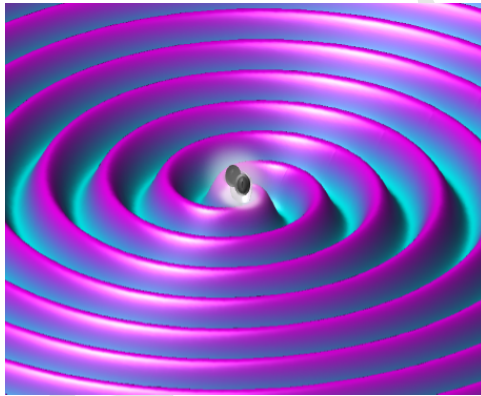


Relatividad y Gravitación

Teoría, algoritmos y problemas



Jorge I. Zuluaga

Profesor titular de Astronomía y Física

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

17 de junio de 2020

BORRADOR

Índice general

1.	Aplicaciones de la relatividad general	7
1.1.	Agujeros negros	8
1.1.1.	Historia de los agujeros negros	8
1.1.2.	Un temario	11
1.1.3.	Métrica de Schwarzschild	11
1.1.4.	Tensores asociados a la métrica {tensores_schw} . . .	12
1.1.5.	Ecuación de campo y solución {ecuacion_campo_schw}	15
1.1.6.	Cantidades asociadas a la métrica	18
1.1.7.	Integración numérica	19
1.1.8.	Una singularidad en la métrica	21
2.	Apéndices	25
2.1.	Códigos útiles	25
2.1.1.	Cálculo analítico de tensores en relatividad general .	25
	Bibliografía	29

BORRADOR

Índice de figuras

1.1.	Karl Schwarzschild	9
1.2.	Imagen del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 obtenida por el <i>Event Horizon Telescope</i> el 10 de abril de 2019 .	10
1.3.	Figura correspondiente al código 1.1.	22

BORRADOR

Capítulo 1

Aplicaciones de la relatividad general

Resumen

Después de deducir el formalismo básico de la relatividad general, procederemos en este capítulo a usarlo para estudiar problemas concretos y hacer las predicciones más importantes de la teoría general de la relatividad.

Nos concentraremos aquí en tres aplicaciones importantes:

- **Ondas gravitacionales.** La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y la descripción de algunas de sus propiedades básicas es una de las más interesantes y poco triviales predicciones de la teoría general de la relatividad. Aquí estudiaremos algunos aspectos básicos de la teoría (un tratamiento riguroso y en detalle esta más allá del nivel de este curso), concentrándonos en ofrecer las bases para un estudio más detallado y para predecir las propiedades específicas de sistemas que emiten ondas gravitacionales en el universo.
- **Solución de Schwarzschild y agujeros negros.** La métrica de Schwarzschild es una de las únicas soluciones analíticas que se conocen de la ecuación de campo métrico. Describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior de un objeto con simetría esférica. Deduciremos aquí la métrica y estudiaremos el movimiento de partículas de prueba en este espacio-tiempo. En particular con estos datos predeciremos las propiedades de los agujeros negros.
- **La métrica de Friedmann-Robertson-Walker.** Otra de las soluciones analíticas a la ecuación de campo métrico es la que describe un universo homogéneo e isotrópico. Esta solución fue también obtenida muy poco tiempo después del surgimiento de la relatividad. Aquí deduciremos esta solución y un conjunto muy importante de ecuaciones relacionadas que se conocen como las ecuaciones de Friedmann y que describen la dinámica del universo en expansión y su relación con el contenido (y tipo) de masa energía. Estudiaremos las propiedades de la métrica y sus predicciones respecto al Universo.

El orden que seguiremos no es el orden convencional. Hemos decidido concentrarnos en los temas de mayor actualidad en el momento.

1.1. Agujeros negros

Los agujeros negros son una de las más sorprendentes predicciones de la Relatividad General. Su existencia fue primero predicha usando la teoría Newtoniana y solo hasta 1915 cuando fue publicada la primera solución analítica de la ecuación de campo la predicción no fue definitivamente confirmada por la teoría y se empezó a especular con su existencia.

1.1.1. Historia de los agujeros negros

El primero en predecir la existencia de los agujeros negros o *estrellas negras* como se llamaron originalmente fue John Mitchel en 1784 [1] y luego por Pierre Simon de Laplace en 1796. El argumento tanto de Mitchell como de Laplace se basaba en la velocidad de escape que según la teoría de Newton es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Lo que calcularon Mitchell y Laplace fue el tamaño que debería tener un objeto para que su velocidad de escape fuera la velocidad de la luz. El resultado es trivial:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Esta teoría era correcta en el contexto de la teoría corpuscular de la luz pero no en el modelo donde la luz era una onda.

En Noviembre de 1915 Einstein presenta su teoría de la Relatividad General (para una historia del proceso ver [esta entrada de blog](https://trinoceronte.wordpress.com/cronologia-de-un-milagro/)¹). Unos meses después, ya en enero de 1916 Karl Schwarzschild le envía a Einstein unas notas de una solución analítica a la ecuación de campo. Einstein se sorprende por la simplicidad de la solución [2].

¹<https://trinoceronte.wordpress.com/cronologia-de-un-milagro/>



Figura 1.1: *Karl Schwarzschild*

En mayo de 1916 Johannes Droste un estudiante de Hendrik Lorentz presenta un artículo en donde redescubre la solución de Schwarzschild y deduce las propiedades y la fenomenología del espacio-tiempo alrededor de un agujero negro. En particular Droste señala allí la existencia de una singularidad matemática que es la que conocemos como el radio de Schwarzschild.

En 1924 Arthur Eddington estudia en detalle la solución y encuentra que la singularidad desaparece con un cambio adecuado de coordenadas (coordenadas de Eddington-Finkelstein) y estudia las primeras posibilidades de que existieran objetos astrofísicos con estas propiedades.

En 1939 Robert Oppenheimer estudia el colapso extremo de objetos muy densos e identifica el radio de Schwarzschild como una superficie de la que no escaparía la luz. Llama a objetos hipotéticos de ese tipo *estrellas congeladas*.

En 1958 David Finkelstein introduce el concepto de *horizonte de eventos* mostrando que se trata de una frontera imaginaria que podría ser atravesada por un observador en caída libre si se escoge como sistema de coordenadas el de ese observador.

En 1963 Roy Kerr encuentra la solución exacta a las ecuaciones de campo para un agujero negro rotante. Más tarde Ezra Newman descubre la solución axisimétrica de un agujero negro rotante y con carga eléctrica que hoy se conoce como la métrica de Kerr-Newman.

El término *Agujero Negro* fue acuñado en 1963 para un artículo divulgativo en la revista Life. Otra historia indica que su origen se debe a John Wheeler después de una pregunta que le hizo un estudiante. Oficialmente se considera a Wheeler el inventor del término.

El primer candidato a un agujero negro fue descubierto en 1972 por Charles Thomas Boltón en una binaria e rayos X conocida como Cygnus X-1.

Hoy las evidencias de la existencia de agujeros negros astrofísicos son abundantes:

- Binarias de rayos X.

- Agujero negro supermasivos en el centro de la galaxia.
- Agujeros negros supermasivos en galaxias activas.
- Agujeros negros binarios descubiertos por su emisión de ondas gravitacionales.

En años recientes el área se ha visto enriquecida por varios descubrimientos muy relevantes.

La observación directa del movimiento de estrellas alrededor del agujero negro central de la vía Láctea.

La observación de los efectos de la relatividad general sobre la luz de estrellas que orbitan el agujero negro central .

La observación de la precesión de la órbita de una estrella.

La observación de más de 5 colisiones de agujeros negros binarios por su emisión de ondas gravitacionales por el consorcio LIGO.

La más espectacular que es la observación de alta resolución del disco de acreción alrededor del agujero negro supermasivo de M87 que fue realizada por el *Event Horizon Telescope* en 2019.

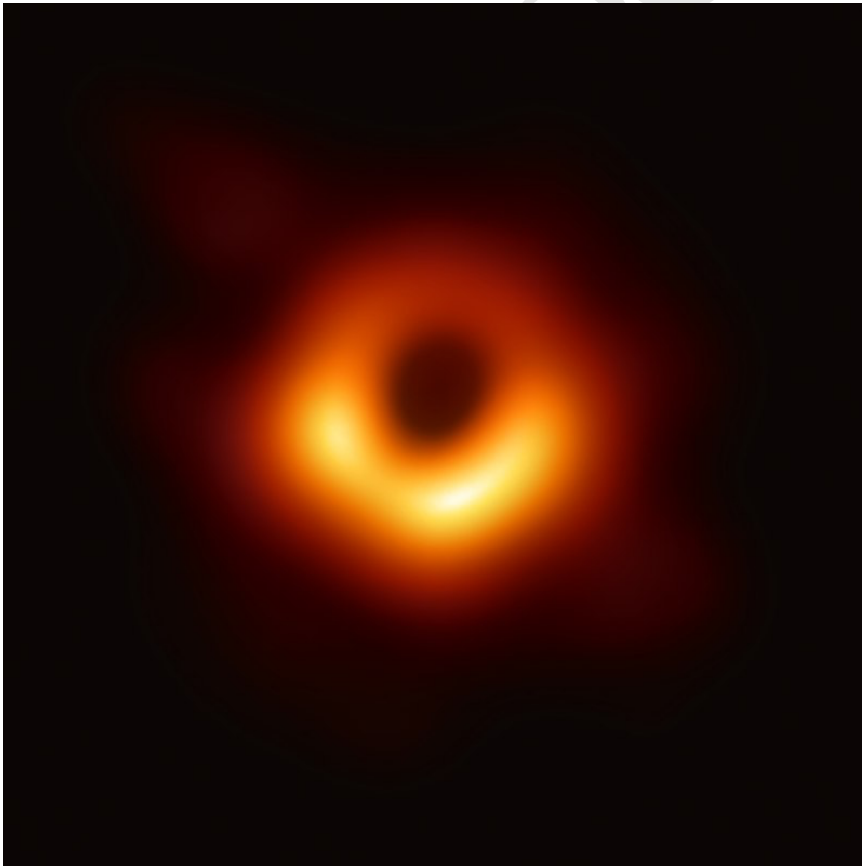


Figura 1.2: Imagen del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 obtenida por el Event Horizon Telescope el 10 de abril de 2019

1.1.2. Un temario

Estos son los temas que desarrollaremos en esta sección:

- La solución de Schwarzschild.
- Propiedades de la métrica de Schwarzschild.
- Movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild.
- Movimiento de la luz cerca al horizonte.
- Las coordenadas de Kruskal-Szekeres.
- Agujeros negros rotantes de Kerr.
- Horizontes y la ergósfera.

1.1.3. Métrica de Schwarzschild

Queremos encontrar la métrica en el exterior de una distribución de masa con un total de masa M , con simetría esférica.

Por razones de simetría usaremos coordenadas esféricas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ que en este contexto se conocen como **coordenadas de Schwarzschild**.

Por estar en el exterior de la masa, la ecuación de campo se reduce a la ecuación en el vacío:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Infinitas métricas $g_{\mu\nu}$ son compatibles con esta condiciones. ¿Qué es entonces lo que determina la métrica? Las simetrías y condiciones de frontera:

- La métrica debe tener **simetría esférica**. Esta simetría implica:
 - Que una forma simple de la métrica se obtiene usando coordenadas esféricas o coordenadas de Schwarzschild.
 - Que los coeficientes métricos deberían solo depender de la coordenada radia r .
 - Que la métrica es simétrica, $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$.
- Suponemos que **la métrica es estática**. Esto significa que no depende del tiempo (estacionaria) pero además no cambia si se invierte el tiempo $t \rightarrow -t$.
- La métrica es asintóticamente plana. Esto implica que a gran distancia $t \rightarrow \infty$ la métrica se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dT^2 - dr^2 - d\ell^2$$

donde $T = ct$:

$$d\ell = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

es el elemento de línea sobre la superficie de una esfera.

La métrica más general que cumple esas condiciones es:

$$ds^2 = e^{2A(r)} dT^2 - e^{2B(r)} dr^2 - d\ell^2$$

El uso de la función exponencial tiene como proposito:

1. Garantizar que los coeficientes de la métrica son positivos y la signatura se mantiene (métrica de un espacio Lorentziano).
2. Facilitar las derivadas.

Nótese también que la parte tangencial de la métrica no depende de r para garantizar la simetría esférica.

La condición de que la métrica debe ser asintóticamente plana implica que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$$

1.1.4. Tensores asociados a la métrica {tensores_schw}

Para proceder a obtener información sobre las funciones $A(r)$ y $B(r)$ debemos calcular todas las cantidades tensoriales asociadas a la métrica y reemplazar en la ecuación de campo.

Las componentes de la métrica son:

$$\begin{aligned} g_{TT} &= e^{2A(r)} \\ g_{rr} &= -e^{2B(r)} \\ g_{\theta\theta} &= -r^2 \\ g_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Y las de la inversa:

$$\begin{aligned} g^{TT} &= e^{-2A(r)} \\ g^{rr} &= -e^{-2B(r)} \\ g^{\theta\theta} &= -\frac{1}{r^2} \\ g^{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \tag{1.1}$$

El procedimiento es bastante laborioso y para hacerlo se puede utilizar una herramienta de cálculo simbólico como [Wolfram Lab Cloud](https://www.wolframcloud.com)². En el [sitio electrónico del libro](#)³ se deja al estudiante las rutinas y una guía para los comandos para realizar este cálculo.

Símbolos de Christoffel {christoffel_schw}

Dado que la métrica es simétrica, los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero serán:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} &= +\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda,\nu} \\ \Gamma_{\mu\mu}^{\lambda} &= -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\mu\mu,\lambda} \end{aligned}$$

²[http://lab.wolframcloud.com](https://lab.wolframcloud.com)

³<http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

Los símbolos de Christoffel diferentes de cero serán:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Tr}^T &= A' \\
 \Gamma_{rr}^r &= B' \\
 \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \cot \theta \\
 \Gamma_{TT}^r &= A'e^{2(A-B)} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2B} \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -e^{-2B}r \sin^2 \theta \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Tensor de Riemann {riemann_schw}

El tensor de Riemann es:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \{\Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\delta \Gamma_{\kappa\delta}^\lambda\} - \{\nu \leftrightarrow \kappa\}$$

que se puede expandir como:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\delta \Gamma_{\kappa\delta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\lambda$$

Por las simetría del tensor de Riemann y el hecho que la métrica sea diagonal las únicas componentes distintas de cero son:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa}, R^\lambda_{\mu\nu\lambda}$$

es decir:

$$R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\delta \Gamma_{\lambda\delta}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\lambda$$

En particular los términos distintos de cero serán:

$$R^\lambda_{\mu\mu\lambda} = \Gamma_{\mu\mu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\mu}^\lambda + \Gamma_{\mu\mu}^\delta \Gamma_{\lambda\delta}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\delta \Gamma_{\mu\delta}^\lambda$$

Un laborioso cálculo permite encontrar las componentes diferentes de cero no repetidas:

$$\begin{aligned}
 R^T_{rrT} &= A'B' - A'' - (A')^2 \\
 R^T_{\theta\theta T} &= -re^{-2B}A' \\
 R^T_{\varphi\varphi T} &= -re^{-2B}A' \sin^2 \theta \\
 R^r_{\theta\theta r} &= re^{-2B}B' \\
 R^r_{\varphi\varphi r} &= re^{-2B}B' \sin^2 \theta \\
 R^\theta_{\varphi\varphi\theta} &= (1 - e^{-2B}) \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Tensor de Ricci {ricci_schw}

El tensor de Ricci se define como:

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$$

Dado que los únicos términos distintos de cero del tensor de Riemann son aquellos para los cuales $\mu = \nu$, descubrimos que el tensor de Ricci es diagonal:

$$R_{\mu\mu} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\mu\lambda}$$

Para el cálculo por ejemplo de R_{TT} , por ejemplo:

$$R_{TT} = R^r_{TTT} + R^{\theta}_{TT\theta} + R^{\varphi}_{TT\varphi}$$

Para obtener el término R^r_{TTT} se debe usar la propiedad:

$$R^r_{TTT} = g^{rr} R_{rTTT} = g^{rr} R_{TrrT} = g^{rr} g_{TT} R^T_{rrT}$$

Después de un álgebra laboriosa obtenemos:

$$\begin{aligned} R_{TT} &= -e^{2(A-B)} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2A'}{r} \right] \\ R_{rr} &= A'' + (A')^2 - A'B' - \frac{2B'}{r} \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta \left\{ e^{2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \right\} \end{aligned}$$

Escalar de curvatura {escalar_curvatura_schw}

El escalar de curvatura se calcula usando:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

Al reemplazar queda:

$$R = -2e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2}{r} (A' - B') + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2}$$

Tensor de Einstein {tensor_einstein_schw}

Por último el tensor de Einstein es la traza inversa del tensor de Ricci:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Dado que ambos $g_{\mu\nu}$ y $R_{\mu\nu}$ son simétricos el tensor de Einstein también lo es:

$$G_{\mu\mu} = R_{\mu\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\mu} R$$

El álgebra en este caso produce:

$$\begin{aligned}
 G_{TT} &= -\frac{2e^{2(A-B)}}{r}B' + \frac{e^{2(A-B)}}{r^2} - \frac{e^{2A}}{r^2} \\
 G_{rr} &= -\frac{2A'}{r} + \frac{e^{2B}}{r^2} - \frac{1}{r^2} \\
 G_{\theta\theta} &= -r^2e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] \\
 G_{\varphi\varphi} &= -r^2e^{-2B} \sin^2\theta \left[A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right]
 \end{aligned}$$

1.1.5. Ecuación de campo y solución {ecuacion_campo_schw}

Con todos los elementos a la mano, podemos ahora preguntarnos por cuál es la condición que debe cumplir $A(r)$ y $B(r)$ para que se cumpla la ecuación de campo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

o bien:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

Como estamos en un punto por fuera del cuerpo, eso implica que ambos:

$$G_{\mu\nu} = 0$$

y

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Adicionalmente esta última condición implica también que:

$$R = 0$$

Tenemos un total de 9 condiciones posibles:

$$\begin{aligned}
-e^{2(A-B)} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2A'}{r} \right] &= 0 \quad (R_{TT}) \\
A'' + (A')^2 - A'B' - \frac{2B'}{r} &= 0 \quad (R_{rr}) \\
e^{-2B} [1 + r(A' - B')] - 1 &= 0 \quad (R_{\theta\theta}) \\
\sin^2 \theta \left\{ e^{2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \right\} &= 0 \quad (R_{\phi\phi}) \\
-2e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2}{r}(A' - B') + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2} &= 0 \quad (R) \\
-\frac{2e^{2(A-B)}}{r} B' + \frac{e^{2(A-B)}}{r^2} - \frac{e^{2A}}{r^2} &= 0 \quad (G_{TT}) \\
-\frac{2A'}{r} + \frac{e^{2B}}{r^2} - \frac{1}{r^2} &= 0 \quad (G_{rr}) \\
-r^2 e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] &= 0 \quad (G_{\theta\theta}) \\
-r^2 e^{-2B} \sin^2 \theta \left[A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] &= 0 \quad (G_{\phi\phi})
\end{aligned}$$

Hay muchas posibilidades pero una de las más sencillas es combinar $e^{-2A}G_{TT} + e^{-2B}G_{rr}$ para producir:

$$\frac{2e^{-2B}}{r} (A' + B') = 0$$

que implica obviamente:

$$A' = -B'$$

Esta última ecuación se puede integrar para producir:

$$B(r) = -A(r) + C$$

¿Qué papel tiene la constante C? Lo único que hace C es hacer el coeficiente de la componente r de la métrica $\exp[2B(r)] = \exp[-2A(r) + 2C] = \exp[-2A(r)] \exp(2C)$ un poco mayor o un poco menor en una constante, sin afectar en nada su dependencia de r . Ese factor adicional se puede eliminar con un cambio en las unidades de r , tal que en esas unidades $\exp(2C) = 1$ y por tanto $C = 0$. La relación resultante es entonces:

$$B(r) = -A(r)$$

De modo que la métrica será:

$$ds^2 = e^{2A(r)} dT^2 - e^{-2A(r)} dr^2 - d\ell^2$$

Con esta identidad la ecuación para G_{TT} se convierte en:

$$\begin{aligned}
-\frac{2e^{-4B}}{r}B' + \frac{e^{-4B}}{r^2} - \frac{e^{-2B}}{r^2} &= 0 \\
-2e^{-2B}rB' + e^{-2B} - 1 &= 0 \\
\frac{d}{dr}[r(e^{-2B} - 1)] &= 0
\end{aligned}
\tag{1.3}$$

Esta ecuación se integra trivialmente como:

$$e^{-2B} = 1 + \frac{K}{r}$$

donde K es una constante.

De aquí y por $A(r) = -B(r)$ obtenemos:

$$e^{2A} = 1 + \frac{K}{r}$$

De modo que arribamos a la métrica más general compatible con las condiciones del problema:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{K}{r}\right) dT^2 - \left(1 + \frac{K}{r}\right)^{-1} dr^2 - d\ell^2$$

Es posible probar con los programas provistos con la [versión electrónica del libro](#)⁴ que esta métrica tiene tensor de Ricci, tensor de Einstein y escalar de curvatura cero como era de esperarse. Adicionalmente vemos que la métrica es asintóticamente plana, cumpliendo con todas las condiciones impuestas inicialmente.

Ahora bien: ¿cuánto vale la constante K ? Para esto nos podemos valer del principio de consistencia.

Sabemos que esta métrica en el límite de campo débil debe ser igual a la métrica e Newton:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - dr^2 - d\ell^2$$

donde $R_S = 2GM/c^2$ es la escala de longitud asociada a la masa M .

Una comparación entre estas dos métricas nos muestra que:

$$K = -R_S$$

y la solución queda finalmente:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - d\ell^2$$

⁴<http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

1.1.6. Cantidades asociadas a la métrica

Con la forma final de la métrica obtenida podemos escribir finalmente los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Tr}^T &= \frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 \Gamma_{rr}^r &= -\frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \cot \theta \\
 \Gamma_{TT}^r &= \frac{R_S}{2r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \sin^2 \theta \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Las componentes del tensor de Riemann son:

$$\begin{aligned}
 R_{rrT}^T &= \frac{R_S}{r^3} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 R_{\theta\theta T}^T &= R_{\theta\theta r}^r = -\frac{R_S}{2r} \\
 R_{\varphi\varphi T}^T &= R_{\varphi\varphi r}^r = -R_{\varphi\varphi\theta}^\theta = -\frac{R_S}{2r} \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Las ecuaciones geodésicas serán:

$$\begin{aligned}
\dot{U}_T &= -\frac{R_S}{r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} U_T U_r \\
\dot{U}_r &= -\frac{R_S}{2r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) U_T^2 + \\
&\quad + \frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} U_r^2 + \\
&\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r U_\theta^2 + \\
&\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r \sin^2 \theta U_\varphi^2 \\
\dot{U}_\theta &= -\frac{2}{r} U_r U_\theta + \cos \theta \sin \theta U_\varphi^2 \\
\dot{U}_\varphi &= -\frac{2}{r} U_r U_\varphi - 2 \cot \theta U_\theta U_\varphi
\end{aligned} \tag{1.6}$$

donde $U_\mu \equiv dx^\mu/d\sigma$.

1.1.7. Integración numérica

Para conocer las propiedades de la métrica, podemos programar las ecuaciones de la geodésica e integrarlas numéricamente.

Lo primero es escribir las ecuaciones diferenciales:

```
def geodesica_schwarzschild(Y,s,Rs):
    #Coordenadas y sus velocidades
    T,r,q,f,dTds,drds,dqds,dfds=Y
    #Factores
    A=1-Rs/r
    v=Rs/(2*r**2)
    #ecuaciones
    from numpy import zeros_like,sin,cos
    dYds=zeros_like(Y)
    #Ecuaciones de velocidades
    dYds[:4]=Y[4:]
    #Aceleraciones
    dYds[4]=-2*v/A*dTds*drds
    dYds[5]=-v*A*(dTds)**2+\
        v/A*(drds)**2+\
        A*r*(dqds)**2+\
        A*r*sin(q)**2*(dfds)**2
    dYds[6]=-(2/r)*drds*dqds+cos(q)*sin(q)*(dfds)**2
    dYds[7]=-(2/r)*drds*dfds-2*cos(q)/sin(q)*(dqds)*(dfds)
    return dYds
```

Definamos las propiedades

```
# Constantes
c=3e8 # m/s
G=6.67e-11 # m^3 kg^-1 s^-2
M=1.98e30 # kg

# Radio de Schwarzschild
Rs=2*G*M/c**2

# Velocidad característica
from numpy import pi,sqrt
r0=10*Rs
v0=sqrt(G*M/r0)
df0ds=(v0/r0/c) # r df/d(ct) = v/c
P=2*pi*c*r0/v0 # Periodo típico
```

```
R_S = 2934.8 m
v/c = 0.22360679774997896 c
d(fi)/ds = 7.619149439484087e-06
P = 824657.0509063328 m
```

Las condiciones iniciales:

```
from numpy import pi,array
Y0s=array([
    0,r0,pi/2,0.0,
    1.0,0.0,0.0,0.9*df0ds
])

from numpy import linspace
ss=linspace(0,3*P,300)
```

La solución es:

```
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(geodesica_schwarzschild,Y0s,ss,args=(Rs,))

Ts=Ys[:,0]
rs=Ys[:,1]
qs=Ys[:,2]
fs=Ys[:,3]
```

En coordenadas cartesianas:

```
from numpy import sin,cos
xs=rs*sin(qs)*cos(fs)
ys=rs*sin(qs)*sin(fs)
zs=rs*cos(qs)
```

Un gráfico de la solución

(Algoritmo 1.1)

```

import matplotlib.pyplot as plt
plt.close("all")
from matplotlib.patches import Circle
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

ax.plot(xs/Rs,ys/Rs,'k-')
cRs=Circle((0,0),1,fill=None,ls='--')
ax.add_patch(cRs)

#Decoración
rang=1.2*max(abs(xs).max(),abs(ys).max())/Rs
ax.set_xlim((-rang,rang))
ax.set_ylim((-rang,rang))
ax.set_xlabel("$x/R_S$")
ax.set_ylabel("$y/R_S$")
ax.xaxis.set_label_coords(0.5,0.05)
ax.yaxis.set_label_coords(0.05,0.5)
ax.grid()
fig.tight_layout()

```

ver Figura 1.3

Para ver una versión animada de esta gráfica vea la [versión electrónica](#)⁵ de este libro.

1.1.8. Una singularidad en la métrica

La característica más notable de la métrica de Schwarzschild es que no admite cualquier valor de r . En particular si $r \rightarrow R_S$ la métrica se hace *singular*. En particular en coordenadas de Schwarzschild a una distancia cercana a R_S la curvatura del espacio tiempo:

$$\lim_{r \rightarrow R_S} R^T_{rrT} = \lim_{r \rightarrow R_S} \frac{R_S}{r^3} \frac{1}{1 - R_S/r} = \infty$$

tiende también a infinito.

¿Qué significa esa singularidad?

Consideremos dos eventos que corresponden al inicio de la emisión de un mensaje $E_1 : (t, r, \theta, \phi)$ y el fin de la emisión $E_2 : (t + dt_{\text{mens}}, r, \theta, \phi)$ que ocurren en un mismo lugar del espacio a una distancia r del cuerpo. Llamamos la duración dt el tiempo coordinado del evento.

La separación espacio temporal medida localmente por el observador es:

$$ds^2 = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} c^2 dt_{\text{mens}}^2$$

⁵<http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

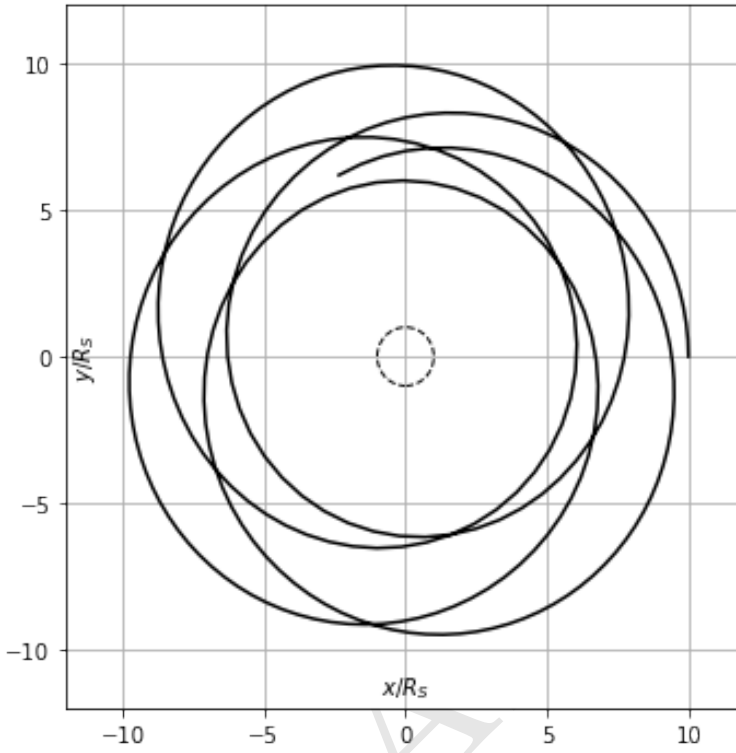


Figura 1.3: Figura correspondiente al código 1.1.

El mensaje viaja hasta un observador en la misma coordenada θ, ϕ pero en un lugar remoto. Cuando el evento llega al observador lejano, la separación coordenada en el tiempo es exactamente la misma (ver figura), pero la separación en el espacio tiempo será diferente:

$$ds_{\text{obs}}^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r_{\text{obs}}}\right) c^2 dt_{\text{mens}}^2$$

Si el observador está en el infinito,

$$d\tau_{\infty}^2 = dt_{\text{mens}}^2$$

De modo que la duración coordenada del mensaje es la misma que mide un observador muy alejado.

Si definimos:

$$d\tau = \frac{ds}{c}$$

Obtenemos la relación:

$$d\tau_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}} d\tau$$

Vemos que si una señal es emitida cerca a R_S en un tiempo finito $d\tau$ el tiempo que registra un observador en el infinito será $d\tau_\infty \rightarrow \infty$.

BORRADOR

Capítulo 2

Apéndices

2.1. Códigos útiles

A continuación encontrarán algunos códigos útiles usados en el curso.

2.1.1. Cálculo analítico de tensores en relatividad general

El código a continuación fue adaptado de Hartle y sirve para el cálculo de las cantidades geométricas y tensoriales útiles en relatividad general.

```
(*
Instrucciones:
1) Abra una cuenta en https://lab.wolframcloud.com.
2) Cree un nuevo Notebook.
3) Copie el contenido de este archivo dentro del Notebook.
4) Ejecute el código de ejemplo
*)

(*Variables básicas*)
Clear[n,
Inversa,Matriz,Tabla,
Gama,Geodesica,Riemann,
GeodesicaTabla ,ListaDos,ListaTres,ListaCuatro];
n = 4;
(*Genericos*)
Inversa[g_]:=Simplify[Inverse[g]]
(*Muestra*)
Matriz[g_]:= g//MatrixForm
Tabla[Lista_]:=TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[Lista], Null], 2],TableSpacing->{1, 1, n}], TableSpacing->{2}]
GeodesicaTabla[geodesica_]:=TableForm[
Table[{"d/d\[Tau]" ToString[u[i-1]], "=" ,geodesica[[i]]},
{i, 1, n}], TableSpacing -> {2}]
ListaDos[Tensor_,simbolo_,coords_]:=Table[
```

```

If[UnsameQ[Tensor[[j, 1]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[j]], coords[[1]]]<>" = ",Tensor[[j, 1]]} ,
{j, 1, n}, {1, 1, j}];
ListaTres[Tensor_,simbolo_,coords_] := Table[
If[UnsameQ[Tensor[[i, j, k]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[i]], coords[[j]],coords[[ k]]]<>" = ", Tensor[[i, j, k]]
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, j}];
ListaCuatro[Tensor_,simbolo_,coords_] :=Table[
If[UnsameQ[Tensor[[i, j, k, 1]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[i]], coords[[j]],coords[[ k]],coords[[ 1]]]<>" = ",Tensor
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {1, 1,n}];
(*Relatividad General*)
Gama[g_,gi_,coord_] := Simplify[
Table[(1/2)*Sum[(gi[[i, s]])*
(D[g[[s, j]], coord[[k]] ] +
D[g[[s, k]], coord[[j]] ] -
D[g[[j, k]], coord[[s]] ]), {s, 1, n}],
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n} ]];
Riemann[G_,coord_] := Simplify[Table[D[G[[i, j, k]],coord[[1]] ] - D[G[[i, j, 1]],
Sum[G[[s, j, k]]G[[i, 1, s]] - G[[s, j, 1]]G[[i, k, s]], {s, 1, n}],
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {1, 1, n} ]
Ricci[Rm_] :=Simplify[Table[
Sum[Rm[[i, j, i, 1]], {i, 1, n}], {j, 1, n}, {1, 1, n} ]
Scalar[gi_,Ri_] := Simplify[ Sum[gi[[i, j]] Ri[[i, j]], {i, 1, n}, {j, 1, n} ]
Einstein[Ri_,R_,g_] :=Simplify[Ri - (1/2) R*g]
Geodesica[G_] := Simplify[Table[-Sum[G[[i, j, k]] u[j-1] u[k-1], {j, 1, n}, {k, 1,
(*
-----

Ejemplo agujero de gusano:
coords = {T,r, \[Theta], \[Phi]};
gij = {{1,0,0,0},{-0, 1, 0, 0}, {-0,0, r^2 + b^2, 0}, {-0,0,
0, (r^2 + b^2) Sin[\[Theta]]^2}};
nij = Inversa[gij];
Gijk=Gama[gij,nij,coords];
Rijkl=Riemann[Gijk,coords];
Rij=Ricci[Rijkl];
Rs=Scalar[nij,Rij];
Gij=Einstein[Rij,Rs,gij];
dxidt=Geodesica[Gijk];
Matriz[gij]
Matriz[nij]
Tabla[ListaTres[Gijk,\[CapitalGamma],coords]]
Tabla[ListaCuatro[Rijkl,Riemann,coords]]
Tabla[ListaDos[Rij,Ricci,coords]]
Rs
Tabla[ListaDos[Gij,G,coords]]
GeodesicaTabla[dxidt]
-----

```

Ejemplo métrica simétrica:

```
coords = {T,r, \[Theta], \[Phi]};
gij = {{Exp[2A[r]],0,0,0},{0, Exp[2B[r]], 0, 0}, {-{0,0, r^2 , 0}, -{0,0,
0, r^2 Sin\[Theta]^2}}};
nij = Inversa[gij];
Gijk=Gama[gij,nij,coords];
Rijkl=Riemann[Gijk,coords];
Rij=Ricci[Rijkl];
Rs=Scalar[nij,Rij];
Gij=Einstein[Rij,Rs,gij];
dxidt=Geodesica[Gijk];
Matriz[gij]
Matriz[nij]
Tabla[ListaNueve[Gijk,\[CapitalGamma],coords]]
Tabla[ListaNueve[Rijkl,Riemann,coords]]
Tabla[ListaNueve[Rij,Ricci,coords]]
Rs
Tabla[ListaNueve[Gij,G,coords]]
GeodesicaTabla[dxidt]
*)
```

BORRADOR

Bibliografía

- [1] C. MONTGOMERY, W. ORCHISTON, AND I. WHITTINGHAM, *Michell, Laplace and the origin of the black hole concept*, Journal of Astronomical History and Heritage, 12 (2009), pp. 90–96.
- [2] K. SCHWARZSCHILD, *On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory*, arXiv preprint physics/9905030, (1999).