Tutorium

Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2023

2. Termin: (0) Vektoren

Sean Mulready

Selbstkontrollfragen - Vektoren

Anhang: R-Studio-Script zu den Rechnungen

Selbstkontrollfragen - Vektoren

1. Geben Sie die Definition eines Vektorraums wieder.
2. Geben Sie die Definition des reellen Vektorraums wieder.
3. Es seien

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } a := 2. \tag{1}$$

   Berechnen Sie

$$v = a(x + y) \text{ und } w = \frac{1}{a}(y - x) \tag{2}$$

   (und überprüfen Sie ihre Rechnung mit R.)*
4. Geben Sie die Definition des Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^m$ wieder.
5. Für

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   berechnen Sie

$$\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle \tag{4}$$

   (und überprüfen Sie ihre Rechnung mithilfe von R.)*
6. Geben Sie die Definition des Euklidischen Vektorraums wieder.
7. Definieren Sie die Länge eines Vektors im Euklidischen Vektorraum.
8. Berechnen Sie die Längen der Vektoren x, y, z aus Aufgabe 5 (und überprüfen Sie ihre Rechnung mit R.)*

*im Anhang

Selbstkontrollfragen - Vektoren

9. Geben Sie Definition des Abstands zweier Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.
10. Berechnen Sie $d(x, y)$, $d(x, z)$ und $d(y, z)$ für x, y, z aus Aufgabe 5.
11. Geben Sie die Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.
12. (Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren x und y, x und z, sowie y und z aus Aufgabe 5 mit R.)*
13. Definieren Sie die Begriffe der Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren.
14. Definieren Sie den Begriff der Linearkombination von Vektoren.
15. Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Vektoren.
16. Woran kann man erkennen, dass zwei Vektoren linear abhängig sind?

*im Anhang

1. Geben Sie die Definition eines Vektorraums wieder.

Definition (Vektorraum)

Es seien V eine nichtleere Menge und S eine Menge von Skalaren. Weiterhin sei eine Abbildung

$$+ : V \times V \to V, (v_1, v_2) \mapsto +(v_1, v_2) =: v_1 + v_2, \tag{5}$$

genannt *Vektoraddition*, definiert. Schließlich sei eine Abbildung

$$\cdot : S \times V \to V, (s, v) \mapsto \cdot(s, v) =: sv, \tag{6}$$

genannt *Skalarmultiplikation* definiert. Dann wird das Tupel $(V, S, +, \cdot)$ genau dann *Vektorraum* genannt, wenn für beliebige Elemente $v, w, u \in V$ und $a, b, c \in S$ folgende Bedingungen gelten:

(1) Kommutativität der Vektoraddition	$v + w = w + v$
(2) Assoziativität der Vektoraddition	$(v + w) + u = v + (w + u)$
(3) Existenz eines neutralen Elements der Vektoraddition	$\exists\, 0 \in V$ mit $v + 0 = 0 + v = v.$
(4) Existenz inverser Elemente der Vektoraddition	$\forall v \in V\, \exists -v \in V$ mit $v + (-v) = 0.$
(5) Existenz eines neutralen Elements der Skalarmultiplikation	$\exists\, 1 \in S$ mit $1 \cdot v = v.$
(6) Assoziativität der Skalarmultiplikation	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
(7) Distributivität hinsichtlich der Vektoraddition	$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w.$
(8) Distributivität hinsichtlich der Skalaraddition	$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v.$

2. Geben Sie die Definition des reellen Vektorraums wieder.

Definition (Reeller Vektorraum)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Vektoraddition* durch

$$+ : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} \tag{7}$$

und die *Skalarmultiplikation* durch

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (a, x) \mapsto ax = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Dann bildet $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ mit den Rechenregeln der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ einen Vektorraum, den wir den *reellen Vektorraum* nennen.

3. Es seien $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a := 2$.
Berechnen Sie $v = a(x + y)$ und $w = \frac{1}{a}(y - x)$.

$$v = a(x + y) = 2\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(2+0) \\ 2(1+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$w = \frac{1}{a}(y - x) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.5(0-2) \\ 0.5(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Geben Sie die Definition des Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^m$ wieder

Definition (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$)

Das *Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^m$ ist definiert als die Abbildung

$$\langle\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle (x, y) \rangle := \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i . \tag{9}$$

5. Für $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, berechnen Sie $\langle x, y\rangle$, $\langle x, z\rangle$, $\langle y, z\rangle$.

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3\cdot 1 = 2 + 0 + 3 = 5$$

$$\langle x, z\rangle = x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 = 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 3\cdot 0 = 6 + 1 + 0 = 7$$

$$\langle y, z\rangle = y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 = 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 3 + 0 + 0 = 3$$

6. Geben Sie die Definition des Euklidischen Vektorraums wieder.

Definition (Euklidischer Vektorraum)

Das Tupel $((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ aus dem reellen Vektorraum $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ und dem Skalarprodukt $\langle\rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ heißt *reeller kanonischer Euklidischer Vektorraum*.

7. Definieren Sie die Länge eines Vektors im Euklidischen Vektorraum.

Definition (Länge)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Die *Länge* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{10}$$

8. Berechnen Sie die Längen der Vektoren x, y, z aus Aufgabe 5.

$$\|x\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14} \approx 3.74$$

$$\|y\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$\|z\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

9. Geben Sie Definition des Abstands zweier Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.

Definition (Abstand)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Der *Abstand* zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$d(x, y) := \|x - y\|. \tag{11}$$

10. Berechnen Sie $d(x, y), d(x, z)$ und $d(y, z)$ für x, y, z aus Aufgabe 5.

$$d(x,y) = d\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6} \approx 2.45$$

$$d(x,z) = d\left(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+3^2} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

$$d(y,z) = d\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \left\|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{6} \approx 2.45$$

11. Geben Sie die Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.

Definition (Winkel)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Der *Winkel* α zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ mit $x, y \neq 0$ ist definiert durch

$$0 \leq \alpha \leq \pi \text{ und } \cos\alpha := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \tag{12}$$

12. Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren x und y, x und z, sowie y und z aus Aufgabe 5

Winkel zwischen x und y in Radians

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}\right) = \text{acos}\left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}\right) = \text{acos}\left(\frac{5}{2 \cdot \sqrt{7}}\right) \approx 0.333$$

Winkel zwischen x und y in Grad

$$\text{acos}\left(\frac{5}{2 \cdot \sqrt{7}}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \approx 19.107$$

12. Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren x und y, x und z, sowie y und z aus Aufgabe 5

Winkel zwischen x und z in Radians

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}\right) = \text{acos}\left(\frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}}\right) = \text{acos}\left(\frac{7}{2 \cdot \sqrt{35}}\right) \approx 0.938$$

Winkel zwischen x und z in Grad

$$\text{acos}\left(\frac{7}{2 \cdot \sqrt{35}}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \approx 53.729$$

12. Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren x und y, x und z, sowie y und z aus Aufgabe 5

Winkel zwischen y und z in Radians

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} \right\|}\right) = \text{acos}\left(\frac{1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2}}\right) = \text{acos}\left(\frac{3}{2 \cdot \sqrt{5}}\right) \approx 0.835$$

Winkel zwischen y und z in Grad

$$\text{acos}\left(\frac{3}{2 \cdot \sqrt{5}}\right) \cdot \frac{180}{\pi} = 47.87$$

13. Definieren Sie die Begriffe der Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren.

Definition (Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ heißen *orthogonal*, wenn gilt, dass

$$\langle x, y \rangle = 0 \tag{13}$$

- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ heißen *orthonormal*, wenn gilt, dass

$$\langle x, y \rangle = 0 \text{ und } \|x\| = \|y\| = 1. \tag{14}$$

14. Definieren Sie den Begriff der Linearkombination von Vektoren.

Definition (Linearkombination)

$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ sei eine Menge von k Vektoren eines Vektorraums V. Dann ist die *Linearkombination* der Vektoren in $v_1, v_2, ..., v_k$ mit den skalaren Koeffizienten $a_1, a_2, ..., a_k$ definiert als der Vektor

$$w := \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in V. \tag{15}$$

15. Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Vektoren.

Definition (Lineare Unabhängigkeit)

V sei ein Vektorraum. Eine Menge $W := \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ von Vektoren in V heißt *linear unabhängig*, wenn die einzige Repräsentation des Nullelements $0 \in V$ durch eine Linearkombination der $w \in W$ die triviale Repräsentation

$$0 = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_k w_k \text{ mit } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0 \tag{16}$$

ist. Wenn die Menge W nicht linear unabhängig ist, dann heißt sie *linear abhängig*.

16. Woran kann man erkennen, dass zwei Vektoren linear abhängig sind?

Theorem (Lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren)

V sei ein Vektorraum. Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ sind linear abhängig, wenn einer der Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen Vektors ist.

Anhang: R-Scripte zu den jeweiligen Aufgaben

Anhang: Berechnung von Aufgabe 3 in R-Studio

```
x = matrix(c(2,1), nrow = 2)    # Vektordefinition
y = matrix(c(0,1), nrow = 2)    # Vektordefinition
a = 2                           # Skalardefinition
v = a*(x + y)                   # Vektoraddition und Skalarmultiplikation
w = 1/a * (y - x)
print(v)
```

```
>      [,1]
> [1,]    4
> [2,]    4
```

```
print(w)
```

```
>      [,1]
> [1,]   -1
> [2,]    0
```

Anhang: Berechnung der Aufgabe 5 in R-Studio

```
# Vektordefinition
x = matrix(c(2,1,3), nrow = 3)
y = matrix(c(1,0,1), nrow = 3)
z = matrix(c(3,1,0), nrow = 3)

# Skalarprodukt mit R's komponentenweiser Multiplikation * und sum()
skalarprodukt_xy = sum(x*y)
skalarprodukt_xz = sum(x*z)
skalarprodukt_yz = sum(y*z)
print(c(skalarprodukt_xy, skalarprodukt_xz, skalarprodukt_yz))
```

```
> [1] 5 7 3
```

```
# Vektordefinition
x = matrix(c(2,1,3), nrow = 3)
y = matrix(c(1,0,1), nrow = 3)
z = matrix(c(3,1,0), nrow = 3)

# Skalarprodukt mit R's Matrixtransposition t() und -multiplikation (%*%)
skalarprodukt_xy = t(x) %*% y
skalarprodukt_xz = t(x) %*% z
skalarprodukt_yz = t(y) %*% z
print(c(skalarprodukt_xy, skalarprodukt_xz, skalarprodukt_yz))
```

```
> [1] 5 7 3
```

Anhang: Berechnung von Aufgabe 8 mit R-Studio

```r
norm_x = norm(matrix(c(2,1,3), nrow = 3), type = "2")  # Vektorlänge = l_2 Norm (type = "2")
norm_y = norm(matrix(c(1,0,1), nrow = 3), type = "2")
norm_z = norm(matrix(c(3,1,0), nrow = 3), type = "2")
print(c(norm_x, norm_y, norm_z))
```

```
> [1] 3.74 1.41 3.16
```

Anhang: Berechnung von Aufgabe 10 mit R-Studio

```r
Abstand_xy = norm(matrix(c(2,1,3), nrow = 3) - matrix(c(1,0,1), nrow = 3), type = "2")
Abstand_xz = norm(matrix(c(2,1,3), nrow = 3) - matrix(c(3,1,0), nrow = 3), type = "2")
Abstand_yz = norm(matrix(c(1,0,1), nrow = 3) - matrix(c(3,1,0), nrow = 3), type = "2")
print(c(Abstand_xy, Abstand_xz, Abstand_yz))
```

```
> [1] 2.45 3.16 2.45
```

Anhang: Berechnung von Aufgabe 12 mit R-Studio

- Zwischen x und y

```
x = matrix(c(2,1,3), nrow = 3)
y = matrix(c(1,0,1), nrow = 3)
alpha = acos(sum(x*y)/(sqrt(sum(x*x))*sqrt(sum(y*y))))      # Winkel in Radians
w = acos(sum(x*y)/(sqrt(sum(x*x))*sqrt(sum(y*y)))) * 180/pi # Winkel in Grad
print(c(alpha,w))
```

```
> [1]  0.333 19.107
```

Anhang: Berechnung von Aufgabe 12 mit R-Studio

- Zwischen x und z

```
x = matrix(c(2,1,3), nrow = 3)
z = matrix(c(3,1,0), nrow = 3)
alpha = acos(sum(x*z)/(sqrt(sum(x*x))*sqrt(sum(z*z))))      # Winkel in Radians
w = acos(sum(x*z)/(sqrt(sum(x*x))*sqrt(sum(z*z)))) * 180/pi # Winkel in Grad
print(c(alpha,w))
```

```
> [1]  0.938 53.729
```

Anhang: Berechnung von Aufgabe 12 mit R-Studio

- Zwischen y und z

```
y = matrix(c(1,0,1), nrow = 3)
z = matrix(c(3,1,0), nrow = 3)
alpha = acos(sum(y*z)/(sqrt(sum(y*y))*sqrt(sum(z*z))))          # Winkel in Radians
w = acos(sum(y*z)/(sqrt(sum(y*y))*sqrt(sum(z*z)))) * 180/pi      # Winkel in Grad
print(c(alpha,w))
```

```
> [1]  0.835 47.870
```