Règle de la limite

Définition: Pour $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, on dit que

$$\lim_{n\to\infty} g(n) = \ell \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.q. } |g(n) - \ell| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$
$$\iff -\epsilon \leq g(n) - \ell \leq \epsilon$$
$$\iff \ell - \epsilon \leq g(n) \leq \ell + \epsilon$$

Règle: 1) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+$ alors $f(n) \in \Theta(g(n))$

et donc $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n))$

2) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ alors $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ mais $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$

De façon équivalente $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ mais $f(n) \notin \Theta(g(n))$

et donc $\mathcal{O}(f(n)) \subsetneq \mathcal{O}(g(n))$

3) Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$ alors $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$ mais $f(n) \notin \mathcal{O}(g(n))$

De façon équivalente $f(n) \in \Omega(g(n))$ mais $f(n) \notin \Theta(g(n))$

Règle de l'hôpital:

Si $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = 0$

ou $\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} g(n) = +\infty$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$$

Notation asymptotique conditionnelle

Soient $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ et $P : \mathbb{N} \longrightarrow \{\text{vrai, faux}\}$

$$\underbrace{\mathcal{O}(f(n) \mid P(n))}_{f(n) \text{ sachant } P(n)} = \{t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \exists c \in \mathbb{R}^{+}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$$

$$\text{tels que } \forall n \geq n_0, \underbrace{P(n) \Longrightarrow}_{\text{si } P(n) \text{ vrai, alors}} t(n) \leq cf(n)\}$$

Notation asymptotique conditionnelle

Définitions:

1) Une fonction f est éventuellement non décroissante s'il $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ f(n+1) \geq f(n)$

2) Une fonction f est b-lisse (b-smooth) si pour $b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$

a) elle est e.n.d. (éventuellement non décroissante)

b) $f(bn) \in \mathcal{O}(f(n))$

Notation asymptotique conditionnelle

Définition: Une fonction f est lisse si elle est b-lisse $\forall b \geq 2, b \in \mathbb{N}$

Théorème: Si f est b-lisse pour un certain $b \geq 2, b \in \mathbb{N}$,

alors f est lisse.

Notation asymptotique conditionnelle

Règle de lissage (smoothness rule):

Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ une fonction lisse,

soit $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$,

soit $t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ une fonction e.n.d.

alors

$$t(n) \in \Theta(f(n) \,|\, n \text{ puissance } b)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$t(n) \in \Theta(f(n))$$