

安徽大学

本科毕业论文（设计、创作）

题目： 基于量化器的非线性系统分析与设计

题目类别： ☐论文 ☒设计 ☐创作 ☐调查报告 ☐其他

学生姓名： 傅传歆 学号： Z01914227

所在院系： 电气工程与自动化学院 专业： 自动化

导师姓名： 陈文杰 职称： 教授

完成时间： 2023 年 05 月

安徽大学教务处 制

基于量化器的非线性系统分析与设计

摘 要

在数字控制/混合控制/网络控制系统中，控制器与传感器和被控对象间在地理上是相互分离的并通过一条通信信道来连接。而量化器在非线性系统中具有十分重要的意义，量化器可以通过对系统输入和输出的数字量化来减小网络带宽限制对系统的不利影响，并保证系统的精度。

本文对于一类非线性不确定系统为研究对象，研究了具有输入量化和状态量化时系统的稳定性，我们运用反步法设计思路，设计并选取合适的自适应控制器，运用李雅普诺夫第二法分析，分别在状态未被量化和状态被量化时，证明闭环系统的所有信号全局一致有界。最后通过数值仿真验证该控制方案的有效性。

关键词：自适应控制；反步法；迟滞量化器；非线性系统；量化控制

Design And Analysis Of Quantizer-based Nonlinear Systems

Abstract

In digital/hybrid/networked control systems, the controller is geographically separated from the sensor and the controlled object and is connected by a communication channel. Quantizers are of great importance in nonlinear systems, where the quantizers can reduce the adverse effects of network bandwidth limitations and ensure the accuracy of the system by digitally quantizing the system inputs and outputs.

In this paper, for a class of nonlinear uncertain systems, we investigate the stability of the system with input quantization and state quantization. We apply the backstepping design idea, design and select a suitable adaptive controller, and apply the Liapunov second method analysis to prove that all signals of the closed-loop system are globally consistent and bounded when the states are unquantized and quantized, respectively. Finally, the effectiveness of the control scheme is verified by numerical simulation.

Keywords: Adaptive control; backstepping; hysteretic quantizer; nonlinear systems; quantized control

目 录

第 1 章 绪论	5
1.1 研究背景及意义	5
1.2 国内外研究现状	5
1.2.1 非线性系统	5
1.2.2 量化反馈控制	6
1.3 本文的主要工作及结构安排	7
第 2 章 预备知识	8
2.1 稳定性理论	8
2.2 量化器	8
2.3 引理	10
第 3 章 具有输入量化和状态量化的一类非线性不确定系统的自适应反步控制	11
3.1 问题描述	11
3.2 自适应反步控制器设计	12
3.2.1 状态未被量化	12
3.2.2 状态被量化	16
3.3 数值仿真	18
第 4 章 全文总结	19
参考文献	20
致 谢	22

第 1 章 绪论

1.1 研究背景及意义

非线性现象是控制系统中普遍存在的现象，因为控制系统的各个元件都存在着不同程度的非线性特性，而且由于非线性因素的存在，理想的线性控制系统在实际中并不存在。非线性控制系统通常为高阶系统，其建模和设计难度更大。近年来，随着科技的进步，非线性控制在许多领域，如航空航天、工业生产、智能交通等方向得到了广泛的应用，并且对控制系统性能的要求也不断提高，伴随着物理设备和系统功能的不断扩充与增强，传统的控制系统在很多方面已经开始显现出应用局限，不再能够满足当今对控制系统的需求。

而在数字控制/混合控制/网络控制系统中，控制器与传感器和被控对象间在地理上是相互分离的并通过一条通信信道来连接。量化技术可以在受到传感器精度限制的情况下，解决数字信号难以编码的问题，并将连续的信号转化为多段离散值，这可以减小通信数据包的大小并减轻信息传递的负担，从而降低经济成本。另外，量化器在网络控制系统中具有十分重要的意义。它可以通过对系统输入和输出的数字量化来减小网络带宽限制对系统的不利影响，并保证系统的精度。因此，对量化器的研究具有十分重要的意义。

由于非线性系统总是存在一定的特性及复杂性，导致我们无法像研究线性系统那样较容易的给出适合于所有非线性系统的一定的设计模式及综合的分析方法。在控制工程中，被控系统可能具有一组有限的控制量，输入的可能值表示量化的水平，这些系统称为具有量化控制输入的系统，例如，使用开关阀的液压系统、数字控制、混合动力系统等。因此，关于非线性系统量化控制的研究既具有理论意义也具有实际的应用价值。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 非线性系统

非线性系统研究历经了很长时间的发展。与线性系统相比较，非线性系统不满足叠加定理，数学模型一般为非线性微分方程，其稳定性分析复杂，可能存在多个平衡状态，受数学工具的限制很难求得非线性方程的解析解，只能采用工程近似的方法。早期的研究主要集中在特定简单的非线性系统上，为了解决系统的稳定性提出了包括相平面法、描述函数法、逆系统法等传统分析方法。在 1892 年俄国科学家 A.M. Lyapunov 提出的李雅普诺夫法^[5]对于非线性控制系统分析意义重大，他把判定系统稳定性的方法归纳为李雅普诺夫第一法和第二法。在第二法中，Lyapunov 创建了一个可以模拟系统能量的“广义能量”函数，根据这个标量函数的性质，可以判断系统的稳定性。该方法不必求解系

统的微分方程，就可以直接判断其稳定性。它能够适用于难以求解的非线性系统和时变系统。可以说，李雅普诺夫方法是一种非常有效的非线性系统分析方法。

在上世纪 90 年代，Krstic 等人在《Nonlinear and adaptive control design》^[7]书中系统的阐述了自适应反步法的设计步骤，通过反步法反向设计，使李亚普诺夫函数 V 和控制器的设计过程系统化、结构化，将复杂的非线性系统分解成许多不超过系统阶数的子系统，然后根据 Lyapunov 稳定性定理，对每个子系统设计出中间的虚拟控制量，“反推”至整个系统，从而设计出系统的总控制律。随着计算机技术的发展，后来学者们也对非线性控制方法进行了深入研究，提出了神经网络和模糊控制等一系列新的控制方法。

1.2.2 量化反馈控制

量化控制在过去几十年中引起了相当大的关注。量化控制最重要的特性之一在于它能够实现低通信速率，同时保证足够的精度。关于量化器的研究，最早在 1948 年，Oliver 等人在研究脉冲调制和模数转换中首次提出并使用了量化器^[2]。同年 Shannon 在贝尔实验室杂志上发表了长文《通讯的数学原理》^[3]并提出了香农编码理论，为量化器的进一步研究与应用提供了理论基础。之后在 1956 年，Kalman 对采样数据控制系统进行了研究并指出当采样系统中引入有限步长的量化器，则反馈系统中就会因为量化而出现极限环和混沌现象^{[4][11]}，之后对于量化控制的研究越来越多。目前的量化器主要可以分为静态量化器和动态量化器两种，静态量化器又可以分为静态均匀量化器和静态非均匀量化器。在 2001 年 Elia N 在文献[8]研究了单输入单输出线性（SISO）系统，设计了一种对数量化器，这是一种静态非均匀量化器，相对于静态均匀量化器调整了量化参数和量化策略，并取得了较好的量化效果，为 SISO 线性系统的量化器设计奠定了基础。在文献[9]中，考虑到量化状态反馈控制、量化输出反馈控制、MIMO 系统的性能控制，证明了经典的扇形界约束方法可以用于研究非保守的量化反馈控制问题，并分析了量化控制系统的鲁棒性。最近，人们还开发了自适应量化控制的方案，例如[10][14][15]，其中大部分研究集中在输入量化方面。然而，在许多网络控制系统中，如远程控制，控制器和系统在物理上是相距甚远的。换句话说，发送到控制器的传感器信息（系统状态或输出）和反馈给系统的控制信息是通过通信渠道连接的[13]。在这种情况下，除了输入量化外，还需要进行状态或输出量化。在[18]中，对于一类满足高阶增长条件的非线性系统，开发了一个具有量化输入和输出的自适应输出反馈稳定控制器，然而其量化参数高度依赖于其他设计参数，因此很难获得的量化器。类似的结果也可以在[19]中找到，但有线性增长条件。在[20]中，对于一类同时具有输

入和输出量化的不确定非严格反馈非线性系统，证明了通过采用模糊逻辑，可以设计一个自适应控制器来克服不对称执行器饱和的困难，并确保闭环系统的半全局实用有限时间稳定性。对于必须采用自适应反步技术的系统，人们很快发现，量化状态或输出的主要障碍是，由于量化导致的不连续虚拟控制信号的导数会产生 Dirac 脉冲，这使得控制器的设计相当复杂。

最近，[21]针对 Brunovsky 形式的一类非线性系统提出了一种自适应量化稳定控制方案,与[16]采用的反步技术相比，上述自适应量化控制器相对简单，且对系统阶数 n 不敏感。采用这种方案，即使有非常粗糙的输入和输出量化器，所有的闭环系统信号都是有界的，而且通过适当地选择系统设计参数，跟踪误差可以变得任意小。

对于[21]这种方案仍较复杂，对此本文结合了输入量化和状态量化，并重新设计了控制器，研究了具有输入量化和状态量化系统的稳定性分析，并通过数值仿真验证方案的有效性，最后给出结论。主要难点体现在以下几个方面：

(1) 如何设计选取控制器以保证系统的稳定性是研究的难点之一。

(2) 引入量化器会导致系统信号不连续，如何选取合适的 Lyapunov 函数并进行稳定性分析是研究的难点之一。

(3) 怎样选取量化参数来保证闭环系统所有的信号都满足全局一致有界性是研究的难点之一。

1.3 本文的主要工作及结构安排

本文基于已有的量化控制成果，研究了具有输入量化和状态量化的一类非线性不确定系统反馈控制设计与稳定性分析。本文共分四章，具体的结构安排如下：

第一章介绍了本文的研究背景及意义，分析了量化控制以及非线性反馈控制研究的发展现状，并阐述了全文的工作结构安排。

第二章首先回顾了 Lyapunov 稳定性理论，然后介绍了我们需要用到的量化器的数学模型与性能介绍，最后列举了一些论文证明过程中会用到的引理与结论。

第三章研究了具有输入量化和状态量化的一类非线性不确定系统，运用反步法为非线性不确定系统设计出一个控制器 $u(t)$ 和虚拟控制律 α_n ，在输入量化和状态量化同时进行自适应反步控制，并找到一个李雅普诺夫函数，分别证明在量化输入的前提下状态未量化和状态被量化时闭环系统的信号是否满足全局一致有界。数值仿真验证了该控制方案的有效性。

第四章对全文进行了总结。

第 2 章 预备知识

2.1 稳定性理论

李雅普诺夫稳定性理论研究的是在扰动下稳定点的稳定性问题。接着我们主要介绍李雅普诺夫第二法的主要定理。

考虑连续非线性系统

$$\dot{x} = f(x, t), t \geq 0 \quad (2.1)$$

其中 $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathfrak{R}^n$ ，对于 $t \geq 0, f(0, t) = 0$ ，系统平衡状态 $x_e = 0$ 。

定理：对此非线性系统，寻找一个具有连续一阶偏导的标量函数 $V(x)$ ，如果 $V(x)$ 正定， $V(x)$ 的导数负定，则系统在平衡状态是渐进稳定的，这样的 $V(x)$ 就是系统的一个李雅普诺夫函数，且此时当 $\|x\| \rightarrow \infty, V(x) \rightarrow \infty$ 。

2.2 量化器

在本文中，我们选用迟滞量化器，与对数量化器相比，迟滞量化器具有额外的量化级别，可以避免抖动。在本文中我们用 $q(u(t))$ 表示迟滞量化器，每当 $q(u(t))$ 从一个值转换到另一个值时，都会经过一些驻留时间，然后才能发生新的转换，如图 2.1 迟滞量化器所示，这可以看作是向量化器添加滞后的一种方式。 $q(u(t))$ 的表达式：

$$q(u) = \begin{cases} u_i \operatorname{sgn}(u) & \frac{u_i}{1+\delta} < |u| \leq u_i, \dot{u} < 0, \text{ or} \\ & u_i < |u| \leq \frac{u_i}{1-\delta}, \dot{u} > 0 \\ u_i(1+\delta) \operatorname{sgn}(u), & u_i < |u| < \frac{u_i}{1-\delta}, \dot{u} < 0, \text{ or} \\ & \frac{u_i}{1-\delta} < |u| \leq \frac{u_i(1+\delta)}{1-\delta}, \dot{u} > 0 \\ 0, & 0 \leq |u| < \frac{u_{\min}}{1+\delta}, \dot{u} < 0, \text{ or} \\ & \frac{u_{\min}}{1+\delta} \leq |u| < u_{\min}, \dot{u} > 0 \\ q(u(t^-)), & \dot{u} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $u_i = \rho^{(1-i)} u_{min}, i = 1, 2, \dots, u_{min} > 0, 0 < \rho < 1$ 和 $\delta = \frac{1-\rho}{1+\rho}$ 。 $q(u)$ 在集合

$U = \{0, \pm u_i, \pm u_i(1+\delta)\}$ 。 u_{min} 确定 $q(u)$ 死区大小。参数 ρ 为量化密度的衡量标准。 ρ 越小，量化器越粗糙。当 ρ 接近于零时， δ 接近于 1，然后那么当 u 在该区间内的范围内， $q(u)$ 将有更少的量化水平。迟滞量化器的控制作用应满足闭环系统解的存在性和唯一性。由于系统是不确定的，所以迟滞量化器的参数 ρ 不是已知的，我们应该根据确保闭环系统的稳定性准则来选取它。

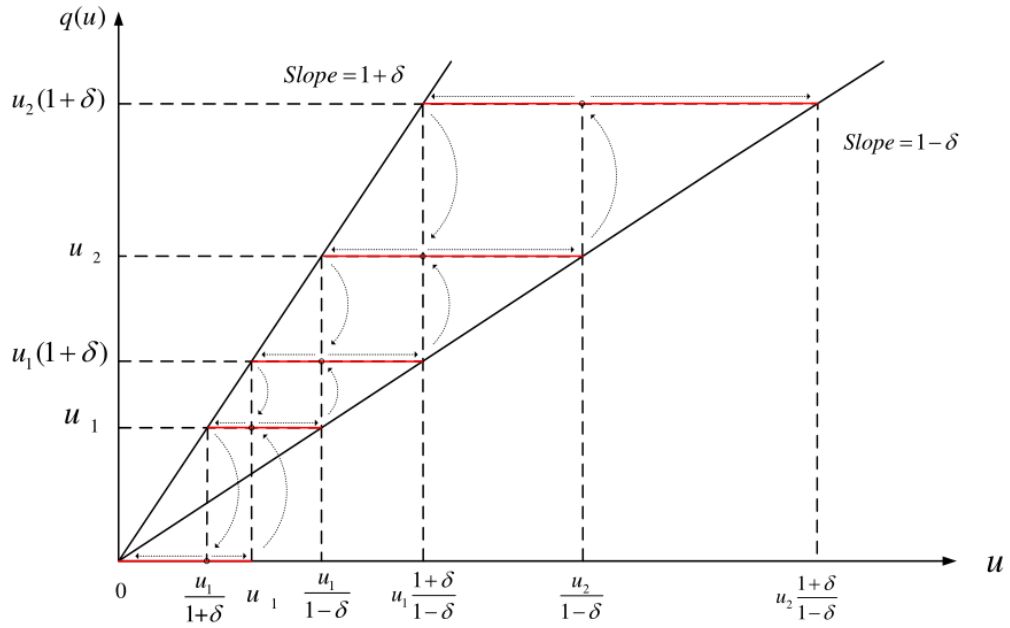


图 2.1 迟滞量化器

为了提出合适的控制方案，我们将迟滞量化器分解成线性部分和非线性部分，如下：

$$q(u(t)) = u(t) + d(t) \quad (2.3)$$

其中 $d(t) = q(u(t)) - u(t) \in \mathfrak{R}^1$ 。并且利用引理 1 我们可以得到量化器的性质：

$$(1-\delta)u \leq q(u) \leq (1+\delta)u \quad (2.4)$$

$$|q(u) - u| \leq \delta u \quad (2.5)$$

2.3 引理

本节介绍一下之后证明过程中用到的一些重要引理。

引理 1^[14]: 非线性部分 $d(t)$ 满足以下不等式:

$$d^2(t) \leq \delta^2 u^2, \forall |u| \geq u_{\min} \quad (2.6)$$

$$d^2(t) \leq u_{\min}^2, \forall |u| \leq u_{\min} \quad (2.7)$$

引理 2^[14]: 虚拟控制律 $\alpha_i, i=1, \dots, n-1$ 和控制器 $u(t)$ 满足 Lipschitz 条件,

即

$$|\alpha_i| \leq k_{\alpha_i} \|\bar{z}_i(t)\| \quad (2.8)$$

$$|u(t)| \leq k_u \|z(t)\| \quad (2.9)$$

其中正常数 k_{α_i} 和 k_u 取决于给定的设计参数和系统参数。

引理 3^[16]: 状态量化的影响如下:

$$|\psi(q(x_1), \dots, q(x_n)) - \psi(x_1, \dots, x_n)| \leq \Delta_\psi \quad (2.10)$$

$$\|\phi(q(x_1), \dots, q(x_n)) - \phi(x_1, \dots, x_n)\| \leq \Delta_\phi \quad (2.11)$$

$$|z_i(q(x_1), \dots, q(x_n)) - z_i(x_1, \dots, x_n)| \leq \Delta_{z_i} \quad (2.12)$$

$$|\alpha_i(q(x_1), \dots, q(x_n)) - \alpha_i(x_1, \dots, x_n)| \leq \Delta_{\alpha_i} \quad (2.13)$$

其中 $i=1, \dots, n, \Delta_\psi$ 和 Δ_ϕ 为正常数, 分别取决于量化界限和 Lipschitz 常数 L_ψ

和 L_ϕ , Δ_{z_i} 为正, 取决于量化界限 δ 和控制设计参数 (c_1, \dots, c_{i-1}) , Δ_{α_i} 为正常

数, 取决于量化界限 δ 和控制设计参数 (c_1, \dots, c_{i-1}) 。

引理 4^[16]: 状态 (x_1, x_2, \dots, x_n) 满足以下不等式

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \leq L_x \|(z_1, \dots, z_n)\| \quad (2.14)$$

其中 L_x 是一个正常数, 它取决于控制设计参数 (c_1, \dots, c_n) 。

第 3 章 具有输入量化和状态量化的一类非线性不确定系统的自适应反步控制

3.1 问题描述

在本文中，我们考虑一类描述如下的非线性不确定系统

$$\dot{x}^{(n)}(t) = q(u(t)) + \psi(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + \phi^T(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})\theta \quad (3.1)$$

$$x_{i+1}^q = q(x^{(i)}), i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

其中 $x(t) = [x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)]^T \in \mathfrak{R}^n$ 和 $q(u(t)) \in \mathfrak{R}^1$ 分别是系统的状态和输入, $\psi \in \mathfrak{R}^1$ 和 $\phi \in \mathfrak{R}^r$ 是已知的非线性函数, $\theta \in \mathfrak{R}^r$ 是未知常数向量。本文使用量化状态 $(q(x), \dot{q}(x), \dots, q(x^{(n-1)}))$, 并对输入信号进行量化。其中 $q(\cdot)$ 表示迟滞量化器, $u(t) \in \mathfrak{R}^1$ 是需要量化的输入信号, $q(u(t))$ 表示量化输入信号。

本文对控制律做出以下假设

假设 1: 非线性不确定函数 ψ 和 ϕ 满足全局 Lipschitz 条件

$$|\psi(y_1) - \psi(y_2)| \leq L_\psi \|y_1 - y_2\| \quad (3.3)$$

$$\|\phi(y_1) - \phi(y_2)\| \leq L_\phi \|y_1 - y_2\| \quad (3.4)$$

其中 L_ψ 和 L_ϕ 是已知常数, $y_1, y_2 \in \mathfrak{R}^n$ 是实向量。

假设 2: 量化状态 $(q(x), \dot{q}(x), \dots, q(x^{(n-1)}))$ 是可测量的并且可用于控制器设计。

假设 3: 未知参数向量 θ 在一个紧致的已知的凸集 \mathbb{C} 内, 比如 $\|\theta_a - \theta_b\| \leq \theta_M$ 对于任意 $\theta_a, \theta_b \in \mathbb{C}$ 和任意一个常量 θ_M 成立。

假设 4: 对于闭环非线性不确定系统 (1) - (3), 我们假设满足解的存在性和唯一性。

控制的目的是通过使用量化状态 $(q(x), \dot{q}(x), \dots, q(x^{(n-1)}))$ 和量化输入 $q(u(t))$ 为系统设计自适应控制器 $u(t)$ 和虚拟控制律 α_n , 并证明闭环系统的所有信号全局一致有界。

3.2 自适应反步控制器设计

为了使用反步法设计控制器，非线性系统被重新写为以下形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_i &= x_{i+1}, i=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_n &= q(u(t)) + \psi(x_1, \dots, x_n) + \theta^T \phi(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}\quad (3.5)$$

其中 $x_1 = x, x_i = x^{(i-1)}, i=2, 3, \dots, n$ 。

3.2.1 状态未被量化

如果状态 $x_i, i=1, 2, \dots, n$ 未被量化，我们引入坐标变换

$$\begin{aligned}z_1(x_1) &= x_1 \\ z_i(x_1, \dots, x_i) &= x_i - \alpha_{i-1}, i=2, 3, \dots, n\end{aligned}\quad (3.6)$$

其中 α_i 是 $(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ 的虚拟控制律，将在第 i 步确定。

步骤 $i (i=1, \dots, n-1)$ ，我们遵循标准反步设计技术并同时考虑状态量化进行设计，我们选取

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_1) &= -(c_1 + \frac{1}{2} + k_d)z_1(x_1) \\ \alpha_i(x_1, \dots, x_i) &= -\left(c_i + \frac{1}{2} + k_d\right)z_i - \dot{\alpha}_{i-1} \\ &= -(c_i + \frac{1}{2} + k_d)z_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1}, \\ &\quad i=2, \dots, n-1\end{aligned}\quad (3.7)$$

其中 c_i 和 k_d 是正常数。

步骤 n 。在最后一步中，实际控制输入 u 出现我们进行量化处理后，设置 \dot{z}_n 为

$$\begin{aligned}\dot{z}_n &= q(u) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \psi + \theta^T \phi \\ &= u(t) + d(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \psi + \theta^T \phi\end{aligned}\quad (3.8)$$

我们选择 Lyapunov 函数：

$$V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (3.9)$$

其中 Γ 是一个正定矩阵， $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ 。

则它的导数为：

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &= \sum_{i=1}^n z_i \dot{z}_i + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &\leq -\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i^2 + \frac{1}{2} z_n^2 + z_n \left(u(t) + d(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \psi + \theta^T \phi \right) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &\leq -\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i^2 + z_n d(t) + z_n \left(u(t) + \frac{1}{2} z_n - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \psi + \hat{\theta}^T \phi \right) \\ &\quad + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\Gamma \phi z_n - \dot{\tilde{\theta}}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

我们设计控制器 u 并选取 $\dot{\hat{\theta}}$ 为

$$\begin{aligned} u &= \alpha_n - \psi - \hat{\theta}^T \phi \\ &= -\left(c_n + \frac{1}{2} + k_d \right) z_n + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} - \psi - \hat{\theta}^T \phi \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = Proj\{\Gamma \phi z_n\} \quad (3.12)$$

其中 c_n 和 k_d 为正常数。 $Proj\{\cdot\}$ 为投影算子，它满足这样的性质

$-\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} Proj\{\tau\} \leq -\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tau$ ，它确保对于给定的常量 θ_M 满足 $\|\hat{\theta}\| \leq \theta_M$ 。

所以有

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + z_n d(t) - k_d z_n^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\Gamma \phi z_n - Proj\{\Gamma \phi z_n\}) \\ &\leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + z_n d(t) - k_d z_n^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

现在我们需要找到一个合适的量化参数 δ 来保证 V_n 的有界性。为此，我们

需要用到引理 2。根据假设 1，函数 ϕ 和 ψ 满足 Lipschitz 连续性条件。由于

$\alpha_1 = -\left(c_1 + \frac{1}{2} + k_d\right)z_1$, 可以证明

$$|\alpha_1| \leq \left(c_1 + \frac{1}{2} + k_d\right)|z_1| = k_{\alpha_1}|z_1| \quad (3.14)$$

其中 $k_{\alpha_1} = \left(c_1 + \frac{1}{2} + k_d\right)$ 。

$$\left|\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}\right| \leq \left(c_1 + \frac{1}{2} + k_d\right) = k_{\alpha_1} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} |x_2| &\leq |z_2 + \alpha_1| \leq |z_2| + k_{\alpha_1}|z_1| \\ &\leq \left(2k_{\alpha_1}^2 z_1^2 + 2z_2^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \max\left(\sqrt{2k_{\alpha_1}}, \sqrt{2}\right) \|\bar{z}_2(t)\| = k_{x_2} \|\bar{z}_2(t)\| \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $k_{x_2} = \max\left(\sqrt{2k_{\alpha_1}}, \sqrt{2}\right)$ 。

根据类似的步骤得到 $\alpha_i = -\left(c_i + \frac{1}{2} + k_d\right)z_i + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1}, i = 2, \dots, n-1$, 我们

有

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &\leq \left(c_i + \frac{1}{2} + k_d\right)|z_i| + \left|\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1}\right| \\ &\leq \left(c_i + \frac{1}{2} + k_d\right)|z_i| + \left|\sum_{j=1}^{i-1} k_{\alpha_{i-1}} |x_{j+1}|\right| \\ &\leq k_{\alpha_i} \|\bar{z}_i(t)\| \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\left|\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right| \leq k_{\alpha_i} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} |x_i| &\leq |z_i + \alpha_{i-1}| \\ &\leq |z_i| + k_{\alpha_i} \|\bar{z}_i(t)\| \leq k_{x_i} \|\bar{z}_i(t)\| \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\|\bar{x}_i\| = \left(\sum_{j=1}^i x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j=1}^i k_{x_j} \|\bar{z}_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^i k_{x_j} \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{z}_i\| \leq k_{\bar{x}_i} \|\bar{z}_i\|
\end{aligned} \tag{3.20}$$

根据 $\|\hat{\theta}\| \leq \theta_M$ ，假设 1 和 (3.17) - (3.20)，(3.11) 中的控制器 u 最终可以满足

$$|u(t)| \leq k_u \|z(t)\| \tag{3.21}$$

我们可以在以下定理中说明我们的主要结果。

定理 1: 考虑由系统 (3.5)、具有虚拟控制律 (3.7) 的自适应控制器 (3.11) 和迟滞量化器 (2.2) 组成的闭环自适应系统。若使系统中的所有信号均有界，那么量化参数 δ 需满足下式

$$\beta - \delta k_u \geq \epsilon > 0 \tag{3.22}$$

其中 $\beta = \min\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ 和 ϵ 为正常数。此外，稳定误差最终有界如下：

$$\|z(t)\| \leq B, B = \sqrt{\frac{u_{min}^2}{4k_d\epsilon}} \tag{3.23}$$

证明：我们需要考虑两种情况以获得 \dot{V}_n 的界限。

情况 1。 $|u(t)| \leq u_{min}$ ，我们使用 (2.7) 中的性质 $|d(t)| \leq u_{min}$ ，带入 (3.13)

中再利用 $|z_n| u_{min} \leq k_d z_n^2 + \frac{1}{4k_d} u_{min}^2$ 放缩得到

$$\begin{aligned}
\dot{V}_n &\leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + |z_n| u_{min} - k_d z_n^2 \\
&\leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + \frac{1}{4k_d} u_{min}^2 \\
&\leq -\beta \|z(t)\|^2 + \frac{1}{4k_d} u_{min}^2, \forall |u(t)| \leq u_{min}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

情况 2。 $|u(t)| > u_{min}$ ，我们使用 (2.6) 中的性质 $d^2(t) \leq \delta^2 u^2$ ，(3.13) 可以写成

$$\dot{V}_n \leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + \delta |u(t)| \|z\| \quad (3.25)$$

根据引理 2 中的我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i z_i^2 - \delta |u| \|z\| &\geq \beta \|z(t)\|^2 - \delta k_u \|z(t)\|^2 \\ &= (\beta - \delta k_u) \|z(t)\|^2, \forall |u(t)| > u_{min} \end{aligned}$$

如果选择量化参数 δ 满足 (3.22), 则 (3.25) 中的 \dot{V}_n 满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + \delta |u(t)| \|z\| \\ &\leq -(\beta - \delta k_u) \|z(t)\|^2 \\ &\leq -\epsilon \|z(t)\|^2 < 0, \forall |u(t)| > u_{min} \end{aligned} \quad (3.26)$$

综合 (3.24) 和 (3.26) 中的两种情况, 对于所有的 $t \geq 0$, 我们可以得到

$$\dot{V}_n \leq -\epsilon \|z(t)\|^2 + \frac{1}{4k_d} u_{min}^2 \quad (3.27)$$

它遵循 $\dot{V}_n < 0, \forall \|z(t)\| \geq \sqrt{\frac{u_{min}^2}{4k_d\epsilon}}$, 那么 $z(t)$ 的最终界限满足 (3.23)。从

(3.27) 和 (3.12), z_1, z_2, \dots, z_n 和 $\hat{\theta}$ 在条件 (3.22) 下有界。说明 x_1 是有界的, 而 x_2 的有界性源于 α_1 的有界性和 $x_2 = z_2 + \alpha_1$ 。因此, $x_i (i = 3, \dots, n)$ 的有界性可以由 (3.7) 中的 α_i 的有界性和 $x_i = z_i + \alpha_{i-1}$ 得出。所以我们综合 (3.11) 和 (3.21), 我们得到控制器 $u(t)$ 有界的。因此, 系统所有的信号都是有界的。

3.2.2 状态被量化

系统状态 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}$ 被量化并且满足量化器的基本性质, 量化状态 $q(x_i), i = 1, \dots, n$ 可被测量, 此时

$$u(t) = \bar{\alpha}_n - \bar{\psi} - \hat{\theta}^T \bar{\phi}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(c_n + \frac{1}{2} + k_d\right) \bar{z}_n - \bar{\psi}(q(x_1), \dots, q(x_n)) \\
&\quad - \hat{\theta}^T \phi(q(x_1), \dots, q(x_n)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} q(x_{j+1})
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = Proj\{\Gamma \bar{\phi} \bar{z}_n\} = Proj\{\Gamma \phi(q(x_1), \dots, q(x_n)) \bar{z}_n\} \tag{3.29}$$

$$\bar{z}_1 = q(x_1)$$

$$\bar{z}_i = q(x_i) - \bar{\alpha}_{i-1} \tag{3.30}$$

$$\bar{\alpha}_1 = -\left(c_1 + \frac{1}{2} + k_d\right) \bar{z}_1$$

$$\bar{\alpha}_i = -\left(c_i + \frac{1}{2} + k_d\right) \bar{z}_i + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} q(x_{j+1}), i = 2, \dots, n \tag{3.31}$$

为了确保所有信号的有界性，我们同样选取 Lyapunov 函数

$$V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \tag{3.32}$$

求一阶导数

$$\begin{aligned}
\dot{V}_n &= \sum_{i=1}^n z_i \dot{z}_i + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\
&\leq -\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i^2 + z_n d(t) + z_n \left(u(t) + \frac{1}{2} z_n - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \psi + \hat{\theta}^T \phi \right) \\
&\quad + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\Gamma \phi z_n - \dot{\tilde{\theta}})
\end{aligned} \tag{3.33}$$

考虑到已经进行状态量化，此时

$$\begin{aligned}
u(t) &= \bar{\alpha}_n - \bar{\psi} - \hat{\theta}^T \bar{\phi} = -\left(c_n + \frac{1}{2} + k_d\right) \bar{z}_n - \bar{\psi}(q(x_1), \dots, q(x_n)) \\
&\quad - \hat{\theta}^T \phi(q(x_1), \dots, q(x_n)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} q(x_{j+1})
\end{aligned} \tag{3.34}$$

所以有

$$\dot{V}_n \leq -\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i^2 + z_n d(t) + z_n \left(u(t) - \alpha_n + \alpha_n + \frac{1}{2} z_n - \dot{\alpha}_{n-1} + \psi + \hat{\theta}^T \phi \right) + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\Gamma \phi z_n - \dot{\tilde{\theta}})$$

$$\begin{aligned} \leq & -\sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i^2 + z_n d(t) - k_d z_n^2 + z_n (\bar{\alpha}_n - \alpha_n) + z_n [\alpha_n - \dot{\alpha}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} + k_d\right)] \\ & + z_n (\psi - \bar{\psi}) + z_n \hat{\theta}^T (\phi - \bar{\phi}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

帶入 $\alpha_n - \dot{\alpha}_{n-1} = -(c_n + \frac{1}{2} + k_d)z_n$ ，再利用引理 3 中的性质，有

$$\begin{aligned} \dot{V}_n & \leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + z_n d(t) - k_d z_n^2 + z_n (\bar{\alpha}_n - \alpha_n) + z_n (\psi - \bar{\psi}) + z_n \hat{\theta}^T (\phi - \bar{\phi}) \\ & \leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + z_n d(t) - k_d z_n^2 + |z_n| \Delta_{\alpha_n} + |z_n| \Delta_{\psi} + |z_n| \|\hat{\theta}^T\| \Delta_{\phi} \\ & \leq -\sum_{i=1}^n c_i z_i^2 + z_n d(t) - k_d z_n^2 + \frac{3}{4} c_n |z_n|^2 + \frac{1}{c_n} \Delta_{\alpha_n}^2 + \frac{1}{c_n} \Delta_{\psi}^2 + \frac{1}{c_n} \|\hat{\theta}^T\|^2 \Delta_{\phi}^2 \\ & \leq -\frac{c}{2} \|z(t)\|^2 + z_n d(t) - k_d z_n^2 + \frac{1}{c_n} \Delta_{\alpha_n}^2 + \frac{1}{c_n} \Delta_{\psi}^2 + \frac{1}{c_n} \|\hat{\theta}^T\|^2 \Delta_{\phi}^2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

其中 $c = \min \left\{ c_1, c_2, \dots, \frac{1}{4} c_n \right\}$ 。我们又再次回到定理 1 的结果，对 $|u(t)| \leq u_{min}$

和 $|u(t)| > u_{min}$ 两种情况考虑以获得 \dot{V}_n 的界限，此时只是多了后面几项，我们将常数项化到一起取为 M ，最后我们得到

$$\dot{V}_n \leq -\epsilon \|z(t)\|^2 + M \quad (3.37)$$

此时需要量化参数 δ 需满足下式

$$\frac{c}{2} - \delta k_u \geq \epsilon > 0 \quad (3.38)$$

稳定误差最终有界如下：

$$\|z(t)\| \leq \sqrt{M} \quad (3.39)$$

此时也满足 $\dot{V}_n < 0, \forall \|z(t)\| \geq \sqrt{M}$ ，因此，系统所有的信号都是有界的。并

且说明最终的稳定误差与所设置的量化参数有关，所以我们可以通过选取合适的量化参数确保系统的稳定性和稳定误差在可调范围内。

3.3 数值仿真

第 4 章 全文总结

本文系统的研究了具有输入量化和状态量化的一类非线性不确定系统，我们运用反步设计思路，设计并选取一个自适应控制器 $u(t)$ 和虚拟控制律 α_n ，并找到一个李雅普诺夫函数 V_n ，运用李雅普诺夫第二法，分别在状态未被量化和状态被量化时，证明了闭环系统的所有信号全局一致有界。并且得到最终的稳定误差与量化参数相关，我们可以通过选定合适的量化参数来确保系统的稳定性和稳定误差在可调范围内。最后通过数值仿真验证了该控制方案的有效性。

参考文献

- [1] 刘豹, 唐万生主编; 陈增强, 马寿峰审. 现代控制理论[M]. 北京: 机械工业出版社. 2011.
- [2] Oliver B M, Pierce J R, Shannon C E. The Philosophy of PCM [J]. Proceedings of the IRE, 1948, 36: 1324-31.
- [3] Shannon C E. A mathematical theory of communication [J]. Bell Syst Tech J, 1948, 27: 623-56.
- [4] Kalman R. Nonlinear aspects of sampled data control systems[M]. Nonlinear Circuit Analysis VI, 1956, 273-313.
- [5] Lyapunov A M. The general problem of the stability of motion[J]. International Journal of Control, 1992, V55(3): 531-534.
- [6] Kanellakopoulos I, Kokotovic P V, Morse A S. Systematic Design of Adaptive Controllers for Feedback Linearizable Systems [J]. 1991 American Control Conference, 1991: 649-54.
- [7] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P V. Nonlinear and adaptive control design[M]. New York: Wiley, 1995.
- [8] Elia N, Mitter S K. Stabilization of linear systems with limited Information [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(9): 1384-1400.
- [9] Fu M, Xie L. The sector bound approach to quantized feedback Control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(11): 1698-1711.
- [10] Hayakawa T, Ishii H, Tsumura K. Adaptive quantized control for nonlinear uncertain systems[J]. Systems & Control Letters, 2009, 58(9): 625-632.
- [11] 胡寿松主编. 自动控制原理 第6版[M]. 北京: 科学出版社, 2013.03.
- [12] Khalil H K, Nonlinear Systems, third edition[M]. New York: Prentice-Hall, 2002.
- [13] Coutinho D F, Fu M, De Souza C E. Input and Output Quantized Feedback Linear Systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(3): 761-766.
- [14] Zhou J, Wen C, Yang G. Adaptive Backstepping Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems With Quantized Input Signal [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(2): 460-464.
- [15] Yu X, Lin Y. Adaptive Backstepping Quantized Control for a Class of Nonlinear Systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(2): 981-985.
- [16] Zhou J, Wen C, Wang W, et al. Adaptive Backstepping Control of Nonlinear Uncertain Systems With Quantized States [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(11): 4756-4763.
- [17] 张正强. 不确定非线性系统的 Backstepping 控制[D]. 南京理工大学, 2011.
- [18] Li G, Lin Y, Zhang X. Global output feedback stabilization for a class of nonlinear systems with quantized input and output [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(2): 187-203.
- [19] Lantao X, Changyun W, Lei W, et al. Adaptive output feedback regulation for a class of nonlinear systems subject to input and output quantization [J]. Journal of The Franklin Institute-engineering and Applied Mathematics, 2017.
- [20] Zhaosheng Y, Zhaoxu Y, Yekai Y, et al. Observer-Based Adaptive Finite-Time Quantized

- Tracking Control of Nonstrict-Feedback Nonlinear Systems With Asymmetric Actuator Saturation [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 2019.
- [21] Yu X, Lin Y. Adaptive Quantized Tracking Control for a Class of Nonlinear Systems [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022: 1–6.

致 谢

四年的大学时光转瞬即逝，大学的学习生活很快就要过去，在这四年的学习生活中，收获了很多，而这些成绩的取得是和一直关心帮助我的人分不开的。

首先要深深地感谢导师陈文杰老师，是您给了我如此宝贵的学习机会。导师的平易近人、宽厚的胸襟和幽默风趣，使我深感温暖，导师的博学多才给我的论文选题与研究带来了启发与帮助，您是我学习的榜样与楷模。

同时要感谢蒋志豪学长，在我的毕业论文设计过程中给予了悉心的帮助和关心，为我答疑解惑，使我获益匪浅。

最后，我要感谢我的父母对我的关心与理解，正是他们无私的支持和鼓励，才使得我能专注于学习，顺利完成学业。

感谢所有在我写作期间帮助我的老师、同学、父母，你们的帮助对我完成论文是不可或缺的。对此，我永远铭记在心！