Résolution de récurrences

Il arrive souvent que pour analyser la complexité d'un algorithme on doive résoudre une récurrence.

Exemple: Dans le cas du produit de deux entiers de n chiffres et de l'algorithme diviser-pour-régner, on avait:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 3T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n & \text{sinon} \end{cases}$$

Comment résoudre?

Résolution de récurrences

Solution 1: Intuition ou conjecture

Étape 1: Calculer les premières valeurs de la récurrence

Étape 2: Regarder pour des “patterns” ou régularités

Étape 3: Trouver une forme générale

Étape 4: Démontrer que cette forme est correcte

Résolution de récurrences

Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants:

Soit la récurrence R

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$$

Voici les étapes de la résolution:

1) Trouver le polynôme caractéristique $P(x)$ de la récurrence R

2) Trouver les racines de $P(x)$

Si ces racines sont distinctes

3) La solution générale est de la forme $t_n = \sum_{i=1}^{k} c_i r_i^n$

4) Résoudre le système d'équations linéaires donné par les conditions initiales pour trouver la valeur des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$

5) Écrire la solution t_n en fonction de ces constantes c_i

Résolution de récurrences

Récurrences linéaires homogènes à coefficients constants:

Soit la récurrence R

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$$

Voici les étapes de la résolution:

1) Trouver le polynôme caractéristique $P(x)$ de la récurrence R

2) Trouver les racines de $P(x)$

Si ces racines ne sont pas toutes distinctes

3) La solution générale est de la forme $t_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n$

où on a ℓ racines r_i de multiplicité m_i

4) Résoudre le système d'équations linéaires donné par les conditions initiales pour trouver la valeur des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$

5) Écrire la solution t_n en fonction de ces constantes c_i

Résolution de récurrences

Récurrences linéaires non-homogènes à coefficients constants (cas particulier):

Soit la récurrence R

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n$$

où b est une constante.

Voici les étapes de la résolution:

1) On commence par transformer cette récurrence en une récurrence homogène

Pour ce cas particulier, on peut multiplier la récurrence R par b
et ensuite remplacer n par $n-1$ dans l'équation obtenue

Si on soustrait de la récurrence initiale, cette nouvelle récurrence, nous obtenons une récurrence homogène R^*

2) Résoudre R^* (cas homogène) comme d'habitude mais en s'assurant que les conditions initiales satisfont aussi l'équation de départ

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n$$