ avec

$$\varphi_{p,k} = \begin{cases} \varphi_k & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ 0 & \text{si } m < k \leq p. \end{cases}$$

Ainsi, pour notre processus AR(m) causal, les coefficients de prédiction linéaires de profondeur p coïncident avec les coefficients de l'équation d'autorégression, dès que $p \geq m$. Ceci explique la notation φ utilisée pour les coefficients de prédiction. Nous allons voir plus loin le cas des processus MA(q) et un algorithme lié à la notation θ .

a. Caractérisation du projeté orthogonal : $v = \text{proj}(u, H)$ ssi $v \in H$ et $u - v \perp H$.

Théorème 5.2 : Équations Yule-Walker

Si $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) = \sum_{k=1}^p \varphi_{p,k} X_{t-k}$ alors

$$\Gamma_p \varphi_p = \gamma_p$$

où $\Gamma_p = (\gamma(k-j))_{1 \leq k,j \leq p}$ et où $\gamma_p = (\gamma(1), \dots, \gamma(p))^{\top}$. De plus

$$\sigma_p^2 = \gamma(0) - \varphi_p^{\top} \gamma_p = \gamma(0) - \varphi_p^{\top} \Gamma_p \varphi_p.$$