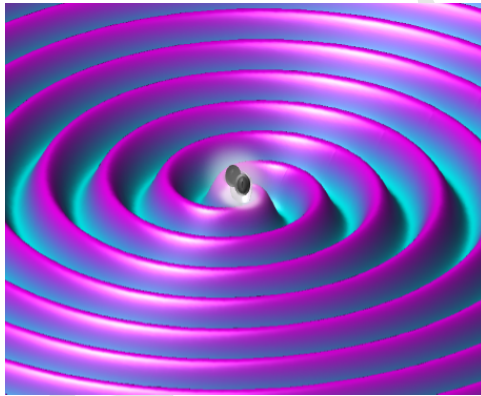


# Relatividad y Gravitación

## Teoría, algoritmos y problemas



**Jorge I. Zuluaga**

Profesor titular de Astronomía y Física

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Antioquia

22 de julio de 2020

BORRADOR

# Índice general

<b>1.</b>	<b>Aplicaciones de la relatividad general</b>	<b>7</b>
1.1.	Cosmología relativista . . . . .	8
1.1.1.	Plan de temas . . . . .	8
1.1.2.	Propiedades del universo . . . . .	8
1.1.3.	Principios básicos . . . . .	11
1.1.4.	La métrica del Universo . . . . .	13
1.1.5.	La métrica de Robertson-Walker . . . . .	17
1.1.6.	Las ecuaciones de Friedmann . . . . .	18
<b>2.</b>	<b>Apéndices</b>	<b>21</b>
2.1.	Códigos útiles . . . . .	21
2.1.1.	Cálculo analítico de tensores en relatividad general . . . . .	21
	<b>Bibliografía</b>	<b>25</b>

BORRADOR

# Índice de figuras

1.1.	Ley de Hubble Lemaitre. En el eje vertical se muestra el módulo de distancia $\mu = m - M = 5\log_{10}(d) - 5$ donde la distancia esta en pc. Una distancia de 1 Gpc corresponde a un módulo de distancias de 40. Fuente: <a href="https://physics.stackexchange.com/questions/361438/interpretation-of-hubble-diagram">https://physics.stackexchange.com/questions/361438/interpretation-of-hubble-diagram</a> . . . . .	9
1.2.	Parámetro de Hubble . . . . .	10
1.3.	Imagen del cúmulo de la bala mostrando la distribución reconstruida de materia oscura . . . . .	11
1.4.	Observadores fundamentales de acuerdo con el principio de Weyl . . . . .	13

BORRADOR

## Capítulo 1

# Aplicaciones de la relatividad general

### Resumen

Después de deducir el formalismo básico de la relatividad general, procederemos en este capítulo a usarlo para estudiar problemas concretos y hacer las predicciones más importantes de la teoría general de la relatividad.

Nos concentraremos aquí en tres aplicaciones importantes:

- **Ondas gravitacionales.** La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y la descripción de algunas de sus propiedades básicas es una de las más interesantes y poco triviales predicciones de la teoría general de la relatividad. Aquí estudiaremos algunos aspectos básicos de la teoría (un tratamiento riguroso y en detalle esta más allá del nivel de este curso), concentrándonos en ofrecer las bases para un estudio más detallado y para predecir las propiedades específicas de sistemas que emiten ondas gravitacionales en el universo.
- **Solución de Schwarzschild y agujeros negros.** La métrica de Schwarzschild es una de las únicas soluciones analíticas que se conocen de la ecuación de campo métrico. Describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior de un objeto con simetría esférica. Deduciremos aquí la métrica y estudiaremos el movimiento de partículas de prueba en este espacio-tiempo. En particular con estos datos predeciremos las propiedades de los agujeros negros.
- **La métrica de Friedmann-Robertson-Walker.** Otra de las soluciones analíticas a la ecuación de campo métrico es la que describe un universo homogéneo e isotrópico. Esta solución fue también obtenida muy poco tiempo después del surgimiento de la relatividad. Aquí deduciremos esta solución y un conjunto muy importante de ecuaciones relacionadas que se conocen como las ecuaciones de Friedmann y que describen la dinámica del universo en expansión y su relación con el contenido (y tipo) de masa energía. Estudiaremos las propiedades de la métrica y sus predicciones respecto al Universo.

El orden que seguiremos no es el orden convencional. Hemos decidido concentrarnos en los temas de mayor actualidad en el momento.

## 1.1. Cosmología relativista

Una de las más tempranas y más fértiles aplicaciones de la teoría general de la relatividad es fue la descripción de la geometría del espacio-tiempo del Universo como un todo.

La descripción del espacio-tiempo de cuatro dimensiones que contiene toda la materia y la energía (el universo), su evolución y dinámica, sumado a la fenomenología resultante (el comportamiento de la materia y la energía en ese espacio-tiempo), así como la relación entre la geometría y las observaciones realizadas desde algún lugar del universo es lo que llamamos actualmente la **cosmología relativista**.

### 1.1.1. Plan de temas

- Propiedades del Universo.
- La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).
- Observaciones en un universo con la métrica FRW.
- Las ecuaciones FRW.
- Modelos de universo

### 1.1.2. Propiedades del universo

Antes de describir con la relatividad el universo es necesario entender algunas propiedades globales básicas que conocemos.

Desde tiempos históricos se sabe que el espacio entre las estrellas es mucho mayor que su tamaño y por lo tanto que la mayor parte del universo esta vacío. En los años 1930 descubrimos el medio interestelar (gases y polvo) pero sabemos que su densidad es muchos ordenes de magnitud menor que el de cualquier cuerpo astronómico.

En los 1700 Newton especulaba que el universo no podía tener ningún límite porque de lo contrario habría también un centro y por lo tanto la materia habría colapsado en él. Esta idea de entrada ya implicaba la intuición de que el universo era a gran escala homogéneo.

En los 1700 y 1800 se descubrió que las estrellas en el cielo hacían parte de la Vía Láctea, una estructura en forma de disco que hoy sabemos tiene un diámetro de unos 30 kpc ( $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ al} = 3,08 \times 10^{13} \text{ km}$ ).

En los años 1920 descubrimos que algunas “nebulosas” que habían descubierto los astrónomos a lo largo de 200 años de observaciones telescópicas eran realmente estructuras externas de estrellas a la Vía Láctea. Eso demostraba que la materia en el Universo se reunía en la forma de “islas de estrellas” o galaxias repartidas sin un patrón definido por el espacio de tres dimensiones. Hoy sabemos que hay miles de millones de galaxias (las últimas estimaciones las cifran en 2 billones incluyendo las más pequeñas) distribuidas de forma más o menos homogénea.

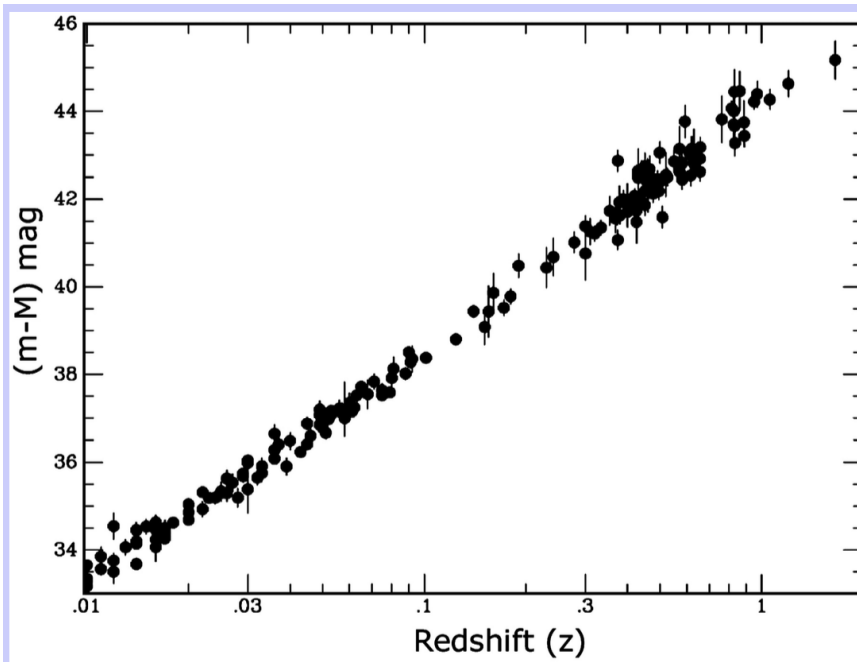
Aunque las galaxias se mueven por efecto de su interacción local (la velocidad relativa entre las galaxias es del orden de 100-1000 km/s) la observación más im-



portante hecha en los 1920 es que todas las galaxias parecen exhibir un corrimiento al rojo espectral  $z$  que varía en proporción directa a la distancia luminosa  $d_L$  a la que las galaxias se encuentran:

$$z \approx \frac{H_0}{c} d_L$$

donde el símbolo  $\approx$  se debe a que la ley fue establecida unicamente para Galaxias a una distancia relativamente pequeña de la Vía Lactea. A este resultado se lo conoce como la **ley de Hubble-Lemaitre**.



**Figura 1.1:** Ley de Hubble Lemaitre. En el eje vertical se muestra el módulo de distancia  $\mu = m - M = 5 \log_{10}(d) - 5$  donde la distancia esta en pc. Una distancia de 1 Gpc corresponde a un módulo de distancias de 40. Fuente: <https://physics.stackexchange.com/questions/361438/interpretation-of-hubble-diagram>.

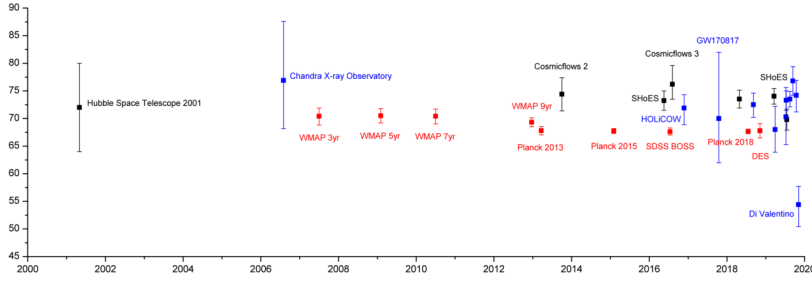
Aquí la cantidad  $H_0$  se conoce como el parámetro de Hubble y su valor se parametriza normalmente como:

$$H_0 = 70 h_{70} \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} = 2,27 \times 10^{-18} h_{70} \text{ s}^{-1}$$

donde  $h$  es un parámetro adimensional. Según las últimas estimaciones astrofísicas  $h = 70,5 \text{ km/s}$ .

El valor de  $H_0$  todavía no se conoce con precisión. Según la [última estimación de 2020](#)<sup>1</sup> es  $h_{70} = 1,056 \pm 0,04$ .

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s\\_law#Measured\\_values\\_of\\_the\\_Hubble\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s_law#Measured_values_of_the_Hubble_constant)



**Figura 1.2:** *Parámetro de Hubble*

El espacio entre las galaxias no está completamente vacío. Está lleno de lo que se conoce como gas intracúmulos. Usando la emisión de radiación del gas entre cúmulos y otros métodos astrofísicos, se ha estimado que la densidad promedio de materia bariónica (protones, neutrones y electrones) es igual a<sup>2</sup>:

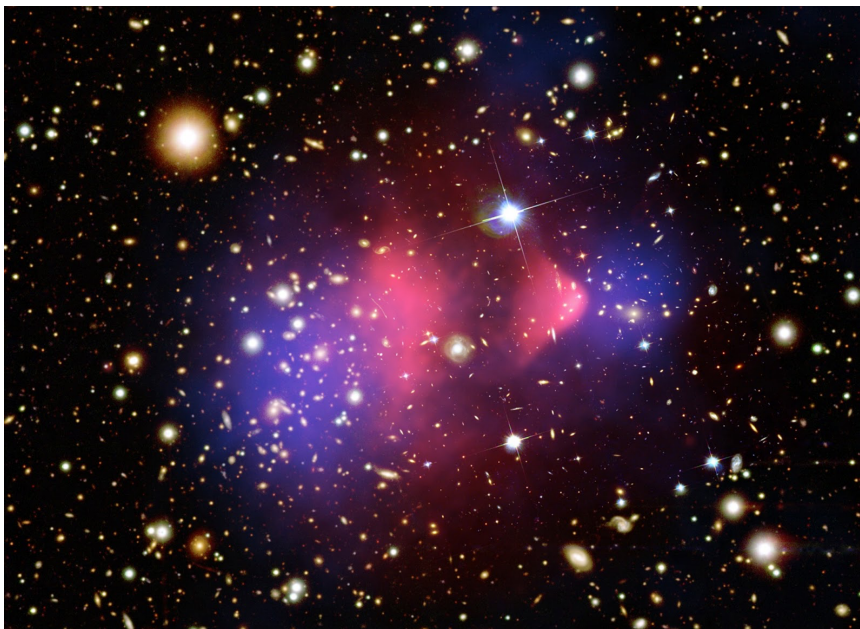
$$\rho_B = 4,46 \times 10^{-28} h_{70}^2 \text{ kg m}^{-3}$$

De esta densidad, tan solo el 6 % es la materia que forma estrellas, planetas y nubes de gas visibles.

Distintas líneas de evidencia incluyendo la dispersión de velocidades de las galaxias en cúmulos ricos, la curva de rotación de las galaxias de disco y medidas de lentes y microlentes gravitacionales han permitido establecer la existencia de una forma de materia de composición todavía desconocida y de la cual existe una densidad promedio igual a:

$$\rho_{DM} = 2,38 \times 10^{-27} h_{70}^2 \text{ kg m}^{-3}$$

<sup>2</sup>Para ello se asume que el parámetro cosmológico  $\Omega_B = 0,0484$ .



**Figura 1.3:** Imagen del cúmulo de la bala mostrando la distribución reconstruida de materia oscura

En los años 1960 se descubrió que todos los sitios del universo son bañados por una radiación que tiene el espectro de cuerpo negro con una temperatura característica de 2.731 K. Esta radiación es isotrópica dentro de una precisión de 1 parte en 100.000.

### 1.1.3. Principios básicos

Para responder a todas las preguntas relevantes en cosmología es necesario encontrar la métrica del Universo.

Con base en las evidencias recogidas anteriormente podemos decir que actualmente el Universo está formado por una distribución de materia homogénea, isotrópica y de muy baja densidad, en la que las partículas se mueven muy lentamente comparada con la velocidad de la luz (con velocidades propias del orden de 100 km/s la velocidad de las galaxias es menor que 0.1 % de la velocidad de la luz).

#### Principio 1.1

**Principio cosmológico.** En cualquier momento y a una escala suficientemente grande, el universo es **homogéneo**. (es el mismo en todas partes, tiene la misma densidad y curvatura) e isotrópico (la elección de ejes coordenados no afecta la descripción de la geometría).

Aquí es importante entender que esta suposición implica que todo lo que digamos en lo sucesivo aplicará únicamente bajo el supuesto de homogeneidad e

isotropía. Sin embargo el universo es más complejo que eso y puede a escalar de planetas, estrellas, galaxias incluso cúmulos y supercúmulos tener una estructura granulosa.

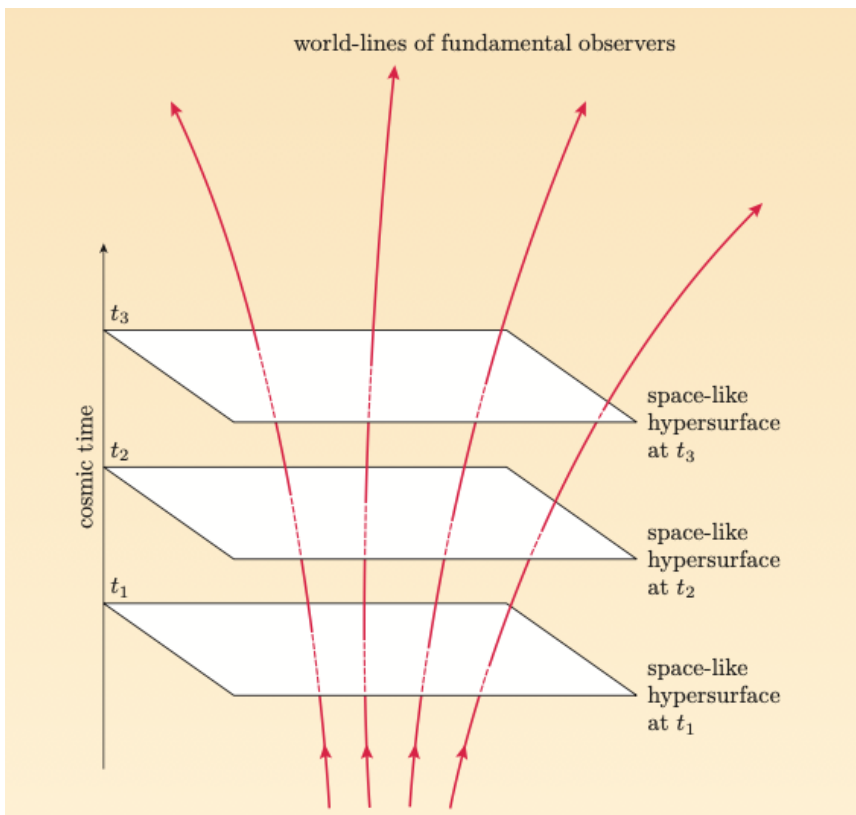
Otro “inconveniente” con el principio cosmológico es que no es necesariamente válido para todos los observadores del Universo. Por ejemplo, un observador que se mueva no percibirá el universo isotrópico.

Para esto se introduce un nuevo principio:

### Principio 1.2

**Principio de Weyl.** Existe un conjunto de observadores privilegiados en el universo que llamaremos **observadores fundamentales**, que lo perciben como homogéneo e isotrópico y que tienen las siguientes características:

- Las líneas de universo de estos observadores nunca se cruzan (excepto en una singularidad inicial).
- El tiempo propio de estos observadores es el mismo de modo que se puede definir para cada evento del universo un **tiempo cósmico** referido a cualquier evento presente o pasado.
- Todos los eventos del universo que tienen el mismo valor del tiempo cósmico forman una hipersuperficie espacialoide que satisface el principio cosmológico (es homogénea e isotrópica).



**Figura 1.4:** Observadores fundamentales de acuerdo con el principio de Weyl

Sobre cada hipersuperficie se pueden definir las coordenadas que ocupan los observadores fundamentales de modo que no cambien con el tiempo (dado que la relación entre los observadores fundamentales tampoco cambian). A estas coordenadas las llamamos **coordenadas comóviles**.

#### 1.1.4. La métrica del Universo

Con las condiciones anteriores la métrica más general que podemos escribir que satisfaga estas condiciones es:

$$ds^2 = cd^2t^2 - S(t)^2 d\ell^2$$

donde  $t$  es el tiempo cósmico,  $S(t)$  es una función arbitraria que depende del tiempo cósmico y  $d\ell^2$  es el elemento de línea en las hipersuperficies de tiempo cósmico constante.

Llamamos a está la **métrica de Robertson-Walker**.

¿Cuál es la métrica de la hipersuperficie espacial en este universo?. Existen tres posibilidades:

### Espacio plano

En este caso la métrica espacial es sencillamente la métrica euclidiana:

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

o en coordenadas esféricas:

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Es importante aclarar que en esta métrica las coordenadas  $(x, y, z)$  o  $(r, \theta, \phi)$  son **coordenadas comoviles**, es decir son aquellas en las cuales si se expresa la posición de los observadores fundamentales entonces esta posición no cambia.

La distancia espacial entre dos puntos con coordenadas comoviles es usando la métrica RW será:

$$d\sigma^2 = -ds^2 = S(t)^2 d\ell^2 = S(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

o integrando en el espacio ( $S$  no depende de las coordenadas):

$$D = S(t)d$$

donde  $D$  es la distancia efectiva, instantánea, medida entre los observadores y  $d$  su distancia comovil.

De aquí vemos que en general en un universo homogéneo e isotrópico la distancia entre dos observadores fundamentales  $D$  puede cambiar en general de acuerdo con el factor  $S(t)$ . Es por esa razón que a la cantidad  $S(t)$  la llamamos **factor de escala**.

### Espacio curvo cerrado

Un segundo tipo de geometría de curvatura constante es la que corresponde a una **hiperesfera**, es decir el equivalente tetradimensional a una esfera.

En 3 dimensiones los puntos sobre la superficie de una esfera  $(x, y)$  obedecen la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

donde  $R$  es el radio y  $z$  es una dimensión auxiliar usada para describir la superficie.

Esta ecuación puede usarse para escribir la métrica de la superficie de la esfera si se introducen por ejemplo coordenadas esféricas para describir la posición de cada punto:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned}$$

las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$  especifican cada punto sobre la superficie de la esfera.

El cambio en las coordenadas cartesianas entre dos puntos infinitesimalmente vecinos en la superficie de la esfera será:

$$\begin{aligned} dx &= R(\cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi) \\ dy &= R(\cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi) \\ dz &= -R \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

donde  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

De donde la distancia (métrica) en la esfera se puede escribir como:

$$d\ell^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Hay cosas interesantes escritas en esta métrica. La primera es que dado que las coordenadas de la superficie tienen unos rangos definidos, la distancia máxima entre dos puntos se producirá por ejemplo si se hace  $\phi = \text{cte}$ :

$$d_{\max} = \pi R$$

decimos que este espacio es *cerrado* en el sentido de que dos observadores no pueden estar separados por una distancia mayor que esa.

Si  $\theta = \text{cte}$  la distancia máxima entre dos puntos será:

$$d_{\max}(\theta) = \pi R \sin \theta$$

Otra propiedad es el área. Por definición:

$$dS = \sqrt{g_{11}g_{22}}dx^1dx^2$$

Integrando obtenemos:

$$S = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi R^2$$

¿Qué pasa ahora si consideramos una hiperesfera de radio unitario?. En este caso la ecuación será:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$$

donde hemos introducido la dimensión auxiliar  $w$ .

Cada punto en la superficie de la hiperesfera puede ser descrito ahora con 3 coordenadas angulares  $(\chi, \theta, \phi)$  tal que:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \sin \chi \cos \theta \\ w &= R \cos \chi \end{aligned}$$

donde  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

Realizando un procedimiento similar al que hicimos con la esfera se puede probar que la métrica de esta superficie es:

$$d\ell^2 = R^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

De nuevo dado que las coordenadas están acotadas, el espacio es cerrado. La máxima distancia que pueden alejarse dos observadores, asumiendo que tienen  $\theta = \text{cte}$  y  $\phi = \text{cte}$  será:

$$d_{\max} = \pi R$$

El volumen de esta hipersuperficie, por otro lado será:

$$dV = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}dx^1dx^2dx^3$$

Integrando:

$$V = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin \theta \sin^2 \chi d\chi d\theta d\phi = 2\pi R^3$$

Pero ¿qué demonios es la variable  $\chi$  en la realidad?. Una manera de entender el significado de esta variable es construir un **diagrama embebido** de esta geometría. Por un diagrama embebido entendemos la representación en un espacio tridimensional plano de la superficie obtenida al hacer constantes una de las coordenadas del espacio. Si hacemos  $\theta = \pi/2$  la métrica queda:

$$d\Sigma^2 = R^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\phi^2)$$

En el espacio plano y en coordenadas cilíndricas la métrica es:

$$d\Sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

La superficie embebida estará dada por los puntos

$$\rho = \rho(\chi, \phi), \quad \varphi = \varphi(\chi, \phi), \quad z = z(\chi, \phi)$$

La superficie embebida descrita por la métrica tiene una simetría en  $\phi$ , en el sentido en que la elección del origen para  $\phi$  es irrelevante en la métrica.

Si hacemos  $\varphi = \phi$  y suponemos que las coordenadas  $\rho$  y  $z$  de puntos sobre la superficie embebida son independiente de la variable  $\phi$ , entonces:

$$\rho = \rho(\chi), \quad \varphi = \phi, \quad z = z(\chi)$$

La métrica en el espacio plano quedará:

$$d\Sigma^2 = \left[ \left( \frac{d\rho}{d\chi} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\chi} \right)^2 \right] d\chi^2 + \rho^2 d\phi^2$$

Para que estas métricas coincidan debe darse que:

$$\rho = R \sin \chi$$

Es decir la hipersuperficie con  $\theta = \pi/2$  tendrá una métrica:

$$d\Sigma^2 = \frac{1}{1 - (\rho/R)^2} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$$

que es la métrica de una esfera de radio  $R$  en coordenadas cilíndricas.

Nótese que en este caso la coordenada radial  $\rho$  esta restringida entre  $0 \leq \rho \leq R$ .

Podemos expresar la métrica de la hipersuperficie del Universo cerrado, introduciendo la variable  $\rho \equiv R \sin \chi$  finalmente como:



$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2}{1 - (\rho/R)^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

### Nota

**¿El radio del Universo?.** ¿Qué es exactamente el parámetro  $R$ ? Como hemos visto anteriormente el radio de la superficie embebida del universo cerrado es  $\rho = R \sin \chi$ . De aquí se ve que cuando  $\chi = \pi/2$  se alcanza el radio máximo  $R$ . Esto quiere decir que en un Universo cerrado la máxima esfera que se puede construir tiene un radio  $R$ . No es posible tener puntos que estén más lejos que esto. ¿Este es el radio del universo?. No necesariamente en tanto por radio entendemos nosotros el tamaño de algo que esta limitado. Este universo no esta limitado.

### Espacio curvo abierto

Un razonamiento similar puede hacerse para el caso de un hiperespacio de curvatura constante pero con una diferencia crucial:

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = R^2$$

En este caso los puntos en la hipersuperficie pueden parametrizarse como:

$$\begin{aligned} x &= R \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \sinh \chi \cos \theta \\ w &= R \cosh \chi \end{aligned}$$

donde  $0 \leq \chi \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

La métrica será ahora:

$$d\ell^2 = R^2[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

En este caso dado que la variable  $\chi$  no esta acotada, la distancia entre los puntos en este espacio puede ser arbitrariamente grande. Esta es la razón por la que llamamos a esta una **hipersuperficie abierta**.

Siguiendo un procedimiento similar al que se uso en el caso de una hipersuperficie cerrada podemos escribir la métrica de este espacio tiempo como:

$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2}{1 + (\rho/R)^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

donde  $\rho \equiv R \sinh \chi$ .

### 1.1.5. La métrica de Robertson-Walker

Recogiendo los resultados de la sección anterior podemos decir en muy pocas líneas que la métrica de un universo homogéneo e isotrópico se puede escribir como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Los parámetros de esta métrica son:

- **Factor de escala.** Hemos reemplazado el factor adimensional  $S(t)$  por un factor que tiene unidades de longitud:

$$a(t) = S(t)R$$

En lo sucesivo nos referiremos a  $a(t)$  como el factor de escala.

- **Parámetro de curvatura.** En la métrica aparece un parámetro adimensional  $k$  que distingue los tres casos:

$$k = \begin{cases} 0 & \text{Plano} \\ +1 & \text{Cerrado} \\ -1 & \text{Abierto} \end{cases}$$

- **Coordenada radial adimensional.** Para simplificar la escritura de la métrica hemos introducido la *coordenada radial adimensional*  $r$  definida como:

$$r = \frac{\rho}{R}$$

Esta coordenada a su vez depende de la coordenada angular  $\chi$  original como:

$$r = \begin{cases} \chi & k = 0, 0 \leq \chi \leq \infty \\ \sin \chi & k = +1, 0 \leq \chi \leq \pi \\ \sinh \chi & k = -1, 0 \leq \chi \leq \infty \end{cases}$$

#### Nota

**Singularidad en la métrica RW.** Como sucede con la métrica de Schwarzschild, la métrica de Robertson-Walker tiene una singularidad en  $r = 1$  cuando  $k = +1$ . Esta singularidad sin embargo es artificial y puede eliminarse si se escribe la métrica en términos de la coordenada  $\chi$ :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

### 1.1.6. Las ecuaciones de Friedmann

Nótese que hasta ahora no hemos usado en ningún momento las ecuaciones de campo. ¿Por qué?. Básicamente hemos construido la métrica sobre argumentos y principios de simetría. Sin embargo los parámetros libres de la métrica, a saber la función  $a(t)$  y el parámetro  $k$  solo podrán determinarse si usamos las ecuaciones de campo.

Primero necesitamos asumir un tensor de momentum-energía para el Universo. Vamos a asumir un fluido perfecto, para el cuál el tensor de momentum energía es el que habíamos escrito en la sección correspondiente:

$$T_{\text{perfecto}}^{\mu\nu} = \left( \rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu}$$

Si nos paramos en el sistema de referencia del observador fundamental donde el fluido está en reposo pero su densidad propia  $\rho_0(t)$  puede cambiar en el tiempo, lo mismo que su presión  $p(t)$  el tensor es entonces:

$$T_{00} = \rho_0(t) c^2 g_{00}, \quad T_{ii} = -p g_{ii}$$

Ahora necesitamos calcular las componentes de los tensores relevantes. Para ello usamos el programa en Wolfram Lab poniendo como coeficientes métricos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2(1-kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

El tensor que nos interesa es el tensor de Riemann y el escalar de Ricci. Las únicas componentes distintas de cero del tensor de Ricci son:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a} \\ c^2 R_{rr} &= \frac{2c^2 k}{1-kr^2} + \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{\dot{a}\ddot{a}}{1-kr^2} \\ c^2 R_{\theta\theta} &= r^2 a \ddot{a} - 2r^2 \dot{a}^2 + 2c^2 k r^2 \\ c^2 R_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta a \ddot{a} + 2r^2 \sin^2 \theta \dot{a}^2 + 2c^2 k r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Este último resultado se puede escribir como:

$$c^2 R_{ii} = -\frac{8}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k)$$

Mientras que el escalar de curvatura es:

$$c^2 R = -6c^2 \frac{k}{a^2} - 6 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 6 \frac{\ddot{a}}{a}$$

La ecuación de campo es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Dado que solo las componentes a lo largo de la diagonal del tensor de momentum energía son distintas de cero:

$$R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} R - \Lambda g_{tt} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{tt} \quad (1.2)$$

$$R_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii} R - \Lambda g_{ii} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ii} \quad (1.3)$$

La componente temporal se puede escribir como:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \left( -6c^2 \frac{k}{a^2} - 6 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 6 \frac{\ddot{a}}{a} \right) - \Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \rho_0 c^4$$

Que se puede escribir como:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0(t) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Por otro lado la componente espacial es:

$$-\frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k) - \frac{1}{2} R g_{ii} - \Lambda g_{ii} = \frac{8\pi G}{c^4} (-pc^2 g_{ii})$$

Vemos que el resultado es la misma ecuación independientemente de la componente espacial considerada.

La ecuación resultante es:

$$-\frac{\ddot{a}}{a} - 2 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 2 \frac{kc^2}{a^2} - \frac{1}{2} \left( -6c^2 \frac{k}{a^2} - 6 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 6 \frac{\ddot{a}}{a} \right) - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^2} p$$

Que se puede simplificar como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{4\pi G}{c^2} p + \frac{\Lambda}{2} - \frac{kc^2}{2a^2}$$

Nótese que es posible combinar la ecuación inicial con esta ecuación para obtener una ecuación más simple:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} [\rho_0(t) + 3p(t)] + \frac{\Lambda}{3}$$

## Capítulo 2

# Apéndices

### 2.1. Códigos útiles

A continuación encontrarán algunos códigos útiles usados en el curso.

#### 2.1.1. Cálculo analítico de tensores en relatividad general

El código a continuación fue adaptado de Hartle y sirve para el cálculo de las cantidades geométricas y tensoriales útiles en relatividad general.

```
(*
Instrucciones:
1) Abra una cuenta en https://lab.wolframcloud.com.
2) Cree un nuevo Notebook.
3) Copie el contenido de este archivo dentro del Notebook.
4) Ejecute el código de ejemplo
*)

(*Variables básicas*)
Clear[n,
Inversa,Matriz,Tabla,
Gama,Geodesica,Riemann,
GeodesicaTabla ,ListaDos,ListaTres,ListaCuatro];
n = 4;
(*Genericos*)
Inversa[g_]:=Simplify[Inverse[g]]
(*Muestra*)
Matriz[g_]:= g//MatrixForm
Tabla[Lista_]:=TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[Lista], Null], 2],TableSpacing->{1, 1, n}], TableSpacing->{2}]
GeodesicaTabla[geodesica_]:=TableForm[
Table[{"d/d\[Tau]" ToString[u[i-1]], "=" ,geodesica[[i]]},
{i, 1, n}], TableSpacing -> {2}]
ListaDos[Tensor_,simbolo_,coords_]:=Table[
```

```

If[UnsameQ[Tensor[[j, 1]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[j]], coords[[1]]]<>" = ",Tensor[[j, 1]]} ,
{j, 1, n}, {1, 1, j}];
ListaTres[Tensor_,simbolo_,coords_] := Table[
If[UnsameQ[Tensor[[i, j, k]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[i]], coords[[j]],coords[[ k]]]<>" = ", Tensor[[i, j, k]]}
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, j}];
ListaCuatro[Tensor_,simbolo_,coords_] :=Table[
If[UnsameQ[Tensor[[i, j, k, 1]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[i]], coords[[j]],coords[[ k]],coords[[ 1]]]<>" = ",Tensor[[i, j, k, 1]]}
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {1, 1,n}];
(*Relatividad General*)
Gama[g_,gi_,coord_] := Simplify[
Table[(1/2)*Sum[(gi[[i, s]])*
(D[g[[s, j]], coord[[k]] ] +
D[g[[s, k]], coord[[j]] ] -
D[g[[j, k]], coord[[s]] ]), {s, 1, n}],
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n} ]];
Riemann[G_,coord_] := -Simplify[Table[D[G[[i, j, k]],coord[[1]] ] - D[G[[i, j, 1]],
Sum[G[[s, j, k]]G[[i, 1, s]] - G[[s, j, 1]]G[[i, k, s]], {s, 1, n}],
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {1, 1, n} ]
Ricci[Rm_] :=Simplify[Table[
Sum[Rm[[i, j, i, 1]], {i, 1, n}], {j, 1, n}, {1, 1, n} ]
Scalar[gi_,Ri_] := Simplify[ Sum[gi[[i, j]] Ri[[i, j]], {i, 1, n}, {j, 1, n} ]
Einstein[Ri_,R_,g_] :=Simplify[Ri - (1/2) R*g]
Geodesica[G_] := Simplify[Table[-Sum[G[[i, j, k]] u[j-1] u[k-1], {j, 1, n}, {k, 1,
n}, {1, 1, n} ],
(*
-----
Ejemplo agujero de gusano:
coords = {T,r, \[Theta], \[Phi]};
gij = {{1,0,0,0},{-0, 1, 0, 0}, {-0,0, r^2 + b^2, 0}, {-0,0,
0, (r^2 + b^2) Sin\[Theta]^2}};
nij = Inversa[gij];
Gijk=Gama[gij,nij,coords];
Rijkl=Riemann[Gijk,coords];
Rij=Ricci[Rijkl];
Rs=Scalar[nij,Rij];
Gij=Einstein[Rij,Rs,gij];
dxidt=Geodesica[Gijk];
Matriz[gij]
Matriz[nij]
Tabla[ListaTres[Gijk,\[CapitalGamma],coords]]
Tabla[ListaCuatro[Rijkl,Riemann,coords]]
Tabla[ListaDos[Rij,Ricci,coords]]
Rs
Tabla[ListaDos[Gij,G,coords]]
GeodesicaTabla[dxidt]
-----

```

Ejemplo métrica simétrica:

```

coords = {T,r, \[Theta], \[Phi]};
gij = {{Exp[2A[r]],0,0,0},{0, Exp[2B[r]], 0, 0}, {-{0,0, r^2 , 0}, -{0,0,
    0, r^2 Sin\[Theta]^2}}};
nij = Inversa[gij];
Gijk=Gama[gij,nij,coords];
Rijkl=Riemann[Gijk,coords];
Rij=Ricci[Rijkl];
Rs=Scalar[nij,Rij];
Gij=Einstein[Rij,Rs,gij];
dxidt=Geodesica[Gijk];
Matriz[gij]
Matriz[nij]
Tabla[ListaTres[Gijk,\[CapitalGamma],coords]]
Tabla[ListaCuatro[Rijkl,Riemann,coords]]
Tabla[ListaDos[Rij,Ricci,coords]]
Rs
Tabla[ListaDos[Gij,G,coords]]
GeodesicaTabla[dxidt]
*)

```

BORRADOR



# Bibliografía

BORRADOR