Стефан Димитров Велев ф.н.: 62537

Домашна работа по ДУПрил

Задача СИ22-ДР-2.6

а.) Решете уравнението:

$$y' = (y^2-3)xe^{-2x}$$

б.) Начертайте поле от прави на това уравнение в подходящ правоъгълник. Приложете кода и резултата от изпълнението му

Решение:

а.) $y' = (y^2-3)xe^{-2x} = \underbrace{xe^{-2x}}_{f(x)}\underbrace{(y^2-3)}_{g(y)}$

I.) $g(y) \equiv 0 \iff y^2-3=0 \iff y = \pm\sqrt{3} \longrightarrow$ решения

II.) $g(y) \neq 0 \iff y \neq \pm\sqrt{3}$

$$y' = xe^{-2x}(y^2-3) \;\Big|\; : y^2-3 \; (y \neq \pm\sqrt{3})$$

$$\frac{y'}{y^2-3} = xe^{-2x} \;\Big|\; \int$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)-3}dx = \int xe^{-2x}dx \iff \int \frac{dy}{y^2-3} = \int xe^{-2x}dx \quad (*)$$

$$\int \frac{dy}{y^2-3} = -\int \frac{dy}{3-y^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{dy}{1-\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)}{1-\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{y}{\sqrt{3}}}{1-\frac{y}{\sqrt{3}}}\right| + C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+y}{\sqrt{3}-y}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\ln(|\sqrt{3}+y|) - \ln(|\sqrt{3}-y|)\right) + C_1 = \quad C_1 \to \text{произволна константа}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\ln(|\sqrt{3}-y|) - \ln(|\sqrt{3}+y|)\right) + C_1 \quad (1)$$

$$\bullet \int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}\int x e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2}\int x\, de^{-2x} \underset{\text{части}}{\overset{\text{по}}{=}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(xe^{-2x} - \int e^{-2x}dx\right) = -\frac{1}{2}\left(xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} d(-2x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(xe^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + C_2\right) = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{C_2}{2} =$$

$$= -\left(\frac{2xe^{-2x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{C_2}{2}\right) = -\frac{(2x+1)e^{-2x}}{4} + C_3 \quad (2)$$

C_2 - произволна константа

От (1), (2) и равенство (*) $\Rightarrow$

$C_3 := -\frac{C_2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\ln(|\sqrt{3}-y|) - \ln(|\sqrt{3}+y|)\right) + C_1 = -\frac{(2x+1)e^{-2x}}{4} + C_3$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \ln\left(\frac{|\sqrt{3}-y|}{|\sqrt{3}+y|}\right) + 2C_1 = -\frac{(2x+1)e^{-2x}}{2} + 2C_3$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{|\sqrt{3}-y|}{|\sqrt{3}+y|}\right) + \frac{(2x+1)e^{-2x}}{2} = 2C_3 - 2C_1$$

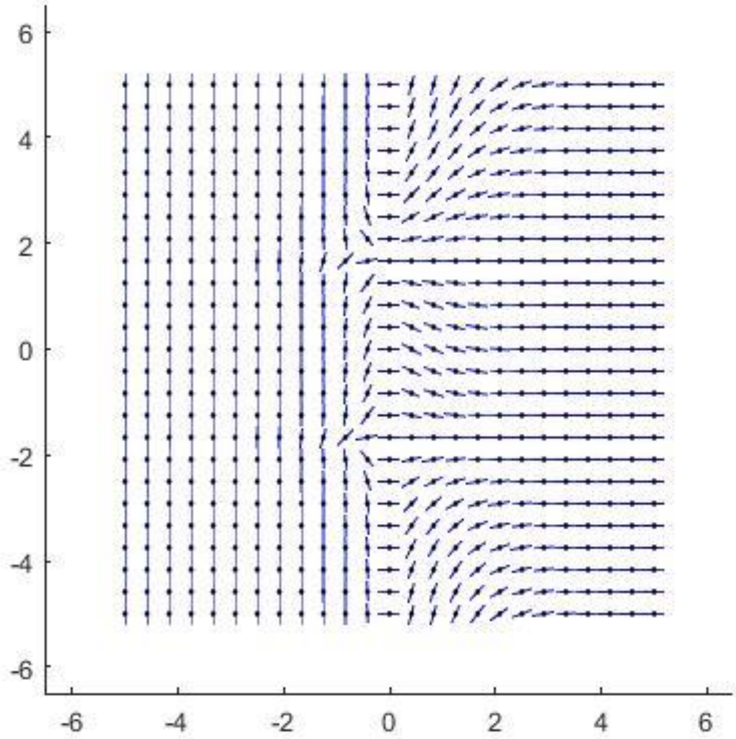
Общо решение: $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln\left(\frac{|\sqrt{3}-y|}{|\sqrt{3}+y|}\right) + \frac{(2x+1)e^{-2x}}{2} + C = 0$

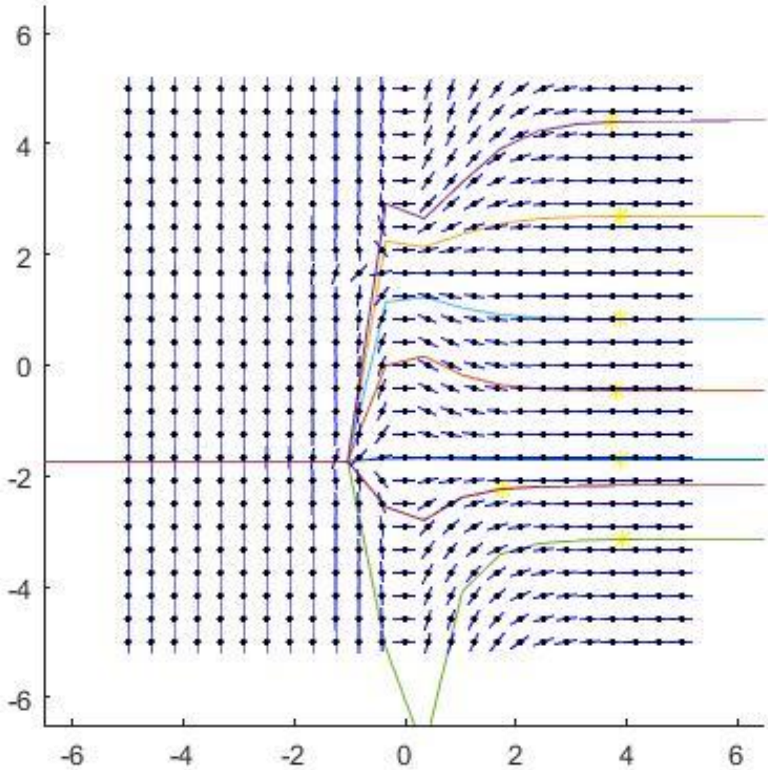
$C := 2C_1 - 2C_3$

Частни решения: $y(x) = \pm\sqrt{3}$

б.)

```
function SlopePlot

    x=linspace(-5, 5, 25);
    y=linspace(-5,5, 25);

    axis([-6.5,6.5,-6.5,6.5]);
    hold on;
    delta = 0.2;

    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
            epsCurrentPoint = delta/sqrt(1+ff(x(i),y(j))^2);
            plot([x(i)-epsCurrentPoint,x(i)+epsCurrentPoint],...
                    [y(j)-epsCurrentPoint*ff(x(i),y(j)),...
                    y(j)+epsCurrentPoint*ff(x(i),y(j))],...
                    'LineWidth',0.1,'color','b');
            plot(x(i), y(j), 'k.');
        end
    end

    function z = ff(x,y)
        z=(y^2-3)*x*exp(-2*x);
    end

    daspect([1,1,1]);
    hold on;
    [x0, y0] = ginput(1);
    plot(x0, y0, 'y*');
    x=linspace(-10,10,30);
    y=dsolve('Dy=(y^2-3)*x*exp(-2*x)','y(x0)=y0', 'x');
    plot(x,eval(y));

end
```


6
4
2
0
-2
-4
-6
-6 -4 -2 0 2 4 6


6
4
2
0
-2
-4
-6
-6 -4 -2 0 2 4 6