



报童模型

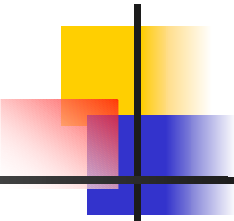
Newsboys Model

邱灿华

同济大学经济与管理学院

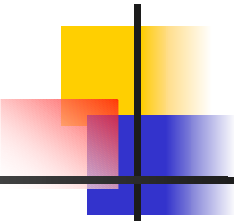
报童问题

- 一名报童以每份0.20元的价格从发行人那里订购报纸，然后再以0.50元的零售价格出售。但是，他在订购第二天的报纸时不能确定实际的需求量，而只是根据以前的经验，知道需求量具有均值为50份、标准偏差为12份的正态分布。那么他应当订购多少份报纸呢？



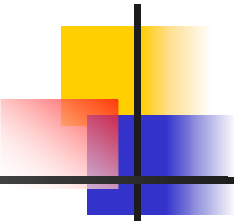
约会问题

- 您要与您的女朋友/男朋友晚上六点钟在她/他家附近的一个地方约会。您估计从您的办公室乘车过去所用的平均时间是30分钟，但由于高峰期会出现交通阻塞，因此还会有一些偏差。路程所用时间的标准偏差估计为10分钟。虽然很难量化您每迟到一分钟所造成的损失，但是您觉得每晚到1分钟要比早到1分钟付出十倍的代价。那么您应当什么时候从办公室出发呢？



超额预售机票问题

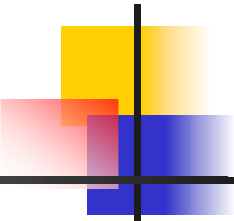
- 一家航空公司发现，一趟航班的持有机票而未登机（“不露面”）的人数具有平均值为20人、标准偏差为10人的正态分布。根据这家航空公司的测算，每一个空座位的机会成本为100美元。乘客确认票后但因满座不能登机有关的罚款费用估计为400美元。该航空公司想限制该航班的“超额预订”。飞机上共有150个座位。确认预订的截止上限应当是多少？



有不确定因素的决策问题

这三个问题有以下几个方面的共同点：

- 都有一个决策变量 X (报纸供应量；出发时间；多预售的座位) 和一个随机变量 Y (报纸需求量；实际路程时间；持票而未登机人数)。这两个变量共同决定结果。但是我们必须先选定 X 的数值，然后才能看到 Y 的数值。
- 都有一个 X 大于 Y 的单位成本（过量成本）（未售出的报纸；一名因客满而未能乘机的乘客；提前一分钟）。
- 都有一个 Y 大于 X 的单位成本（不足成本）（差一份报纸；一个空座；晚到一分钟）。
- 都需要测算 Y 的概率分布。



解法

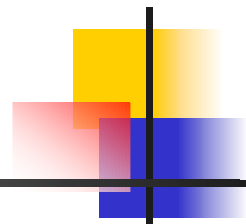
最优解是 X^* , 满足以下等式 :

$$\text{Prob}[Y > X^*] = \frac{c_o}{c_u + c_o}.$$

该解法就是确定 X 的值 使 Y 大于 X 的概率等于 “临界比率”。

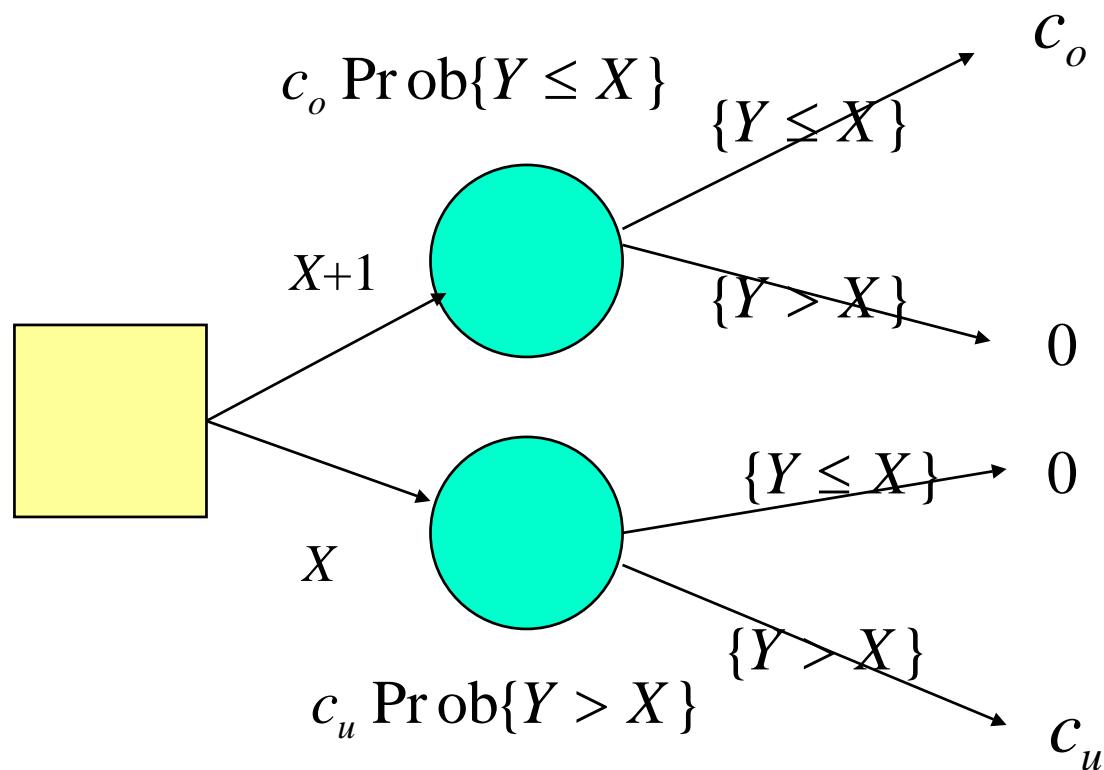
注意到

- X^* 会随着 c_u 增加而增加。
- X^* 会随着 c_o 增加而减少。



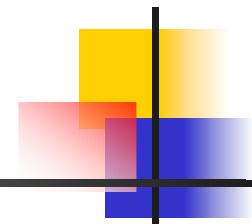
公式推导

■ 决策树



$$c_u \text{Pr ob}\{Y > X\} = c_o \text{Pr ob}\{Y \leq X\} = c_o (1 - \text{Pr ob}\{Y > X\})$$

$$\Rightarrow (c_u + c_o) \text{Pr ob}\{Y > X\} = c_o.$$

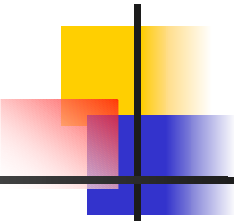


报童问题的解

$c_o = 0.20$ 元, $c_u = 0.5 - 0.2 = 0.30$ 元。最佳的 X^* 应满足：

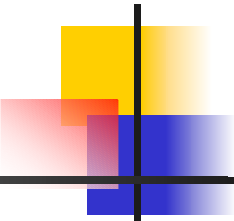
$$\text{Prob}[Y > X^*] = \frac{c_o}{c_u + c_o} = \frac{0.2}{0.2 + 0.3} = 0.4$$

根据正态表, $z = 0.25$ 。因此,
 $X^* = 50 + 0.25(12) = 53$ 份.



$$TRC = h \int_0^x (\mu - x) f(x) dx + p \int_x^{\infty} (x - \mu) f(x) dx$$

$$F(x) = \frac{p}{p + h}$$



约会问题

- 您要与您的女朋友/男朋友晚上六点钟在她/他家附近的一个地方约会。您估计从您的办公室乘车过去所用的平均时间是30分钟，但由于高峰期会出现交通阻塞，因此还会有一些偏差。路程所用时间的标准偏差估计为10分钟。虽然很难量化您每迟到一分钟所造成的损失，但是您觉得每晚到1分钟要比早到1分钟付出十倍的代价。那么您应当什么时候从办公室出发呢？



约会问题的解法

设 X 为允许的路程时间，设 Y 为实际路程时间。
 $X < Y$ 就意味着会比约定时间晚到，因此， $c_u = 10c_o$. 最佳的 X^* 应当满足

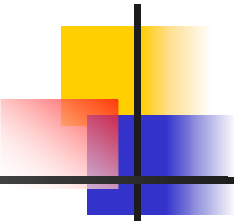
$$\text{Prob}[Y > X^*] = \frac{c_o}{c_u + c_o} = \frac{c_o}{10c_o + c_o} = \frac{1}{11} = 0.09$$

根据正态表， $z = 1.34$ ，因此，
 $X^* = 30 + 1.34(10) = 43.4$. 您应当在下午5点16分出发。



超额预售机票问题

- 一家航空公司发现，一趟航班的持有机票而未登机（“不露面”）的人数具有平均值为20人、标准偏差为10人的正态分布。根据这家航空公司的测算，每一个空座位的机会成本为100美元。乘客确认票后但因满座不能登机有关的罚款费用估计为400美元。该航空公司想限制该航班的“超额预订”。飞机上共有150个座位。确认预订的截止上限应当是多少？



超额预售问题的解法

设 X 为超额预售的机票数，设 Y 为有票没来的人数。

$X > Y$ 就意味着超额预售的机票数超过了有票没来的人数。

再多售一张机票就要蒙受400美元的损失， $c_o = \$400$ 。

$X < Y$ 则意味着超额预订的数量小于没有登机的人数，预订数量减少一个就蒙受100美元的损失， $c_u = \$100$ 。

最佳的 X^* 应当满足

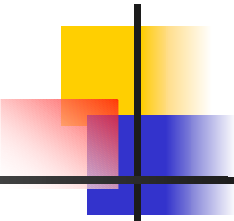
$$\text{Prob}[Y > X^*] = \frac{400}{400 + 100} = 0.8$$

根据正态表， $z = -0.84$ 。因此， $X^* = 20 - 0.84(10) = 12$ 。
预售机票数不要超过 $150 + 12 = 162$ 张。



报童问题 II

- 假定报童已预购了53 份报纸(最优解)。因为第二天的报纸在发行中心已售罄，另一报贩愿以每份0.40元买入，有多少买多少。报童应当卖给该报贩多少份报纸？
或应留多少份第二天出售？



报童问题 II 的解

设 X 为留作自售的份数, Y 为明天的报纸需求。

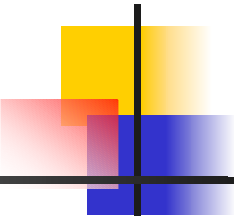
$\{X > Y\}$ 意味着留得太多, 否则可以前一天卖给另一报贩, 每份可赚0.40元, 所以每份损失利润 $c_o = 0.40$ 元。

$\{X < Y\}$ 意味着留得太少, 每份前一天只卖了0.40元, 留着可卖0.50元, 多卖 $c_u = 0.50 - 0.40 = 0.10$ 元。

最优解 X^* 应满足

$$\text{Prob}[Y > X^*] = \frac{c_o}{c_o + c_u} = \frac{0.40}{0.40 + 0.10} = 0.8.$$

查正态分布表得 $z = -0.84$. 所以应留 $X^* = 50 - 0.84(12) = 40$, 或应卖 $53 - 40 = 13$ 份给另一报贩。



标准正态概率分布表

如何解决正态分布右端（或上端）概率问题？

$$\text{Prob}[Y > y] = \alpha.$$

注意， z 是大于或小于均值的标准差数量，即：

$$z = \frac{y - \mu}{\sigma} \quad \text{或} \quad y = \mu + z\sigma$$

1. 已知 α , 要求出 y

- 确定 z 的符号

$$\alpha \leq 0.5 \Rightarrow z \geq 0; \quad \alpha \geq 0.5 \Rightarrow z \leq 0.$$

- 根据 α 或 $1 - \alpha$. 相对应的表格，求出 $|z|$ 。



标准正态概率表

2. 已知 y_i 要求出 α :

- 计算出 z :

$$z = \frac{y - \mu}{\sigma},$$

然后在表中查到相应的概率 ($prob$) 。

- 确定 $\alpha > 0.5$ 或 $\alpha < 0.5$:

$$z \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq 0.5; \quad z \leq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0.5.$$

设定 $\alpha = prob$ 或 $\alpha = 1 - prob$.

