3.2 Pricing de l'option géométrique

$$\left(\frac{1}{T}\exp\left(\int_0^T \log(S_u)du\right) - K\right)_+$$

Alors, l'option est pricée à

$$\hat{V}_0 = \mathbb{E}^*\left[e^{-rT}\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_u)du - K\right)_+\right]$$

Par l'inégalité de Jensen, appliquée à la fonction exponentielle, et en vertu de la croissance de l'espérance, on obtient l'inégalité suivante:

$$\hat{V}_0 \leq V_0$$

Or, $S_t = \widetilde{S}_0 \exp(\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t)$.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0 &= \mathbb{E}^* \left[\left(S_0 \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \left(\sigma W_u - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) u \right) du \right) - K \right)_+ \right] \\
&= \mathbb{E}^* \left[\left(S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right) \exp\left(\frac{\sigma}{T} \int_0^T W_u du \right) - K \right)_+ \right]
\end{aligned} \tag{5}$$

On veut donc calculer la loi de

$$\frac{1}{T} \int_0^T \log(W_t) dt$$

On écrit la somme de Riemann correspondante :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} W_{\frac{iT}{N}} = W_{\frac{(N-1)T}{N}} - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} i(W_{\frac{iT}{N}} - W_{\frac{(i-1)T}{N}}) \quad \text{(Transformation d'Abel)} \tag{6}$$

Or,

$$W_{\frac{(N-1)T}{N}} = \sum_{i=0}^{N-1} (W_{\frac{iT}{N}} - W_{\frac{(i-1)T}{N}}) \tag{7}$$

Alors, en combinant (1) et (2),

$$\frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^{N} W_{\frac{iT}{N}} = \frac{\sigma}{N} \sum_{i=0}^{N-1} i(W_{\frac{iT}{N}} - W_{\frac{(i-1)T}{N}}) \tag{8}$$

On obtient

$$\frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^{N} W_{\frac{iT}{N}} = \sigma \sum_{i=0}^{N-1} \left(1 - \frac{i}{N} \right) (W_{\frac{iT}{N}} - W_{\frac{(i-1)T}{N}})$$

On calcule la fonction caractéristique de cette variable aléatoire.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\exp\left(iu\sum_{j=0}^{N-1}\left(1-\frac{j}{N}\right)(W_{\frac{jT}{N}}-W_{\frac{(j-1)T}{N}})\right)\right]\\
&=\prod_{j=0}^{N-1}\mathbf{E}\left[\exp\left(iu\left(1-\frac{j}{N}\right)(W_{\frac{jT}{N}}-W_{\frac{(j-1)T}{N}})\right)\right] \quad \text{(les accroissements sont indépendants)}\\
&=\prod_{j=0}^{N-1}\exp\left(-\left(1-\frac{j}{N}\right)^2\frac{Tu^2}{2N}\right) \quad \text{(les accroissements suivent des lois normales)}\\
&=\exp\left(-\sum_{j=0}^{N-1}(N-j)^2\frac{Tu^2}{2N^3}\right) \quad \text{(fonction caractéristique d'une loi gaussienne)}\\
&=\exp\left(-\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\frac{Tu^2}{2N^3}\right)\\
&=\exp\left(-\frac{N(N+1)(2N+1)Tu^2}{12N^3}\right)\\
&\rightarrow_{[N\to+\infty]}\exp\left(-\frac{Tu^2}{6}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Car la convergence presque-sûre de la somme de Riemann vers l'intégrale implique la convergence en loi,

$$\frac{1}{T}\int_0^T W_t dt \sim \mathcal{N}\left(0,\frac{T}{3}\right)$$

Donc,

$$\hat{V}_0=\exp(-rT)\mathbb{E}\left[\left(S_0\exp\left((r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{T}{2}+\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}g\right)-K\right)_+\right] \text{avec } g\sim\mathcal{N}(0,1)$$

On réorganise la formule :

$$\hat{V}_0=\exp\left(-\frac{rT}{2}\right)\mathbb{E}\left[\left(S_0\exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{4}+\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}g\right)-K\exp\left(\frac{-rT}{2}\right)\right)_+\right]$$

Or, $\exp\left(\frac{-rT}{2}\right)=\exp(\frac{-rT}{3})\exp(\frac{-rT}{6})$ et $\exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{4}\right)=\exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{12}\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{6}\right)$

Donc,

$$\hat{V}_0=\exp\left(-\frac{rT}{2}\right)\mathbb{E}^*\left[\left(S_0\exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{12}\right)\exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{6}+\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}g\right)-K\exp\left(\frac{-rT}{6}\right)\exp\left(\frac{-rT}{3}\right)\right)_+\right]$$

On pose $T'=\frac{T}{3}$, $S_0'=S_0\exp\left(-\frac{\sigma^2 T}{12}\right)$ et $K'=K\exp\left(\frac{-rT}{6}\right)$ Alors,

$$\hat{V}_0=\exp\left(-\frac{rT}{2}\right)\mathbb{E}\left[\left(S_0'\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T'+\sigma\sqrt{T'}g\right)-K'\exp(-rT')\right)_+\right]$$

On retrouve la formule pour un call Black-Scholes :

$$\hat{V}_0=\exp\left(-\frac{rT}{2}\right)\left(S_0'\mathcal{N}(d_1')-K'\exp\left(\frac{-rT}{3}\right)\mathcal{N}(d_2')\right)$$

Alors,

$$\hat{V}_0 = S_0 \exp\left(-(r+\frac{\sigma^2}{6})\frac{T}{2}\right)\mathcal{N}(d_1') - K\exp(-rT)\mathcal{N}(d_2')$$

$$\begin{aligned} d_1' &= \frac{\log\left(\frac{S_0'}{K'}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{3}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{6}+\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{3}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}} \\ &= \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}} \end{aligned} \tag{10}$$

$$d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{\frac{T}{3}} \tag{11}$$

Donc,

$$\hat{V}_0 = S_0 \exp\left(-(r+\frac{\sigma^2}{6})\frac{T}{2}\right)\mathcal{N}\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}\right) - K\exp(-rT)\mathcal{N}\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}\right)$$

Ainsi, nous obtenons la formule exacte pour une option sur moyenne géométrique.