中 国 科 学 院 大 学

物 理 科 学 学 院

知识点总结

复变函数核心知识

姓名：贾韫哲

学号：2021180008070092

年级：2021 级

专业：凝聚态物理

2022 年 5 月 10 日

目录

一、 复变函数

(一) 复变函数与复数运算

1. 复数表示的三角式与指数式

三角式:

$$z = \rho \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \tag{1}$$

指数式:

$$z = \rho e^{i\varphi} \tag{2}$$

其中 ρ 称为模, φ 称为辐角, 记作 $Arg\,z$。满足 $0 \leqslant Arg\,z < 2\pi$ 的记作 $arg\,z$, 称为 $Arg\,z$ 的主值, 或 z 的主辐角。有

$$\varphi = Arg\,z = arg\,z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots) \tag{3}$$

2. 复数的根式表示

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\\ &= \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\varphi}{n}}\end{aligned} \tag{4}$$

(二) 复变函数

1. 复变函数与宗量

若在复数平面 (或球面) 上存在一个点集 E(复数的集合), 对于 E 的每一个值 (每一个 z 值), 按照一定的规律, 有一个或多个复数值 ω 与之相对应, 则称 ω 为 z 的复变函数, 并称 z 为 ω 的宗量, 定义域为 E。记作

$$\omega = f\left(z\right), z \in E \tag{5}$$

2. 常见初等函数的定义式

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \tag{6}$$

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \tag{7}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \tag{8}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}\right), \tag{9}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}\right), \tag{10}$$

$$\ln z = \ln\left(|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z}\right) = \ln|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}z, \tag{11}$$

$$z^s = \mathrm{e}^{\sin z}(s\text{ 为复数}) \tag{12}$$

(三) 导数

1. 柯西黎曼条件

将复变函数 $f(z)$ 的实部和虚部分别记作 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$。则方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{13}$$

称为柯西-黎曼方程, 又称柯西-黎曼条件 (简称 C-R 条件), 是复变函数可导的必要条件。复变函数的实部和虚部通过柯西-黎曼方程相联系。

(四) 解析函数

1. 解析函数与调和函数

若函数 $f(z)$ 在 z_0 及其邻域处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析。又若 $f(z)$ 在区域 B 上每一点都解析, 则称 $f(z)$ 是区域 B 上的解析函数。

若函数 $H(x,y)$ 在区域 B 上又二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程 $\nabla^2 H = 0$, 则称 $H(x,y)$ 为区域 B 上的调和函数。若函数 $f(z) = u + iv$ 在区域 B 上解析, 则 u, v 均为 B 上的调和函数。由于它们是同一个复变函数的实部和虚部, 所以又称为共轭调和函数。

(五) 多值函数

1. 根式函数与单值分支

对于根式函数 $w = \sqrt{z} = \sqrt{|\, z\,|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\operatorname{Arg} z)/2}$, 将 ω 的模和辐角分别记作 r 和 θ, 则除了 $z = 0$ 外, 有

$$r = \sqrt{|z|}, \quad \theta = \frac{1}{2}\operatorname{Arg} z = \frac{1}{2}\arg z + n\pi \tag{14}$$

这样, ω 的主辐角有两个值 (对应于 $n = 0$ 和 $n = 1$)

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\arg z, \quad \theta_2 = \frac{1}{2}\arg z + \pi \tag{15}$$

相应地给出两个不同的 ω 的值

$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z)/2} \\ w_2 = \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z)/2+\mathrm{i}\pi} \\ \quad\;\; = -\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arg z)/2} \end{cases} \tag{16}$$

这称为多值函数 $w = \sqrt{z}$ 的两个单值分支。

2. 支点与黎曼面

对于多值函数 $\omega = f(z)$, 若 z 绕某点一周, 函数值 ω 不复原, 而在该点各单值分支函数值相同, 则称该点为多值函数的支点。若当 z 绕支点 n 周, 函数值 ω 复原, 便称该点为多值函数的 $n-1$ 阶支点。

在某一单值平面 T 上, 沿正实轴方向至无穷远将平面切开, 规定割线上边缘对应 $Arg\,z = (n-1)\times 2\pi$, 下边缘对应 $Arg\,z = n\times 2\pi$。将多个这样的单值平面沿着割线将上下沿按照一定对应关系连接成一个平面, 就得到了某一复变函数的黎曼面。

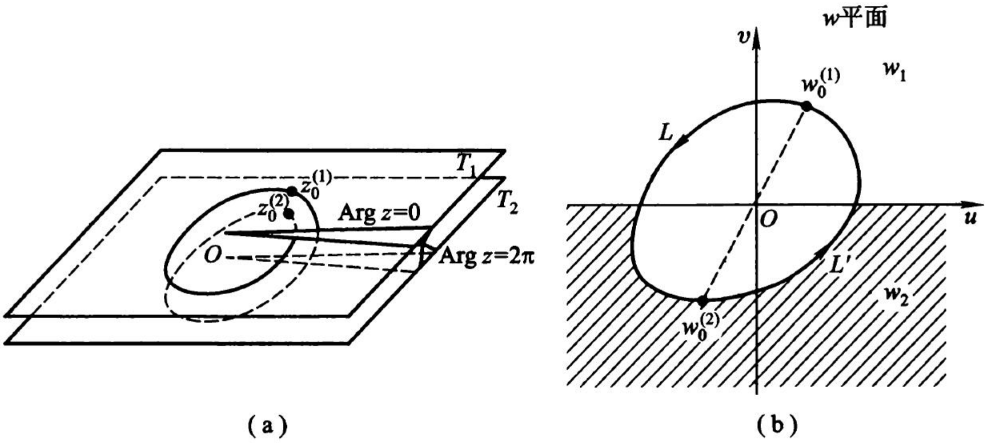

图 1: 黎曼面示意图

二、 复变函数的积分

(一) 复变函数的积分

1. 复变函数的路积分

$$\begin{aligned}\int_l f(z)\mathrm{d}z = &\int_l u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y \\ &+ \mathrm{i}\int_l v(x,y)\mathrm{d}x + u(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{17}$$

2. 积分不等式

积分不等式 1:

$$\left|\int_l f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_l |f(z)||\mathrm{d}z| \tag{18}$$

积分不等式 2:

$$\left|\int_l f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant ML \tag{19}$$

其中 M 是 $|f(z)|$ 在 l 上的最大值, L 是 l 的全长。

(二) 柯西定理

1. 单连通区域的柯西定理

如果函数 $f(z)$ 在闭单连通区域 $\overline{B}$ 上解析, 则沿 $\overline{B}$ 上任一分段光滑闭合曲线 l(也可以是 $\overline{B}$ 的边界), 有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{20}$$

作为推广, 如果函数函数 $f(z)$ 在单连通区域 B 上解析, 在闭单连通区域 $\overline{B}$ 上连续, 则沿 $\overline{B}$ 上任一分段光滑闭合曲线 l(也可以是 $\overline{B}$ 的边界), 有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{21}$$

2. 复连通区域的柯西定理

有时, 所研究的函数在区域上并非处处解析, 而是在某些点或者某些子区域上不可导 (甚至不连续或根本没有定义), 即存在奇点。为了将这些奇点排除在区域之外, 需要作一些适当的闭合曲线将这些奇点分隔出去, 或者形象地说将这些奇点挖掉而形成某种带“孔”的区域, 即所谓复连通区域。

对于区域 (单连通区域及复连通区域) 的边界线, 通常这样来规定其 (内、外) 正方向: 当观察者沿着这个方向前进时, 区域总是在观察者的左侧。

如果 $f(z)$ 是闭复连通区域上的单值解析函数, 则

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{22}$$

式中 l 为区域外边界线, 诸 l_i 为区域内边界线, 积分均演变界线的正方向进行。

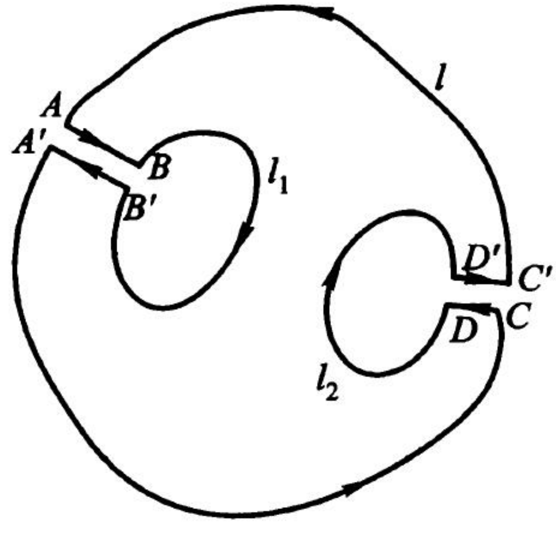

图 2: 复连通区域的柯西定理积分示意

(三) 不定积分

1. 不定积分的性质

根据柯西定理, 若函数 $f(z)$ 在单连通区域 B 上解析, 则沿 B 上任一路径 l 的积分 $\oint_l f(z)dz$ 的值只与起点和终点有关, 而与路径无关。因此当起点 z_0 固定时, 这个不定积分就定义了一个单值函数, 记作

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{23}$$

可以证明, $F(z)$ 在 B 上式解析的, 且 $F'(z) = f(z)$, 即 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数。

还可以证明

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = F(z_2) - F(z_1) \tag{24}$$

即路积分的值等于原函数的改变量。

(四) 柯西公式

1. 柯西公式

若 $f(z)$ 在闭单联通区 $\overline{B}$ 上解析, l 为 $\overline{B}$ 的边界线, α 为 $\overline{B}$ 内任一点, 则有柯西公式

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} = \oint_l \frac{f(z)}{z-\alpha}dz \tag{25}$$

若将 α 改记作 z, 积分变数用 ζ 表示, 则柯西公式改写为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} = \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{26}$$

2. 柯西公式的推论

柯西公式的第一个推论是解析函数可以求导任意多次。有

$$f'(z) = \frac{1!}{2\pi i} = \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta \tag{27}$$

反复求导得

$$f^{(1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} = \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \tag{28}$$

三、 幂级数展开

(一) 复数项级数

1. 柯西收敛判据

设有复数项的无穷级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots \tag{29}$$

其中每一项可分为实部和虚部

$$w_k = u_k + i v_k \tag{30}$$

其收敛的充分必要条件是对于任一给定的正数 ε, 必有 N 存在, 使得 $n > N$ 时,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k\right| < \varepsilon \tag{31}$$

式中 p 为任意正整数。

对于函数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z) = w_0(z) + w_1(z) + w_2(z) + \cdots + w_k(z) + \cdots \tag{32}$$

若在某个区域 B(或某根曲线 l) 上所有的点级数 (32) 都收敛, 则称级数 (32) 在 B(l) 上收敛。充分必要条件是在 B(l) 上各点 z 对于任一给定的小正数 ε, 必有 $N(z)$ 存在, 使得当 $n > N(z)$ 时,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)\right| < \varepsilon \tag{33}$$

式中 p 为任意正整数。

2. 绝对收敛与一致收敛

若级数 (29) 各项的模组成的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w_k| = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{u_k^2 + v_k^2} \tag{34}$$

收敛, 则级数 (29) 绝对收敛。

对于函数项级数 (32) 的柯西判据, 若 N 与 z 无关, 则称级数 (32) 在 B(l) 上一致收敛。

如果对于某个区域 B(或曲线 l) 上所有各点 z, 级数 (32) 的各项模 $|w_k(z)| \leqslant m_k$, 而正的常数项级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k \tag{35}$$

收敛, 则级数 (32) 在 B(l) 上绝对一致收敛。

(二) 幂级数

1. 幂级数

对于各项都是幂函数的级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \tag{36}$$

其中 $z_0, a_0, a_1, a_2, \cdots$ 都是复常数。这样的级数称为以 z_0 为中心的幂级数。

2. **收敛半径**

以 z_0 为中心作一个半径为 R 的圆 C_R。若幂级数 (36) 在圆的内部绝对收敛, 在圆外发散。这个圆称为幂级数的收敛圆, 它的半径称为收敛半径。

(三) 洛朗级数展开

1. **双边幂级数与收敛环**

对于含有正、负幂项的幂级数, 所谓双边幂级数

$$\cdots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{37}$$

设 (37) 的正幂部分有某个收敛半径, 记作 R_1。如果引用新的变量 $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$, 则负幂部分成为

$$a_{-1}\zeta + a_{-2}\zeta^2 + a_{-3}\zeta^3 + \cdots \tag{38}$$

设 (38) 式幂级数有某个收敛圆, 其半径记作 $\frac{1}{R_2}$, 则它在圆 $|\zeta| = \frac{1}{R_2}$ 的内部收敛, 亦即在 $|z-z_0| = R_2$ 的外部收敛。如果 $R_2 < R_1$, 那么级数 (37) 就在环域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 内绝对且一致收敛, 其和为一解析函数。级数可逐项求导。环域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 称为级数 (37) 的收敛环。

2. **洛朗级数展开**

设 $f(z)$ 在环形区域 $R_2 < |z-z_0| < R_1$ 内部单值解析, 则对环域上任一点 z, $f(z)$ 可展成幂级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \tag{39}$$

其中

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \tag{40}$$

积分路径 C 为位于环域内按逆时针方向绕内圆一周的任一闭合曲线。(39) 称为 $f(z)$ 的洛朗展开, 其右端的级数称为洛朗级数。

(四) 孤立奇点的分类

1. **孤立奇点与非孤立奇点**

确切地讲, 若函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不可导, 而在 z_0 的任意小邻域内除 z_0 外处处可导, 便称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。若在 z_0 的无论多么小的邻域内总可以找到除 z_0 以外的不可导的点, 便称 z_0 为 f(z) 的非孤立奇点。

2. **洛朗级数展开的正负幂部分**

在挖去孤立奇点 z_0 而形成的环域上的解析函数 $f(z)$ 可展为洛朗级数:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \tag{41}$$

其中正幂部分称为解析部分, 负幂部分称为主要部分或无限部分。

3. 可去奇点、极点与本性奇点

在挖去孤立奇点 z。而形成的环域上的解析函数 $f(z)$ 的洛朗展开级数, 或则没有负幕项, 或则只有有限个负幕项, 或则有无限个负幕项。在这三种情形下, 我们分别将 z_0 称为函数 $f(z)$ 的可去奇点, 极点及本性奇点。

如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则在以 z_0 为圆心而内半径为零的圆环域 $0 < |z - z_0| < R(R$ 是某个有限或无限的数值) 上的洛朗展开为

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \quad (0 < |z - z_0| < R) \tag{42}$$

据此显然有

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0 \tag{43}$$

是有限的。即函数在可去奇点的邻域上式有界的。

定义函数

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & (z \neq z_0) \\ a_0 & (z = z_0) \end{cases} \tag{44}$$

可知

$$g(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \quad (|z - z_0| < R) \tag{45}$$

这就是 $g(z)$ 在 z_0 邻域的泰勒展开, z_0 不再是函数 $g(z)$ 的奇点。

如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点, 则在圆环域 $0 < |z - z_0| < R$ 上的洛朗展开为

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{-m} (z - z_0)^{-m} + a_{-m+1} (z - z_0)^{-m+1} + \cdots + a_0 + a_1 (z - z_0) + \cdots \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (0 < |z - z_0| < R) \end{aligned} \tag{46}$$

据此显然有

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \tag{47}$$

m 称为 z_0 的阶。一阶的极点也简称为单极点。

如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点, 则在圆环域 $0 < |z - z_0| < R$ 上的洛朗展开为

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (0 < |z - z_0| < R) \tag{48}$$

其中极限 $\lim_{z \to z_0} f(z)$ 随 z 趋于 z_0 的方式而定。

四、 留数定理

(一) 留数定理

1. 留数

柯西定理指出, 如被积函数 $f(z)$ 在回路 l 所围闭区域上是解析的, 则回路积分中 $\oint_l f(z)dz$ 等于零。若回路 l 包围 $f(z)$ 的奇点, 如图

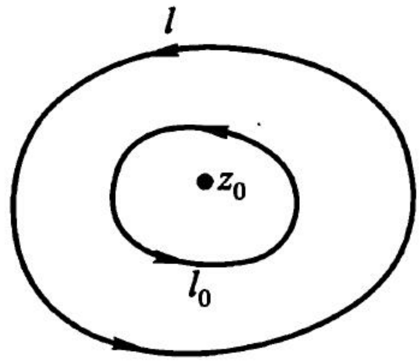

图 3: 围绕奇点的路积分

有如下积分结果

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i a_{-1} \tag{49}$$

其中, 洛朗级数 (37) 的 $(z-z_0)^{-1}$ 项的系数 a_{-1} 称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的留数 (或残数), 通常记作 $Resf(z_0)$。于是有

$$\oint_l f(z)dz = 2\pi i Resf(z_0) \tag{50}$$

2. 留数定理

设函数 $f(z)$ 在回路 l 所围区域 B 上除有限个孤立奇点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 外解析, 在闭区域 $\overline{B}$ 上除 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 外连续, 如图

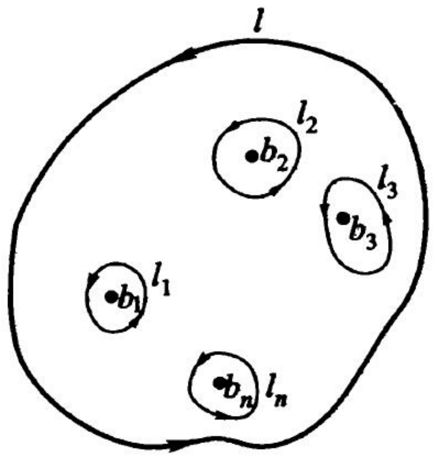

图 4: 留数定理示意

则有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res} f\left(b_j\right) \tag{51}$$

即留数定理将回路积分归结为被积函数在回路所围区域上各奇点的留数之和。

设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点, 留数可表示为

$$\operatorname{Res} f\left(z_0\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}^{m-1}}\left[\left(z-z_0\right)^m f(z)\right]\right\} \tag{52}$$

用该公式可以计算 m 阶极点的留数。

参考资料:

[1] 梁昆淼. 数学物理方法 (第四版)[M]. 高等教育出版社, 2010.