Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2021/2022

Тема № СИ2022-Г2-8

Изготвил: Стефан Димитров Велев

Ф. No.: 62537

Група: 2

Оценка:…………………..………………..

19.06.2022

гр. София

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Тема (задача) на проекта

Тема СИ2022-Г2-8. Дадена е задачата на Коши за уравнението на хармоничния осцилатор

$$\left| \begin{array}{l} y'' + (0.5 - a)y' + \omega^2 y = a\sin(3t) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{array} \right.$$

1. (4 т.) Решете символно (с MATLAB) дадената задача при $a = 0$. Начертайте графиката на намереното решение в интервала $[0, 40]$.

2. (3 т.) При $a = 0.5$ изберете подходяща стойност на собствената честота ω на системата, така че да демонстрирате явлението резонанс.

3. (3 т.) При $a = 0.5$ изберете подходяща стойност на собствената честота ω_0 на системата, така че да демонстрирате явлението биене.

4. (10 т.) Решете символно (с MATLAB) получените задачи в подточки (3) и (4), и начертайте графиките на решенията им в същия интеравл, както в подточка (1). Разположете всички графиките една под друга.

Срок за предаване 30.06.2022 г.

2. Решение на задачата

2.1 Теоретична част

• Диференциално уравнение от вида:

$$y''(t)+ky'(t)+w^2y(t)=f(t),$$

където $k \geq 0, w>0$ са константи, зависещи от конкретна физична система, се нарича уравнение на хармоничния осцилатор. За случая на система пружина-маса отг.: $k=\frac{\gamma}{m}$ $\gamma \to$ коефициент на триене
$m \to$ маса на материалната точка
$w^2=\frac{k_0}{m}$ $k_0 \to$ коефициент на еластичност

• Разглеждаме случая, когато върху материалната точка действа външна периодична сила, т.е.

$$y''(t)+ky'(t)+w^2y(t)=F_0\cos(w_0t), \quad w_0>0$$

Резонанс $\to$ при $k=0$ (изключително малко) и $w_0=w$
Биене $\to$ при $k=0$ и $w_0 \approx w$, $|w-w_0| \to$ малко, $w_0+w \to$ голямо

Да разгледаме дадената задача на Коши:

$$\begin{cases} y''+(0{,}5-a)y'+w^2y=a\sin(3t) & w_0=3 \\ y(0)=1, \; y'(0)=0 \end{cases}$$

① При $a=0 \Rightarrow y''+0{,}5y'+w^2y=0$
За да решим получената задача символно с Matlab избираме конкретна стойност за w.
Нека $w=3$. Тогава получаваме: $\begin{cases} y''+0{,}5y'+9y=0 \\ y(0)=1, y'(0)=0 \end{cases}$

② При $a=0{,}5 \Rightarrow y''+w^2y=0{,}5\sin(3t)$
Ще изберем подходяща стойност на собствената честота w на системата, така че да демонстрираме явлението резонанс.

Забелязваме, че $k=0$, т.е. няма триене. В този случай, за да наблюдаваме явлението резонанс е необходимо: $\omega=\omega_0=3$. Следователно, получаваме следната задача:

$$\begin{cases} y''+9y=0{,}5\sin(3t) \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

③ При $a=0{,}5 \Rightarrow y''+\omega^2 y=0{,}5\sin(3t)$

Ще изберем подходяща стойност на собствената честота ω на системата, така че да демонстрираме явлението биене.

Забелязваме, че $k=0$, т.е. няма триене. В този случай, за да наблюдаваме явлението биене е необходимо: $\omega\approx\omega_0$, $|\omega-\omega_0|$ да е много малко. Нека $\omega=3{,}1$. Следователно, получаваме следната задача на Коши:

$$\begin{cases} y''+9{,}61y=0{,}5\sin(3t) \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

④ Трябва да решим символно с MatLab всички получени задачи. Графиките на решенията им ще начертаем в дадения интервал $[0,40]$. За целта ще означим трите задачи съответно с y, u, v.

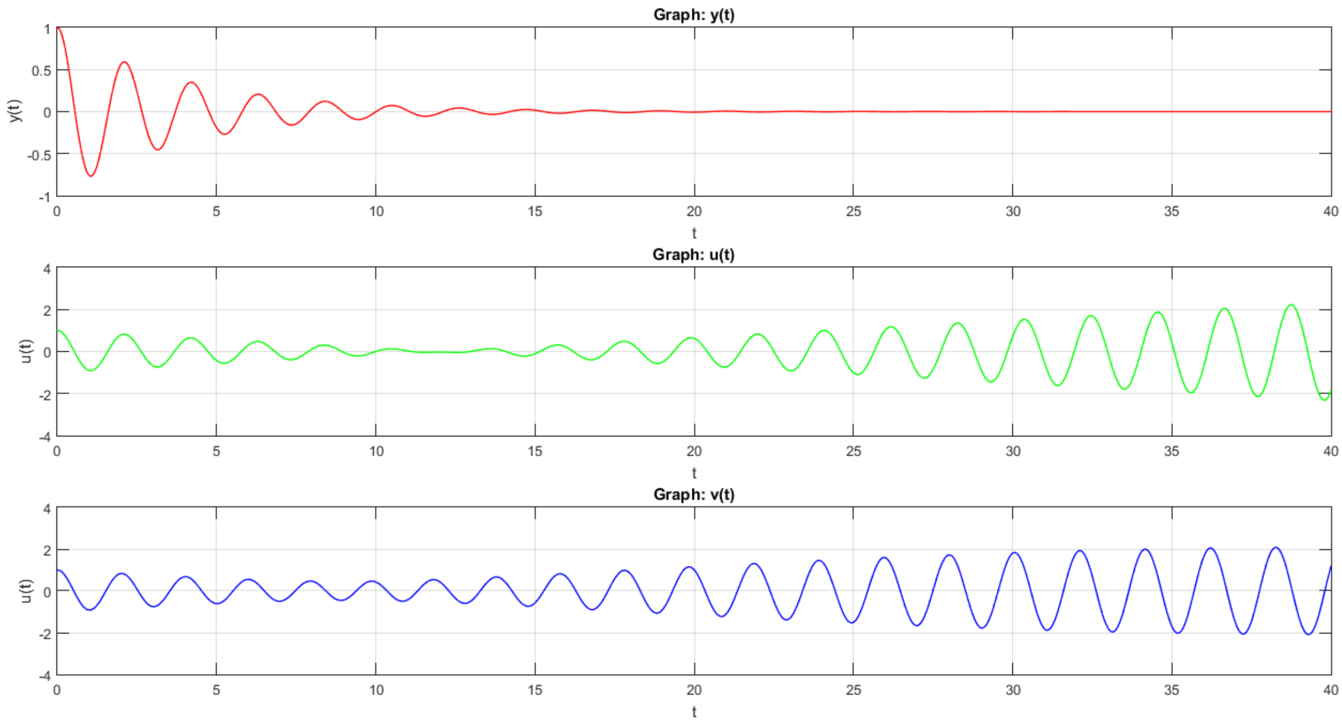
2.2 MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

```
function tema8

clc;

t_init=0;
t_max=40;
%t_max=120;

y=simplify(dsolve('D2y+0.5*Dy+9*y=0', 'y(0)=1', 'Dy(0)=0'))
u=simplify(dsolve('D2y+9*y=0.5*sin(3*t)', 'y(0)=1', 'Dy(0)=0'))
v=simplify(dsolve('D2y+9.61*y=0.5*sin(3*t)','y(0)=1','Dy(0)=0'))

t = linspace(t_init,t_max,1000);
Y=eval(y);
U=eval(u);
V=eval(v);

subplot(3,1,1)
plot(t,Y,'r','LineWidth',1)
grid on
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('Graph: y(t)')


subplot(3,1,2)
plot(t,U,'g','LineWidth',1)
grid on
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
title('Graph: u(t)')

subplot(3,1,3)
plot(t,V,'b','LineWidth',1)
grid on
xlabel('t')
ylabel('u(t)')
title('Graph: v(t)')

end
```

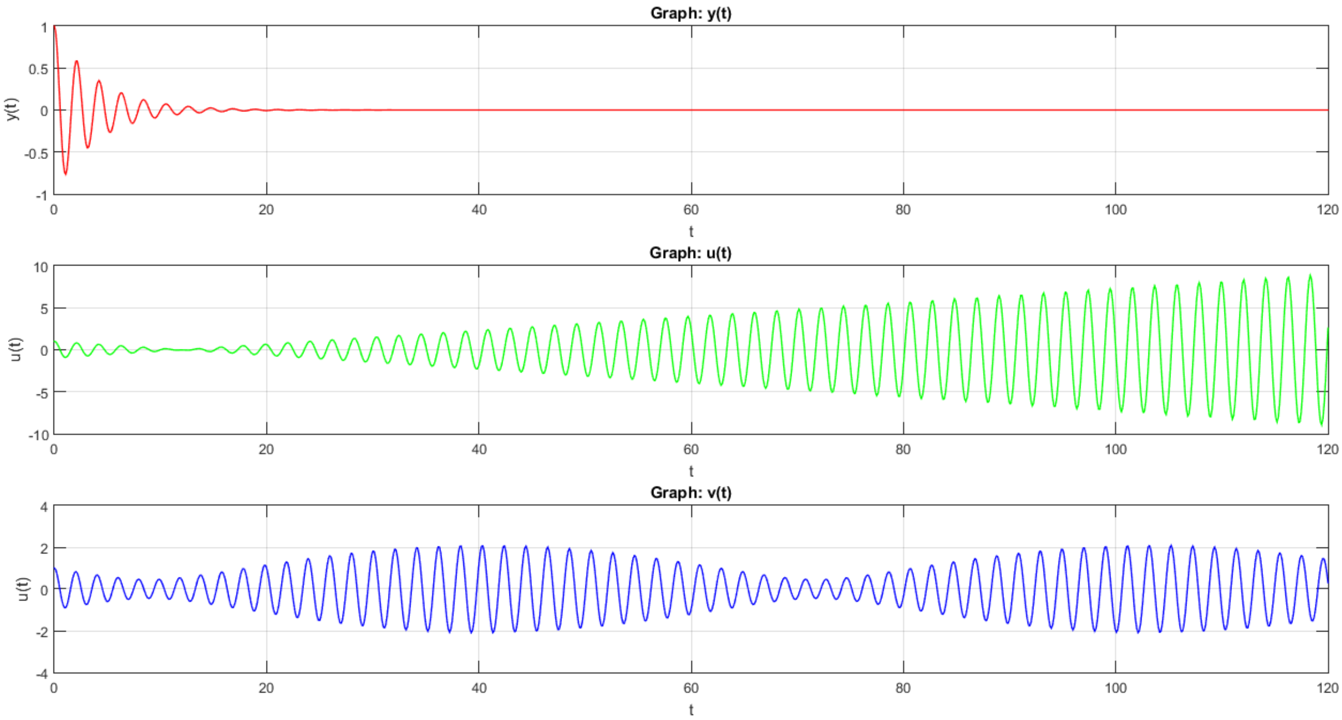
```
Command Window

y =

(exp(-t/4)*(143*cos((143^(1/2)*t)/4) + 143^(1/2)*sin((143^(1/2)*t)/4)))/143


u =

cos(3*t) + sin(3*t)/36 - (t*cos(3*t))/12


v =

cos((31*t)/10) + (50*sin(3*t))/61 - (1500*sin((31*t)/10))/1891

fx >>
```

Фигура 1: Резултати от командния прозорец с решенията на съответните задачи на Коши

2.3 Графики



Фигура 2: Графики на решенията в интервала [0,40]



Фигура 3: Графики на решенията в интервала [0,120]

2.4 Коментари към получените с MatLab резултати

За да решим символно чрез MatLab дефинираните в *Теоретичната част* задачи, реализираме описания в 2.2 код. За да постигнем това, изпълняваме следните стъпки:

1.) Използваме командата *clc* в началото на скрипта, за да можем да си гарантираме, че получените резултати ще се получат на изчистен команден ред.
2.) Дефинираме *t_init* и *t_max*, които имат за цел да ограничат намереното решение в дадения по условие интервал.
3.) Определяме трите задачи, които трябва да решим въз основа на *Теоретичната част*.
4.) Чрез *linspace* създаваме множество от точки в дадения интервал.
5.) Изчисляваме чрез *eval* дефинираните вече задачи.
6.) Използваме *subplot* за разполагане на графиките една под друга, като разделяме пространството на три равни части.
7.) Чрез *plot* чертаем желаните графики в различни цветове за всяка от тях.
8.) Чрез *xlabel*, *ylabel* и *title* поставяме подходящи заглавия на осите и графиките.

Получените с MatLab резултати потвърждават това, което се предполага да се случи на теория. В командния прозорец виждаме опростените със *simplify* решения на съответните задачи на Коши за уравненията на хармоничния осцилатор.

От графиките на функциите може да видим следните неща:

1.) На най-горната графика е представена графиката на *свободни вибрации с триене*. Вижда се как кривата постепенно се снижава към реалната ос, минавайки последователно от двете и страни (осцилиращо движение), като постепенно движението затихва, поради наличието на k = 0.5, което поражда сили на триене.
2.) На централната графика е представена графиката на явлението *резонанс*. Забелязваме как кривата постепенно увеличава амплитудата си, като се отдалечава все повече и повече от равновесното си положение, минавайки от двете страни на реалната ос. Това се получава при $\omega = \omega_0$.
3.) На най-долната графика е представена графиката на явлението *биене*. Забелязваме как кривата периодично променя амплитудата си. Във физическите системи това може да се характеризира с т.нар. заглъхване и усилване на сигналите. Това се получава тогава когато $\omega \approx \omega_0$.

Същите графики на решенията са показани и в по-голям интервал [0,120]. Получените резултати потвърждават характерното наличие на съответните явления при определените стойности за собствената честота на системата.