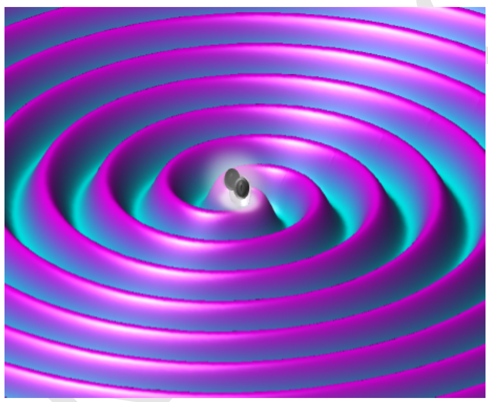
Relatividad y Gravitación
Teoría, algoritmos y problemas



Jorge I. Zuluaga
Profesor titular de Física y Astronomía

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

BORRADOR

3 de marzo de 2020

BORRADOR

Índice general

BORRADOR

BORRADOR

Índice de figuras

BORRADOR

BORRADOR

Capítulo 1

Relatividad Especial

Resumen. Este capítulo esta dedicado a la Relatividad especial.

1.1. Motivación

¿Qué son las leyes de la física?. Son regularidades observadas (¿o reales?) en los fenómenos que vemos en el mundo. Estas regularidades se expresan normalmente como relaciones matemáticas entre cantidades observadas.

Tomen por ejemplo esta regularidad:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Siempre que un cuerpo de masa m (una propiedad intrínseca suya), es sometido a una "perturbación" (una fuerza $\vec{F}$), el cuerpo, sin importar el estado de movimiento en el que estaba, cambia su estado en una magnitud $\vec{a}$ (aceleración).

Esta regularidad ha sido observada en los laboratorios en la Tierra (edificios). ¿Pero es válida en el resto del Universo y para todos los observadores?. Esta es la pregunta del millón de la física y el corazón de la relatividad.

Conjetura 1.1

Las leyes de la física son universales. Cualquiera sea la regularidad que llamemos *ley física* debe ser realmente universal, debe cumplirse en todas partes, a todas horas y con independencia de quién la registre. En caso contrario lo que tendríamos sería solo una regularidad contingente.

1.2. Conceptos básicos

Para abordar la pregunta básica de la sección anterior debemos primero introducir una serie de conceptos:

BORRADOR

- **Cantidad física**. Las leyes físicas son patrones matemáticos entre números (y otras entidades matemáticas) que asociamos a los fenómenos. Piense por ejemplo en la velocidad. Es un número que asociamos al desplazamiento de un cuerpo en el tiempo. Para definir cualquier cantidad física se necesitan: patrones (comparación), una calibración (definir los ceros o puntos de referencia) e instrumentos (dispositivos que realicen la comparación).

  Por ejempl para medir la posición (lugar) uso como partrón una varilla de longitud fija, mi calibración es el lugar que escojo como punto de partida y el instrumento de medida es la misma varilla. Para medir el tiempo (fecha) uso como patrón un fenómeno repetitivo, como calibración escojo el instante a partir del cuál contar las oscilaciones y el instrumento es un reloj.

  Para obtener el *valor* de una cantidad física se pueden usar medios directos o indirectos. Preferimos los medios directos que implican la comparación de lo medido con el instrumento (el patrón y la calibración) **localmente**: es decir debemos poner el instrumento donde ocurre el fenómeno.

- **Espacio-tiempo**. Es el escenario en el que ocurre el universo. Matemáticamente es un espacio geométrico en el que a todo lugar e instante se le asocian unas coordenadas:

  $$[x^\mu]_{\mu=0,1,2,3}$$

  esta será una notación que usaremos en lo sucesivo y que adoptará sentido más adelante.

- **Evento**. Es uno de los puntos del espacio-tiempo. Un evento físico es equivalente

- **Observador**. También llamado (de forma intercambiable) **sistema de referencia**. Un observador es una entidad que registra cualquier cantidad física que ocurre en el espacio-tiempo usando un conjunto (infinito) de instrumentos físicos, que usan el mismo patrón y calibración, distribuídos (idealmente) por todos los eventos del espacio-tiempo. El observador lleva un registro de todos los fenómenos sin importar que tan lejos estén del lugar espacial en el que se encuentre.

Existen un conjunto de leyes que fueron formuladas originalmente con la idea de universalidad que mencionamos antes. Son las leyes del movimiento de Newton:

- **Ley de Inercia**. En la ausencia de fuerzas (interacciones) el *estado de movimiento* se conserva.
- **Ley de fuerza**. La acción de una fuerza cambia el *estado de movimiento*.
- **Ley de acción y reacción**. El cambio en el estado de movimiento de un sistema A que interactúa con otro B, es igual en magnitud pero de sentido contrario, que el cambio de movimiento que experimenta B.

Sabemos que estas leyes de pueden resumir en una sola relación matemática. Si definimos la *cantidad de movimiento* o momento lineal $\vec{p} \equiv m\vec{v}$, entonces:

BORRADOR

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

Este conjunto de leyes se mantienen las mismas si se usan **observadores inerciales**.

Definición 1.1

observador inercial. Es un observador para el cuál sus registros muestran que la la ley de inercia es válida.

Registrar la validez de la ley de inercia no es experimentalmente fácil.

Proposición: Observadores con velocidad relativa constante. Si un observador O es por definición o demostración inercial, cualquier observador O' cuyo origen de coordenadas se mueva respecto al origen de coordenadas de O con velocidad $\vec{u}$ constante, será también un observador inercial.

1.3. Principio de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo

Postulado 1.1

Principio de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo. Cualquier experimento que se realice en un sistema de referencia inercial tendrá exactamente el mismo resultado sin importar dónde se realice (homogeneidad) o en que tiempo se realice. Alrededor de todos los eventos del espacio-tiempo, los experimentos producen las mismas regularidades.

De acuerdo al principio de homogeneidad, todos los observadores inerciales que solo difieran por su origen en el espacio o por su origen en el tiempo registraran las mismas leyes de la física. Se puede probar que el principio de homogeneidad e isotropía es *equivalente* lógicamente al principio fundacional de la teoría de la relatividad.

Postulado 1.2

Principio de relatividad especial. Todas las leyes de la física deben ser iguales para todos los observadores inerciales.

1.4. La relatividad Newtoniana

Una cosa es decir que las leyes son las mismas y otra muy distinta es demostrar que lo son.

Las leyes son relaciones matemáticas entre cantidades físicas de modo que para demostrar su validez hay que probar que las relaciones son las mismas.

BORRADOR

Definición 1.2

Covarianza de las leyes físicas. Llamamos *covarianza* de una ley física al hecho de que su forma matemática no se modifique independientemente de las transformaciones geométricas (cambios de sistemas de referencia o coordenadas) que se operen.

La pregunta es: dos observadores inerciales S y S' que miden cantidades físicas distintas $m, \vec{v}, \vec{r}$ y $\vec{F}$ (y las respectivas cantidades primadas), al describir las mismas regularidades llegaran a:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}'}{\mathrm{d}t'} = \vec{F}'$$

Para ello debemos *postular* (¿o deducir?) la relación entre las cantidades implicadas.

> **Definición: Transformaciones de Galileo-Newton**. La siguiente es la relación entre las cantidades cinemáticas y dinámicas básicas entre dos observadores inerciales:

$$\begin{array}{rcl} t' & = & t \\ m' & = & m \\ \vec{F}' & = & \vec{F} \\ \vec{r}' & = & \vec{r} - \vec{u}t \end{array}$$

> donde $\vec{u}$ es la velocidad relativa en el espacio entre los dos observadores.

Puede probarse que si las leyes de Newton son válidas en O también lo serán en O'.

1.5. El problema del electromagnetismo

Pero las leyes de la física no se restringen a la mecánica. También están las leyes de la termodinámica, la óptica, el electromagnetismo, la física nuclear, etc. ¿Son también estas leyes covariantes bajo las transformaciones de Galileo-Newton.

Tomemos el caso por ejemplo de dos leyes básicas del electromagnetismo:

- La ley de Faraday (ley de inducción en el vacío):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

- La ley de Ampere-Maxwell (en el vacío y sin corrientes):

BORRADOR

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

Verifiquemos si son las mismas bajo las transformaciones de Galileo-Newton:

1.6. Las transformaciones de Lorentz-Einstein

Como vemos las leyes del electromagnetismo no son covariantes bajor las TGN. ¿Qué está mal? ¿las transformaciones o las leyes del EM?. Supongamos que son las transformaciones.

Para ello asumamos que existe una familia de transformaciones más generales que relacionan las coordenadas.

$$\begin{aligned} t' &= a_{tt}t + a_{tx}x \\ x' &= a_{xt}t + a_{xx}x \end{aligned}$$

La linealidad es consecuencia de o bien la homogeneidad e isotropía o de la inercialidad de los observadores.

Apliquemos estas transformaciones a las leyes de Faraday y Ampere:

De donde se prueban dos cosas:

Proposición 1.2

Transformaciones de Einstein. Las transformaciones de coordenadas que dejan invariantes las leyes de la física ante cambios de observador inercial son:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{1.1}$$

$$x' = \gamma\left(-vt + x\right) \tag{1.2}$$

donde:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1.3}$$

se conocerá en lo sucesivo como el **factor de Einstein**.

Y una interesante conclusión adicional:

Proposición 1.3

Invarianza de la velocidad de la luz. La velocidad de la luz medida por dos observadores inerciales diferentes es siempre la misma:

$$c = c'$$

1.7. Una perspectiva geo-métrica

BORRADOR

Bibliografía

BORRADOR