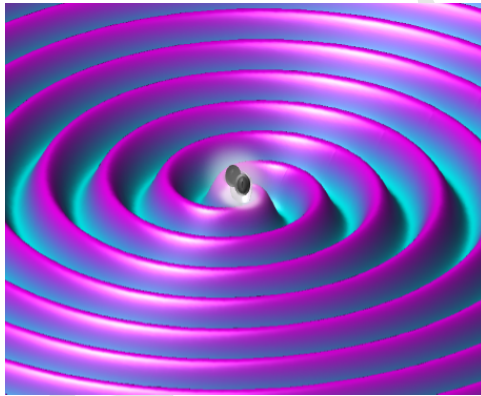


Relatividad y Gravitación

Teoría, algoritmos y problemas



Jorge I. Zuluaga

Profesor titular de Astronomía y Física

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

10 de julio de 2020

BORRADOR

Índice general

1.	Aplicaciones de la relatividad general	7
1.1.	Agujeros negros	8
1.1.1.	Historia de los agujeros negros	8
1.1.2.	Un temario	11
1.1.3.	Métrica de Schwarzschild	11
1.1.4.	Tensores asociados a la métrica {tensores_schw} . . .	12
1.1.5.	Ecuación de campo y solución {ecuacion_campo_schw}	15
1.1.6.	Cantidades asociadas a la métrica	18
1.1.7.	Integración numérica	19
1.1.8.	Coordenadas y medidas	21
1.1.9.	Dilatación gravitacional del tiempo	23
1.1.10.	Corrimiento al rojo gravitacional	29
1.1.11.	Contracción de longitudes	30
1.1.12.	Movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild	32
1.1.13.	Constantes de movimiento	34
1.1.14.	Caída libre en un agujero negro	35
1.1.15.	Coordenadas avanzadas e Eddington-Finkelstein . .	40
2.	Apéndices	43
2.1.	Códigos útiles	43
2.1.1.	Cálculo analítico de tensores en relatividad general .	43
	Bibliografía	47

BORRADOR

Índice de figuras

1.1.	Karl Schwarzschild	9
1.2.	Imagen del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 obtenida por el <i>Event Horizon Telescope</i> el 10 de abril de 2019 .	10
1.3.	Figura correspondiente al código 1.1.	22
1.4.	Figura correspondiente al código 1.2.	25
1.5.	Geodésica nula de rayos de luz que viajan radialmente hacia afue- ra desde el mismo punto.	26
1.6.	Valores del factor de dilatación de Schwarzschild para distintos valores de	28
1.7.	Figura correspondiente al código 1.3.	33
1.8.	Figura correspondiente al código 1.4.	38
1.9.	Figura correspondiente al código 1.5.	39
1.10.	Geodésica nula en las coordenadas de Finkelstein-Eddington	41

BORRADOR

Capítulo 1

Aplicaciones de la relatividad general

Resumen

Después de deducir el formalismo básico de la relatividad general, procederemos en este capítulo a usarlo para estudiar problemas concretos y hacer las predicciones más importantes de la teoría general de la relatividad.

Nos concentraremos aquí en tres aplicaciones importantes:

- **Ondas gravitacionales.** La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y la descripción de algunas de sus propiedades básicas es una de las más interesantes y poco triviales predicciones de la teoría general de la relatividad. Aquí estudiaremos algunos aspectos básicos de la teoría (un tratamiento riguroso y en detalle esta más allá del nivel de este curso), concentrándonos en ofrecer las bases para un estudio más detallado y para predecir las propiedades específicas de sistemas que emiten ondas gravitacionales en el universo.
- **Solución de Schwarzschild y agujeros negros.** La métrica de Schwarzschild es una de las únicas soluciones analíticas que se conocen de la ecuación de campo métrico. Describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior de un objeto con simetría esférica. Deduciremos aquí la métrica y estudiaremos el movimiento de partículas de prueba en este espacio-tiempo. En particular con estos datos predeciremos las propiedades de los agujeros negros.
- **La métrica de Friedmann-Robertson-Walker.** Otra de las soluciones analíticas a la ecuación de campo métrico es la que describe un universo homogéneo e isotrópico. Esta solución fue también obtenida muy poco tiempo después del surgimiento de la relatividad. Aquí deduciremos esta solución y un conjunto muy importante de ecuaciones relacionadas que se conocen como las ecuaciones de Friedmann y que describen la dinámica del universo en expansión y su relación con el contenido (y tipo) de masa energía. Estudiaremos las propiedades de la métrica y sus predicciones respecto al Universo.

El orden que seguiremos no es el orden convencional. Hemos decidido concentrarnos en los temas de mayor actualidad en el momento.

1.1. Agujeros negros

Los agujeros negros son una de las más sorprendentes predicciones de la Relatividad General. Su existencia fue primero predicha usando la teoría Newtoniana y solo hasta 1915 cuando fue publicada la primera solución analítica de la ecuación de campo la predicción no fue definitivamente confirmada por la teoría y se empezó a especular con su existencia.

1.1.1. Historia de los agujeros negros

El primero en predecir la existencia de los agujeros negros o *estrellas negras* como se llamaron originalmente fue John Mitchel en 1784 [1] y luego por Pierre Simon de Laplace en 1796. El argumento tanto de Mitchell como de Laplace se basaba en la velocidad de escape que según la teoría de Newton es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Lo que calcularon Mitchell y Laplace fue el tamaño que debería tener un objeto para que su velocidad de escape fuera la velocidad de la luz. El resultado es trivial:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Esta teoría era correcta en el contexto de la teoría corpuscular de la luz pero no en el modelo donde la luz era una onda.

En Noviembre de 1915 Einstein presenta su teoría de la Relatividad General (para una historia del proceso ver [esta entrada de blog](https://trinoceronte.wordpress.com/cronologia-de-un-milagro/)¹). Unos meses después, ya en enero de 1916 Karl Schwarzschild le envía a Einstein unas notas de una solución analítica a la ecuación de campo. Einstein se sorprende por la simplicidad de la solución [2].

¹<https://trinoceronte.wordpress.com/cronologia-de-un-milagro/>



Figura 1.1: *Karl Schwarzschild*

En mayo de 1916 Johannes Droste un estudiante de Hendrik Lorentz presenta un artículo en donde redescubre la solución de Schwarzschild y deduce las propiedades y la fenomenología del espacio-tiempo alrededor de un agujero negro. En particular Droste señala allí la existencia de una singularidad matemática que es la que conocemos como el radio de Schwarzschild.

En 1924 Arthur Eddington estudia en detalle la solución y encuentra que la singularidad desaparece con un cambio adecuado de coordenadas (coordenadas de Eddington-Finkelstein) y estudia las primeras posibilidades de que existieran objetos astrofísicos con estas propiedades.

En 1939 Robert Oppenheimer estudia el colapso extremo de objetos muy densos e identifica el radio de Schwarzschild como una superficie de la que no escaparía la luz. Llama a objetos hipotéticos de ese tipo *estrellas congeladas*.

En 1958 David Finkelstein introduce el concepto de *horizonte de eventos* mostrando que se trata de una frontera imaginaria que podría ser atravesada por un observador en caída libre si se escoge como sistema de coordenadas el de ese observador.

En 1963 Roy Kerr encuentra la solución exacta a las ecuaciones de campo para un agujero negro rotante. Más tarde Ezra Newman descubre la solución axisimétrica de un agujero negro rotante y con carga eléctrica que hoy se conoce como la métrica de Kerr-Newman.

El término *Agujero Negro* fue acuñado en 1963 para un artículo divulgativo en la revista Life. Otra historia indica que su origen se debe a John Wheeler después de una pregunta que le hizo un estudiante. Oficialmente se considera a Wheeler el inventor del término.

El primer candidato a un agujero negro fue descubierto en 1972 por Charles Thomas Boltón en una binaria e rayos X conocida como Cygnus X-1.

Hoy las evidencias de la existencia de agujeros negros astrofísicos son abundantes:

- Binarias de rayos X.

- Agujero negro supermasivos en el centro de la galaxia.
- Agujeros negros supermasivos en galaxias activas.
- Agujeros negros binarios descubiertos por su emisión de ondas gravitacionales.

En años recientes el área se ha visto enriquecida por varios descubrimientos muy relevantes.

La observación directa del movimiento de estrellas alrededor del agujero negro central de la vía Láctea.

La observación de los efectos de la relatividad general sobre la luz de estrellas que orbitan el agujero negro central .

La observación de la precesión de la órbita de una estrella.

La observación de más de 5 colisiones de agujeros negros binarios por su emisión de ondas gravitacionales por el consorcio LIGO.

La más espectacular que es la observación de alta resolución del disco de acreción alrededor del agujero negro supermasivo de M87 que fue realizada por el *Event Horizon Telescope* en 2019.

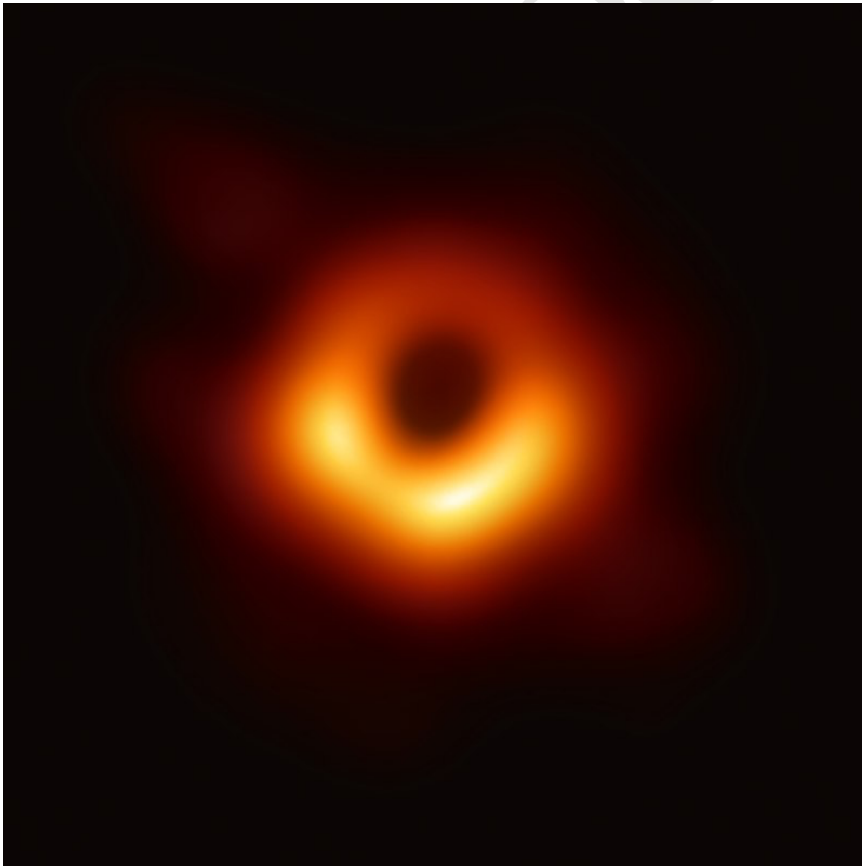


Figura 1.2: Imagen del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 obtenida por el Event Horizon Telescope el 10 de abril de 2019

1.1.2. Un temario

Estos son los temas que desarrollaremos en esta sección:

- La solución de Schwarzschild.
- Propiedades de la métrica de Schwarzschild.
- Movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild.
- Movimiento de la luz cerca al horizonte.
- Las coordenadas de Kruskal-Szekeres.
- Agujeros negros rotantes de Kerr.
- Horizontes y la ergósfera.

1.1.3. Métrica de Schwarzschild

Queremos encontrar la métrica en el exterior de una distribución de masa con un total de masa M , con simetría esférica.

Por razones de simetría usaremos coordenadas esféricas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$ que en este contexto se conocen como **coordenadas de Schwarzschild**.

Por estar en el exterior de la masa, la ecuación de campo se reduce a la ecuación en el vacío:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Infinitas métricas $g_{\mu\nu}$ son compatibles con esta condiciones. ¿Qué es entonces lo que determina la métrica? Las simetrías y condiciones de frontera:

- La métrica debe tener **simetría esférica**. Esta simetría implica:
 - Que una forma simple de la métrica se obtiene usando coordenadas esféricas o coordenadas de Schwarzschild.
 - Que los coeficientes métricos deberían solo depender de la coordenada radia r .
 - Que la métrica es simétrica, $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$.
- Suponemos que **la métrica es estática**. Esto significa que no depende del tiempo (estacionaria) pero además no cambia si se invierte el tiempo $t \rightarrow -t$.
- La métrica es asintóticamente plana. Esto implica que a gran distancia $t \rightarrow \infty$ la métrica se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dT^2 - dr^2 - d\ell^2$$

donde $T = ct$:

$$d\ell = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

es el elemento de línea sobre la superficie de una esfera.

La métrica más general que cumple esas condiciones es:

$$ds^2 = e^{2A(r)} dT^2 - e^{2B(r)} dr^2 - d\ell^2$$

El uso de la función exponencial tiene como proposito:

1. Garantizar que los coeficientes de la métrica son positivos y la signatura se mantiene (métrica de un espacio Lorentziano).
2. Facilitar las derivadas.

Nótese también que la parte tangencial de la métrica no depende de r para garantizar la simetría esférica.

La condición de que la métrica debe ser asintóticamente plana implica que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$$

1.1.4. Tensores asociados a la métrica {tensores_schw}

Para proceder a obtener información sobre las funciones $A(r)$ y $B(r)$ debemos calcular todas las cantidades tensoriales asociadas a la métrica y reemplazar en la ecuación de campo.

Las componentes de la métrica son:

$$\begin{aligned} g_{TT} &= e^{2A(r)} \\ g_{rr} &= -e^{2B(r)} \\ g_{\theta\theta} &= -r^2 \\ g_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Y las de la inversa:

$$\begin{aligned} g^{TT} &= e^{-2A(r)} \\ g^{rr} &= -e^{-2B(r)} \\ g^{\theta\theta} &= -\frac{1}{r^2} \\ g^{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \tag{1.1}$$

El procedimiento es bastante laborioso y para hacerlo se puede utilizar una herramienta de cálculo simbólico como [Wolfram Lab Cloud](http://lab.wolframcloud.com)². En el [sitio electrónico del libro](#)³ se deja al estudiante las rutinas y una guía para los comandos para realizar este cálculo.

Símbolos de Christoffel {christoffel_schw}

Dado que la métrica es simétrica, los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero serán:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\nu}^{\lambda} &= +\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda,\nu} \\ \Gamma_{\mu\mu}^{\lambda} &= -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\mu\mu,\lambda} \end{aligned}$$

²<http://lab.wolframcloud.com>

³<http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

Los símbolos de Christoffel diferentes de cero serán:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Tr}^T &= A' \\
 \Gamma_{rr}^r &= B' \\
 \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \cot \theta \\
 \Gamma_{TT}^r &= A'e^{2(A-B)} \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2B} \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -e^{-2B}r \sin^2 \theta \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Tensor de Riemann {riemann_schw}

El tensor de Riemann es:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \{\Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\delta \Gamma_{\kappa\delta}^\lambda\} - \{\nu \leftrightarrow \kappa\}$$

que se puede expandir como:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \Gamma_{\mu\nu,\kappa}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\delta \Gamma_{\kappa\delta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\lambda$$

Por las simetría del tensor de Riemann y el hecho que la métrica sea diagonal las únicas componentes distintas de cero son:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa}, R^\lambda_{\mu\nu\lambda}$$

es decir:

$$R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\delta \Gamma_{\lambda\delta}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\lambda$$

En particular los términos distintos de cero serán:

$$R^\lambda_{\mu\mu\lambda} = \Gamma_{\mu\mu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\mu}^\lambda + \Gamma_{\mu\mu}^\delta \Gamma_{\lambda\delta}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\delta \Gamma_{\mu\delta}^\lambda$$

Un laborioso cálculo permite encontrar las componentes diferentes de cero no repetidas:

$$\begin{aligned}
 R^T_{rrT} &= A'B' - A'' - (A')^2 \\
 R^T_{\theta\theta T} &= -re^{-2B}A' \\
 R^T_{\varphi\varphi T} &= -re^{-2B}A' \sin^2 \theta \\
 R^r_{\theta\theta r} &= re^{-2B}B' \\
 R^r_{\varphi\varphi r} &= re^{-2B}B' \sin^2 \theta \\
 R^\theta_{\varphi\varphi\theta} &= (1 - e^{-2B}) \sin^2 \theta
 \end{aligned}$$

Tensor de Ricci {ricci_schw}

El tensor de Ricci se define como:

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$$

Dado que los únicos términos distintos de cero del tensor de Riemann son aquellos para los cuales $\mu = \nu$, descubrimos que el tensor de Ricci es diagonal:

$$R_{\mu\mu} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\mu\lambda}$$

Para el cálculo por ejemplo de R_{TT} , por ejemplo:

$$R_{TT} = R^r_{TT r} + R^{\theta}_{TT \theta} + R^{\varphi}_{TT \varphi}$$

Para obtener el término $R^r_{TT r}$ se debe usar la propiedad:

$$R^r_{TT r} = g^{rr} R_{rTT r} = g^{rr} R_{TrrT} = g^{rr} g_{TT} R^T_{rrT}$$

Después de un álgebra laboriosa obtenemos:

$$\begin{aligned} R_{TT} &= -e^{2(A-B)} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2A'}{r} \right] \\ R_{rr} &= A'' + (A')^2 - A'B' - \frac{2B'}{r} \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta \left\{ e^{2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \right\} \end{aligned}$$

Escalar de curvatura {escalar_curvatura_schw}

El escalar de curvatura se calcula usando:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

Al reemplazar queda:

$$R = -2e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2}{r} (A' - B') + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2}$$

Tensor de Einstein {tensor_einstein_schw}

Por último el tensor de Einstein es la traza inversa del tensor de Ricci:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Dado que ambos $g_{\mu\nu}$ y $R_{\mu\nu}$ son simétricos el tensor de Einstein también lo es:

$$G_{\mu\mu} = R_{\mu\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\mu} R$$

El álgebra en este caso produce:

$$\begin{aligned}
 G_{TT} &= -\frac{2e^{2(A-B)}}{r}B' + \frac{e^{2(A-B)}}{r^2} - \frac{e^{2A}}{r^2} \\
 G_{rr} &= -\frac{2A'}{r} + \frac{e^{2B}}{r^2} - \frac{1}{r^2} \\
 G_{\theta\theta} &= -r^2e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] \\
 G_{\varphi\varphi} &= -r^2e^{-2B} \sin^2\theta \left[A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right]
 \end{aligned}$$

1.1.5. Ecuación de campo y solución {ecuacion_campo_schw}

Con todos los elementos a la mano, podemos ahora preguntarnos por cuál es la condición que debe cumplir $A(r)$ y $B(r)$ para que se cumpla la ecuación de campo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

o bien:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

Como estamos en un punto por fuera del cuerpo, eso implica que ambos:

$$G_{\mu\nu} = 0$$

y

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Adicionalmente esta última condición implica también que:

$$R = 0$$

Tenemos un total de 9 condiciones posibles:

$$\begin{aligned}
-e^{2(A-B)} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2A'}{r} \right] &= 0 \quad (R_{TT}) \\
A'' + (A')^2 - A'B' - \frac{2B'}{r} &= 0 \quad (R_{rr}) \\
e^{-2B} [1 + r(A' - B')] - 1 &= 0 \quad (R_{\theta\theta}) \\
\sin^2 \theta \left\{ e^{2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \right\} &= 0 \quad (R_{\phi\phi}) \\
-2e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2}{r}(A' - B') + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2} &= 0 \quad (R) \\
-\frac{2e^{2(A-B)}}{r} B' + \frac{e^{2(A-B)}}{r^2} - \frac{e^{2A}}{r^2} &= 0 \quad (G_{TT}) \\
-\frac{2A'}{r} + \frac{e^{2B}}{r^2} - \frac{1}{r^2} &= 0 \quad (G_{rr}) \\
-r^2 e^{-2B} \left[A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] &= 0 \quad (G_{\theta\theta}) \\
-r^2 e^{-2B} \sin^2 \theta \left[A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] &= 0 \quad (G_{\phi\phi})
\end{aligned}$$

Hay muchas posibilidades pero una de las más sencillas es combinar $e^{-2A}G_{TT} + e^{-2B}G_{rr}$ para producir:

$$\frac{2e^{-2B}}{r} (A' + B') = 0$$

que implica obviamente:

$$A' = -B'$$

Esta última ecuación se puede integrar para producir:

$$B(r) = -A(r) + C$$

¿Qué papel tiene la constante C? Lo único que hace C es hacer el coeficiente de la componente r de la métrica $\exp[2B(r)] = \exp[-2A(r) + 2C] = \exp[-2A(r)] \exp(2C)$ un poco mayor o un poco menor en una constante, sin afectar en nada su dependencia de r . Ese factor adicional se puede eliminar con un cambio en las unidades de r , tal que en esas unidades $\exp(2C) = 1$ y por tanto $C = 0$. La relación resultante es entonces:

$$B(r) = -A(r)$$

De modo que la métrica será:

$$ds^2 = e^{2A(r)} dT^2 - e^{-2A(r)} dr^2 - d\ell^2$$

Con esta identidad la ecuación para G_{TT} se convierte en:

$$\begin{aligned}
-\frac{2e^{-4B}}{r}B' + \frac{e^{-4B}}{r^2} - \frac{e^{-2B}}{r^2} &= 0 \\
-2e^{-2B}rB' + e^{-2B} - 1 &= 0 \\
\frac{d}{dr}[r(e^{-2B} - 1)] &= 0
\end{aligned}
\tag{1.3}$$

Esta ecuación se integra trivialmente como:

$$e^{-2B} = 1 + \frac{K}{r}$$

donde K es una constante.

De aquí y por $A(r) = -B(r)$ obtenemos:

$$e^{2A} = 1 + \frac{K}{r}$$

De modo que arribamos a la métrica más general compatible con las condiciones del problema:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{K}{r}\right) dT^2 - \left(1 + \frac{K}{r}\right)^{-1} dr^2 - d\ell^2$$

Es posible probar con los programas provistos con la [versión electrónica del libro](#)⁴ que esta métrica tiene tensor de Ricci, tensor de Einstein y escalar de curvatura cero como era de esperarse. Adicionalmente vemos que la métrica es asintóticamente plana, cumpliendo con todas las condiciones impuestas inicialmente.

Ahora bien: ¿cuánto vale la constante K ? Para esto nos podemos valer del principio de consistencia.

Sabemos que esta métrica en el límite de campo débil debe ser igual a la métrica e Newton:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - dr^2 - d\ell^2$$

donde $R_S = 2GM/c^2$ es la escala de longitud asociada a la masa M .

Una comparación entre estas dos métricas nos muestra que:

$$K = -R_S$$

y la solución queda finalmente:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - d\ell^2$$

⁴<http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

1.1.6. Cantidades asociadas a la métrica

Con la forma final de la métrica obtenida podemos escribir finalmente los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Tr}^T &= \frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 \Gamma_{rr}^r &= -\frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \cot \theta \\
 \Gamma_{TT}^r &= \frac{R_S}{2r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \\
 \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \sin^2 \theta \\
 \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Las componentes del tensor de Riemann son:

$$\begin{aligned}
 R_{rrT}^T &= \frac{R_S}{r^3} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 R_{\theta\theta T}^T &= R_{\theta\theta r}^r = -\frac{R_S}{2r} \\
 R_{\varphi\varphi T}^T &= R_{\varphi\varphi r}^r = -R_{\varphi\varphi\theta}^\theta = -\frac{R_S}{2r} \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Las ecuaciones geodésicas serán:

$$\begin{aligned}
\dot{U}_T &= -\frac{R_S}{r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} U_T U_r \\
\dot{U}_r &= -\frac{R_S}{2r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) U_T^2 + \\
&\quad + \frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} U_r^2 + \\
&\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r U_\theta^2 + \\
&\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r \sin^2 \theta U_\varphi^2 \\
\dot{U}_\theta &= -\frac{2}{r} U_r U_\theta + \cos \theta \sin \theta U_\varphi^2 \\
\dot{U}_\varphi &= -\frac{2}{r} U_r U_\varphi - 2 \cot \theta U_\theta U_\varphi
\end{aligned} \tag{1.6}$$

donde $U_\mu \equiv dx^\mu/d\sigma$.

1.1.7. Integración numérica

Para conocer las propiedades de la métrica, podemos programar las ecuaciones de la geodésica e integrarlas numéricamente.

Lo primero es escribir las ecuaciones diferenciales:

```
def geodesica_schwarzschild(Y,s,Rs):
    #Coordenadas y sus velocidades
    T,r,q,f,dTds,drds,dqds,dfds=Y
    #Factores
    A=1-Rs/r
    v=Rs/(2*r**2)
    #ecuaciones
    from numpy import zeros_like,sin,cos
    dYds=zeros_like(Y)
    #Ecuaciones de velocidades
    dYds[:4]=Y[4:]
    #Aceleraciones
    dYds[4]=-2*v/A*dTds*drds
    dYds[5]=-v*A*(dTds)**2+\
        v/A*(drds)**2+\
        A*r*(dqds)**2+\
        A*r*sin(q)**2*(dfds)**2
    dYds[6]=-(2/r)*drds*dqds+cos(q)*sin(q)*(dfds)**2
    dYds[7]=-(2/r)*drds*dfds-2*cos(q)/sin(q)*(dqds)*(dfds)
    return dYds
```

Definamos las propiedades

```

# Constantes
c=3e8 # m/s
G=6.67e-11 # m^3 kg^-1 s^-2
M=1.98e30 # kg

# Radio de Schwarzschild
Rs=2*G*M/c**2

# Velocidad característica
from numpy import pi,sqrt
r0=10*Rs
v0=sqrt(G*M/r0)
df0ds=(v0/r0/c) # r df/d(ct) = v/c
P=2*pi*c*r0/v0 # Periodo típico

```

```

R_S = 2934.8 m
v/c = 0.22360679774997896
d(fi)/ds = 7.619149439484087e-06
P = 824657.0509063328 m

```

Las condiciones iniciales:

```

from numpy import pi,array
Y0s=array([
    0,r0,pi/2,0.0,
    1.0,0.0,0.0,0.9*df0ds
])

from numpy import linspace
ss=linspace(0,3*P,300)

```

La solución es:

```

from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(geodesica_schwarzschild,Y0s,ss,args=(Rs,))

Ts=Ys[:,0]
rs=Ys[:,1]
qs=Ys[:,2]
fs=Ys[:,3]

```

En coordenadas cartesianas:

```

from numpy import sin,cos
xs=rs*sin(qs)*cos(fs)
ys=rs*sin(qs)*sin(fs)
zs=rs*cos(qs)

```

Un gráfico de la solución

(Algoritmo 1.1)

```

import matplotlib.pyplot as plt
plt.close("all")
from matplotlib.patches import Circle
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

ax.plot(xs/Rs,ys/Rs,'k-')
cRs=Circle((0,0),1,fill=None,ls='--')
ax.add_patch(cRs)

#Decoración
rang=1.2*max(abs(xs).max(),abs(ys).max())/Rs
ax.set_xlim((-rang,rang))
ax.set_ylim((-rang,rang))
ax.set_xlabel("$x/R_S$")
ax.set_ylabel("$y/R_S$")
ax.xaxis.set_label_coords(0.5,0.05)
ax.yaxis.set_label_coords(0.05,0.5)
ax.grid()
fig.tight_layout()

```

ver Figura 1.3

Para ver una versión animada de esta gráfica vea la [versión electrónica](#)⁵ de este libro.

1.1.8. Coordenadas y medidas

La métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - d\ell^2$$

como cualquier otra métrica, nos permite calcular directamente la distancia entre eventos cercanos en el espacio-tiempo alrededor de un objeto esféricamente simétrico. Pero ¿qué significa esa distancia y como se relaciona con las *medidas* que pueden realizar distintos observadores que estudian la gravedad cerca al cuerpo?

Podemos reconocer 3 tipos básicos de observadores en un campo gravitacional:

1. **Observador en reposo.** Este observador no cambia sus coordenadas y esta en reposo respecto al centro del cuerpo. Naturalmente su reposo no es compatible con la estructura del espacio-tiempo que dicta que debería moverse en una geodésica que sabemos esta asociada con la caída libre. Para mantener su condición este observador debe usar un mecanismo externo, un cohete, una cuerda que le llega de mucho más arriba. Podemos considerar que *localmente* este observador percibe un espacio-tiempo plano, pero para hacer consistente sus observaciones del mundo debemos agregar a sus sistema de referencia

⁵<http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

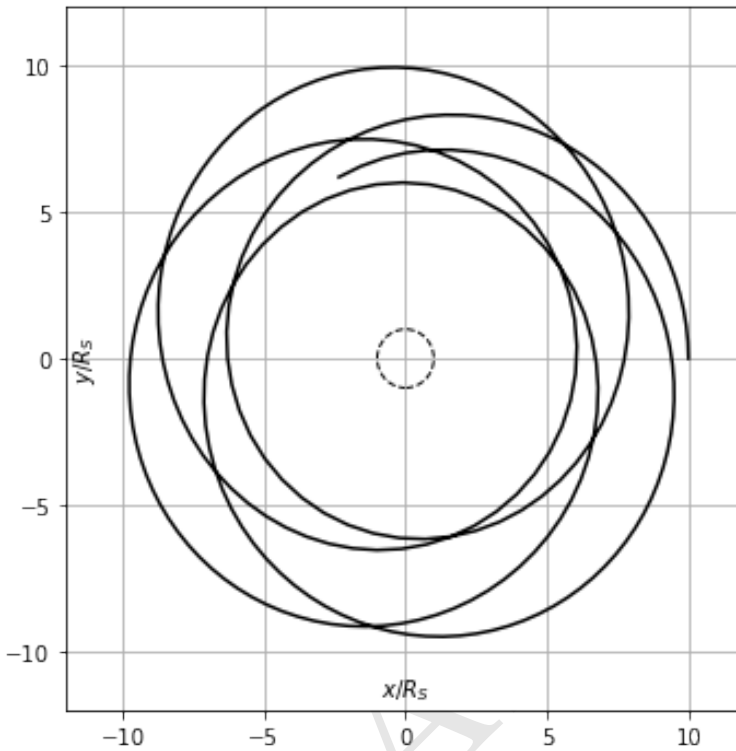


Figura 1.3: Figura correspondiente al código 1.1.

una *fuerza* gravitacional que obliga a las cosas localmente a su alrededor a acelerarse hacia el centro. Usaremos el subíndice **st** (*static*) para representar las cantidades medidas por este observador.

2. **Observador en caída libre.** Otra posibilidad es estudiar los fenómenos mientras se describe una geodésica en el espacio-tiempo. Llamamos a este tipo de observador un *observador en caída libre*. De acuerdo con el principio de equivalencia, este observador es localmente inercial y no percibe los efectos del campo gravitacional. La métrica que percibe localmente es también la del espacio-tiempo plano. Una observación importante es que el observador en caída libre no está en reposo respecto al centro del cuerpo que ve acercarse (o alejarse) a medida que se mueve en su geodésica. Usaremos el subíndice **ff** (*free-fall*) para representar las cantidades medidas por este observador.
3. **Observador remoto.** Un tipo de observador en caída libre muy útil es uno que se encuentra a una distancia muy grande del cuerpo. Este observador está prácticamente en reposo respecto al cuerpo masivo. Dado que se encuentra muy lejos, pero también que está en caída libre la métrica que percibe es la métrica de Minkowski. Usaremos el subíndice “ ∞ ” para representar las cantidades medidas por este observador.

La pregunta que nos hacemos es: ¿a qué observación de cuál observador co-

responden los valores de las coordenadas de Schwarzschild, (t, r, θ, ϕ) ?

Este es uno de los aspectos más extraños (o nuevos respecto a nuestra visión clásica del mundo y de la física): la libertad que tenemos en relatividad general de elegir las coordenadas hace que sea físicamente irrelevante lo que significan las coordenadas anteriores. Estrictamente hablando t , por ejemplo, no corresponde necesariamente a un tiempo o r a una distancia. Son solo etiquetas para nombrar los eventos alrededor del cuerpo que produce el campo gravitacional. Es posible que después de un cambio de coordenadas los tiempos medidos por un observador correspondan a una mezcla de valores de t y r .

La coordenada temporal deja de ser tiempo, es solo una de 4 coordenadas.

Para definir rigurosamente las medidas de tiempo y distancia en cualquier métrica en un campo gravitacional debemos realizar experimentos. Solo los experimentos nos proveerán de la intuición básica de lo que pasa en un campo gravitacional.

1.1.9. Dilatación gravitacional del tiempo

Consideremos por ejemplo una situación en la que tenemos una fuente de luz situada en reposo en un punto del espacio con coordenadas (r, θ, ϕ) . Imaginemos que la fuente emite pulsos muy cortos de luz periódicamente (con una periodicidad tan pequeña como queramos).

Tomemos dos pulsos caracterizados por coordenadas de Schwarzschild $E_1 : (t, r, \theta, \phi)$ y el fin de la emisión $E_2 : (t + dt_{em}, r, \theta, \phi)$, siendo aquí dt la diferencia (arbitrariamente pequeña) entre las coordenadas t de los dos pulsos.

De acuerdo con la métrica de Schwarzschild la distancia espacio-temporal entre estos eventos será:

$$ds = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} c dt_{em}$$

De acuerdo con la relatividad general este intervalo debe ser el mismo para cualquier sistema de coordenadas construido alrededor del evento. En particular podemos usar el sistema de coordenadas de un observador en reposo al lado de la fuente de luz. Recordemos que para este observador la métrica local es Minkowskiana y dado que estamos considerando dos eventos que ocurren en el mismo lugar del espacio, entonces la separación espacio-temporal entre los eventos será igual (en unidades luz) al tiempo propio entre ellos medidos por el observado $d\tau_{st}^2$. De este modo:

$$d\tau_{st} = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} dt_{em}$$

Aquí esta la primera evidencia de que las coordenadas de Schwarzschild en realidad no *necesariamente* corresponden a una medida hecha por un observador concreto. Ni siquiera un observador parado al lado de una fuente de luz mide el "tiempo" dt .

Permitamos que la luz de la fuente se propague en todas direcciones. Nos interesa en particular un rayo de luz que se propaga en dirección radial hacia afuera ($d\ell = 0$). Al tratarse de un rayo de luz, los eventos que va visitando el rayo se encuentran separados entre sí por una distancia espacio-temporal nula:

$$0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2$$

De aquí podemos deducir la ecuación de movimiento del rayo de luz que sale hacia fuera, que podemos escribir, convenientemente, como:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - R_S/r}$$

Si integramos entre el tiempo de emisión t y un tiempo de detección t_{obs} , en algún punto lejos del cuerpo, $r = r_{\text{obs}}$, obtenemos:

$$t_{\text{obs}} - t = \frac{r_{\text{obs}} - r}{c} + \frac{c}{R_S} \ln \left(\frac{r_{\text{obs}} - R_S}{r - R_S} \right)$$

una expresión bastante complicada para algo tan sencillo como un rayo de luz saliendo del cuerpo.

La ecuación anterior representa la ecuación de una geodésica nula alrededor del cuerpo. En el código a continuación dibujamos geodésicas nulas alrededor de un cuerpo:

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 1.2)

```
#Condiciones iniciales
c=3e5 # km/s
RS=3e5 # km
r=1.1*RS

from numpy import linspace
robs=linspace(r,10*RS,100)

from numpy import log
tobs=(robs-r)/c+c/RS*log((robs-RS)/(r-RS))
tpla=(robs-r)/c

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.axhspan(0,1,color='k',alpha=0.3)
ax.plot(tpla,robs/c,'k--',label='Geodésica de Minkowski')
ax.plot(tobs,robs/c,label='Geodésica de Schwarzschild')

#Decoración
ax.set_xlabel("$t$ [s]")
ax.set_ylabel("$r$ [s-1]")
ax.legend()
rang=max(robs/c)
ax.set_xlim((0,rang))
ax.set_ylim((0,rang))
```



```
ax.grid()
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.4

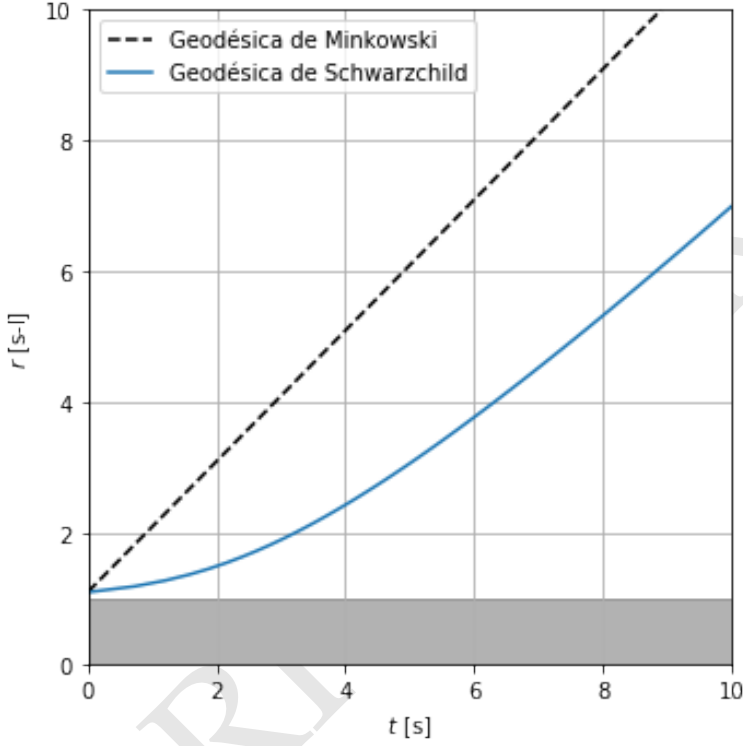


Figura 1.4: Figura correspondiente al código 1.2.

Si tomamos dos pulsos de luz consecutivos separados por una diferencia coordenada de tiempo dt_{em} , emitidos desde la misma coordenada radial r , los tiempos de detección de estos pulsos en el lugar lejano, que podemos llamar t_{obs} y t'_{obs} , serán:

$$\begin{aligned}
 t_{\text{obs}} - t &= \frac{r_{\text{obs}} - r}{c} + \frac{c}{R_S} \ln \left(\frac{r_{\text{obs}} - R_S}{r - R_S} \right) \\
 t'_{\text{obs}} - (t + dt_{\text{em}}) &= \frac{r_{\text{obs}} - r}{c} + \frac{c}{R_S} \ln \left(\frac{r_{\text{obs}} - R_S}{r - R_S} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

De modo que la diferencia entre las coordenadas temporales en el lugar lejano $dt_{\text{obs}} = t'_{\text{obs}} - t_{\text{obs}}$ será:

$$dt_{\text{obs}} = dt_{\text{em}}$$

esto, sin importar la distancia a la que se encuentre el observador.

Este resultado aplica incluso si los eventos tienen una separación macroscópica:

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_{\text{em}}$$

Esta igualdad se puede ilustrar graficando multiples rayos de luz:

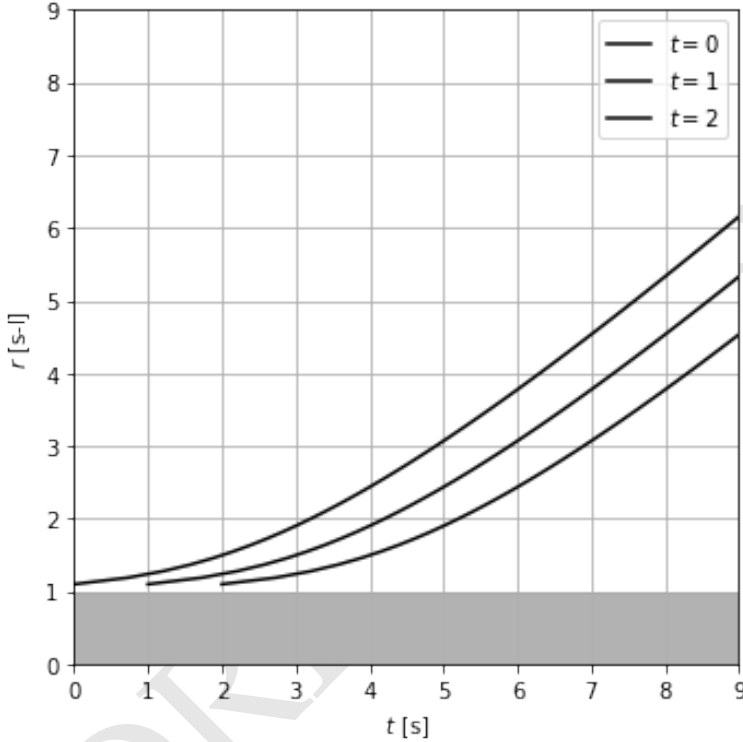


Figura 1.5: Geodésica nula de rayos de luz que viajan radialmente hacia afuera desde el mismo punto.

Puede verse que independientemente de la trayectoria que sigan los rayos de luz, la separación entre ellos al llegar a un observador lejano será siempre la misma (1 segundo).

En particular para el observador remoto, que definíamos al principio, el tiempo medido y el tiempo coordenado entre los dos eventos de llegada de los pulsos será igual, de modo que concluimos que:

$$\Delta \tau_{\infty} = \Delta t_{\text{em}}$$

Es decir, podemos relacionar los intervalos de tiempo coordenado (en coordenadas de Schwarzschild) entre eventos en el mismo lugar del espacio, con el tiempo medido por relojes de un observador remoto.

Esto finalmente implica la relación:

$$\Delta\tau_{\text{st}} = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \Delta\tau_{\infty}$$

Que se escribe más convenientemente como:

$$\Delta\tau_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 - R_S/r}} \Delta\tau_{\text{st}}$$

Si definimos $\rho = r/R_S$ y:

$$\Gamma(\rho) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\rho}}$$

en clara analogía con el factor de Lorentz-Einstein de la relatividad especial $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, entonces la anterior expresión se escribe como:

$$\Delta\tau_{\infty} = \Gamma(\rho) \Delta\tau_{\text{st}}$$

Como vemos el tiempo *observado* entre dos eventos que ocurren en la misma coordenada r alrededor del cuerpo es siempre mayor que el tiempo *propio* registrado entre estos dos eventos por un observador en reposo al lado del fenómeno. Llamamos a este fenómeno **dilatación gravitacional del tiempo**.

Hagamos un cálculo típico. Por ejemplo supongamos que tenemos un fenómeno magnético (una región de actividad) que se desarrolla en la superficie del Sol (que suponemos aproximadamente quieto y simétricamente esférica) durante 1 mes o $2,6 \times 10^6$ segundos. Cuánto dura el mismo fenómeno *visto* desde la Tierra:

```
#Radio de Schwarzschild del Sol
RS=3 # km

#Radio del Sol
r=7e5 # km

rho=r/RS

#Duración "propia" del fenómeno
dtst=2.6e6 # s

#Factor de dilatación
from numpy import sqrt
G=1/sqrt(1-1/rho)

#Duración del fenómeno para un observador remoto
dtin=G*dtst

#Diferencia de tiempo
Dt=dtin-dtst
```

El fenómeno visto desde la Tierra dura 5.571446479763836 segundos mas

Como vemos, más interesante que la dilatación misma es la diferencia entre el tiempo medido remotamente y el tiempo propio del fenómeno:

$$\Delta\tau_{\infty} - \Delta\tau_{\text{st}} = [\Gamma(\rho) - 1] \Delta\tau_{\text{st}}$$

Nota

Expresión aproximada para Γ . Una forma muy conveniente para escribir $\Gamma(\rho)$ se obtiene cuando el lugar en el que se produce la luz esta a una distancia $r \gg R_S$, es decir $\rho \gg 1$. En este caso:

$$\Gamma(\rho) \approx 1 + \frac{1}{2\rho}$$

o bien,

$$\Gamma(\rho) - 1 \approx \frac{1}{2\rho}$$

Usando el hecho que $R_S = 2GM/c^2$ y definiendo $\Phi(r, M) \equiv -GM/r$ o bien $\Phi(\rho) = -c^2/(2\rho)$ (potencial gravitacional clásico), entonces:

$$\Gamma(\rho) \approx 1 - \frac{\Phi(\rho)}{c^2}$$

o lo que es lo mismo:

$$\Gamma(\rho) - 1 \approx -\frac{\Phi(\rho)}{c^2}$$

En la figura a continuación se muestra el valor de $\Gamma(\rho)$ para distintos valores de la razón $\rho = r/R_S$.

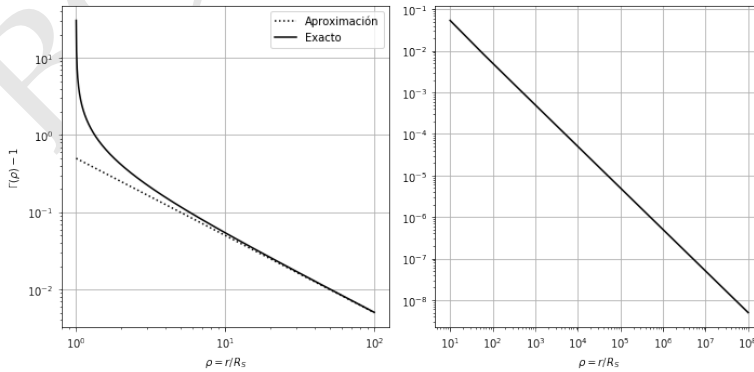


Figura 1.6: Valores del factor de dilatación de Schwarzschild para distintos valores de ρ .

1.1.10. Corrimiento al rojo gravitacional

No es difícil convertir el resultado anterior en los cambios que sufre un rayo de luz monocromático que se propaga radialmente en la métrica de Schwarzschild.

Si tomamos $\Delta\tau_{\text{st}} = P_{\text{em}}$, donde P_{em} es el período de una onda monocromática, entonces:

$$P_{\infty} = \Gamma(\rho) P_{\text{em}}$$

La frecuencia f de la onda será:

$$f_{\infty} = \frac{1}{\Gamma(\rho)} f_{\text{em}}$$

Es decir lejos del cuerpo la frecuencia percibida será menor que la frecuencia emitida. La longitud de onda, por otro lado, será:

$$\lambda_{\infty} = \Gamma(\rho) \lambda_{\text{em}}$$

En términos de Γ el corrimiento al rojo $z \equiv (\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}}) / \lambda_{\text{em}}$, se puede escribir como:

$$z_{\infty} = \Gamma(\rho) - 1$$

que es justamente la cantidad graficada más arriba.

Como vemos el corrimiento al rojo para cuerpos astrofísicos relativamente normales para los cuales $\rho \gg 1$, es muy pequeño y difícil de detectar.

El primer intento por medir el corrimiento al rojo gravitacional se realizó en los 1925 con la enana blanca Sirio B. Podemos calcular la magnitud del corrimiento esperado para esta estrella. Para ello lo podemos parametrizar, como se acostumbra en astronomía, en términos de una velocidad usando $v_z = cz$:

```
# Radio de Schwarzschild
RS=3 # km

# Radio de la estrella
r=1e4 # km

# Velocidad de la luz
c=3e5

# Factor Gamma
from numpy import sqrt
rho=r/RS
G=1/sqrt(1-1/rho)

# Corrimiento al rojo
z=(G-1)
vZ=z*c
```

Corrimiento esperado para Sirio B: 45.01 km/s

Lamentablemente por problemas de contaminación la medida no fue posible en aquella época y solo hasta 1954 logro medirse el corrimiento en la enana blanca Epsilon Eridani B.

En situaciones realistas las observaciones se hacen con observadores situados a distancias finitas. En este caso:

$$\begin{aligned}\Delta\tau_\infty &= \Gamma(\rho_1) \Delta\tau_{\text{st}}^{(1)} \\ \Delta\tau_\infty &= \Gamma(\rho_2) \Delta\tau_{\text{st}}^{(2)}\end{aligned}$$

De aquí que:

$$\Delta\tau_{\text{st}}^{(2)} = \frac{\Gamma(\rho_1)}{\Gamma(\rho_2)} \Delta\tau_{\text{st}}^{(1)}$$

Y por lo tanto la fórmula del corrimiento al rojo gravitacional será:

$$\lambda_{\text{obs}} = \frac{\Gamma(\rho_1)}{\Gamma(\rho_2)} \lambda_{\text{em}}$$

En términos explícitos:

$$\lambda_{\text{obs}} = \sqrt{\frac{1 + 2\Phi(\rho_2)/c^2}{1 + 2\Phi(\rho_1)/c^2}} \lambda_{\text{em}}$$

Para valores $\Phi \ll c$, se puede usar la expansión:

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} \approx 1 + \frac{[\Phi(\rho_2) - \Phi(\rho_1)]}{c^2}$$

o en términos del corrimiento al rojo $z \equiv (\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}})/\lambda_{\text{em}}$:

$$z \approx \frac{\Phi(\rho_2) - \Phi(\rho_1)}{c^2}$$

1.1.11. Contracción de longitudes

Otro interesante pero muy sutil efecto geométrico en un espacio con la métrica de Schwarzschild es el que es conocido como la contracción gravitacional de longitudes.

Para introducir este efecto tomemos eventos en las vecindades del cuerpo que comparten la misma coordenada temporal. Así por ejemplo podemos tomar dos eventos con coordenadas $E_1 : (t, r, \theta, \phi)$ y $E_2 : (t, r, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$. La distancia entre estos eventos será:

$$ds^2 = -d\ell^2$$

donde:

$$d\ell^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Es decir los puntos se encuentran ubicados sobre una triesfera. La distancia entre esos puntos obedecerá las reglas habituales de la trigonometría esférica. Es decir en superficies de t y r constantes en el espacio de Shwarzchild la geometría es convencional.

En particular podemos calcular la longitud C de una circunferencia máxima y obtenemos el resultado habitual:

$$C = 2\pi r$$

Todo parece muy normal para ser cierto. ¿Dónde está la sutileza?. La sutileza está en pensar que r_0 es la distancia al centro de la distribución de materia. Recordemos que r_0 es solo una de las partes de la etiqueta que usamos para indicar la posición de eventos alrededor del cuerpo y no corresponde con una cantidad medida realmente. Sin embargo C si que es una cantidad real, medible: podemos usar reglas en el sistema de referencia en reposo, orientadas en dirección perpendicular a la “fuerza” de gravedad para medir C . Aquí aparece un resultado interesante y es que midiendo C podemos determinar r :

$$r = \frac{C}{2\pi}$$

Imaginemos ahora dos eventos $E_1 : (t, r, \theta, \phi)$, $E_2 : (t, r + dr, \theta, \phi)$ situados en una misma dirección radial. La distancia espacio temporal entre los eventos es ahora:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right)^{-1} dr^2$$

El observador en reposo al lado de los dos eventos y situado en r la *distancia* entre los eventos será, $ds^2 = -dr_{st}^2$ donde r_{st} es una coordenada radial usada localmente por el observador a lo largo de la dirección radial:

$$dr_{st} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}$$

es decir:

$$dr = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} dr_{st}$$

Es decir, si muchos observadores se ponen de acuerdo para poner una barra de longitud igual dr_{st} en dirección radial entre ellos, la separación en la coordenada radial entre los observadores no será uniforme. Cerca R_S será menor y muy lejos de él será mayor.

El observador remoto puede realizar una tarea similar. Conociendo donde está la fuente de materia, construye un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con la distribución de materia y usa también coordenadas esféricas. Ese observador aplica sobre el espacio tiempo de todo el universo (incorrectamente) la métrica de Minkowski (el juzga que todo puede medirse con sus estándares). De nuevo, la distancia entre esos dos eventos las juzga igual a $ds^2 = -dr_{\infty}^2$. Dado que la distancia espacio-temporal debe coincidir:

$$dr_{\infty} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}$$

La distancia finita Δr_{∞} , medida por el observador remoto, entre dos circunferencias concéntricas con coordenadas de Schwarzschild r_1 y r_2 se obtiene integrando:

$$\Delta \rho_{\infty} = \left\{ \rho \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} + \frac{1}{2} \log \left[2\rho \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} + 1 \right) - 1 \right] \right\}_{\rho_1}^{\rho_2}$$

donde hemos usado aquí la variable radial normalizada $\rho = r/R_S$

De aquí vemos que la distancia medida desde $\rho_1 = 1$ a cualquier coordenada $\rho_2 = \rho$ es:

$$\Delta \rho_{\infty} = \rho \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} + \frac{1}{2} \log \left[2\rho \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} + 1 \right) - 1 \right]$$

Ciertamente esta es una expresión mucho más complicada que $\Delta \rho_{\infty}$. Para entenderla mejor hagamos un gráfico:

(Algoritmo 1.3)

```
from numpy import linspace,sqrt,log
rho=linspace(1,10,1000)
drho_inf=rho*sqrt(1-1/rho)+0.5*log(2*rho*(sqrt(1-1/rho)+1)-1)

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

ax.plot(rho,drho_inf)

#Decoración
ax.grid()

ax.set_xlabel(r"$r/R_S$")
ax.set_ylabel(r"$\Delta r_{\infty}/R_S$")

rang=max(drho_inf)
ax.set_xlim((1,rang+1))
ax.set_ylim((0,rang))
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.7

1.1.12. Movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild

La verdadera experiencia extrema en un agujero negro la siente un observador que cae libremente.

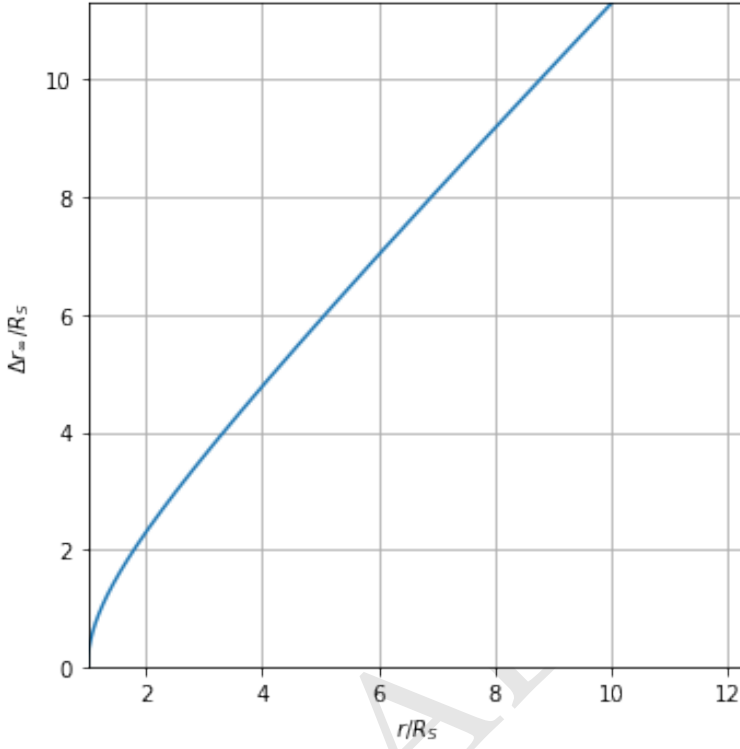


Figura 1.7: Figura correspondiente al código 1.3.

Para describir esta experiencia necesitamos estudiar el movimiento geodésico en la métrica. Antes habíamos escrito las ecuaciones geodésicas:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_T &= -\frac{R_S}{r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} U_T U_r \\
 \dot{U}_r &= -\frac{R_S}{2r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) U_T^2 + \\
 &\quad + \frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} U_r^2 + \\
 &\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r U_\theta^2 + \\
 &\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r \sin^2 \theta U_\varphi^2 \\
 \dot{U}_\theta &= -\frac{2}{r} U_r U_\theta + \cos \theta \sin \theta U_\varphi^2 \\
 \dot{U}_\varphi &= -\frac{2}{r} U_r U_\varphi - 2 \cot \theta U_\theta U_\varphi
 \end{aligned}$$

(1.8)

donde $U_\mu \equiv dx^\mu / d\sigma$ y σ es un parámetro conforme (tiempo propio τ en el caso de una partícula con masa y λ en el caso de una partícula sin masa).

Es claro que una solución analítica a estas ecuaciones en toda su generalidad no es posible. Sin embargo es posible estudiar el comportamiento de estas ecuaciones encontrando las constantes de movimiento.

1.1.13. Constantes de movimiento

En el caso por ejemplo de una partícula con masa m sabemos que una constante de movimiento esta dada por el módulo de la cuatrilvelocidad:

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2$$

Que se puede escribir explícitamente como:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\ell}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

donde $d\ell^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$.

La métrica tiene dos vectores de Killing: el correspondiente al tiempo $\xi_t : (1, 0, 0, 0)$ y el que corresponde a la coordenada angular ϕ , $\xi_\phi : (0, 0, 0, 1)$. Habíamos visto que esto implica que las cantidades:

$$g_{\mu\nu} \xi^\mu U^\nu$$

son también constantes.

Asociada con la simetría temporal (que viene del hecho que la métrica es estática) tenemos la constante:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \mathcal{E}$$

¿Qué es la cantidad \mathcal{E} ? Clásicamente sabemos que la simetría temporal esta asociada con la energía. Es por eso que hemos llamado a esta cantidad con este nombre. Pero ¿es realmente \mathcal{E} una energía. Para entender lo que esta cantidad representa, consideremos el caso en el que tenemos la partícula moviéndose con una velocidad v a una distancia $r \gg R_S$. En este caso la cuadratura queda:

$$\mathcal{E} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{dt}{d\tau}$$

Dado que el espacio es plano a una gran distancia $dt/d\tau = \gamma_v$, es decir la constante se aproxima al valor del factor de Lorentz-Einstein de la partícula en el infinito. ¿Qué significa esto y que relación guarda con la energía?. En el espacio tiempo plano:

$$E = \gamma_v m c^2$$

donde E es la energía total de la partícula. Pero esta definición solo es válida en el espacio plano en el infinito. Si llamamos $E_\infty = \gamma_\infty m c^2$ a la energía que tendría la partícula cuando esta muy lejos (γ_∞ es el factor gamma asociado a la velocidad de

la partícula cuando esta muy lejos de la fuente), podemos escribir la constante \mathcal{E} como:

$$\mathcal{E} = \frac{E_\infty}{mc^2}$$

De este modo la cuadratura asociada con la simetría temporal será:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{E_\infty}{mc^2}$$

Por su lado la cuadratura asociada con el vector de Killing de la coordenada angular ϕ será:

$$r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) = J_z$$

¿Que implica esta constante de movimiento?. Imaginemos una situación en la que el movimiento se realiza tal que $J_z = 0$. Esto implicara que $d\phi/d\tau = 0$. Es decir, la partícula se mueve sin cambiar su coordenada angular ϕ , que es lo mismo que moverse sobre el plano con $\phi = \text{cte}$. Es decir, la ecuación anterior implica que escogida adecuadamente la dirección del sistema de coordenadas el movimiento se realizará sobre un plano. Un cambio del sistema de coordenadas no modifica esta condición. De modo que podemos decir que este resultado muestra que el movimiento de caída libre en la métrica de Shcwarzschild se realiza siempre sobre un plano, como sucede también en el caso newtoniano.

Si fijamos la dirección de los ejes coordenados de modo que el plano $x - y$ coincida con el plano de la geodésica, la constante anterior se simplifica y se convierte en:

$$r^2 \dot{\phi} = J_z$$

donde, muy lejos de la fuente, reconocemos claramente la magnitud del momento angular $L_\infty = mr^2 \dot{\phi}$.

La cuadratura anterior se puede escribir entonces como:

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) = \frac{L_\infty}{m}$$

1.1.14. Caída libre en un agujero negro

Una encontradas las 3 cuadraturas básicas del movimiento geodésico:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\ell}{d\tau}\right)^2 = c^2 \quad (1.9)$$

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{E_\infty}{mc^2} \quad (1.10)$$

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) = \frac{L_\infty}{m} \quad (1.11)$$

podemos intentar analizar (incluso resolver en situaciones particulares) el movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild usando estas cuadraturas.

Podemos reemplazar las dos últimas constantes de movimiento en la primera ecuación para obtener una ecuación diferencial solo para la coordenada radial r :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L_\infty^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) = c^2 \left[\left(\frac{E_\infty}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{R_S}{r} \right]$$

La caída libre corresponde a la condición inicial $L_\infty = 0$. En este caso la ecuación de movimiento se escribe como:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left[\left(\frac{E_\infty}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{R_S}{r} \right]$$

Nota

Límite Newtoniano. Si derivamos respecto al tiempo, obtenemos:

$$2 \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{2GM}{r^2} \frac{dr}{d\tau}$$

que se puede escribir de forma simplificada como:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

Supongamos que dejamos caer una partícula en reposo $dr/d\tau = 0$ desde un punto r_0 . En este caso:

$$\left(\frac{E_\infty}{mc^2}\right)^2 = 1 - \frac{R_S}{r_0}$$

y la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 R_S \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Sacando la raíz cuadrada y escogiendo el signo correspondiente al movimiento hacia el agujero negro, la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}$$

Integrando entre r_0 y un r arbitrario se obtiene:

$$\tau(r) - \tau(r_0) = \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) + \arctan \left(-\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\right) \right]$$

Realicemos un gráfico.

(Algoritmo 1.4)

```

# Propiedades
c=3e5 #km/s
RS=3e5 #km

#Punto de lanzamiento
r0=4*RS

#Valores de la coordenada radial
from numpy import linspace
rs=linspace(0,0.99*r0,1000)

#Valores del tiempo propio
from numpy import pi,sqrt,arctan
taus=(r0/RS)*sqrt(r0/RS)*(pi/2+sqrt((rs/r0)*(1-rs/r0))+arctan(-sqrt(rs/(r0-rs))))

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.axhspan(0,1,color='k',alpha=0.2)
ax.plot(taus,rs/c,'k-')

#Decoracion
ax.set_ylim((0,r0/c))
ax.grid()
ax.set_xlabel(r"\tau$ [s]")
ax.set_ylabel(r"$r$ [s-l]")

fig.tight_layout()

```

ver Figura 1.8

Como podemos ver el tiempo para un observador en caída libre (el que registra el tiempo propio es finito).

¿Pero qué ve un observador remoto?. Habíamos demostrado que $dt_\infty = dt$. Una de las ecuaciones de movimiento nos da la manera como evoluciona el tiempo coordenado o el tiempo del observador remoto:

$$\frac{E_\infty}{mc^2} = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt_\infty}{d\tau}\right)$$

Usando el valor obtenido para E_∞ obtenemos la ecuación:

$$\frac{dt_\infty}{d\tau} = \frac{(1 - R_S/r_0)^{1/2}}{1 - R_S/r}$$

Usando la ecuación para τ podemos escribir la ecuación diferencial para t_∞ :

$$\frac{dt_\infty}{dr} = -\frac{1}{cR_S^{1/2}} \frac{(1 - R_S/r_0)^{1/2}}{1 - R_S/r} \sqrt{\frac{rr_0}{r_0 - r}}$$

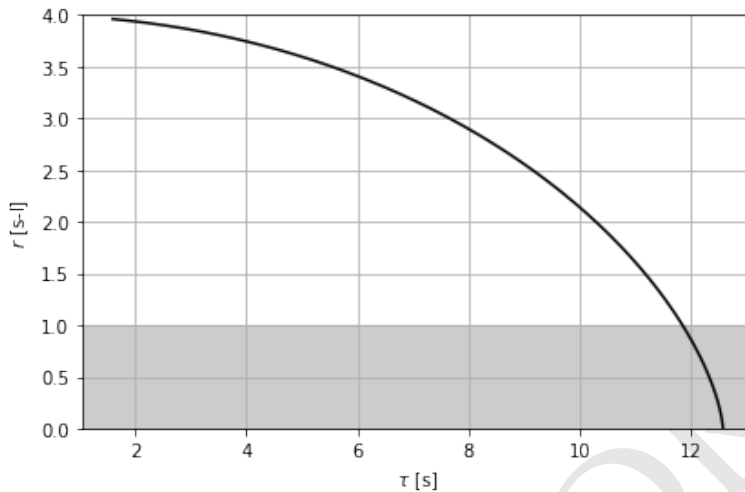


Figura 1.8: Figura correspondiente al código 1.4.

Esta ecuación diferencial es suficientemente complicada para ameritar una integración numérica. En el código a continuación la realizamos la integración y hacemos un gráfico comparativo del tiempo de caída (medido por un observador externo) y el tiempo propio:

(Algoritmo 1.5)

```
integrando=lambda r:-(1/(c*RS**0.5))*(1-RS/r0)**0.5/(1-RS/r)*sqrt(r*r0/(r0-r))
from scipy.integrate import quad

#La integral la hacemos
rinfs=linspace(1.0001*RS,0.99*r0,100)
tinfs=[quad(integrando,r0,r)[0] for r in rinfs]

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.axhspan(0,1,color='k',alpha=0.2)
ax.plot(taus,rs/c,'k--',label='Observador en caída libre')
ax.plot(tinfs,rinfs/c,'k-',label='Observador remoto')

#Decoracion
ax.set_ylim((0,r0/c))
ax.grid()
ax.legend()
ax.set_xlabel(r"$\tau$, $t$ [s]")
ax.set_ylabel(r"$r$ [s-l]")

fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.9

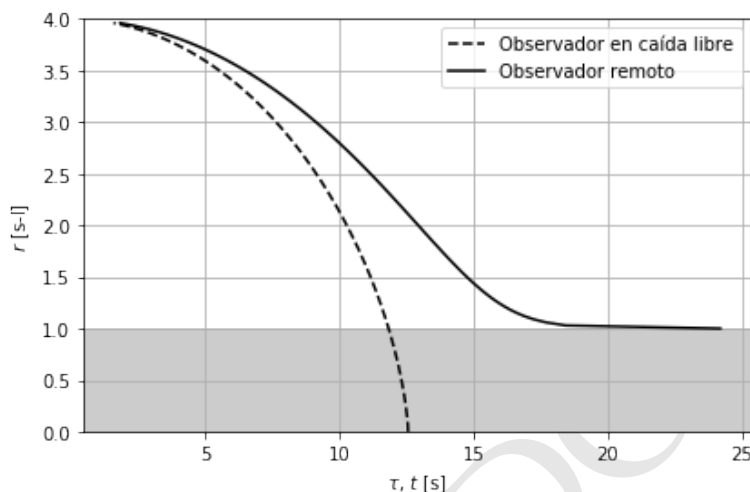


Figura 1.9: Figura correspondiente al código 1.5.

Es en este resultado (y no en otro) que estriba la verdadera naturaleza peculiar de los agujeros negros.

Definición

Agujero negro. Un agujero negro es un cuerpo que tiene un tamaño inferior a la escala natural de longitud gravitacional R_S y para el cuál una partícula con masa en caída libre radial tarda un tiempo finito en alcanzar la superficie del cuerpo, medido en el sistema de referencia del observador en caída libre, y un tiempo infinito para un observador remoto en reposo respecto al cuerpo, que además percibe que la partícula nunca atraviesa la superficie imaginaria $r = R_S$ que llamaremos el **horizonte de eventos**.

La pregunta importante aquí es: ¿cae o no cae la partícula en el agujero negro? La respuesta sin duda alguna es que depende del observador. No hay manera de decir algo que sea objetivamente cierto para todos los observadores. El destino de una partícula que cae en un agujero negro es relativa.

Ahora bien ¿qué pasa para puntos $r < R_S$. Ciertamente la métrica de Schwarzschild se hace inconveniente para responder esta pregunta porque el signo de los coeficientes métricos de la coordenada radial y temporal se invierten. Pero no hay que olvidar que estas son solo coordenadas, no cantidades observables.

Es en este punto en el que es necesario pensar en un cambio de coordenadas.

1.1.15. Coordenadas avanzadas e Eddington-Finkelstein

En los 1950 David Finkelstein estudiando las simetrías (en realidad asimetrías) de la superficie especial $r = R_S$ utilizó una idea debida originalmente a Eddington para describir mejor los eventos alrededor de un agujero negro. La idea fue desarrollada posteriormente por Roger Penrose y hoy se conoce como las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein.

La idea consiste en hacer un cambio en la coordenada temporal haciendo:

$$ct' = ct \pm R_S \ln \left| \frac{r}{R_S} - 1 \right|$$

donde el signo $+$ aplica para geodésicas que se alejan del agujero negro y el signo $-$ aplica para aquellas que se acercan a él.

Con este cambio de coordenadas la métrica nos queda:

$$(ds)^2 = c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) (dt')^2 \mp 2 \frac{R_S}{r} c dt' dr - r^2 \left(1 + \frac{R_S}{r} \right) (dr)^2 - d\ell^2$$

Si consideramos movimiento de la luz en dirección radial, la ecuación de las geodésicas nulas (rayos de luz) que caen hacia el agujero negro serán:

$$c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) (dt')^2 \mp 2 \frac{R_S}{r} c dt' dr - \left(1 + \frac{R_S}{r} \right) (dr)^2 = 0 \quad (1.12)$$

Las ecuaciones de la geodésicas nulas se pueden escribir ahora como:

$$\left(1 + \frac{R_S}{r} \right) \left(\frac{dr}{dt'} \right)^2 \pm 2c \frac{R_S}{r} \frac{dr}{dt'} = c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) \quad (1.13)$$

donde el signo $+$ es para geodésicas que entran y el $-$ para las que salen.

Con el siguiente código podemos resolver esta ecuación diferencial:

```
from sympy import Function, dsolve, Derivative, init_printing
from sympy.abc import t, R, c
init_printing()
r=Function("r")
```

```
resultado=dsolve((1+R/r(t))*Derivative(r(t),t)**2+2*c*R/r(t)*Derivative(r(t),t)-c**2*(1-R/r(t)))
```

Out [22]:

$r(t) = C_1 - ct$

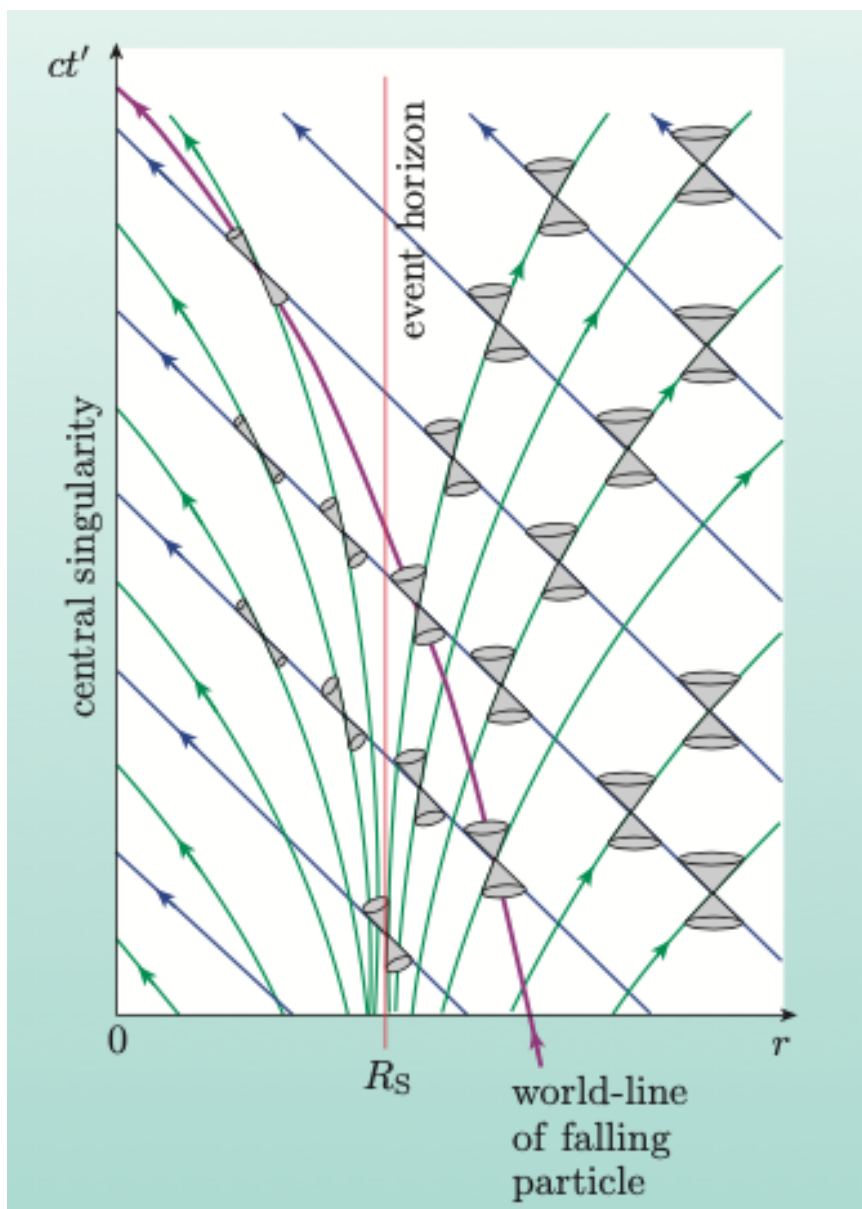


Figura 1.10: Geodésica nula en las coordenadas de Finkelstein-Eddington

BORRADOR

Capítulo 2

Apéndices

2.1. Códigos útiles

A continuación encontrarán algunos códigos útiles usados en el curso.

2.1.1. Cálculo analítico de tensores en relatividad general

El código a continuación fue adaptado de Hartle y sirve para el cálculo de las cantidades geométricas y tensoriales útiles en relatividad general.

```
(*
Instrucciones:
1) Abra una cuenta en https://lab.wolframcloud.com.
2) Cree un nuevo Notebook.
3) Copie el contenido de este archivo dentro del Notebook.
4) Ejecute el código de ejemplo
*)

(*Variables básicas*)
Clear[n,
Inversa,Matriz,Tabla,
Gama,Geodesica,Riemann,
GeodesicaTabla ,ListaDos,ListaTres,ListaCuatro];
n = 4;
(*Genericos*)
Inversa[g_]:=Simplify[Inverse[g]]
(*Muestra*)
Matriz[g_]:= g//MatrixForm
Tabla[Lista_]:=TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[Lista], Null], 2],TableSpacing->{0,1},TableAlign->{Center,Top}]
GeodesicaTabla[geodesica_]:=TableForm[
Table[{"d/d\[Tau]" ToString[u[i-1]], "=" ,geodesica[[i]]},
{i, 1, n}], TableSpacing -> {2}]
ListaDos[Tensor_,simbolo_,coords_]:=Table[
```

```

If[UnsameQ[Tensor[[j, 1]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[j]], coords[[1]]]<>" = ",Tensor[[j, 1]]} ,
{j, 1, n}, {1, 1, j}];
ListaTres[Tensor_,simbolo_,coords_] := Table[
If[UnsameQ[Tensor[[i, j, k]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[i]], coords[[j]],coords[[ k]]]<>" = ", Tensor[[i, j, k]]
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, j}];
ListaCuatro[Tensor_,simbolo_,coords_] :=Table[
If[UnsameQ[Tensor[[i, j, k, 1]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[i]], coords[[j]],coords[[ k]],coords[[ 1]]]<>" = ",Tensor
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {1, 1,n}];
(*Relatividad General*)
Gama[g_,gi_,coord_] := Simplify[
Table[(1/2)*Sum[(gi[[i, s]])*
(D[g[[s, j]], coord[[k]] ] +
D[g[[s, k]], coord[[j]] ] -
D[g[[j, k]], coord[[s]] ]), {s, 1, n}],
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n} ]];
Riemann[G_,coord_] := Simplify[Table[D[G[[i, j, k]],coord[[1]] ] - D[G[[i, j, 1]],
Sum[G[[s, j, k]]G[[i, 1, s]] - G[[s, j, 1]]G[[i, k, s]], {s, 1, n}],
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {1, 1, n} ]
Ricci[Rm_] :=Simplify[Table[
Sum[Rm[[i, j, i, 1]], {i, 1, n}], {j, 1, n}, {1, 1, n} ]
Scalar[gi_,Ri_] := Simplify[ Sum[gi[[i, j]] Ri[[i, j]], {i, 1, n}, {j, 1, n} ]
Einstein[Ri_,R_,g_] :=Simplify[Ri - (1/2) R*g]
Geodesica[G_] := Simplify[Table[-Sum[G[[i, j, k]] u[j-1] u[k-1], {j, 1, n}, {k, 1,
(*
-----

Ejemplo agujero de gusano:
coords = {T,r, \[Theta], \[Phi]};
gij = {{1,0,0,0},{-0, 1, 0, 0}, {-0,0, r^2 + b^2, 0}, {-0,0,
0, (r^2 + b^2) Sin[\[Theta]]^2}};
nij = Inversa[gij];
Gijk=Gama[gij,nij,coords];
Rijkl=Riemann[Gijk,coords];
Rij=Ricci[Rijkl];
Rs=Scalar[nij,Rij];
Gij=Einstein[Rij,Rs,gij];
dxidt=Geodesica[Gijk];
Matriz[gij]
Matriz[nij]
Tabla[ListaTres[Gijk,\[CapitalGamma],coords]]
Tabla[ListaCuatro[Rijkl,Riemann,coords]]
Tabla[ListaDos[Rij,Ricci,coords]]
Rs
Tabla[ListaDos[Gij,G,coords]]
GeodesicaTabla[dxidt]
-----

```

Ejemplo métrica simétrica:

```

coords = {T,r, \[Theta], \[Phi]};
gij = {{Exp[2A[r]],0,0,0},{0, Exp[2B[r]], 0, 0}, {-{0,0, r^2 , 0}, -{0,0,
    0, r^2 Sin\[Theta]^2}}};
nij = Inversa[gij];
Gijk=Gama[gij,nij,coords];
Rijkl=Riemann[Gijk,coords];
Rij=Ricci[Rijkl];
Rs=Scalar[nij,Rij];
Gij=Einstein[Rij,Rs,gij];
dxidt=Geodesica[Gijk];
Matriz[gij]
Matriz[nij]
Tabla[ListaNueve[Gijk,\[CapitalGamma],coords]]
Tabla[ListaNueve[Rijkl,Riemann,coords]]
Tabla[ListaNueve[Rij,Ricci,coords]]
Rs
Tabla[ListaNueve[Gij,G,coords]]
GeodesicaTabla[dxidt]
*)

```

BORRADOR

Bibliografía

- [1] C. MONTGOMERY, W. ORCHISTON, AND I. WHITTINGHAM, *Michell, Laplace and the origin of the black hole concept*, Journal of Astronomical History and Heritage, 12 (2009), pp. 90–96.
- [2] K. SCHWARZSCHILD, *On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory*, arXiv preprint physics/9905030, (1999).