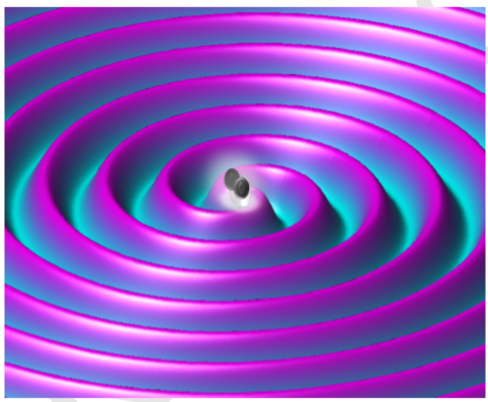
Relatividad y Gravitación

Teoría, algoritmos y problemas



Jorge I. Zuluaga
Profesor titular de Astronomía y Física

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

13 de mayo de 2020

Índice general

1. Relatividad General **7**
1.1. Motivación . . . 7
1.2. Principios y postulados básicos . . . 8
1.2.1. Principio de Equivalencia . . . 8
1.2.2. Principio de consistencia . . . 13
1.2.3. Principio de covarianza general . . . 13
1.2.4. Tensores generales . . . 14
1.3. Transporte paralelo y derivada covariante . . . 15
1.3.1. El gradiente no es un tensor general . . . 15
1.3.2. Transporte paralelo . . . 16
1.3.3. Derivada direccional general . . . 17
1.3.4. Los símbolos de Christoffel . . . 19
1.3.5. Cálculo de los símbolos de Christoffel . . . 21
1.4. Derivada total general y geodésicas . . . 29
1.4.1. Derivada total general . . . 29
1.4.2. Derivada total y transporte paralelo . . . 30
1.4.3. Ecuación geodésica . . . 31
1.4.4. Ejemplos numéricos . . . 32
1.5. La geodésica y un principio variacional . . . 40
1.6. Geodésicas y movimiento inercial . . . 42
1.7. Geodésicas en campo débil . . . 43
1.7.1. Un ejemplo numérico . . . 46
1.8. Simetrías y cantidades conservadas . . . 48
1.8.1. La métrica como constante . . . 49
1.8.2. Coordenadas cíclicas y vectores de Killing . . . 50
1.8.3. Ejemplo: geodésicas en coordenadas cilíndricas . . . 51
1.8.4. Ejemplo: geodésicas sobre una esfera . . . 52

Bibliografía **55**

Índice de figuras

1.1. Transporte paralelo. 16
1.2. Derivada direccional. 17
1.3. Definición de geodésica en el espacio-tiempo plano y sobre la superficie de una esfera. 32
1.4. Figura correspondiente al código 1.1. 36
1.5. Figura correspondiente al código 1.2. 38
1.6. Figura correspondiente al código 1.3. 39
1.7. Figura correspondiente al código 1.4. 41
1.8. Figura correspondiente al código 1.5. 49

Capítulo 1

Relatividad General

Resumen: Este capítulo esta dedicado a la Relatividad general.

1.1. Motivación

Históricamente la relatividad general surgió como un esfuerzo del propio Albert Einstein (ahora en solitario) para construir una teoría mucho más general de la relatividad en la que pudiera extender su principio de covariancia para incluir otros observadores diferentes a los observadores inerciales. En el proceso formuló y desarrollo las consecuencias de lo que se conoce hoy como el **principio de covarianza general**.

Conseguir esto no sería sin embargo fácil para Einstein. De un lado las matemáticas necesarias para abordar el problema más general de la relatividad no serían tan sencillas como las que usa la relatividad especial (álbebra y cálculo diferencial e integral esencialmente). Del otro lado, Einstein nunca previó que en su búsqueda se toparía con una nueva teoría del fenómeno gravitacional, que fue finalmente por lo que termino conociéndose la teoría resultante.

En términos generales, entonces, la **teoría general de la relatividad** es:

- Una teoría sobre las **transformaciones generales de coordenadas** necesarias para relacionar las cantidades registradas por observadores inerciales y no inerciales. En este aspecto la teoría es realmente una *generalización* de la primera parte de la teoría, que por la misma razón tiene sentido llamar **teoría especial de la relatividad**. En este aspecto la teoría no es mucho más que simplemente matemáticas en tanto las transformaciones generales de coordenadas son un problema más de matemáticas que un problema físico.

- Una **teoría fundamental sobre el fenómeno gravitatorio** algo que los filósofos y físicos de toda la historia habían buscado incansablemente desde el tiempo de Aristóteles. . Como hemos visto en secciones precedentes la fuerza gravitacional que esta en la base de la teoría gravitatoria de Newton no satisface los criterios de transformación de la teoría especial de la relatividad.

> Es decir la fuerza gravitacional vista por un observador inercial no transforma con las reglas de Lorentz-Einstein y por lo tanto no puede ser un modelo fundamental del fenómeno. La teoría general de la relatividad explica el origen de esos fenómenos, la tendencia de toda la materia a acercarse como si se atrayera, el movimiento particular de las partículas cerca a grandes cuerpos astronómicos - caída libre, movimiento orbital, etc. e incluso los efectos que la materia tienen sobre la propagación de la luz. Según esta teoría la gravedad surge porque existe una relación íntima entre el contenido de energía del universo (masa, energía y momentum) y las propiedades geométricas del espacio-tiempo (curvatura). La dinámica de la materia en ese espacio-tiempo distorsionado es lo que vemos como gravedad.

En este capítulo, que podríamos considerar apenas introductorio (las ramificaciones posibles de la teoría general de la relatividad son bastas), introduciremos los postulados y principios básicos que uso Einstein en su momento y que hoy todavía se usan para formular y construir la teoría general de la relatividad. Partiendo de esos principios y de resultados matemáticos conocidos en el análisis tensorial y la geometría diferencial (de los que hemos ya tenido una inrtoducción en el capítulo anterior) deduciremos las principales ecuaciones que describen el fenómeno gravitatorio, desde la ecuación fundamental conocida como la ecuación de campo métrico de Einstein-Hilbert, hasta la ecuación de la geodésica.

Dejaremos para capítulos posteriores la aplicación concreta de estas ecuaciones que forman en sí mismo un cuerpo teórico importante dentro de la física teórica y la astrofísica contemporánea.

1.2. Principios y postulados básicos

Hoy se acepta que la teoría general de la relatividad se construye, físicamente, sobre la báse de tres principios o postulados básicos:

- El **principio de equivalencia** que tenía ya una historia de más de 350 años desde los experimentos de Galileo con planos inclinados.

- El **principio de covarianza general**, una inteligente generalización del postulado de realtividad especial.

- El **principio de consistencia**, una inteligente idea que, en términos prácticos, permite reconstruir las ecuaciones de teorías nuevas y más fundamentales a partir de las ecuaciones *efectivas* de teorías anteriores.

1.2.1. Principio de Equivalencia

El principio de equivalencia fue llamado por Einstein *la idea más feliz de mi vida*.

Existen distintas versiones del principio de equivalencia y por razones históricas y de la motivación física de la teoría general bien vale revisar cada una de ellas.

Principio de Galileo

Es bien conocida la historia apócrifa de Galileo lanzando desde lo alto de la Torre de Pisa bolas metálicas de distinta masa para demostrar, contra la creencia de los filósofos escolásticos que estudiaban la obra de Aristóteles, que sin importar la masa las bolas caían al mismo tiempo.

Este importante resultado no tiene una justificación teórica en el contexto de las ideas galileanas, fue solo una intuición, posiblemente en reacción a las ideas no contrastadas de Aristóteles que formuló Galileo. Por la misma razón se lo puede considerar un principio.

> **Postulado 1.1**
>
> **Principio de Galileo.** La trayectoria que sigue un objeto en caída libre y en ausencia del aire (o despreciando su efecto), es independientemente de la constitución y tamaño del objeto.

Principio de igualdad de las masas

Aunque este principio hunde sus raíces en la teoría Newtoniana, nunca fue formulado explícitamente por Newton.

Existen dos cantidades que llamamos masa en la física Newtoniana: la **masa inercial** que esta relacionada con la *resistencia* o *inercia* que opone la partícula a cambiar su estado de movimiento y la **masa gravitacional** que es una medidad de su capacidad para producir una atracción sobre otras partículas y para sentirla.

La masa inercial es la que aparece en la definición del momentum de la partícula $\vec{p} = m^{(i)}\vec{v}$ y por lo tanto (suponiendo que no cambia en un instante dado) es la misma que aparece en el postulado de fuerzas:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m^{(i)}}$$

Por otro lado la masa gravitacional es la que aparece en la definición misma de la fuerza de atracción gravitacional:

$$\vec{F}_g = G\frac{m^{(g)}M^{(g)}}{r^3}\vec{r}$$

Si usamos esta fuerza para calcular la aceleración de caída libre obtenemos:

$$\vec{g} = G\frac{m^{(g)}}{m^{(i)}}\frac{M^{(g)}}{r^3}\vec{r}$$

En principio siempre será posible ajustar el valor de la constante de gravitación universal G para hacer que el valor numérico de la masa gravitacional de un cuerpo sea idéntico el valor numérico de su masa inercial. Sin embargo, y esta es la motivación del principio, experimentalemnte se ha mostrado (ver experimento de Eötvos) que una vez ajustado para un cuerpo, la identidad numérica se mantiene para todos independientemente de su composición.

Postulado: Principio de igualdad de las masas gravitacional e inercial. Una vez fijado el valor de la constante gravitacional $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2} La masa gravitacional e inercial de un cuerpo, en la teoría newtoniana, tienen el mismo valor numérico, independientemente del lugar y de la composición del cuerpo:

$$m^{(i)} = m^{(g)}$$

Este principio es equivalente a decir que la aceleración gravitacional que experimenta un objeto en presencia de otro es *explícitamente*[1] independiente de su masa:

$$\vec{g} = \frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

Por este último hecho a este también se lo llama el **principio de universalidad de la caída libre**.

El principio de equivalencia de la masa gravitacional e inercial no implican que sean la misma cantidad, sino simplemente que tienen el mismo valor, pero parecen sugerir de fondo la existencia de un hecho más fundamental, que es precisamente lo que descubrió Einstein.

Principio de equivalencia de Einstein

Si la aceleración gravitacional de los cuerpos es explícitamente independiente de su masa, entonces cuerpos que caen libremente en presencia de un cuerpo mayor y que comienzan con condiciones iniciales idénticas, caerán conservando una relación espacial relativa simple.

En un campo gravitacional uniforme $\vec{g}_0$ los cuerpos se mantendrán a una distancia relativa constante con el tiempo mientras caen. En un campo gravitacional más realista, como el producido por la Tierra, debido a que los cuerpos se mueven hacia el centro del planeta, los cuerpos tenderán a acercarse en dirección perpendicular a la dirección hacia el centro y a alejarse en esa misma dirección. A este efecto se lo llama aceleración de marea.

Sin embargo, si estamos cerca al cuerpo atractor y el sistema en caída libre es suficientemente pequeño, un observador en el interior del sistema podría no percibir que se encuentra en caída libre. Esta fue *la idea más feliz* de la vida de Einstein.

Postulado 1.2

Principio de Equivalencia de Einstein. Un observador en caída libre (acelerado) en un campo gravitacional arbitrario, es *localmente* indistinguible de un observador inercial.

[1] La independencia explícita no implica que en realidad haya una dependencia implícita en tanto un cuerpo modifica la posición y movimiento de los cuerpos que lo atraen gravitacionalmente, cambiando a su vez su propia aceleración. Este efecto será mayor en tanto mayor sea su masa. Es decir, la aceleración gravitacional de un cuerpo es implícitamente depeniente de su masa.

Postulado 1.2 (Cont.)

Otra manera de expresar este principio es decir que *localmente* los efectos cinemáticos de un campo gravitacional son *indistinguibles* de aquellos que se producen en un sistema de referencia acelerado.

Hay dos palabras claves en el principio de equivalencia de Einstein: *local* e *indistinguible*.

Por **local** entendemos que los fenómenos deben estudiarse en la vecindad infinitesimal de un punto, es decir no podemos afirmar que el observador en caída libre sea inercial en todos los puntos de su sistema de referencia. En términos de la fenomenología newtoniana esto es debido a los efectos de marea producidos por la variación del campo gravitacional.

Por **indistingible** entendemos que no habría ningún experimento cinemático que le permitiera al observador demostrar que esta en un sistema en caída libre o en un sistema inercial, o bien que esta en un campo gravitacional o en un sistema de referencia acelerado.

Otra manera de decirlo sería que la gravedad, al menos sus efectos cinemáticos, son relativos. Este fue justamente el *pensamiento más feliz* de la vida de Einstein.

Principio de equivalencia fuerte

Puede decirse que lo postulado por Einstein en su principio de equivalencia no es más que una consecuencia del postulado de la universalidad de la caída libre, algo que podría perfectamente haber descubierto Newton. En este sentido más que un postulado sería un corolario.

Es por eso que muchos autores llaman al principio de equivalencia de Einstein el **principio de equivalencia débil**. Pero la teoría general de la relatividad va más lejos. De la misma manera que la teoría especial donde el principio de relatividad primero se reconoce en los fenómenos electromagnéticos y después se extiende a todos los fenómenos físicos, incluyendo los mecánicos, en relatividad general el principio de equivalencia se extiende también.

Postulado 1.3

Principio de Equivalencia de Fuerte. Localmente todos los efectos físicos de un campo gravitacional son *indistinguibles* de aquellos que se producen en un sistema de referencia acelerado.
Es decir, no es posible distinguir un campo gravitacional de un sistema de referencia inercial mediante ningún experimento, bien sea este cinemático, dinámico, electromagnético, óptico, nuclear, etc.

Principio de equivalencia geométrico

En su versión moderna el principio de equivalencia adopta una formulación mucho más general y poderosa que irá teniendo sentido a lo largo de este capítulo.

Postulado 1.4

Principio de equivalencia. En cualquier evento x^ν de un espacio-tiempo arbitrario, donde la métrica sea $g_{\mu\nu}(x^\nu)$ es posible encontrar un sistema de coordenadas $x^{\mu'}(x^\nu)$ (transformación general no lineal) tal que se cumplan simultáneamente:

$$g_{\mu'\nu'}\ |_{x^\nu} = \eta_{\mu'\nu'}$$

y

$$\partial_{\alpha'} g_{\mu'\nu'}|_{x^\nu} = 0$$

En este sistema de coordenadas las ecuaciones manifiestamente covariantes que describen toas las leyes de la física en el espacio-tiempo plano son válidas. Llamamos al sistema de coordenadas donde se cumple esto un **sistema de referencia inercial local** o un **sistema de coordenadas geodésico**.

Las implicaciones de este principio son fantásticas. De un lado implica que todo lo que hemos aprendido en la teoría especial de la relatividad seguirá siendo válido en el contexto de la relatividad general y por lo tanto no hay que construir nuevas leyes para el espacio-tiempo curvo, solo hay que aprender a hacer transformaciones generales (no lineales) de coordenadas en el espacio-tiempo.

Nota

Gravedad no es lo mismo que aceleración. El principio de equivalencia moderno formulado anteriormente tiene una importante y sutil diferencia con el principio de equivalencia de Einstein de 1907. Según ese principio un campo gravitacional es equivalente a un sistema de referencia acelerado. Si bien en su momento este principio fue de utilidad para Einstein para realizar sus primeras predicciones asombrosas sobre las implicaciones de la teoría de la relatividad, en realidad, como lo probó el mismo Einstein en su versión final de la teoría.

Lo explicaremos más adelante pero bastará con decir por ahora que el principio de equivalencia solo supone la anulación de las primeras derivadas de la métrica en el sistema geodésico, pero en un campo gravitacional las segundas derivadas de la métrica son realmente las más importantes y son diferentes de cero. Esto no se puede conseguir solo con aceleración.

Puesto en otros términos, con sistemas acelerados es imposible *imitar* los efectos de las mareas gravitacionales (que dependen de las segundas derivadas de la métrica).

Una manifestación concreta del hecho de que un sistema de referencia acelerado no es equivalente a un campo gravitacional tiene que ver con el fenómeno de dilatación temporal. Habíamos visto en el postu-

Nota (Cont.)

lado de los relojes que la aceleración **no produce atraso presente**, solo se produce atraso a lo largo del tiempo. En cambio, como veremos, la gravedad **produce atraso presente**.

1.2.2. Principio de consistencia

1.2.3. Principio de covarianza general

Uno de los fundamentos de la relatividad es la idea que las leyes son las mismas para todos los observadores. Esto fue formulado en su **principio de relatividad especial** y es la base para la construcción de la teoría especial de la relatividad y sus construcciones geométricas incluyendo cuadrivectores y tensores.

La teoría general de la relatividad no se podría levantar sobre un principio menos general y es por eso que ella parte del siguiente postulado:

Postulado 1.5

Principio de covarianza general. Las leyes de la física son covariantes bajo transformaciones de coordenadas generales $x^{\mu'}$, es decir cualquier regularidad física que pueda expresarse como relaciones entre *cantidades tensoriales generales* puede elevarse a la categoría de una ley física.

En el principio de covarianza general el adjetivo *general* para referirse a las transformaciones de coordenadas y a los tensores tiene una connotación matemática muy específica.

Considere por ejemplo el caso de un sistema de referencia que esta acelerado en dirección del eje x respecto a un sistema de referencia inercial. En el caso de la relatividad newtoniana caso las reglas de transformación entre los dos sistemas será:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - ut - gt^2/2 \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Estas transformaciones no son lineales, como lo eran las transformaciones de Galileo-Newton:

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -u - gt$$

Es justamente en ese sentido que hablamos de **transformaciones generales**.

Bajo transformaciones generales de coordenadas no es posible tampoco definir sistemas de referencia globales, que cubran todo el espacio tiempo. Esto es porque bajo estas transformaciones generales el cuadrivector posición ya no transforma de la manera que lo hacía en el caso de las transformaciones lineales de Lorentz-Einstein.

$$x^{\mu'} \neq \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} x^{\mu}$$

Solo es posible construir sistemas de referencia locales, o en términos matemáticos, solo el intervalo sigue siendo estrictamente un tensor:

$$\mathrm{d}x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \mathrm{d}x^{\mu}$$

que podemos escribir también como:

$$\mathrm{d}x^{\mu'} = \mathcal{G}_{\mu}^{\mu'} \mathrm{d}x^{\mu}$$

donde la matriz $\mathcal{G}_{\mu}^{\mu'}$ (que también podemos identificar como el Jacobiano de la transformación) jugará ahora el papel que en la relatividad especial jugo $\Lambda_{\mu}^{\mu'}$, con la diferencia que esta matriz es ahora distinta en cada punto del espacio.

Justamente en términos de la nueva matriz de transformación definimos lo que llamaremos un **tensor general**, que será cualquier cantidad que transforme como lo hace el intervalo:

$$A^{\mu'} = \mathcal{G}_{\mu}^{\mu'} A^{\mu}$$

Bajo transformaciones generales de coordenadas tenemos que admitir también que la métrica no será simplemente la métrica de Minkowski. En general, el espacio-tiempo en estas condiciones tendrá una métrica general definida por:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu} \mathrm{d}x^{\mu} \mathrm{d}x^{\nu}$$

La cantidad $g_{\mu\nu}$ es en sí misma un tensor general y transforma entonces de la forma:

$$g_{\mu'\nu'} = \mathcal{G}_{\mu'}^{\mu} \mathcal{G}_{\nu'}^{\nu} g_{\mu\nu}$$

de modo que $\mathrm{d}s^2$ sigue siendo una cantidad invariante bajo estas transformaciones.

Por definición el tensor métrico es simétrico:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

La inversa del tensor métrico se escribe como $g^{\mu\nu}$ y se define como:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

1.2.4. Tensores generales

Casi todo lo que dijimos en la relativiad especial sobre las cantidades tensoriales puede generalizarse cuando trabajamos con transformaciones generales de coordenadas. A continuación se sintetizan las propiedades de los tensores generales:

- **Reglas de transformación**:

$$A^{\alpha'\beta'\ldots}_{\mu'\nu'\ldots} = \left(\mathcal{G}^{\mu'}_{\mu}\mathcal{G}^{\nu'}_{\nu}\ldots\right)\left(\mathcal{G}^{\alpha}_{\alpha'}\mathcal{G}^{\beta}_{\beta'}\ldots\right)A^{\alpha\beta\ldots}_{\mu\nu\ldots}$$

- **Operaciones tensoriales**: la multiplicación (interna y externa por escalares) y la suma de tensores produce también cantidades tensoriales con rango y posición de índices correspondientes. Ejemplo:

$$A^{\alpha}_{\mu\nu} = kB^{\alpha}C_{\mu}D_{\nu} + E^{\alpha}_{\mu\nu}$$

- **Subida y bajada de índices**: Las operaciones de un tensor con la métrica son de suma importancia. Las componentes covariantes del tensor se definen por:

$$A_{\nu} = g_{\mu\nu}A^{\mu}$$

A esta operación se la llama también "bajar un índice" y aplica para cualquier tensor:

$$A^{\mu}{}_{\nu} = g_{\alpha\nu}A^{\mu\alpha}$$

Usando esta propiedad podemos mostrar que:

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

- **Contracción de índices**: Cuando en un tensor se utilizan los mismos indices se realiza lo que se conoce como una contracción, que equivale a una multiplicación por el tensor métrico

$$A_{\nu} = B^{\mu}{}_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}B_{\alpha\mu\nu}$$

1.3. Transporte paralelo y derivada covariante

1.3.1. El gradiente no es un tensor general

Al introducir las transfromaciones generales de coordenadas hay una cantidad que bajo transformaciones de Lorentz-Einstein (lineales) transformaba como un tensor, pero que bajo transformaciones generales ya no lo hace: la derivada o el gradiente.

Considerese la definición:

$$A^{\alpha}{}_{,\mu} = \partial_{\mu}A^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}A^{\alpha}$$

Bajo transformaciones generales, la derivada covariante $\partial_{\mu'}A^{\alpha'}$ en el nuevo sistema será:

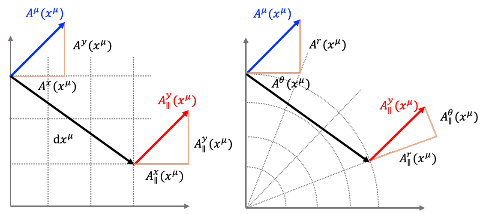


Figura 1.1: *Transporte paralelo.*

$$\partial_{\mu'} A^{\alpha'} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \right) \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) = \mathcal{G}^\mu{}_{\mu'} \partial_\mu \left(\mathcal{G}^{\alpha'}{}_\alpha A^\alpha \right)$$

donde para la expresión en el primer paréntesis hemos usado la regla de la cadena.

La diferencia respecto al caso que habíamos estudiado en el capítulo anterior es que ahora las componentes de la matriz de transformación general $\mathcal{G}^{\alpha'}$ no son constantes y por lo tanto no es posible escribir esta expresión de la forma simple:

$$\partial_{\mu'} A^{\alpha'} \neq \mathcal{G}^\mu{}_{\mu'} \mathcal{G}^{\alpha'}{}_\alpha \, \partial_\mu A^\alpha$$

Siendo esta cantidad tan importante para los propósitos de formular teorías físicas manifiestamente covariantes es importante que estudiemos lo que debemos hacer en este caso.

1.3.2. Transporte paralelo

Derivar un tensor significa esencialmente calcular la tasa a la que cambian sus componentes al movernos de un evento a otro en el espacio-tiempo.

El problema es que en un sistema de coordenadas general las componentes pueden cambiar por dos razones:

1. Porque el tensor cambie (el campo tensorial) cambie. Este es el cambio que nos interesa.
2. Porque la base sobre la que se define el tensor cambie.

Un caso elemental es el de un vector en el espacio euclidiano de dos dimensiones. Si se utilizan coordenadas cartesianas y tenemos un campo vectorial constante, las componentes del campo vectorial serán las mismas no importa si te desplazas en el plano (ver panel izquierdo en la Figura 1.1). En este caso, si al contrario, el vector cambia intrínsecamente lo notarás comparando las componentes. Pero que pasa su usamos coordenadas cilíndricas. En este caso incluso si el campo vectorial es constante, las componentes del campo cambiaran punto a punto debido solamente a la manera en la que se define el sistema de coordenadas (ver panel derecho en la Figura 1.1).

La manera para determinar si el campo vectorial efectivamente cambia a lo largo de una trayectoria es la de *transportar* el vector del punto en el que se esta midiendo al punto original y mirar si hay una discrepancia entre ambos.

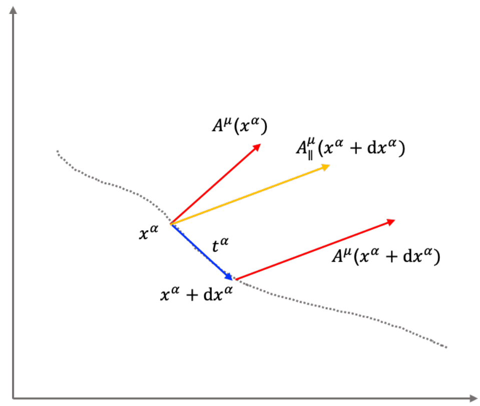


Figura 1.2: *Derivada direccional.*

El **transporte paralelo** es la operación de transformación de un vector de un punto del espacio a otro de modo que su *dirección intrínseca* no se modifique durante el transporte.

Si el vector lo llamamos $A^\mu(x^\nu)$ en un evento x^ν, el mismo vector transportado de forma paralela a un evento distinto y^ν se llamara $A^\mu_\parallel(y^\nu)$

1.3.3. Derivada direccional general

Definimos la **derivada direccional general** de un campo tensorial A^μ a lo largo de una dirección arbitraria t^α, y la denotamos como $(\mathrm{D}_t A)^\mu$ mediante la expresión:

$$(\mathrm{D}_t A)^\mu = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{A^\mu_\parallel(x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha) - A^\mu(x^\alpha)}{\epsilon}$$

donde $\mathrm{d}x^\alpha = \epsilon t^\alpha$ y $A^\mu_\parallel(x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha)$ son las componentes del campo A^μ evaluado en el punto $x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha$ pero transportado de forma paralela a lo largo de t^α hasta el punto inicial x^α (ver Figura 1.2).

Nota

¿Es la derivada direccional general una cantidad tensorial?. Nótese que esta definición es una definición geométrica rigurosa y en principio esperaría uno que al definirse de esta manera la cantidad resultante tuviera las propiedades de una cantidad geométrica, i.e. tensorial.

Las componentes del cuadrivector transportado de forma paralela *se pueden* escribir, en general, como:

$$A^\mu_\parallel(x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha) = A^\mu(x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha) + C^\mu_{\gamma\delta} A^\gamma(x^\alpha + \mathrm{d}x^\alpha)\mathrm{d}x^\delta$$

donde $C^{\mu}_{\gamma\delta}$ son en general coeficientes que permiten expresar el cambio en las componentes del cuadrivector transportado en función de las componentes de ambos, el cuadrivector original y el cuadrivector de la dirección de transporte. Llamamos a estos coeficientes **los coeficientes de conexión**. En el caso más general habrán 64 coeficientes (4^3) de conexión distintos de cero.

Reemplazando en la fórmula para la derivada covariante obtenemos:

$$(\mathrm{D}_t A)^{\mu} = (\partial_t A)^{\mu} + C^{\mu}_{\gamma\delta} A^{\gamma} t^{\delta}$$

donde hemos usado la definición de la derivada direccional convencional:

$$(\partial_t A)^{\mu} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{A^{\mu}(x^{\alpha} + \mathrm{d}x^{\alpha}) - A^{\mu}(x^{\alpha})}{\epsilon}$$

En términos de sus componentes la derivada direccional queda:

$$\mathrm{D}_{\alpha} A^{\mu} t^{\alpha} = \partial_{\alpha} A^{\mu} t^{\alpha} + C^{\mu}_{\gamma\alpha} A^{\gamma} t^{\alpha}$$

en la que hemos usado la idea bien conocida del cálculo vectorial de que la derivada direcciónal se puede escribir como $\partial_t A = \vec{\nabla} A \cdot \vec{t} = \partial_{\alpha} A^{\mu} t^{\alpha}$

Finalmente, suponiendo que las componentes del cuadrivector que define la dirección son indepenientes, llegamos a una definición general de la derivada bajo una transformación general:

$$\mathrm{D}_{\alpha} A^{\mu} = \partial_{\alpha} A^{\mu} + C^{\mu}_{\gamma\alpha} A^{\gamma}$$

A esta la llamaremos **derivada covariante general** o simplemente **derivada covariante** y para representarla en lo sucesivo usaremos el símbolo ";" en analogía a como usamos el símbolo "," para representar la derivada covariante $\partial_{\alpha} A^{\mu}$ que introdujimos en las transformaciones lineales, Así:

$$A^{\mu}{}_{;\alpha} = A^{\mu}{}_{,\alpha} + C^{\mu}_{\gamma\alpha} A^{\gamma}$$

Proposición 1.1

Propiedades de la derivada covariante. Las siguientes son propiedades de la derivada covariante:

1. **Derivada covariante de una suma**: $(A^{\mu} + B^{\mu})_{;\nu} = A^{\mu}{}_{;\nu} + B^{\mu}{}_{;\nu}$
2. **Derivada covariante de un producto o regla de Leibniz**: $(A^{\mu} B^{\nu})_{;\alpha} = A^{\mu}{}_{;\alpha} B^{\nu} + A^{\mu} B^{\nu}{}_{;\alpha}$
3. **Derivada covariante de un campo escalar**: $\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$
4. **Derivada covariante de un tensor contraido**: $(A^{\mu} B_{\mu})_{;\alpha} = (A^{\mu} B_{\mu})_{,\alpha}$
5. **Derivada covariante de un tensor covariante**: $B_{\mu;\nu} = B_{\mu,\nu} - C^{\gamma}_{\mu\nu} B_{\gamma}$
6. **Derivada covariante de un tensor contravariante de segundo rango**:

$$A^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = A^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + C^{\mu}_{\gamma\alpha} A^{\gamma\nu} + C^{\nu}_{\alpha\gamma} A^{\mu\gamma}$$

Proposición 1.1 (Cont.)

7. **Derivada covariante de un tensor covariante de segundo rango**:

$$A_{\mu\nu;\alpha} = A_{\mu\nu,\alpha} - C^{\gamma}_{\mu\alpha} A_{\gamma\nu} - C^{\gamma}_{\alpha\nu} A_{\mu\gamma}$$

¿Es la cantidad D_α un tensor bajo transformaciones generales? Hasta ahora la construcción geométrica que hemos realizado no hace explícita esta propiedad. En realidad la naturaleza tensorial de ella dependerá de la naturaleza misma de los coeficientes de conexión. Por ahora asumiremos que por el hecho de ser esta cantidad construída de forma geométrica rigurosa, entonces es una cantidad tensorial. Más adelante iremos encontrando evidencias matemáticas de que es así.

1.3.4. Los símbolos de Christoffel

¿Qué son y cómo se calculan los coeficientes de conexión?

La primera característica es que no se trata de una cantidad tensorial (ver Problemas al final del capítulo). Si asumimos por ahora que la derivada definida en la sección anterior D_α es un tensor, es posible demostrar (ver Problemas al final del capítulo) que la conexión afín transforma en general como:

$$C^{\nu'}_{\mu'\sigma'} = \mathcal{G}^{\nu'}{}_{\nu} \mathcal{G}^{\mu}{}_{\mu'} \mathcal{G}^{\sigma}{}_{\sigma'} C^{\nu}_{\mu\sigma} - \mathcal{G}^{\mu}{}_{\mu'} \mathcal{G}^{\sigma}{}_{\sigma'} \partial^2_{\mu\sigma} x^{\nu'}$$

En general se puede también demostrar que aunque las conexiones no son tensoriales, es posible definir con ellas un tensor que se conoce como el **tensor de torsión**:

$$T^{\alpha}_{\mu\nu} = C^{\alpha}_{\mu\nu} - C^{\alpha}_{\nu\mu}$$

En general se pueden definir muchas conexiones diferentes en variedades diferenciales generales. Sin embargo hay una familia específica de conexiones que son las de interés para la Relatividad General.

Definición 1.1

Conexión de Levi-Civita y símbolos de Christoffel. Una conexión afín $C^{\alpha}_{\mu\nu}$ que además satisface las condiciones (axiomas):

- Es libre de torsión: $T^{\alpha}_{\mu\nu} \equiv C^{\alpha}_{\mu\nu} - C^{\alpha}_{\nu\mu} = 0$.
- Es compatible con la métrica: $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$.

Se llama una **conexión de Levi-Civita**. A los coeficientes de una conexión de Levi-Civita se los llama (históricamente) **Símbolos de Christoffel** y se los denota $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$.

Nótese que la propiedad de que el espacio sea libre de torsión implica que los símbolos de Christoffel son simétricos frente al intercambio de los índices inferiores:

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$$

esto implica que no existen 64 símbolos independientes, sino tan solo $4_{\alpha} \times [(4^2 - 4)/2 + 4]_{\mu\nu} = 40$ símbolos de Christoffel que deben ser especificados para determinar la derivada covariante general en un espacio de Riemanniano o pseudorimanniano.

La condición de que la métrica no tenga derivada covariante es fundamental y permite derivar expresiones para los símbolos de Christoffel. Para ello podemos comenzar con escribir todas las posibles combinaciones cíclicas de la derivada covariante del tensor métrico así:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu;\rho} &= g_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} &= 0 \\
g_{\nu\rho;\mu} &= g_{\nu\rho,\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} &= 0 \\
g_{\rho\mu;\nu} &= g_{\rho\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} g_{\lambda\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} &= 0
\end{aligned}$$

Nótese que entre ellas y por la simetría del tensor métrico y de los símbolos de Christoffel hay términos que se repiten. Así por ejemplo en la primera y la segunda ecuación los términos $-\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} g_{\lambda\nu}$ y $-\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}$ (respectivamente) son idénticos. Así, restando la primera de la segunda y tercera ecuación obtenemos:

$$g_{\mu\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\mu} - g_{\rho\mu,\nu} + 2\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} = 0$$

De esta última expresión se puede escribir la forma conocida de los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

Si introducimos la notación:

$$g_{\{\rho\mu,\nu\}} \equiv g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu}$$

donde las llaves $\{\}$ indican que se debe sumar sobre todas las combinaciones cíclicas de los índices y usar como signo un análogo del símbolo de Levi-Civita, tal que por cada movimiento de la "banda transportadora" (permutación) se multiplica un signo "-". Es por eso que el segundo término, que corresponde a una permitación impar, es negativo.

entonces de forma abreviada:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

Nota

Los términos de los símbolos de Christoffel. Aunque la expresión:

Nota (Cont.)

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

es bastante compacta no hay que olviar que encierra dos operaciones: la operación cíclica sobre el término $g_{\{\rho\mu,\nu\}}$ que hace que este se convierta en realidad en una suma de 3 términos, y la suma sobre el índice ρ (4 términos). Eso hace que para calcular cada símbolo de Christoffel, en general, sean necesarios en realidad $4 \times 3 = 12$ términos:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} & = & \frac{1}{2} g^{\lambda 0}(g_{0\mu,\nu} - g_{\mu\nu,0} + g_{\nu 0,\mu}) + \\ & & + \frac{1}{2} g^{\lambda 1}(g_{1\mu,\nu} - g_{\mu\nu,1} + g_{\nu 1,\mu}) + \\ & & + \frac{1}{2} g^{\lambda 2}(g_{2\mu,\nu} - g_{\mu\nu,2} + g_{\nu 2,\mu}) + \\ & & + \frac{1}{2} g^{\lambda 3}(g_{3\mu,\nu} - g_{\mu\nu,3} + g_{\nu 3,\mu}) \end{array}$$

Como vemos, los símbolos de Christoffel son proporcionales a las primeras derivadas del tensor métrico. Este hecho se puede escribir explícitamente si definimos:

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

En términos de los símbolos de Christoffel las derivadas del tensor métrico se puede probar (ver Problemas al final del capítulo) son:

$$\begin{array}{rcl} g_{\alpha\beta,\gamma} & = & \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} & = & -g^{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} - g^{\alpha\mu}\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \end{array}$$

El hecho que las primeras derivadas del tensor métrico sean proporcionales a los símbolos de Christoffel, explica por que hay 40 valores independientes. Dado que el tensor métrico, por su simetría, tiene 10 componentes independientes (6 fuera de la diagonal y 4 en la diagonal) y cada una de ella tiene 4 componentes de la derivada, existiran en general $4 \times 10 = 40$ primeras derivadas independientes.

En términos de los símbolos de Christoffel la derivada covariante en un espçacio Riemanniano o pseudoriemanniano con conexión de Levi-Civita se escribirá:

$$\begin{array}{rcl} A^{\mu}{}_{;\alpha} & = & A^{\mu}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha} A^{\gamma} \\ A_{\mu;\nu} & = & A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu} A_{\gamma} \\ A^{\mu\nu}{}_{;\alpha} & = & A^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha} A^{\gamma\nu} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma} A^{\mu\gamma} \\ A_{\mu\nu}{}_{;\alpha} & = & A_{\mu\nu}{}_{,\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha} A_{\gamma\nu} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\nu} A_{\mu\gamma} \end{array}$$

1.3.5. Cálculo de los símbolos de Christoffel

El cálculo de los símbolos de Christoffel es una de las habilidades más importantes en la relatividad general. En esta sección veremos ejemplos específicos del cálculo de estas cantidades para métricas específicas.

Si bien calcular 40 coeficientes mediante la derivada de los coeficientes del tensor métrico no parece una tarea muy agradable, hay algunas propiedades útiles tanto del tensor métrico como de los coeficientes que simplifican la tarea.

Los símbolos de Christoffel de una métrica diagonal

Como hemos visto en secciones anteriores el tensor métrico es una forma bilineal que nos da la regla para calcular el producto punto entre los cuadrivectores. Si llamamos $\hat{e}_\mu(x^\nu)$ a los vectores de una base del espacio tiempo definidos en el evento x^ν, la métrica se define en términos de:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^\mu \cdot \mathrm{d}x^\nu = (\mathrm{d}x^\mu \hat{e}_\mu) \cdot (\mathrm{d}x^\nu \hat{e}_\nu) = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

es decir:

$$g_{\mu\nu} = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu)$$

Esto implica que siempre que definamos un sistema de ejes ortogonales la métrica será diagonal:

$$g_{\mu\nu} : \mathrm{diag}(g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33})$$

con inversa:

$$g^{\mu\nu} : \mathrm{diag}\left(\frac{1}{g_{00}}, \frac{1}{g_{11}}, \frac{1}{g_{22}}, \frac{1}{g_{33}}\right)$$

Si este es el caso los símbolos de Christoffel se simplifican. En lugar de los 4 términos diferentes que describíamos antes cada símbolo realmente es el resultado del cálculo de un solo término:

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\{\lambda\mu,\nu\}} \\ &= \tfrac{1}{2} g^{\lambda\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\nu\lambda,\mu}) \end{aligned}$$

Los dos hechos anteriores implican además una segunda propiedad muy interesante. Dado que solo los términos diagonales de la derivada son distintos de cero, entonces la última expresión tendrá potencialmente términos distintos de cero si y solo si al menos dos índices de entre λ, μ, ν son repetidos. Esto implica que solo los coeficientes de la forma:

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\nu}, \Gamma^\lambda_{\mu\mu}$$

serán distintos de cero e iguales a:

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} = +\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda,\nu}$$

con $\nu \neq \lambda$ que llamaremos los *símbolos mixtos*, y

$$\Gamma^\lambda_{\mu\mu} = -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\mu\mu,\lambda}$$

que llamaremos los *símbolos diagonales*.

En un espacio de 4 dimensiones por cada índice λ hay 3 símbolos mixtos y 4 diagonales, es decir 7 en total. Esta simetría reduce el número posible de símbolos de Christoffel de 40 a $4 \times 7 = 28$ componentes distintas de cero (ver Problemas al final del capítulo).

Una última propiedad interesante implica que si una de las variables x^λ tiene coeficiente métrico $g_{\lambda\lambda}$ constante y ningún otro coeficiente métrico depende de x^λ, es decir $g_{\mu\mu,\lambda} = 0$ entonces todos los símbolos de Christoffel que tengan λ serán cero:

$$\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\mu} = 0$$

Por cada componente con esta propiedad se reducen en 7 los símbolos de Christoffel diferentes de cero.

Símbolos de Christoffel del espacio-tiempo plano

Calculemos los símbolos de Christoffel para el espacio-tiempo plano. En principio podría pensarse que en esta situación los símbolos son todos cero (en tanto dependen de derivadas de la métrica y en el espacio-tiempo plano la métrica es constante). Pero no es así. Todo depende del sistema de coordenadas que estamos utilizando.

En coordenadas cartesianas el elemento de línea del espacio-tiempo es:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x_L^2 - \mathrm{d}y_L^2 - \mathrm{d}z_L^2$$

de donde la métrica es:

$$g_{\mu\nu} : \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Y de aquí los símbolos de Christoffel resultantes serán:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$$

Esto implica que en el espacio-tiempo de Minkowski y en coordenadas cartesianas la derivada ";" es igual a la derivada ",".

Si usamos sin embargo coordenadas cilíndricas, la métrica del mismo espacio-tiempo será:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r_L^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - \mathrm{d}z_L^2$$

de donde la métrica es:

$$g_{\mu\nu} : \mathrm{diag}(1, -1, -r^2, -1)$$

con inversa:

$$g^{\mu\nu} : \mathrm{diag}(1, -1, -1/r^2, -1)$$

Ahora hay al menos una componente de la métrica $g_{22}(r) = g_{\theta\theta}(r)$ que depende de las coordenadas. Esto implica entonces que todos aquellos símbolos de Christoffel que incluyan las derivadas del tipo $g_{\theta\theta,r}$ serán distintos de cero.

Nota

Coordenadas en lugar de números. Es corriente que se use por simplicidad el nombre de las coordenadas en lugar de números para indicar la componentes de la métrica o de los símbolos de Christoffel. Es así como hemos reemplazado g_{22} por $g_{\theta\theta}$ o $g_{\theta\theta,r}$ para denotar $g_{22,1}$. Así mismo nos referiremos por ejemplo a $\Gamma^t_{r\theta}$ para representar el símbolo Γ^0_{12}.

Recordando la definición:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que dado que la matriz es diagonal los únicos símbolos de Christoffel que no serán cero son aquellos para los cuales $\lambda = \rho$:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

Podemos de entrada descartar todos los casos en los que uno de los índices sea 0 o 4 (t o z en nuestra notación) en tanto:

1. $g_{tt} = 1$ y $g_{zz} = 1$, es decir son constantes y no tienen derivadas diferentes de 0.
2. $g_{it} = 0$ y $g_{\mu z} = 0$.
3. Ninguna de las componentes de la métrica depende del tiempo o de z.

Esto nos permite descartar un número significativo de componentes (34 componentes nulas para ser exactos).

Para el caso en el que $\rho = r$ tendremos los símbolos potencialmente no nulos $\Gamma^r_{rr}, \Gamma^r_{r\theta}, \Gamma^r_{\theta\theta}$. Escribamos explícitamente:

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{rr} &= g^{rr}(g_{rr,r} - g_{rr,r} + g_{rr,r}) = 0 \\
2\Gamma^r_{r\theta} &= g^{rr}(g_{rr,\theta} - g_{r\theta,r} + g_{\theta r,r}) = 0 \\
2\Gamma^r_{\theta\theta} &= g^{rr}(g_{r\theta,\theta} - g_{\theta\theta,r} + g_{\theta r,\theta}) = -2r
\end{aligned}$$

Para el caso en el que $\rho = \theta$ tendremos los símbolos potencialmente no nulos $\Gamma^\theta_{rr}, \Gamma^\theta_{r\theta}, \Gamma^\theta_{\theta\theta}$. Escribamos explícitamente:

$$\begin{aligned}
\Gamma^\theta_{rr} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta r,r} - g_{rr,\theta} + g_{r\theta,r}) = 0 \\
2\Gamma^\theta_{r\theta} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta r,\theta} - g_{r\theta,\theta} + g_{\theta\theta,r}) = 2r/r^2 \\
2\Gamma^\theta_{\theta\theta} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta}) = 0
\end{aligned}$$

Finalmente encontramos que las únicas componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{\theta\theta} &= -r \\
\Gamma^\theta_{r\theta} &= 1/r
\end{aligned}$$

Pero ¿qué significa todo esto?. Por la definición de derivada covariante:

$$A^{\mu}{}_{;\alpha} = A^{\mu}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha} A^{\gamma}$$

y por lo que hemos encontrado:

$$\begin{aligned} A^{t}{}_{;\alpha} &= A^{t}{}_{,\alpha} \\ A^{z}{}_{;\alpha} &= A^{z}{}_{,\alpha} \\ A^{\mu}{}_{;t} &= A^{\mu}{}_{,t} \\ A^{\mu}{}_{;z} &= A^{\mu}{}_{,z} \end{aligned}$$

Es decir, en este espacio tiempo la derivada covariante y la derivada parcial convencional de las componentes temporal y z serán exactamente las mismas. Además la derivada covariante respecto a estas componentes será igual a su derivada convencional.

Por otro lado las únicas derivadas covariantes que no serán triviales son:

$$\begin{aligned} A^{r}{}_{;\theta} &= A^{r}{}_{,\theta} + \Gamma^{r}_{\theta\theta} A^{\theta} = A^{r}{}_{,\theta} - r A^{\theta} \\ A^{\theta}{}_{;r} &= A^{\theta}{}_{,r} + \Gamma^{\theta}_{r\theta} A^{\theta} = A^{\theta}{}_{,r} + A^{\theta}/r \\ A^{\theta}{}_{;\theta} &= A^{\theta}{}_{,\theta} + \Gamma^{\theta}_{\theta r} A^{r} = A^{\theta}{}_{,\theta} + A^{r}/r \end{aligned}$$

Símbolos de Christoffel de una superficie esférica

En el caso de una superficie de dos dimensiones embebida en un espacio de tres dimensiones la métrica es:

$$\mathrm{d}l^2 = R^2 \mathrm{d}\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2$$

donde θ es el ángulo polar (medido respecto al polo de la esfera) y ϕ es el ángulo acimutal. La métrica será en este caso simplemente:

$$g_{ij} : \mathrm{diag}(R^2, R^2 \sin^2\theta)$$

con inversa:

$$g^{ij} : \mathrm{diag}\left(\frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2 \sin^2\theta}\right)$$

En este caso (dos dimensiones), el número de símbolos de Christoffel serán $n^2(n+1)/2 = 2^2 3/2 = 6$ y de nuevo por ser la métrica diagonal:

$$\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{ii} g_{\{ij,k\}}$$

Los símbolos de Christoffel correspondientes a la variable θ serán:

$$\begin{aligned} 2\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta}) = 0 \\ 2\Gamma^{\theta}_{\phi\theta} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\phi,\theta} - g_{\phi\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\phi}) = 0 \\ 2\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\theta} + g_{\phi\theta,\phi}) = 2\sin\theta \end{aligned}$$

Por otro lado, los correspondientes a la variable ϕ serán:

$$
\begin{aligned}
2\Gamma^{\phi}_{\phi\phi} &= g^{\phi\phi}(g_{\phi\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\phi} + g_{\phi\phi,\phi}) = 0 \\
2\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} &= g^{\phi\phi}(g_{\phi\phi,\theta} - g_{\phi\theta,\phi} + g_{\theta\phi,\phi}) = 2/\sin\theta \\
2\Gamma^{\phi}_{\theta\theta} &= g^{\phi\phi}(g_{\phi\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\phi} + g_{\theta\phi,\theta} = 0
\end{aligned}
$$

Es decir solo dos de los 6 símbolos de Christoffel son diferentes de cero:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= \sin\theta \\
\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} &= 1/\sin\theta
\end{aligned}
$$

Símbolos de Christoffel de una métrica general

Supongamos una métrica general de la forma:

$$
\mathrm{d}s^2 = \exp(2A)\,\mathrm{d}t_L^2 - \exp(2B)\,\mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2
$$

donde $A = A(r)$ y $B = B(r)$ son funciones solamente de la variable radial. La métrica tiene la forma:

$$
g_{\mu\nu} : \mathrm{diag}(\exp(2A), -\exp(2B), -r^2, -r^2\sin^2\theta)
$$

con inversa:

$$
g^{\mu\nu} : \mathrm{diag}\left(\exp(-2A), -\exp(-2B), -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)
$$

¿Cuáles son los símbolos de Christoffel en este caso? De nuevo por tratarse de una métrica diagonal todos los símbolos de Christoffel tienen la forma:

$$
\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}
$$

En esta situación tenemos que las componentes de la métrica dependen de forma complicada de las coordenadas con la excepción del tiempo. Esto implica que en general todos los símbolos de Christoffel potencialmente pueden ser distintos de cero y debemos analizarlos uno a uno:

- **Componentes** t**,** $\Gamma^{t}_{\mu\nu}$. Como sabemos que solo las derivadas $g_{tt,r}$ son distintas de cero, los únicos símbolos distintos de cero serán aquellos para los que $\mu = 0$ y $\nu = r$:

  $$
  2\Gamma^{t}_{tr} = g^{tt} g_{tt,r} = 2\exp(-2A)\exp(2A)A' = A'
  $$

  donde $A' = \mathrm{d}A/\mathrm{d}r$.

- **Componentes** r**,** $\Gamma^{r}_{\mu\nu}$. En este caso de nuevo sabemos que solo las derivadas $g_{tt,r}$, $g_{ii,r}$ son distintas de cero, de modo que los símbolos de Christoffel que pueden ser distintos de cero serán aquellos en los que aparece repetidos los índices correspondientes, es decir: Γ^{r}_{tt}, Γ^{r}_{rr}, $\Gamma^{r}_{\theta\theta}$, $\Gamma^{r}_{\phi\phi}$. El valor de estos símbolos será:

$$
\begin{aligned}
2\Gamma^r_{00} &= -g^{rr} g_{00,r} = 2A' \exp[2(A-B)] \\
2\Gamma^r_{rr} &= -g^{rr} g_{rr,r} = 2B' \\
2\Gamma^r_{\theta\theta} &= -g^{rr} g_{\theta\theta,r} = -r \exp(-2B) \\
2\Gamma^r_{\phi\phi} &= -g^{rr} g_{\phi\phi,r} = -r \sin^2\theta \exp(-2B)
\end{aligned}
$$

- **Componentes θ, $\Gamma^\theta_{\mu\nu}$.** En este caso sabemos que solo las derivada $g_{\theta\theta,r}$ y $g_{\phi\phi,\theta}$ serán distinta de cero. De modo que solo aquellos símbolos en los que se repita θ y ϕ lo serán también:

$$
\begin{aligned}
2\Gamma^\theta_{r\theta} &= g^{\theta\theta} g_{\theta\theta,r} = 2/r \\
2\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -g^{\theta\theta} g_{\phi\phi,r} = -2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
$$

- **Componentes ϕ, $\Gamma^\phi_{\mu\nu}$.** El caso es análogo a la componente anterior y los únicos coeficientes distintos de cero serán:

$$
\begin{aligned}
2\Gamma^\phi_{r\phi} &= g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,r} = 2/r \\
2\Gamma^\phi_{\theta\phi} &= g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,\theta} = 2\cot\theta
\end{aligned}
$$

En total entonces, de las 40 componentes solo 9 de ellas son distintas de cero.

Cálculo numérico

El cálculo numérico de los símbolos de Christoffel puede ser útil para futuros cálculos.

La rutina para calcular los símbolos de Christoffel será:

```python
def Gamma(xmu,gfun,gargs=(),N=4):
    """
    Calcula todos los símbolos de Christoffel
    gfun: función métrica
    xmu: evento
    """
    from scipy.misc import derivative
    from numpy import where,arange
    from numpy import zeros
    #Indices
    index=arange(N)

    #Gamma
    G=zeros((N,N,N))

    for pi in range(N):
        for nu in range(N):
            #Inversa
            gpipi=1/gfun(xmu,pi,*gargs) #g^pipi
            #Coeficientes diagonales
            xd=xmu[pi] #Punto en el que estoy derivando
            dx=max(0.01,0.1*abs(xd))
```

```
                gnunu_pi=derivative(lambda x:gfun(where(index==pi,x,xmu),nu,*gargs),xd,dx)
                G[pi,nu,nu]=-0.5*gpipi*gnunu_pi
                #Coeficientes mixtos
                if nu==pi:continue
                xd=xmu[nu] #Punto en el que estoy derivando
                dx=max(0.01,0.1*abs(xd))
                gpipi_nu=derivative(lambda x:gfun(where(index==nu,x,xmu),pi,*gargs),xd,dx)
                G[pi,pi,nu]=0.5*gpipi*gpipi_nu
                G[pi,nu,pi]=G[pi,pi,nu]
    return G
```

Para poner a prueba nuestra rutina, podemos usar algunas de las métricas que habíamos visto antes.

Por ejemplo la métrica en coordenadas cilíndricas:

```
from numpy import array
def g_cilindricas_4d(xmu,mu):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_munu=diag(1,-1,-r^2,-1)
    """
    from numpy import sin
    t,r,teta,z=xmu
    if mu==0:
        g=1
    elif mu==1:
        g=-1
    elif mu==2:
        g=-r**2
    elif mu==3:
        g=-1
    return g
```

Escogemos ahora un punto en el cuál calcular los símbolos de Christoffel:

```
xmu=array([0,2,0,1])
```

E invocamos nuestra rutina:

```
G=Gamma(xmu,g_cilindricas_4d,N=4)
```

```
Símbolos de Christoffel:
[[[-0.   0.   0.   0. ]
  [ 0.  -0.   0.   0. ]
  [ 0.   0.  -0.   0. ]
  [ 0.   0.   0.  -0. ]]

 [[ 0.  -0.   0.   0. ]
  [-0.   0.  -0.  -0. ]
```

```
  [ 0.  -0.  -2.   0. ]
  [ 0.  -0.   0.   0. ]]

 [[ 0.   0.  -0.   0. ]
  [ 0.   0.   0.5  0. ]
  [-0.   0.5  0.  -0. ]
  [ 0.   0.  -0.   0. ]]

 [[ 0.   0.   0.  -0. ]
  [ 0.   0.   0.  -0. ]
  [ 0.   0.   0.  -0. ]
  [-0.  -0.  -0.   0. ]]]
```

Donde vemos que lo que habíamos determinado en nuestro primer ejercicio es correcto. Solo dos símbolos de Christoffel son diferentes de cero:

```python
print(f"G^1_{22} = {G[1,2,2]}")
print(f"G^2_{21} = {G[2,2,1]}")
```

```
G^1_22 = -2.0000000000000004
G^2_21 = 0.5000000000000001
```

y su valor coincide con el valor teóricamente esperado de $\Gamma^1_{22} = -r$ y $\Gamma^2_{21} = 1/r$.

1.4. Derivada total general y geodésicas

Una *aplicación* interesante de la derivada covariante es la deducción de una de las ecuaciones más importantes de la relatividad general: la ecuación geodésica.

1.4.1. Derivada total general

Hemos introducido ya una forma de la derivada que puede ser usada en las leyes de la física de modo que tengan una forma manifiestamente covariante bajo trasnformaciones generales. Es la derivada covariante:

$$A^\mu{}_{;\alpha} = A^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} A^\gamma$$

Esta derivada permite definir otra cantidad muy útil, a saber **la derivada total general**, es decir, la derivada total de una cantidad tensorial respecto a un escalar (por ejemplo, el tiempo propio). Como hemos visto en el capítulo anterior, las derivadas totales son muy importantes en la definición de las propiedades cinemáticas y dinámicas en física, de modo que es conveniente definirlas.

Si nos movemos a lo largo de una curva en el espacio-tiempo tal que cada evento es función de una cantidad escalar o parámetro u, es decir $x^\mu(u)$, entonces definiremos la derivada total de un campo tensorial $A^\mu(x^\mu)$ respecto al parámetro u como:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}u} A^\mu \equiv A^\mu{}_{;\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}u}$$

que es un análogo a la regla de la cadena en el cálculo vectorial convencional.

Nótese que esta definición es análoga a la que podemos hacer en el caso en el que tengamos transformaciones lineales de coordenadas (métrica de Minkowski), a saber $\mathrm{d}A^{\mu}/\mathrm{d}u = A^{\mu}{}_{,\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}/\mathrm{d}u$ con la diferencia de que en lugar de usar la derivada "," usamos la derivada covariante. De nuevo es sencillo probar que la derivada total general es en sí misma una cantidad tensorial (ver Problemas al final del capítulo).

1.4.2. Derivada total y transporte paralelo

En términos de la derivada total es posible reinterpretar el concepto de transporte paralelo.

Diremos que un vector es transportado de forma paralela a lo largo de una trayectoria si su derivada total general es proporcional es cero:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}u}A^{\mu} = 0\,, \text{transporte paralelo}$$

Usando la definición de derivada total general:

$$\partial_{\alpha}A^{\mu}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}u} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}u} = 0$$

El primer término es la derivada total convencional:

$$\frac{\mathrm{d}A^{\mu}}{\mathrm{d}u} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}A^{\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}u} = 0$$

Esta ecuación en definitiva representa la condición matemática para que un vector sea transportado de forma paralela a lo largo de una trayectoria descrita por $x^{\mu}(u)$.

Nota

Otra manera de obtener las conexiones. Existe una manera alternativa de obtener la fórmula de la derivada covariante y de las conexiones que es interesante. Un cuadrivector puede escribirse en términos de los vectores de una base como:

$$\mathbf{A} = A^{\mu}\hat{e}_{\mu}$$

Si derivamos respecto de un parámetro u que define una trayectoria obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}A^{\mu}}{\mathrm{d}u}\hat{e}_{\mu} + A^{\mu}\frac{\mathrm{d}\hat{e}_{\mu}}{\mathrm{d}u}$$

Aplicando la regla de la cadena para calcular la tasa de cambio del vector de la base obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}A^{\mu}}{\mathrm{d}u}\hat{e}_{\mu} + A^{\mu}\partial_{\alpha}\hat{e}_{\mu}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}u}$$

Nota (Cont.)

Las derivadas de cada vector de la base respecto a las coordenadas se pueden expresar en términos de los mismos vectores de la base:

$$\partial_\alpha \hat{e}_\mu \equiv G^\gamma_{\alpha\mu} \hat{e}_\gamma$$

donde los coeficientes $G^\gamma_{\alpha\mu}$ *conectan* las derivadas de cada componente de cada vector unitario con las componentes de los demás vectores unitarios de la base.
Reemplazando queda:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{dA^\mu}{du}\hat{e}_\mu + A^\mu G^\gamma_{\alpha\mu}\hat{e}_\gamma \frac{dx^\alpha}{du}$$

que se puede escribir como:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \left(\frac{dA^\gamma}{du} + G^\gamma_{\alpha\mu} A^\mu \frac{dx^\alpha}{du}\right)\hat{e}_\gamma$$

Para que el vector no varíe a lo largo de la trayectoria es necesario que $d\mathbf{A}/du = 0$ lo que implica que:

$$\frac{dA^\gamma}{du} + G^\gamma_{\alpha\mu} A^\mu \frac{dx^\alpha}{du} = 0$$

que es justamente la condición que habíamos obtenido antes.
Bastaría ahora con probar que $G^\gamma_{\alpha\mu}$ son los símbolos de Christoffel. Para ello podemos calcular la derivada convencional de los coeficientes métricos:

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha(\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu) = G^\gamma_{\alpha\mu}\hat{e}_\gamma \cdot \hat{e}_\nu + G^\gamma_{\nu\beta}\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\gamma = G^\gamma_{\alpha\mu} g_{\gamma\nu} + G^\gamma_{\nu\beta} g_{\mu\gamma}$$

de done puede probarse que:

$$G^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

que es justamente la forma de los símbolos de Christoffel.

1.4.3. Ecuación geodésica

De todos los campos vectoriales que pueden definirse a lo largo de una trayectoria el más importante es aquel que corresponde al vector tangente (o el vector cuadrivelocidad). El transporte paralelo de este vector permite definir un tipo de trayectoria muy especial.

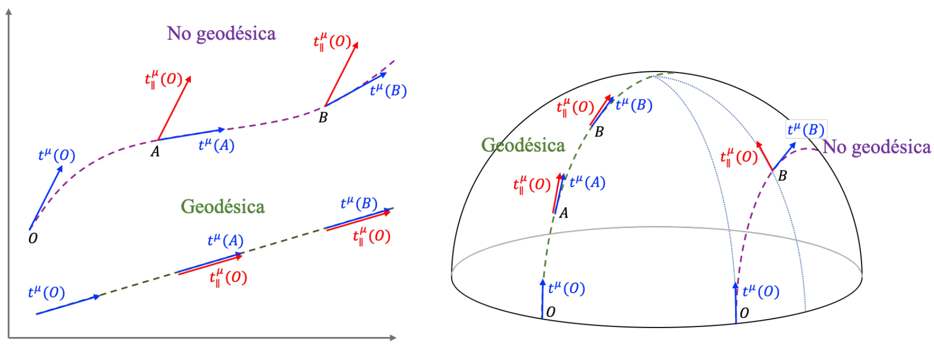


Figura 1.3: *Definición de geodésica en el espacio-tiempo plano y sobre la superficie de una esfera.*

Definición 1.2

Geodésica. Una trayectoria en un espacio general se define como una geodésica si mantiene a todo lo largo la misma dirección, es decir si el vector tangente $t^{\alpha} \equiv \mathrm{d}x^{\alpha}/\mathrm{d}\sigma$ en cada punto es *paralelo* (en el sentido de *transporte paralelo*) al vector tangente de cualquier otro punto. Matemáticamente:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}\sigma} t^{\alpha} = 0$$

donde σ se conoce como el **parámetro afin** de la trayectoria.

Si usamos la definición dada en la sección anterior, la geodésica será la trayectoria que satisfaga la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}\sigma} = 0$$

1.4.4. Ejemplos numéricos

Las relaciones derivadas en las secciones pasadas pueden ponerse a prueba usando ejemplos numéricos. Tanto la ecuación de transporte paralelo como la ecuación geodésica son ecuaciones diferenciales.

Transporte paralelo coordenadas cilíndricas

Escribimos ahora la ecuación:

```
def A_parallel(A,u,xfun,dxdufun,gfun,gargs=(),N=4):
    """
    Calcula la derivada de las componentes de un vector A
    respecto al parámetro u de una función xfun

    Parametros:
```

```
        A: Arreglo con valores del vector
        u: Valor del parámetro

    Opciones:
        xfun: función que da la posición sobre la trayectoria
        dxdufun: función que da la derivadad de la trayectoria
        gfun: función que da la métrica
        N: Número de dimensiones
    """
    from export import Gamma
    from numpy import zeros
    dAdu=zeros(N)
    xmu=xfun(u)
    dxmudu=dxdufun(u)
    G=Gamma(xmu,gfun,gargs,N)
    for pi in range(N):
        for mu in range(N):
            for nu in range(N):
                dAdu[pi]+=-G[pi,mu,nu]*A[mu]*dxmudu[nu]
    return dAdu
```

Ahora podemos definir nuestra trayectoria:

```
def x_fun(u):
    """
    Supongamos una trayectoria:
    r = 1
    theta = u
    """
    from numpy import zeros
    x=zeros(2)
    x[0]=1
    x[1]=u
    return x

def dxdu_fun(u):
    """
    Supongamos una trayectoria:
    drdu = 0
    dthetadu = 1
    """
    from numpy import zeros
    dxdu=zeros(2)
    dxdu[0]=0
    dxdu[1]=1

    return dxdu
```

Y la métrica con la que vamos a trabajar

```
from numpy import array
def g_cilindricas_2d(xmu,mu):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_munu=diag(1,r^2)
    """
    r,teta=xmu
    if mu==0:
        g=1
    elif mu==1:
        g=r**2
    return g
```

Las condiciones iniciales y de integración son:

```
N=2
from numpy import array
A0=array([1,0])
from numpy import pi,linspace
us=linspace(0,pi/2,10)
```

Ahora podemos resolver:

```
from scipy.integrate import odeint
As=odeint(A_parallel,A0,us,args=(x_fun,dxdu_fun,g_cilindricas_2d,(),N))
```

Hagamos ahora un gráfico de lo que estamos diciendo:

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 1.1)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

from numpy import sin,cos
tetas=us
for i,teta in enumerate(tetas):

    #Puntos
    #Vectores unitarios
    er=array([cos(teta),sin(teta)])
    et=array([-sin(teta),cos(teta)])

    #Posición en la trayectoria
    xmu=x_fun(teta)
    r=xmu[0]*er
```

```
    #Vector transportado de forma paralela
    Apar=As[i,0]*er+As[i,1]*et

    #Grafica puntos
    ax.plot(r[0],r[1],'k.')

    #Grafica vector
    ax.quiver(r[0],r[1],Apar[0],Apar[1],
              scale=5)
    #Grafica de las componente r y t
    ax.quiver(r[0],r[1],As[i,0]*er[0],As[i,0]*er[1],
              scale=5,color='r',alpha=0.5,
              headlength=0,headwidth=0)
    ax.quiver(r[0],r[1],As[i,1]*et[0],As[i,1]*et[1],
              scale=5,color='r',alpha=0.5,
              headlength=0,headwidth=0)

xmin,xmax=ax.get_xlim()
ymin,ymax=ax.get_ylim()
rang=1.2*max(abs(xmin),abs(xmax),abs(ymin),abs(ymax))
ax.set_xlim((0,rang))
ax.set_ylim((0,rang))
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.4

Geodésica en coordenadas cilíndricas

Nos proponemos ahora a calcular la geodésica que sigue un cuerpo en el espacio plano dada una condición inicial. La ecuación de la geodésica es:

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\sigma^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\sigma}=0 \tag{1.1}$$

Para programar la ecuación de la geodésica es necesario linearizarla y expresarla de forma general como:

$$\left\{\frac{\mathrm{d}Y^\mu}{\mathrm{d}\sigma}=f^\mu(\{Y^\nu\},u)\right\}$$

En este caso podemos hacer esta asignación:

$$\begin{aligned} Y^\mu &\equiv x^\mu \\ Y^{4+\mu} &\equiv \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

Con esa identificación la ecuación de la geodésica se puede escribir como:

```
def ecuacion_geodesica(Y,s,gfun,gargs,N=4):
    """
    Opciones:
        gfun: función que da la métrica
        N: Número de dimensiones
```

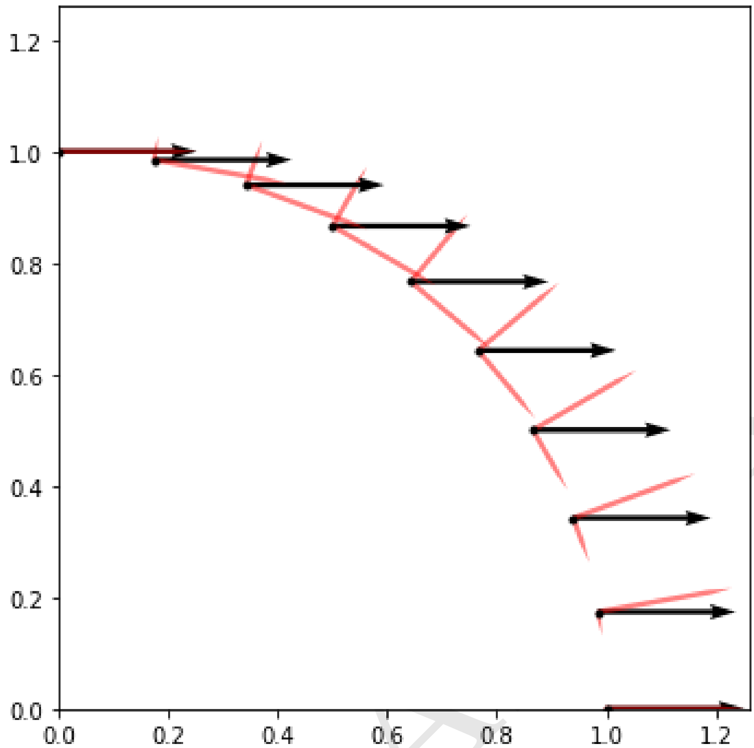


Figura 1.4: *Figura correspondiente al código 1.1.*

```
    """
    from export import Gamma
    from numpy import zeros
    dYdu=zeros(2*N)
    x=Y[:N]
    dxds=Y[N:]

    dYdu[:N]=dxds
    G=Gamma(x,gfun,gargs,N)
    for pi in range(N):
        for mu in range(N):
            for nu in range(N):
                dYdu[N+pi]+=-G[pi,mu,nu]*dxds[mu]*dxds[nu]
    return dYdu
```

Definamos las condiciones iniciales y de integración:

```
N=2
from numpy import array
Y0s=array([1,0,-1,-1])
from numpy import pi,linspace
```

```
ss=linspace(0,10,100)
```

Y podemos integrar:

```
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_cilindricas_2d,(),N))
```

Hagamos un gráfico de la trayectoria en el espacio:

(Algoritmo 1.2)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

from numpy import sin,cos
for i,Y in enumerate(Ys):

    #Coordenadas
    r=Y[0]
    teta=Y[1]

    #Puntos
    #Vectores unitarios
    er=array([cos(teta),sin(teta)])
    et=array([-sin(teta),cos(teta)])

    #Posición en la trayectoria
    rpos=r*er

    #Grafica puntos
    ax.plot(rpos[0],rpos[1],'k.')

#ax.set_xlim((0,1.5))
#ax.set_ylim((0,1.5))
ax.grid()
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.5

Que coincide con lo que esperabamos: la trayectoria es una línea recta.

Geodésica sobre la superficie de una esfera

Un problema más interesante es calcular la geodésica sobre una esfera. Para ello necesitamos la métrica:

```
def g_esfera_2d(xmu,mu,R=1):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados sobre la
    superficie de una esfera de radio R.
```

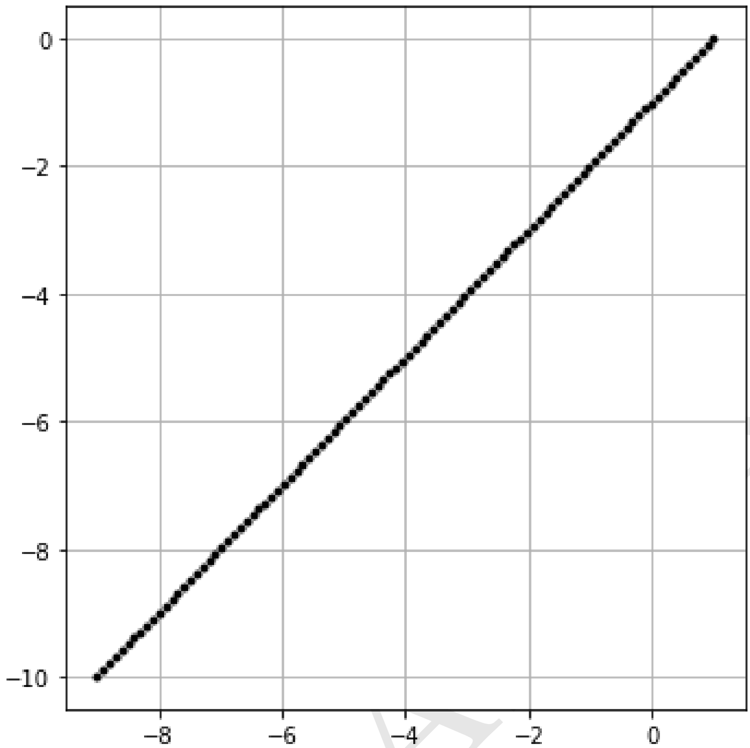


Figura 1.5: *Figura correspondiente al código 1.2.*

```
    g_munu=diag(1,r^2)
    """
    from numpy import sin
    teta,phi=xmu
    if mu==0:
        g=R**2
    elif mu==1:
        g=R**2*cos(teta)**2
    return g
```

Y podemos usar los algoritmos introducidos antes para integrar la geodésica:

(Algoritmo 1.3)

```
#Condiciones iniciales: arrancando en Medellín
N=2
from numpy import array,pi
Y0s=array([6*pi/180,-75*pi/180,0.6,0.2])
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,8,100)
```

```
#Integra la ecuación de la geodésica
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_esfera_2d,(),N))

#Extrae las coordenadas y las convierte a geográficas
from numpy import mod
lons=mod(Ys[:,1]*180/pi,360)
lats=Ys[:,0]*180/pi

#Grafica
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(lons,lats,'r.')

#Decoracion
ax.set_xlim((0,360))
ax.set_ylim((-90,90))
ax.grid()
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.6

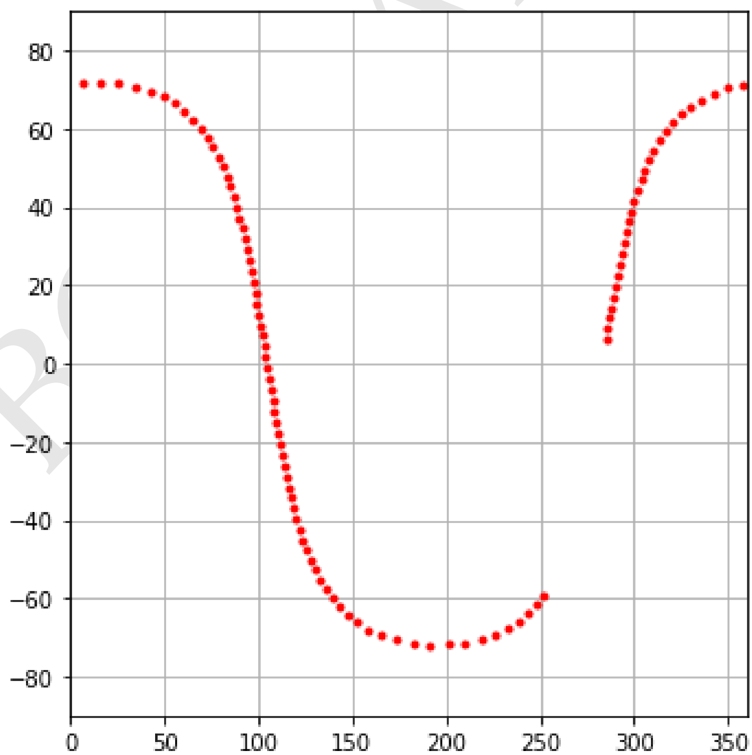


Figura 1.6: *Figura correspondiente al código 1.3.*

Para verificar que si es una circunferencia máxima usemos el paquete `Basemap` que permite representar puntos sobre un mapa realista de la Tierra.

(Algoritmo 1.4)

```
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.basemap import Basemap
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

#Crea mapa
#m=Basemap(projection='moll',lon_0=0)
m=Basemap(projection='ortho',lon_0=0,lat_0=30)

#Dibuja continentes, lagos y oceanos
m.drawcoastlines()
m.fillcontinents(color='coral',lake_color='aqua')
m.drawmapboundary(fill_color='aqua')

#Calcula la posición de los puntos
x,y=m(lons,lats)
ax.plot(x,y,'ro',ms=1)

#Ajusta el tamaño de la figura
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.7

1.5. La geodésica y un principio variacional

Una deducción alternativa de la ecuación geodésica se puede obtener mediante un principio variacional.

Sabemos que la longitud de un intervalo en el espacio-tiempo es:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

La longitud entonces de una curva hecha solo de intervalos temporaloides o luminoides, entre dos eventos A y B será:

$$S = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\alpha)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu}$$

donde x^α son los puntos a lo largo de la trayectoria.

Si suponemos que parametrizamos los eventos en la trayectoria con un parámetro λ, de modo que $x^\alpha(\lambda)$ esta espresión se puede escribir como:

$$S = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\alpha)\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}\mathrm{d}\lambda$$

La geodésica entre los eventos A y B será aquella curva tal que la longitud total entre ellos es *extremal*:

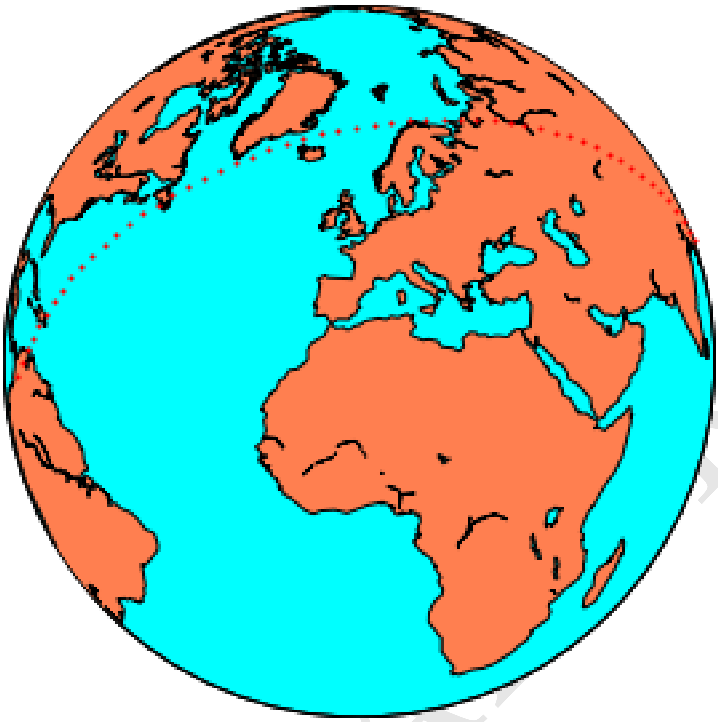


Figura 1.7: *Figura correspondiente al código 1.4.*

$$\delta S = 0$$

El intervalo entre puntos de la geodésica lo llamaremos en lo sucesivo:

$$\mathrm{d}\sigma^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

El problema de la determinación de la geodésica es similar al problema de la mecánica clásica de la determinación de la trayectoria real de un sistema en el espacio de configuración que tiene acción S y lagrangiano L.

Aquí vemos que el papel de la acción S de la mecánica clásica lo juega la longitud de arco y el papel del Lagrangiano lo juega la cantidad:

$$L \equiv \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}}$$

Sobre la curva extremal, en general

$$\mathrm{d}\sigma^2 = D\mathrm{d}\lambda^2$$

donde D es una constante.

Sabemos por el cálculo variacional que la condición variacional es equivalente a las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \left.\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}\right|_{\lambda=\sigma} = 0$$

donde por brevedad hemos escrito $\dot{x}^\alpha \equiv \mathrm{d}x^\alpha/\mathrm{d}\lambda$

Puede probarse que la ecuación de Euler en este caso resulta igual a:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\sigma} = 0$$

que es justamente la ecuación de la geodésica.

Nótese que en realidad la ecuación de la geodésica puede escribirse en general como:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

que es independiente de si la geodésica es temporaloide o nula.

Para el caso de partículas con masa:

$$\mathrm{d}\sigma^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2$$

por lo tanto es posible usar como parámetro afin $\lambda = \tau$ de modo que para este caso:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

Nota

La geodésica y el principio de máximo envejecimiento. En el espacio Euclidiano o en otras variedades Riemanianas la geodésica representa la trayectoria de longitud mínima, el camino de menor distancia. En un espacio Lorentziano, sin embargo, y como vimos en el capítulo de Relatividad Espacial, el camino entre dos puntos a lo largo de la geodésica es realmente el camino más largo. A esto se lo conoce como el **principio de máximo envejecimiento.**

1.6. Geodésicas y movimiento inercial

La introducción en la sección anterior del concepto de geodésica conduce a la formulación de un principio físico nuevo en la relatividad general, a saber un principio de inercia generalizado:

Postulado 1.6

Postulado de las geodésicas. Una partícula de prueba completamente libre de fuerzas, en un espacio tiempo general caracterizado por una métrica $g_{\mu\nu}$ y símbolos de Christoffel (coeficientes conexión) asociado $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, se mueve sobre una geodésica en el espacio-tiempo:

Postulado 1.6 (Cont.)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$

Es interesante anotar que el resultado anterior vale tanto si la partícula es masiva como si no lo es, es decir, aplica en el caso de la luz o de otras partículas de prueba. La diferencia es que en el caso de una partícula masiva en la cual los intervalos son temporaloides, el parámetro afín puede identificarse con el tiempo propio y la ecuación geodésica adopta la forma general:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau} = 0$$

que ahora es una ecuación completamente física (todas las cantidades involucradas son físicas).

Si despejamos $\mathrm{d}^2 x^\mu / \mathrm{d}\tau^2$ obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}$$

Clásicamente se puede interpretar como que un cuerpo en un espacio-tiempo con métrica general, experimenta una aceleración incluso en la ausencia de fuerzas.

Nota: El principio que realmente es una proposición. El principio de las geodésicas fue propuesto por Einstein como un elemento adicional físico a la relatividad general independiente de las ecuaciones de campo. Sin embargo, en años posteriores, Einstein y otros colegas demostraron que en realidad este resultado es producto de una propiedad intrínseca de la relatividad, a saber, el teorema de continuidad (conservación de la energía) que puede expresarse matemáticamente como:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de esfuerzo-energía que introduciremos en una sección posterior.

1.7. Geodésicas en campo débil

Una de las más interesantes aplicaciones de la ecuación de la geodésica se obtiene al aplicarla a una situación en la que el campo gravitacional es poco intenso.

Hay dos cosas que desde el punto de vista de la relatividad caracterizan a un campo gravitacional débil:

1. En movimiento geodésico en el campo, las velocidades espaciales conseguidas por las partículas son pequeñas, i.e.

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} \ll \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}$$

recordemos que en unidades luz la primera cantidad nos da la velocidad en unidades de la velocidad de la luz. Por otro lado, en las mismas unidades la segunda cantidad nos da la diferencia entre el tiempo coordenado y el tiempo propio que en campo débil será casi idéntica.

2. En campo débil la métrica es aproximadamente igual a la métrica de Minkowski. Podemos escribirla de la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

donde $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

A esta forma de escribir la métrica se la llama *linearización* de la métrica y la usaremos más adelante para describir las ondas gravitacionales.

Nos interesa dedicir la ecuación de movimiento de un cuerpo en caída libre en el campo gravitacional, es decir la ecuación $\mathrm{d}^2\vec{r}/\mathrm{d}t^2 \approx \mathrm{d}^2x^i/\mathrm{d}\tau^2$. En lo sucesivo y para simplificar usaremos la notación de Newton:

$$\ddot{x}^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}$$

entendiendo que el punto hace referencia a la derivada respecto del tiempo propio y no del tiempo coordenado.

En esta notación la ecuación geodésica nos queda:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\gamma}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\gamma$$

Teniendo en cuenta la primera condición podemos escribir una versión aproximada de la ecuación para la componente espacial como:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma^\mu_{00}(\dot{x}^0)^2$$

Si usamos coordenadas ortogonales para la métrica, sabemos que:

$$\Gamma^\mu_{00} = -\frac{1}{2}g^{\mu\mu}g_{00,\mu}$$

Suponemos un campo estático, de modo que $\Gamma^0_{00} = 0$ de donde se sigue que sobre la geodésica, en las condiciones propuestas

$$\ddot{x}^0 = 0$$

de donde integrando obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = k$$

donde k es una constante de integración a lo largo de la geodésica. Es fácil ver que dado que:

$$\mathrm{d}\sigma^2 \equiv g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$$

entonces, bajo las aproximaciones podemos escribir, en unidades del sistema internacional:

$$c^2 \approx \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$

que es exactamente el mismo resultado:

$$\dot{x}^0 = c$$

Volviendo a la ecuación de la geodésica, la componente temporal queda:

$$\ddot{x}^i = -c^2\Gamma^i_{00}$$

Usando la linearización de la métrica tenemos:

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ii}h_{00,i} = \frac{1}{2}h_{00,i}$$

De donde finalmente la ecuación de movimiento en campo gravitacional débil se puede escribir como:

$$\ddot{x}^i = -\frac{c^2}{2}h_{00,i}$$

En la mecánica Newtoniana sabemos que:

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\Phi$$

donde ϕ es el potencial gravitacional local (energía potencial gravitacional por unidad de masa) que para la ley de gravitación universal de Newton esta dado por:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

La comparación de estas ecuaciones muestra que podemos hacer la identificación:

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2}$$

De allí que el coeficiente métrico temporal en campo débil sea:

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

De modo que el comportamiento de las partículas en un campo gravitacional Newtoniano se puede reproducir con una métrica del tipo:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)\ \mathrm{d}t_L^2 -\ \mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$$

llamaremos a esta la **métrica de Newton**.

Una manera de parametrizar la métrica de Newton es haciendo:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\in\mathcal{GM}\surd}{\rfloor^{\in}}$$

la métrica se puede escribir de forma simplificada como:

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{r}\right)\,\mathrm{d}t_L^2 - \mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$$

Nota

El parámetro $\mathcal{R}$. El parámetro $\mathcal{R}$ es una cantidad de gran relevancia en la relatvidad general. Más adelante la obtendremos después de estudiar la métrica de Schwarzschild. Por ahora podemos ver que es una cantidad que es proporcional a la masa de un cuerpo con una constante de proporcionalidad $2G/c^2 = 1{,}4852\times10^{-27}m^3kg^{-1}$ muy pequeña. Esta cantidad solo se hace macroscópica para valores de la masa del cuerpo realmente grandes (masas planetarias). Una manera de parametrizar este parámetro es:

$$\mathcal{R} = 2{,}954\ \mathrm{km}\left(\frac{M_p}{M_\odot}\right)$$

1.7.1. Un ejemplo numérico

Una implementación de la métrica de Newton es:

```
from numpy import array
def g_newtoniana_4d(xmu,mu,R=1):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_munu=diag(A,-1,-r^2,-r^2 sin^2 teta)
    """
    from numpy import sin
    t,r,fi,teta=xmu
    A=(1-R/r)
    if mu==0:
        g=A
    elif mu==1:
        g=-1
    elif mu==2:
        g=-r**2
    elif mu==3:
        g=-r**2*sin(teta)**2
    return g
```

Vamos a estudiar el movimiento de un cuerpo que es lanzado horizontalmente con una velocidad v a una altura h ($r = R_p + h$) sobre la superficie del planeta. Las condiciones iniciales del problema son por tanto:

$$x^\mu_{0L} : \left(0, \frac{R_p + h}{c}, 0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^\mu_{0L}}{\mathrm{d}\sigma} : \left(1, 0, 0, -\frac{v}{R_p}, 0\right) \tag{1.3}$$

Las propiedades del cuerpo son:

```
#Constantes
c=3e8 # m/s
G=6.67e-11 # m^3 kg^-1 s^-2

#Propiedades del planeta
Mp=5.98e24 # kg
Rp=6.371e6 # m
Phip=-G*Mp/Rp
gp=G*Mp/Rp**2
R=2*G*Mp/c**2
```

```
R = 0.008863688888888891 m
Potencial en la superficie, Phi(Rp) = -62606498.19494586 J/kg
Aceleración gravitacional, g(Rp) = 9.826792998735812 m/s^2
```

Las condiciones iniciales serán por otro lado:

```
#Altura y velocidad
h=100.0 # m
v=10.0 # m/s

#Condiciones iniciales
from numpy import array,pi
Y0s=array([0.0,(Rp+h)/c,pi/2,pi/2,
           1,0,-v/Rp,0])

#Tiempo de integración
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,2,100)
```

```
print(f"Condiciones iniciales = {Y0s}")
```

```
Condiciones iniciales = [ 0.00000000e+00  2.12370000e-02  1.57079633e+00  1.57079633e+00
  1.00000000e+00  0.00000000e+00 -1.56961231e-06  0.00000000e+00]
```

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 1.5)

```
#Integra la ecuación de la geodésica
from scipy.integrate import odeint
```

```
from export import ecuacion_geodesica
N=4
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_newtoniana_4d,(R/c,),N))

#Convierte solución en coordenadas esféricas
ts=Ys[:,0]
rs=Ys[:,1]
fs=Ys[:,2]
qs=Ys[:,3]

#Convierte coordenadas esféricas en coordenadas cartesianas
from numpy import sin,cos
xs=rs*sin(qs)*cos(fs)
ys=rs*sin(qs)*sin(fs)
zs=rs*cos(qs)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(c*xs,c*ys-Rp)

#Comparación con el movimiento parabólico
#xs_par=v*ss
#ys_par=h-0.5*gp*ss**2
#ax.plot(xs_par,ys_par)

#Decoración
ax.set_xlabel("$x$")
ax.set_ylabel("$y$")
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.8

Que se corresponde con lo esperado: el cuerpo describe una trayectoria parabólica en el espacio.

1.8. Simetrías y cantidades conservadas

Las ecuaciones geodésicas son funamentales en Relatividad general y como tal deben ser revisadas con sumo cuidado. Como sucede en la mecánica clásica con las ecuaciones de movimiento de Newton o las ecuaciones de Lagrange, ellas representan las ecuaciones diferenciales más importantes de la relatividad general.

Existen distintas maneras de escribir las ecuaciones de la geodésica:

1. Versión original:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}$$

   que en notación de Newton es:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

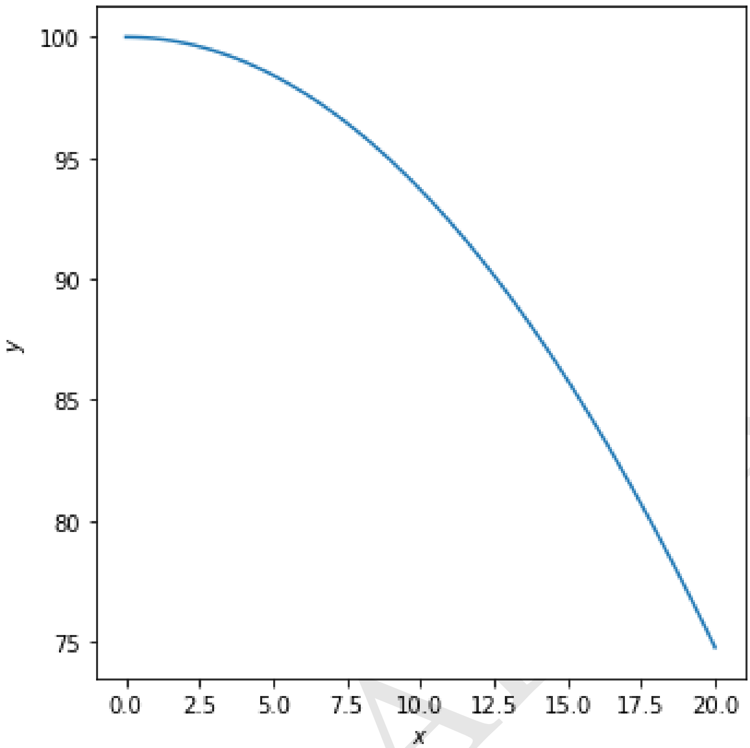


Figura 1.8: *Figura correspondiente al código 1.5.*

2. Versión linearizada

$$\dot{x}^\mu = U^\mu$$
$$\dot{U}^\mu = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} U^\alpha U^\beta$$

3. Versión variacional: si se define:

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

entonces la ecuación de la geodésica es:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

Esta última manera de expresar la ecuación permite encontrar constantes de movimiento usando principios similares a los que se usaron en la mecánica clásica.

1.8.1. La métrica como constante

Como hemos visto antes si se escoge de manera apropiada el parámetro afin entonces el valor de L resulta constante e igual a D. De aquí resulta nuestra primera constante de movimiento o cuadratura:

$$\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}} = D$$

que se puede escribir como:

$$g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = D^2$$

En el caso por ejemplo de una geodésica temporaloide, $D = c$ y $\sigma = \tau$ de modo que:

$$g_{\mu\nu}U^{\mu}U^{\nu} = c^2$$

1.8.2. Coordenadas cíclicas y vectores de Killing

Si una métrica no depende de una de las coordenadas x^{κ}, entonces la ecuación de Euler (ecuación de la geodésica) se puede escribir como:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\kappa}}\right) = 0$$

De aquí se obtiene que la cuadratura:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\kappa}} = \mathrm{cte}$$

Desarrollando esta ecuación obtenemos:

$$-g_{\kappa\nu}\frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\sigma} = -g_{\kappa\nu}U^{\nu} = \mathrm{cte}$$

Si definimos el vector:

$$\xi^{\mu} : (0_0, ..., 1_{\kappa}, ..., 0_4)$$

donde la única componente distinta de 0 es la componente κ entonces la constante encontrada se puede escribir como:

$$g_{\mu\nu}\xi^{\mu}U^{\nu} = \mathrm{cte}$$

Que no es otra cosa que el producto punto del cuadrivector ξ^{μ} y la cuadrivelocidad U_{ν}:

$$\xi^{\mu}U_{\mu} = \mathrm{cte}$$

Al cuadrivector ξ^{μ} se lo llama el vector de *Killing* asociado con la simetría correspondiente[2].

[2]El nombre de vector de Killing viene del matemático alemán Wilhelm Killing (1847-1923) y no de que sea un vector con una acción *asesina*.

1.8.3. Ejemplo: geodésicas en coordenadas cilíndricas

Un ejemplo clásico consiste en calcular las geodésicas en un espacio plano cuya métrica es expresada en coordenadas cilíndricas:

$$\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2$$

Consideremos geodésicas sobre el plano $z = 0$. Podemos escribir la ecuación de la geodésica o escribir sus constantes:

1. **Constancia de la métrica**: En este caso podemos escoger un parámetro afin tal que $D = 1$:

   $$\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 1$$

   que se escribe explícitamente como:

   $$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = 1$$

2. **Variables cíclicas**: En este caso ϕ no aparece en la métrica y por lo tanto el vector de Killing es $\xi^\mu : (0,1,0)$, de allí que la siguiente cantidad sea constante:

   $$\xi^\mu \dot{x}_\mu = h$$

   aquí hemos escogido llamar h a la constante. Explícitamente:

   $$g_{\mu\nu}\xi^\mu \dot{x}^\nu = h$$

   o lo que es lo mismo:

   $$g_{\phi\phi}\dot{\phi} = r^2\dot{\phi} = h$$

Dividiendo esta última ecuación por la primera obtenemos:

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{l}{r^2}\left(1 - \frac{h^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Que puede integrarse para dar:

$$\phi = \phi_0 + \cos^{-1}\left(\frac{h}{r}\right)$$

Despejando r obtenemos la forma de las geodésicas:

$$r\cos(\phi - \phi_0) = h$$

Desarrollando el coseno y teniendo en cuenta que $r\cos\phi = x$ y $r\sin\phi = y$:

$$x\cos\phi_0 + y\sin\phi_0 = h$$

que es la ecuación general de una línea recta y que es lo que estabamos esperando.

1.8.4. Ejemplo: geodésicas sobre una esfera

Un ejemplo clásico consiste en calcular las geodésicas sobre una esfera:

$$\mathrm{d}l^2 = R^2 \mathrm{d}\theta^2 + R^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi^2$$

Ya habíamos hecho este cálculo numéricamente. Hagámoslo ahora analíticamente.

1. **Constancia de la métrica**: En este caso podemos escoger un parámetro afin tal que $D = 1$:

$$\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 1$$

que se escribe explícitamente como:

$$R^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + R^2 \sin^2\theta \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = 1$$

2. **Variables cíclicas**: En este caso ϕ no aparece en la métrica y por lo tanto el vector de Killing es $\xi^\mu : (0, 1, 0)$, de allí que la siguiente cantidad sea constante:

$$g_{\phi\phi}\dot{\phi} = R^2 \sin^2\theta\dot{\phi} = h$$

Dividiendo término a término la primera por el cuadrado de la segunda y reorganizando se produce:

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + 1 = h^2 R^2 \sin^2\theta$$

Llamando $\kappa = h^2 R^2$, la integral y separando variables obtenemos:

$$\pm \int d\phi = \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta\sqrt{\kappa \operatorname{sen}^2\theta - 1}}$$

Por tablas de integrales:

$$\tan(\phi + \phi_0) = \mp \frac{\cos\theta}{\sqrt{\kappa \operatorname{sen}^2\theta - 1}}$$

Que puede escribirse como:

$$\sin(\phi + \phi_0) = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\kappa - 1}\sin\theta}$$

Y que se puede desarrollar como:

$$\sin\phi_0(R\sin\theta\cos\phi) + \cos\phi_0(R\sin\theta\sin\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\kappa - 1}}(R\cos\theta)$$

Que se puede escribir en coordenadas cartesianas como:

$$x\sin\phi_0 + y\cos\phi_0 - z\frac{1}{\sqrt{\kappa - 1}} = 0$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el origen de coordenadas y cuyas coordenadas x, y, z están sobre la superficie de la esfera. Es decir, esta es la ecuación de una circunferencia máxima, que es lo que sabemos para una geodésica sobre una esfera.

1. **Propiedades de la derivada covariante**. Demostrar las propiedades de la derivada covariante:

   a. **Derivada covariante de una suma**: $(A^\mu + B^\mu)_{;\nu} = A^\mu{}_{;\nu} + B^\mu{}_{;\nu}$

   b. **Derivada covariante de un producto o regla de Leibniz**: $(A^\mu B^\nu)_{;\alpha} = A^\mu{}_{;\alpha} B^\nu + A^\mu B^\nu{}_{;\alpha}$

   c. **Derivada covariante de un campo escalar (1)**: $\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$

   d. **Derivada covariante de un campo escalar (2)**: $(A^\mu B_\mu)_{;\alpha} = (A^\mu B_\mu)_{,\alpha}$

   e. **Derivada covariante de un tensor covariante**: $B_{\mu;\nu} = B_{\mu,\nu} - C^\gamma_{\mu\nu} B_\gamma$

   f. **Derivada covariante de un tensor contravariante de segundo rango**:
   $$A^{\mu\nu}{}_{;\alpha} = A^{\mu\nu}{}_{,\alpha} + C^\mu_{\gamma\alpha} A^{\gamma\nu} + C^\nu_{\alpha\gamma} A^{\mu\gamma}$$

   g. **Derivada covariante de un tensor covariante de segundo rango**:
   $$A_{\mu\nu}{}_{;\alpha} = A_{\mu\nu}{}_{,\alpha} - C^\gamma_{\mu\alpha} A_{\gamma\nu} - C^\gamma_{\alpha\nu} A_{\mu\gamma}$$

2. **Conexión**. Demostrar que si la derivada coariante definida por:

$$\mathrm{D}_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + C^\mu_{\gamma\alpha} A^\gamma$$

es un tensor bajo una transformación general $\mathcal{G}^{\nu'}{}_\nu$, entonces la conexión afin $C^\mu_{\gamma\alpha}$ transforma de acuerdo con:

```
$$
C^{\nu'}_{\mu'\sigma'}={{\cal G}^{\nu'}}_{\nu}{{\cal G}^{\mu}}_{\mu'}{{\cal G}^{\si
$$
```

3. **Primeras derivadas de la métrica**. Probar que:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} &= -g^{\alpha\mu}\Gamma^\beta_{\mu\gamma} - g^{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} \end{aligned}$$

4. **Conexión**. En el caso de métricas diagonales, los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} &= -g^{\alpha\mu}\Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} - g^{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} \end{aligned}$$

Probar que en un espacio de N dimensiones el número de términos es $N(2N-1)$

5. **Tensor de torsión**. Partiendo de la forma general en la que tansforman los coeficientes de conexión afin $C^{\sigma}_{\nu\mu}$, demostrar que la torsión $T^{\sigma}_{\mu\nu} \equiv C^{\sigma}_{\mu\nu} - C^{\sigma}_{\nu\mu}$ es un tensor.

6. **Tensor de torsión**. Usando la definición de los símbolos de Christoffel, demostrar que la derivada covariante:

$$A^{\mu}{}_{;\alpha} = A^{\mu}{}_{,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha}A^{\gamma}$$

Es un tensor de segundo rango.

7. **Tensor de torsión**. Calcular los símbolos de Christoffel para el espacio tiempo plano en coordenadas esféricas para el cual:

$$g_{\mu\nu} : \mathrm{diag}(1, -1, -r^2, -r^2\sin^2\theta)$$

Bibliografía