Курсов проект по Фрактали

Тема: Драконова крива

СОФИЙСКИ
УНИВЕРСИТЕТ

„СВ. КЛИМЕНТ
ОХРИДСКИ“

ОСНОВАН 1888 г.

Изготвил: Стефан Велев
спец. Софтуерно инженерство
II курс, факултетен номер: 62537

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СЪДЪРЖАНИЕ

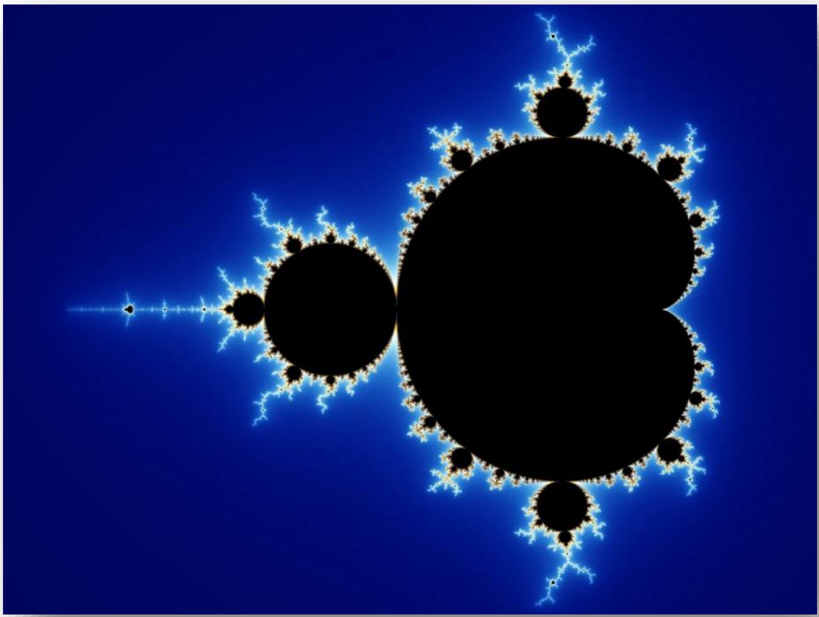
1. Фракталите – начин за представяне на безкрайността

Фракталите са вид математически форми, които са безкрайно сложни. По същество фракталът е модел, който се повтаря завинаги и всяка част от фрактала, независимо колко е увеличен или намален мащабът, изглежда много подобно на цялото изображение.

Фракталите ни заобикалят в толкова много различни аспекти на живота. Преди да дадем дефиниция на понятието да разгледаме някои от най-често срещаните фрактали, които вероятно сме срещали.

Най-често срещаният фрактал е известен като Множеството на Манделброт, кръстен на френския математик Беноа Манделброт, който въвежда термина „фрактал“. Английската дума фрактал произлиза от латинската дума *fractus*, която означава „счупен“, което е подходящо, като се има предвид, че във всеки фрактал има фракционни компоненти.

Една форма не трябва да е напълно идентична, за да бъде класифицирана като фрактал. Вместо това формите, които показват наследени и повтарящи се подобности, са основното изискване за класифициране като фрактал.



Фигура 1 Множество на Манделброт - един от най-известните фрактали

Удивително е да се види колко често срещани са фракталите като обекти в заобикалящия ни свят. Някои от най-често срещаните примери за фрактали в природата включват клони на дървета, кръвоносни системи на животни, снежинки, светкавици и електричество, растения и листа, географски терен и речни системи, облаци, кристали.

Фракталите се виждат в клоните на дърветата от начина, по който дървото отглежда наследници. Основният ствол на дървото е началната точка за фрактала и всеки набор от клони, които израстват от този основен ствол, впоследствие имат свои собствени клони, които продължават да растат и имат свои собствени клони. В крайна сметка клоните стават достатъчно малки, за да се превърнат в клонки и тези клонки в крайна сметка ще прераснат в по-големи клони и ще имат свои собствени клонки. Този цикъл създава „безкраен“ модел от клони на дървета. Всеки клон на дървото прилича на по-малка версия на цялата форма.

Фигура 2 Фрактали в природата

Всички сме чували, че всяка снежинка е уникална и един от факторите, допринасящи за уникалността на снежинките, е, че те се образуват във фрактални модели, които могат да позволят невероятно количество детайли, а също и вариации. В случай на образувания от ледени кристали, началната точка на фрактала е в центъра и формата се разширява навън във всички посоки. Тъй като кристалът се разширява, фракталните структури се образуват във всяка посока. Точно както другите примери за фрактали, които споменахме по-горе, всяка итерация на формата става по-малка и по-детайлна, което също допринася за цялостната сложност на формата.

Фигура 3 Фрактални снежинки

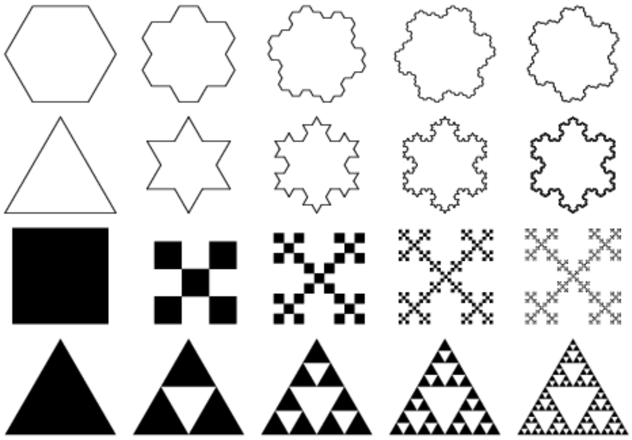
Наблюдавайки внимателно гръмотевична буря, ние сме свидетели на един от най-мощните природни дисплеи на фрактали. Когато електричеството преминава през среда, която не провежда добре електричеството (като въздуха), създаденият модел става фрактален. Причината за това явление се дължи на това как електричеството взаимодейства с въздуха. Тъй като токът преминава през въздуха, той се прегрява. Прегряването на въздуха променя неговата електрическа проводимост и позволява на тока да се фрагментира. Този процес се повтаря за всяко ниво на фрагментация и така получаваме фрактал. Ще забележим, че ако обърнем изображение на удар от мълния или електрически разряд, ще намерим голяма прилика с дърво. Това е така, защото и двете са с фрактални форми.

Фигура 4 Фрактални светкавици и електричество

Друг пример за това как фракталната геометрия влияе върху географията е под формата на измерване на брегова линия. Ако измерваме брегова линия с линийка с дължина от метър, ще можем да получим много груба оценка за това колко дълга е бреговата линия, но няма да можем да уловим нито един от по-фините детайли като неравности, хребети и издатини . Въпреки това, ако свием линийката си малко, изведнъж ще можем да уловим много по-фини детайли, защото инструментът ни за измерване ще е много по-прецизен. Всеки път, когато увеличаваме детайлността на нашето измерване, ние сме в състояние да увеличим точността на нашето измерване, което в случай на брегова линия ще увеличи периметъра, защото ще можем да уловим повече от тези фини детайли. Тъй като бреговата линия има фрактална геометрия, детайлите са изключително фини и това ще доведе до много голям периметър.

Фигура 5 Фрактали в географията

Стотици книги са написани относно изследването на математическите свойства и особености на фракталите. В следващите страници ще изследваме фракталите, представени чрез математически формули, концепцията за размерност и как фракталите показват дробни измервания.

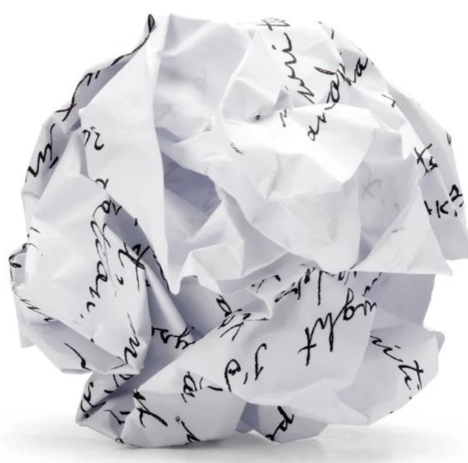


Фигура 6 Примери на фрактални форми

Точно като фракталите в природата, фракталните форми, показани на *Фигура 6*, са себеподобни и идентични, независимо от това какъв мащаб гледаме. Това се вижда най-лесно с плътния черен квадрат и триъгълници. Плътният триъгълник се нарича „Триъгълник на Серпински“ („Решето на Серпински“). Той е фрактал с формата на равностранен триъгълник, рекурсивно разделен на по-малки равностранни триъгълници с дължина на страната съответно $1/_2, 1/_4, 1/_8 \dots 1/_{2^n}$ $(n \to \infty)$.

Тези форми и като цяло всички фрактали показват това, което наричаме дробни измерения. В простите форми има три основни категории размерности, като първата е единична, която може да бъде представена чрез сегмент от линия, показваща само дължина. Втората е две измерения, които могат да бъдат представени като плоска равнина, която показва само дължина и ширина. Третата е триизмерни обекти, които могат да бъдат представени от куб, където кубът има дължина, ширина и дълбочина (височина).

Фракталите проявяват свойства, които се различават от тези основни типове размерности. Те всъщност могат да имат дробни измерения, като например 2,5 размерност. Един начин да се обясни размерността с пример е да се мисли за нея като за мярка за грапавост или колко добре дадена форма запълва пространството около нея. Сфера например запълва 3 измерения пространство, защото е твърд обект. Лист хартия запълва 2 измерения пространство. Фракталът може да бъде някъде по средата. Представете си, че вземете двумерно парче хартия и го смачкате на топка. Тази топка хартия вече има дължина, ширина и дълбочина, но също така е набръчкана и има много празнини между смачканите слоеве хартия. Тъй като смачканата хартиена топка не е напълно твърда, тя има стойност на дробни размери, вероятно някъде около 2,5 (между двуизмерното плоско парче хартия и триизмерната твърда сфера). Друг такъв пример биха били човешките бели дробове, които не са идеално гладки, а са груби и имат много малки кухини, предназначени да улавят кислород.

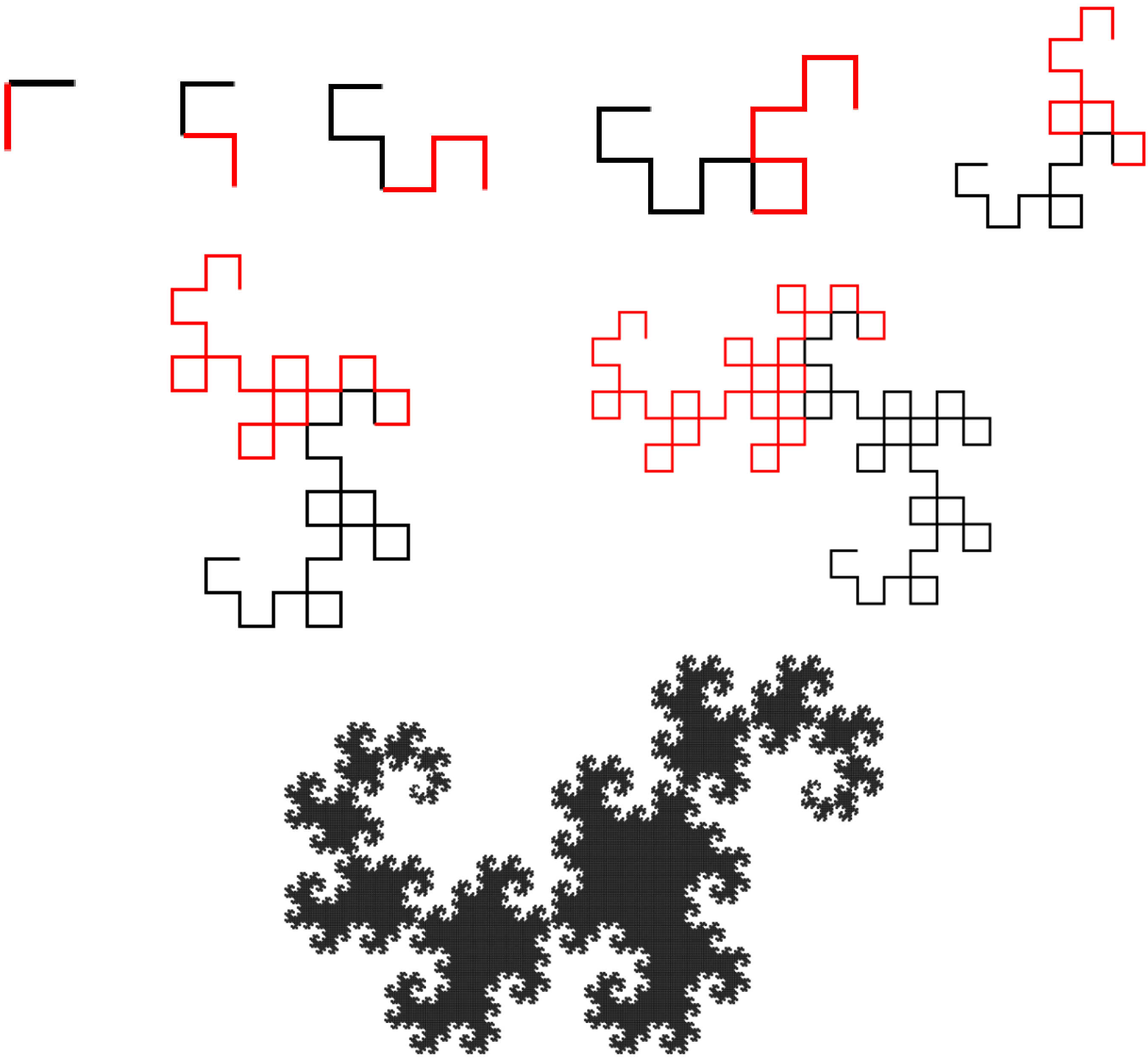


Фигура 7 Смачкана хартиена топка (За обяснение на размерност на фрактал)

2. Драконова крива – определение и изчертаване

Драконовата крива е всеки член на семейство от самоподобни фрактални криви, които могат да бъдат апроксимирани чрез рекурсивни методи като системите на Линденмайер. Кривата на дракона вероятно най-често се смята за форма, която се генерира от многократно сгъване на лента хартия наполовина, въпреки че има и други криви, които се наричат криви на дракон, които се генерират по различен начин.

Фракталът може да бъде представен като се започне от изчертаването на хоризонтална линия. След това тя се обръща на 90° по посока на часовниковата стрелка и се залепя към края на началната фигура. Броят на линиите, необходими за начертаването на този фрактал, се удвоява с всяка итерация. Важно е винаги да завъртаме копието на цялата предишна форма и да го прикрепяме към края на предишната итерация.

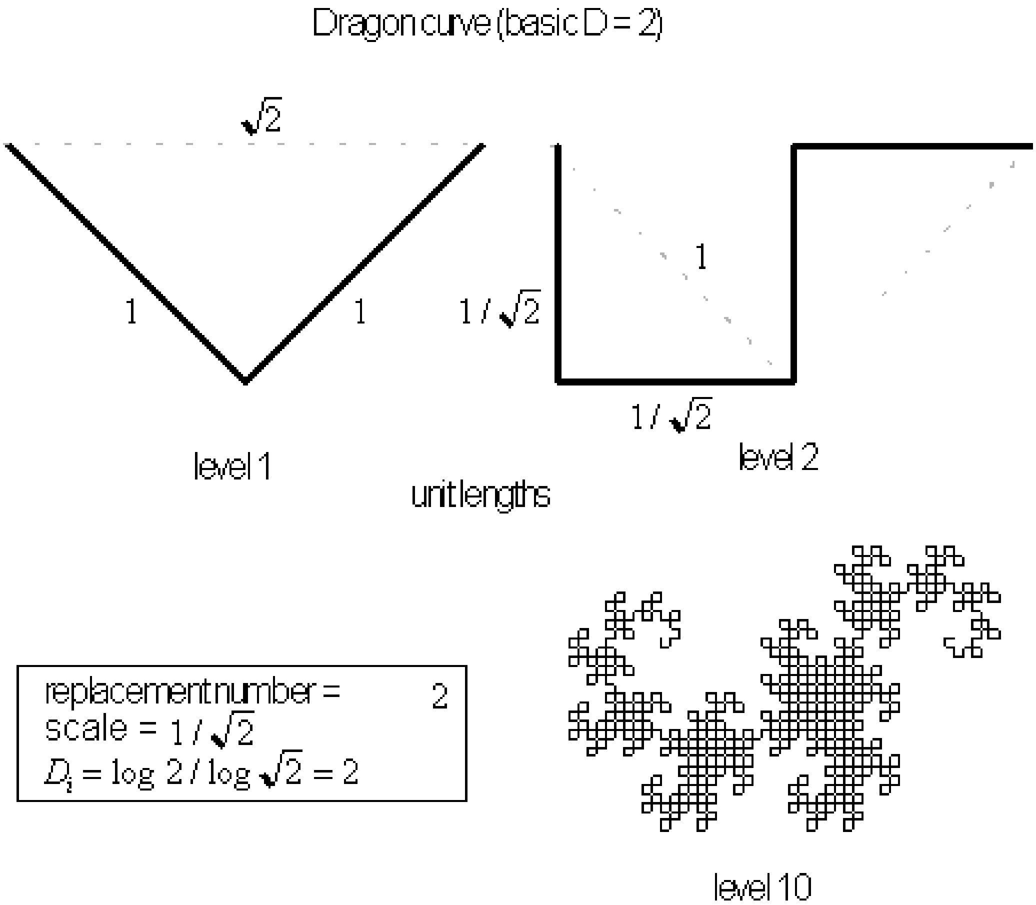


Фигура 8 Примери за Драконови криви

3. Драконова крива – размерност и подобност

Драконовата крива е пример за крива, запълваща пространство и имаща фрактална размерност 2. Това по същество означава, че драконовият фрактал е форма, 2D обект, въпреки факта, че това е крива, която никога не се пресича и не се среща при краищата. Също така, както може да се види от предишната точка, всеки нов етап на фрактала съдържа две копия на предишния етап. Това е малко по-различен вид самоподобие от това на триъгълника на Серпински и снежинката на Кох, които изглеждат абсолютно еднакви, независимо колко далеч увеличим. Драконовата крива, въпреки че не е абсолютно еднаква при всички разделителни способности, все пак е изградена от предишни итерации и поддържа същата основна форма, което позволява да бъде класифицирана като фрактал.

Погледнато математически започваме нашите пресмятания на размерността на Драконовата крива с нейната най-проста конструкция, в която два начални сегмента (линии) с дължина 1 заменят един сегмент (линия) с дължина $\sqrt{2}$. Това дава резултат в намаляване на мащаба s на $1/\sqrt{2}$. На следващата стъпка изчисляваме, че размерността е: $D = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = 2$. Тази крива се съдържа и запълва област с ограничена територия. Драконовата крива също така има редица вариации, които имат различни размерности.



Фигура 9 Размерност на Драконова крива

4. Драконова крива: The Heighway dragon

Драконът на Хайуей е открит от Джон Хайуей през 1966 г. и кръстен от Уилям Хартър. Фракталът е изследван от Хайуей, Хартър и Брус Банкс, докато работили като физици в НАСА. Драконовата крива е описана от Мартин Гарднър през 1967 г. в неговата рубрика "Математически игри" на *Scientific American*, където той заявява, че Хартър използвал дракона като дизайн на корицата на брошура, подготвена за семинар на НАСА по теория на групите. Много от неговите свойства били публикувани за първи път от Чандлър Дейвис и Доналд Кнут през 1970 г. Версията, която Хартър използвал за корицата на НАСА и която била възпроизведена в колоната на Гарднър, била с 11 повторения, но оригиналът имал заоблени ъгли.

Драконът на Хайуей е съставен от безкрайно обединение на геометрично подобни компоненти, които се завъртат около две криви, завършващи на (0,0) и (1,0). Всеки компонент се състои от четири копия на дракона (два дракона близнака), едно копие на компонента, мащабирано с ½, и две копия на компонента, мащабирани с ¼.

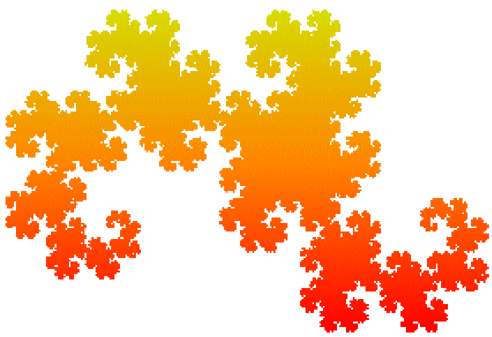
Драконът на Хайуей е конструиран чрез замяна на сегмент от линия с два сегмента под 45°. Ако ъгълът между линейните сегменти е по-малък от 45°, тогава ще се образува различна крива на дракон. Ако оставим ъгъла да нарастне от 0° до 45°, можем да наблюдаваме как се ражда Драконът на Хайуей.

Конструкциите на Дракона на Леви и Дракона на Хайуей са много сходни. Във всеки случай може да се започне с равнобедрен правоъгълен триъгълник и да се замени този триъгълник с два равнобедрени правоъгълни триъгълници, така че хипотенузата на всеки нов триъгълник да лежи на една от равните страни на стария триъгълник. Разликата е как тези нови триъгълници се поставят спрямо страните на стария триъгълник. За Дракона на Леви и двата са поставени към "външността"; за Дракона на Хайуей, единият е поставен сочещ, докато другият е поставен навътре. Поради тази прилика не е изненадващо, че човек може да трансформира Дракона на Хайуей в Дракона на Леви чрез непрекъсната трансформация. Действително, за всяко t в интервала [0,1] дефинираме итеративна функционална система по:

$$f_1(\mathrm{t})(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

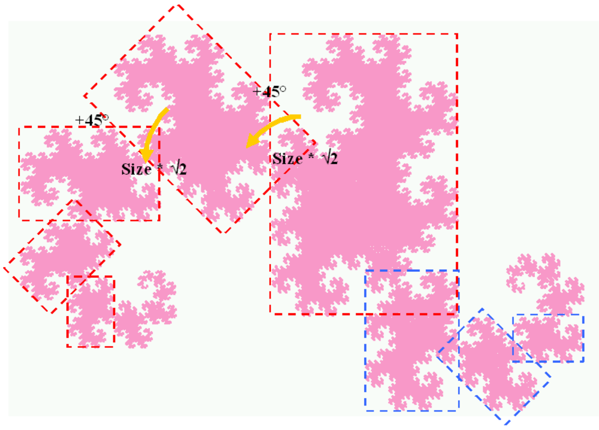
$$f_2(\mathrm{t})(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(135^\circ - 180^\circ t) & -\sin(135^\circ - 180^\circ t) \\ \sin(135^\circ - 180^\circ t) & \cos(135^\circ - 180^\circ t) \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{1} - \mathbf{0.5}\boldsymbol{t} \\ \mathbf{0.5}\boldsymbol{t} \end{bmatrix}$$

Нека A(t) е уникалният атрактор на итеративната функционална система, съответстваща на стойността t. Тогава A е непрекъсната функция от единичния интервал до пространството от компактни множества с Хаусдорфова топология, като A(0) е равно на Дракона на Хайуей и A(1) е равно на Дракона на Леви.

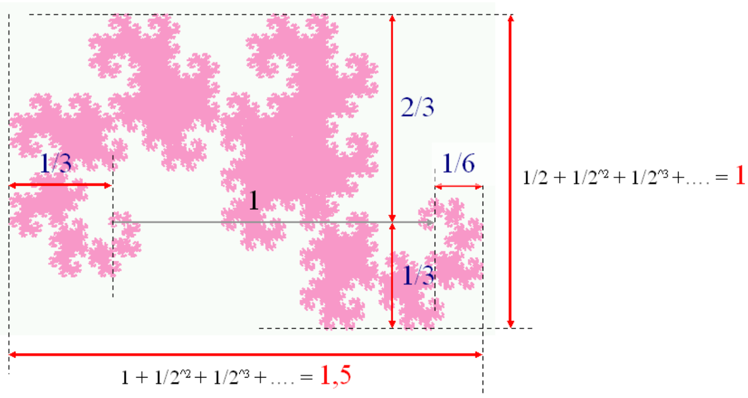


Фигура 10 Дракон на Хайуей

Много прилики със себе си могат да бъдат видени в Дракона на Хайуей. Най-очевидното е повторението на същия шаблон, наклонен на 45° и със съотношение на редукция $\sqrt{2}$. Базирайки се на тези подобности много от нейните дължини са прости рационални числа.



Фигура 11 Подобности в Дракон на Хайуей



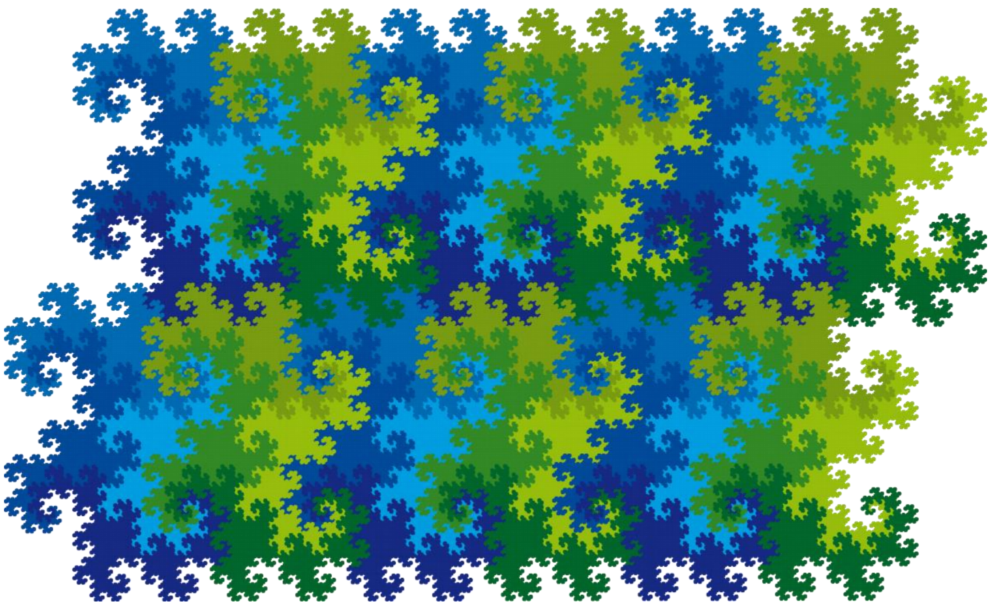
Фигура 12 Дължини в Дракон на Хайуей

Интересен факт е, че границата на множеството, покрито от Драконовата крива, има безкрайна дължина с фрактална размерност $2log_2\lambda$ ≈1.523627086202492, където:

$$\lambda = \frac{1 + (28 - 3\sqrt{87})^{1/3} + (28 + 3\sqrt{87})^{1/3}}{3} \approx 1.69562076956$$

е реалното решение на уравнението: $\lambda^3 - \lambda^2 - 2 = 0$.

Друго свойство на Драконовата крива е това, че може да очертае равнината. Една възможна плочка замества всеки ръб на квадратна плочка с крива на дракон, като се използва рекурсивната дефиниция на драконова крива, започваща от сегмент от линия. Първоначалната посока за разширяване на всеки сегмент може да се определи от шахматно оцветяване на квадратна плочка, разширяване на вертикалните сегменти в черни плочки и извън бели плочки и разширяване на хоризонтални сегменти в бели плочки извън черни.



Фигура 13 Покриване на равнината от Дракон на Хайуей

5. Драконова крива: The Twindragon

Драконът близнак (известен още като Драконът на Дейвис-Кнут) може да бъде конструиран чрез поставяне на две криви на Дракон на Хайуей една до друга. Той също така е граничният набор на следната итеративна функционална система:

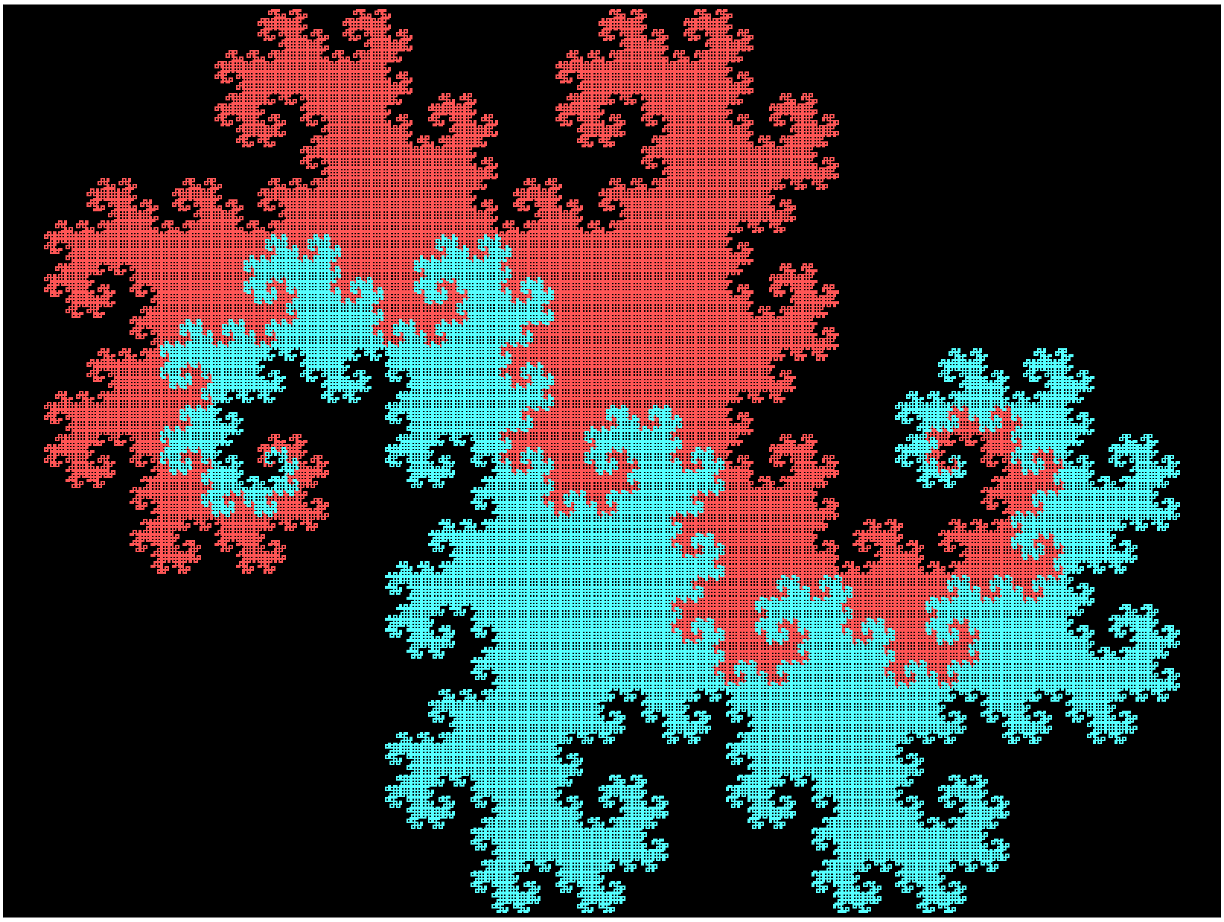
$$f_1(z) = \frac{(1+i)z}{2}$$

$$f_2(z) = 1 - \frac{(1+i)z}{2}\ ,$$

където първоначалната форма се дефинира от следното начално множество $S_0 = \{0,1,1-i\}$.

Също така Драконът близнак може да бъде написан като система на Линденмайер – нуждае се само от добавянето на друга секция в началния низ:

- Ъгъл: 90°
- Начален низ: *FX+FX+*
- Правила за пренаписване на низ:
  - $X \mapsto X+YF$
  - $Y \mapsto FX-Y$



Фигура 14 Дракон близнак, конструиран от два Дракона на Хайуей

6. Драконова крива: The Terdragon и The Lévy dragon

Тердраконът може да бъде конструиран като система на Линденмайер:

- Ъгъл: 120°
- Начален низ: F
- Правила за пренаписване на низ:
  - *F ↦ F+F–F*

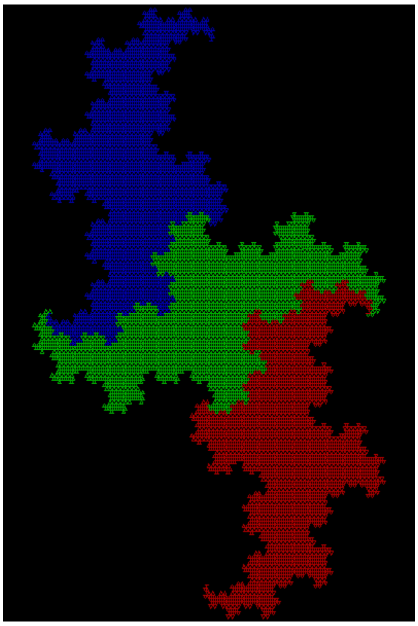
То е граничното множество на следната итеративна функционална система:

$$f_1(z) = \lambda z$$

$$f_2(z) = \frac{i}{\sqrt{3}} z + \lambda$$

$$f_3(z) = \lambda z + \lambda^* ,$$

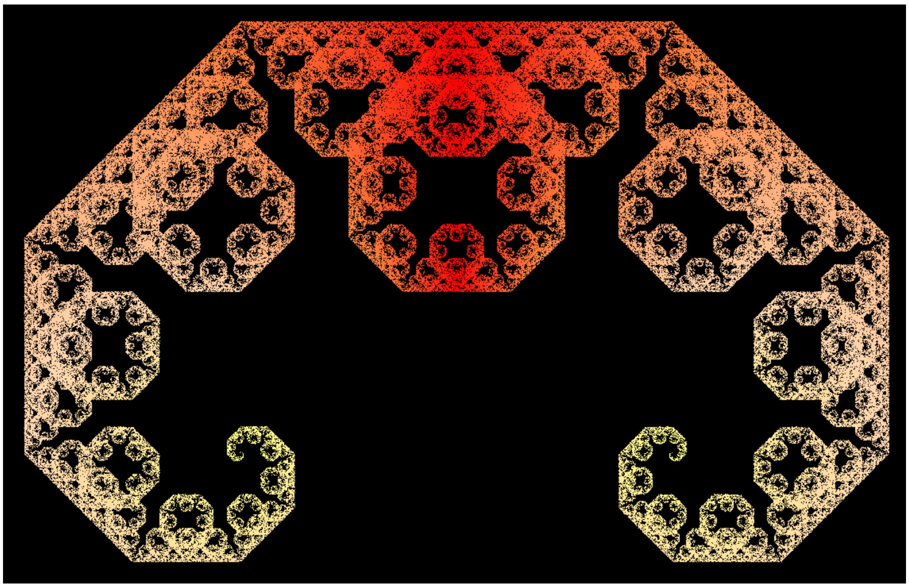
където $\lambda = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}$ и $\lambda^* = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$.



Фигура 15 Крива на тердраконът

Драконът на Леви е самоподобен с 2 неприпокриващи се копия на себе си, всяко от които е мащабирано с коефициента r < 1. Следователно, размерността на подобност d на атрактора на итеративната функционална система е решението на:

$$\sum_{k=1}^{2} r^d = 1 \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{log(1/2)}{log(1/\sqrt{2})} = 2$$



Фигура 16 Драконът на Леви

7. Програмна реализация на Драконова крива на HTML, CSS и JavaScript

```
<html>
<head>
<link rel="icon" href="icon.gif">
<title>Драконова крива</title>
<script type='text/javascript'>
Function frDragon(cID) {
	var dim=document.getElementById('dimID').value;
	var scl=document.getElementById('sclID').value;
	var lf=document.getElementById('lfID').value;
	var tp=document.getElementById('tpID').value;
	var clr=document.getElementById('clrID').value;
	var c=c1=c2=c2x=c2y=x=y=0, d=1, dim=1<<dim;
	var cvs=document.getElementById(cID);
	var ctx=cvs.getContext("2d");
	lf=Number(lf);
	tp=Number(tp);
	x=y=cvs.width/2;
	ctx.fillStyle="white";
	ctx.fillRect(0,0,cvs.width,cvs.height);
	ctx.beginPath();
	for(i=0; i<=dim;) {
		ctx.lineTo((x+lf)*scl,(y+tp)*scl);
		c1=c&1;
		c2=c&2;
		c2x=1*d;
		if(c2>0) {
			c2x=(-1)*d;
		}
		c2y=(-1)*c2x;
		if(c1>0) {
```

```
                    y+=c2y
                } else {
                    x+=c2x
                }
                 i++;
                c+=i/(i&-i);
        }
        ctx.strokeStyle = clr;
        ctx.stroke();
}
</script>
</head>
<body style="background-color: #999900; font-size: 17;">
<p align="center" style="color: #660066; font-family: arial; font-size: 24; margin-top: 25px;"><b>Въведете размерност, мащаб, изместване отляво, изместване отгоре, цвят:</b></p>
<div align="center">
        <input id=dimID value=11 type="number" min="0" max="17" size="2" style="height: 25px; width: 120px;">
        <input id=sclID value=7.0 type="number" min="0.001" max="10" size="5" style="height: 25px; width: 120px;">
        <input id=lfID value=-304 type="number" min="-50000" max="50000" size="6" style="height: 25px; width: 120px;">
        <input id=tpID value=-304 type="number" min="-50000" max="50000" size="6" style="height: 25px; width: 120px;">
        <input id=clrID value="purple" type="text" size="14" style="height: 25px; width: 120px;">
        <button onclick="frDragon('canvID')" style="height:25px">Изчертаване</button>
</div>
<strong><h1 align="center" style="font-size: 30; font-family: arial; color: #660066">Драконова крива</h1></strong>
<div align="center">
        <canvas id="canvID" width=730 height=640 style="border: 4px outset; background-color: white; border-color: #660066;"></canvas>
</div>
</body>
</html>
```