Tutorium

Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2023

5. Termin: (3) Matrizen

Sean Mulready

Selbstkontrollfragen - Matrizen

1. Geben Sie Definition einer Matrix wieder.
2. Nennen Sie sechs Matrixoperationen.
3. Geben Sie Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.
4. Geben Sie die Definition der Skalarmultiplikation für Matrizen wieder.
5. Geben Sie die Definition der Matrixtransposition wieder.
6. Es seien

   $$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ und } c := 2 \tag{1}$$

   Berechnen Sie

   $$D := c\left(A - B^T\right) \text{ und } E := (cA)^T + B. \tag{2}$$

   per Hand.
7. Geben Sie die Definition der Matrixmultiplikation wieder.
8. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Prüfen Sie, ob folgende Matrixprodukte definiert sind, und wenn ja, geben Sie die Größe der resultierenden Matrix an:

   $$ABC, \quad ABC^T, \quad , A^TCB^T \quad , BAC \tag{3}$$

Selbstkontrollfragen

9. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

   Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$AB, \qquad B^T A^T, \qquad \left(B^T A^T\right)^T, \qquad AC \tag{5}$$

   per Hand.

10. Definieren Sie die Begriffe der invertierbaren Matrix und der inversen Matrix.
11. Geben Sie die Definition von Einheitsmatrizen und Einheitsvektoren wieder.
12. Geben Sie die Definition von Einsmatrizen und Nullmatrizen wieder.
13. Geben Sie die Definition einer symmetrischen Matrix wieder.
14. Geben Sie die Definition einer Diagonalmatrix wieder.
15. Geben Sie die Definition einer positiv-definiten Matrix wieder.

1. Geben Sie Definition einer Matrix wieder.

Definition (Matrix)

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen, die wie folgt bezeichnet wird

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m}. \tag{6}$$

2. Nennen Sie sechs Matrixoperationen.

- Matrixaddition
- Matrixsubtraktion
- Skalarmultiplikation
- Matrixtransposition
- Matrixmultiplikation
- Matrixinversion

3. Geben Sie Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.

Teil 1/2

Definition (Matrixaddition)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Addition* von A und B definiert als die Abbildung

$$+ : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m},\ (A, B) \mapsto +(A, B) := A + B \tag{7}$$

mit

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

3. Geben Sie Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.

Teil 2/2

Definition (Matrixsubtraktion)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Subtraktion* von A und B definiert als die Abbildung

$$- : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m},\ (A, B) \mapsto -(A, B) := A - B \tag{9}$$

mit

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

4. Geben Sie die Definition der Skalarmultiplikation für Matrizen wieder.

Definition (Skalarmultiplikation)

Es sei $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Skalarmultiplikation* von c und A definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m},\ (c, A) \mapsto \cdot(c, A) := cA \tag{11}$$

mit

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1m} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nm} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

5. Geben Sie die Definition der Matrixtransposition wieder.

Definition (Matrixtransposition)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Transposition* von A definiert als die Abbildung

$$\cdot^T : \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{m \times n},\; A \mapsto \cdot^T(A) := A^T \tag{13}$$

mit

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{14}$$

6. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, und $c := 2$. Berechnen Sie $D := c\left(A - B^T\right)$ und $E := (cA)^T + B$ per Hand.

$$D = 2\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T\right) = 2\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \left(2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)^T + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Operationen - Selbstkontrollfragen

7. Geben Sie die Definition der Matrixmultiplikation wieder.

Definition (Matrixmultiplikation)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$. Dann ist die *Matrixmultiplikation* von A und B definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times k} \to \mathbb{R}^{n \times k},\ (A, B) \mapsto \cdot(A, B) := AB \tag{15}$$

mit

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{ik} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m a_{ji}b_{il} \right)_{1 \le j \le n, 1 \le l \le k} \end{aligned} \tag{16}$$

8. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}, B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Prüfen Sie, ob folgende Matrixprodukte definiert sind, und wenn ja, geben Sie die Größe der resultierenden Matrix an

$$ABC, \quad ABC^T, \quad , A^T CB^T \quad , BAC$$

- für ABC gilt (informell) $(3 \times 2)(2 \times 4)(3 \times 4) \to AB$, mit $(3 \times 2)(2 \times 4) = (3 \times 4)$ wäre definiert, aber die Multiplikation des Resultats mit C, also $(AB)C$, für die $(3 \times 4)(3 \times 4)$, ist nicht definiert. Das sieht man auch daran, dass für BC gilt $(2 \times 4)(3 \times 4) \Rightarrow$ nicht definiert.
- für ABC^T gilt $(3 \times 2)(2 \times 4)(4 \times 3) = (3 \times 3)$
- für $A^T CB^T$ gilt $(2 \times 3)(3 \times 4)(4 \times 2) = (2 \times 2)$
- für BAC gilt $(2 \times 4)(3 \times 2)(3 \times 4) \Rightarrow$ nicht definiert.

9. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.Berechnen Sie die Matrixprodukte AB, B^TA^T, $\left(B^TA^T\right)^T$ und AC per Hand.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 21 & 23 & 13 \\ 5 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B^TA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 5 \\ 8 & 23 & 12 \\ 4 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^TA^T\right)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 21 & 23 & 13 \\ 5 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Operationen - Selbstkontrollfragen

10.Definieren Sie die Begriffe der invertierbaren Matrix und der inversen Matrix.

Definition (Invertierbare Matrix und inverse Matrix)

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, wenn es eine quadratische Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n \tag{17}$$

ist. Die Matrix A^{-1} heißt die *inverse Matrix* von A.

11. Geben Sie die Definition von Einheitsmatrizen und Einheitsvektoren wieder.

Definition (Einheitsmatrizen und Einheitsvektoren)

- Wir bezeichnen die *Einheitsmatrix* mit

$$I_n := (i_{jk})_{1 \le j \le n, 1 \le k \le n} \in \mathbb{R}^{(n \times n)} \text{ mit } i_{jk} = 1 \text{ für } j = k \text{ und } i_{jk} = 0 \text{ für } j \neq k \tag{18}$$

- Wir bezeichnen die *Einheitsvektoren* $e_i, i = 1, \ldots, n$ mit

$$e_i := (e_{ij})_{1 \le j \le n} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } e_{ij} = 1 \text{ für } i = j \text{ und } e_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \tag{19}$$

12. Geben Sie die Definition von Einsmatrizen und Nullmatrizen wieder.

Definition (Nullmatrizen, Einsmatrizen)

- Wir bezeichnen *Nullmatrizen* mit

$$0_{nm} := (0)_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times m} \text{ und } 0_n := (0)_{1\le i\le m} \in \mathbb{R}^n \tag{20}$$

- Wir bezeichnen die *Einsmatrizen* mit

$$1_{nm} := (1)_{1\le i\le n, 1\le j\le m} \in \mathbb{R}^{n\times m} \text{ und } 1_n := (1)_{1\le i\le n} \in \mathbb{R}^n \tag{21}$$

13. Geben Sie die Definition einer symmetrischen Matrix wieder.

Definition (Symmetrische Matrix)

Eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt dass $S^T = S$.

14. Geben Sie die Definition einer Diagonalmatrix wieder.

Definition (Diagonalmatrix)

Eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$ heißt *Diagonalmatrix*, wenn $d_{ij} = 0$ für $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$ mit $i \ne j$.

15. Geben Sie die Definition einer positiv-definiten Matrix wieder.

Definition (Positiv-definite Matrix)

Eine quadratische Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv-definit (p.d.), wenn

- C eine symmetrische Matrix ist und
- für alle $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n$ gilt, dass $x^T C x > 0$ ist.