Solución de la Ecuación de Laplace a través del método de relajación

Sebastián Duque Mesa

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Instituto de Física

Mayo de 2010

Introducción

Es sencillo demostrar que se puede calcular el potencial en distribuciones de carga utilizando solo aritmética. Si partimos de la ecuación de Laplace es sencillo demostrar que el potencial en un punto dado es el promedio aritmético de los potenciales en los puntos adyacentes.
A partir de esta solución es mas fácil hacer cálculos de potenciales en configuraciones que no tienen una solución analítica sencilla.

Diferencias finitas

Es una expresión de la forma $f(x_i) - f(x_{i\pm1})$. Si lo anterior se divide por $x_i - x_{i\pm1}$ obtenemos una expresión similar al cociente diferencial.

Diferencia posterior

$$\Delta f(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{1}$$

Diferencia anterior

$$\Delta f(x) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \tag{2}$$

Diferencia central

$$\Delta f(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \tag{3}$$

Consideremos el caso unidimensional de la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} \tag{4}$$

si $\phi(x)$ y $\rho(x)$ son funciones continuas, entonces:

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-q}} \qquad \frac{d}{dx}\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = -\frac{\rho_i}{\epsilon_0} \tag{5}$$

Resolviendo (4) para ϕ_i, obtenemos:

$$\phi_i = \frac{K_{i+1}\phi_{i+1} + K_{i-1}\phi_{i-1} + \rho_i(x_{i+1} - x_{i-1})}{K_{i+1} + K_{i-1}} \tag{6}$$

donde $K_{i+1} = 1/(x_{i+1} - x_i)$ y $K_{i-1} = 1/(x_i - x_{i-1})$

Ahora hallamos la solución bidimensional de ϕ:

$$\phi_{ij} = \frac{K_{i+1,j}\,\phi_{i+1,j} + K_{i-1,j}\,\phi_{i-1,j} + K_{i,j+1}\,\phi_{i,j+1} + K_{i,j-1}\,\phi_{i,j-1}}{K_{i+1,j} + K_{i-1,j} + K_{i,j+1} + K_{i,j-1}} \tag{7}$$

donde

$$K_{i+1,j} = \frac{1}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i-1})} \qquad K_{i-1,j} = \frac{1}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1}-x_{i-1})} \tag{8}$$

$$K_{i,j+1} = \frac{1}{(y_{i+1}-y_i)(y_{i+1}-y_{i-1})} \qquad K_{i,j-1} = \frac{1}{(y_i - y_{i-1})(y_{i+1}-y_{i-1})} \tag{9}$$

Si consideramos el caso de una rejilla uniforme y sin carga interior, de la ecuación (7) se obtiene que:

$$\phi_{ij} = \frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}\right) \tag{10}$$

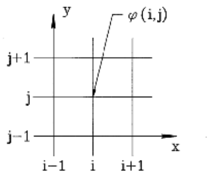
Método variacional

Si consideramos el espaciado h de la rejilla suficientemente pequeño, entonces

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1,j+1} = \frac{1}{h}\left(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}\right) \qquad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{i+1,j+1} = \frac{1}{h}\left(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}\right) \tag{11}$$

Sea $I[\Phi]$ un funcional integral sobre S

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{h/2} dx \int_0^{h/2} dy \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\right]$$



Aplicando las consideraciones anteriores al funcional y calculando sobre toda el área sombreada:

$$I \approx \frac{1}{4}\left[(\phi_{i,j}-\phi_{i,j+1})^2+(\phi_{i,j}-\phi_{i+1,j})^2+(\phi_{i,j}-\phi_{i,j-1})^2+(\phi_{i,j}-\phi_{i-1,j})^2\right] \qquad (12)$$

Optimizando (12) respecto a $\phi_{i,j}$ obtenemos:

$$(\phi_{i,j})_{opt} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j-1}) \qquad (13)$$

Aproximación a través de series de Taylor

Si consideramos que $\phi(x,y)$ es una función bien comportada, y ademas que

$$\nabla^2\phi(x,y) = 0 \tag{14}$$

entonces

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + h\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \qquad \phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - h\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \tag{15}$$

$$\phi_{i,j+1} = \phi_{i,j} + h\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \qquad \phi_{i,j-1} = \phi_{i,j} - h\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \tag{16}$$

Sumando las expansiones anteriores

$$\frac{1}{h^2}\left(\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-4\,\phi_{i,j}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \tag{17}$$

de las ecuaciones (14) y (17) obtenemos

$$\phi_{i,j}=\frac{1}{4}\left(\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}\right) \tag{18}$$

- Se escoge una rejilla cuadrada con espaciado h entre sus vértices adyacentes.
- Se asignan los valores de los potenciales en las fronteras.
- Se hace una suposición de los valores de los potenciales en los sitios de la rejilla diferentes de las fronteras.
- El primer ciclo de iteración inicia con un recorrido sistemático de los sitios de la rejilla, hallando $\phi_{i,j}$ con los resultados mostrados anteriormente. Estos resultados se asignan a una nueva rejilla en sitios iguales.
- Una vez que se ha calculado $\phi_{i,j}$ en cada uno de los puntos de la rejilla antigua, se reasigna la rejilla nueva como la antigua y el ciclo comienza nuevamente.
- La iteración continua hasta que se alcanza algún nivel de error determinado.

- Se escoge una rejilla cuadrada con espaciado h entre sus vértices adyacentes.
- Se asignan los valores de los potenciales en las fronteras.
- Se hace una suposición de los valores de los potenciales en los sitios de la rejilla diferentes de las fronteras.
- El primer ciclo de iteración inicia con un recorrido sistemático de los sitios de la rejilla, hallando $\phi_{i,j}$ con los resultados mostrados anteriormente. Este resultados se asigna a la misma rejilla en la misma posición sobreescribiendo el valor anterior.
- Una vez que se ha calculado $\phi_{i,j}$ en cada uno de los puntos de la rejilla antigua, se reasigna la rejilla nueva como la antigua y el ciclo comienza nuevamente.
- La iteración continua hasta que se alcanza algún nivel de error determinado.

Iteraciones tipo Gauss-Seidel

- Se escoge una rejilla cuadrada con espaciado h entre sus vértices adyacentes.
- Se asignan los valores de los potenciales en las fronteras.
- Se hace una suposición de los valores de los potenciales en los sitios de la rejilla diferentes de las fronteras.
- El primer ciclo de iteración inicia con un recorrido sistemático de los sitios de la rejilla, hallando $\phi_{i,j}$ con los resultados mostrados anteriormente. Este resultados se asigna a la misma rejilla en la misma posición sobreescribiendo el valor anterior.
- Una vez que se ha calculado $\phi_{i,j}$ en cada uno de los puntos de la rejilla antigua, se reasigna la rejilla nueva como la antigua y el ciclo comienza nuevamente.
- La iteración continua hasta que se alcanza algún nivel de error determinado.

- Iteraciones tipo Gauss-Seidel

- Se escoge una rejilla cuadrada con espaciado h entre sus vértices adyacentes.
- Se asignan los valores de los potenciales en las fronteras.
- Se hace una suposición de los valores de los potenciales en los sitios de la rejilla diferentes de las fronteras.
- El primer ciclo de iteración inicia con un recorrido sistemático de los sitios de la rejilla, hallando $\phi_{i,j}$ con los resultados mostrados anteriormente. Este resultados se asigna a la misma rejilla en la misma posición sobreescribiendo el valor anterior.
- Una vez que se ha calculado $\phi_{i,j}$ en cada uno de los puntos de la rejilla antigua, se reasigna la rejilla nueva como la antigua y el ciclo comienza nuevamente.
- La iteración continua hasta que se alcanza algún nivel de error determinado.

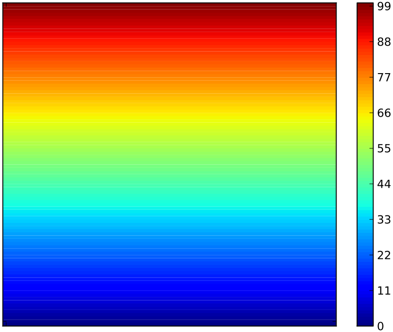
Método de sobre-relajacionés sucesivas

- Se escoge una rejilla cuadrada con espaciado h entre sus vértices adyacentes.
- Se asignan los valores de los potenciales en las fronteras.
- Los potenciales desconocidos de la rejilla se asignan a cero(opcional).
- Se calcula el error residual $R_n = R_n - R_{n-1}$. La solución se puede mejorar si $\phi'_{i,j} = \phi_{i,j} + \omega R$.
- Se inicia la iteración sistemática sobre las posiciones de la rejilla.
- La iteración continua hasta alcanzar algún valor de R_n previamente determinado.

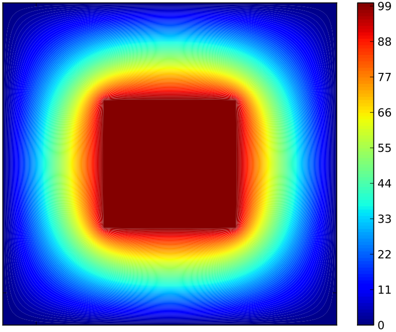
Relajación ordenada par-impar

$$\rho = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)(1+h^2) \qquad \omega_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2}} \tag{19}$$

Capacitor de placas paralelas



Capacitor coaxial de sección cuadrada



Conclusiones

- Se puede generalizar el método para incluir la permeabilidad relativa dentro de la ecuación de Laplace y así calcular el potencial dentro de elementos dielécticos.
- Incluso es posible realizar el calculo de la densidad de carga ρ en un sistema como los mostrados anteriormente.
- A partir de los cálculos numéricos realizados se pueden hallar aproximaciones a las funciones de potencial de cada sistema.
- El método es extensible a sistemas tres-dimensionales.

Fin de la presentación

Algoritmo en Python

Capacitor de sección cuadrada

```
while flag:

  for i in xrange(0,MSize[0]-2):

     for j in xrange(0,MSize[1]-2):

         if M[i+1,j+1] != phiInt:
             prom = 0.25*(M[i+1,j]+M[i,j+1]+M[i+1,j+2]+M[i+2,j+1])
             R = prom - M[i+1,j+1]
             M[i+1,j+1] =
             count += 1
             print count, '\t', abs(R)
             ## M[i+1,j+1] = M[i+1,j+1] + w*R
             if abs(R) < pValue:
                 flag = False
```

Algoritmo en Python

Capacitor de placas paralelas

```
while flag:

  for i in xrange(0,MSize[0]-2):    # Odd i positions"

     for j in xrange(0,MSize[1]-2):    # Odd j positions

         if M[i+1,j+1] != phiInt:
             prom = 0.25*(M[i+1,j]+M[i,j+1]+M[i+1,j+2]+M[i+2,j+1])
             R = prom - M[i+1,j+1]
             M[i+1,j+1] = prom
             count += 1
             print count, '\t', abs(R)
             M[:,0] = M[:,1]
             M[:,-1] = M[:,-2]
             if abs(R) < pValue:
                 flag = False
```