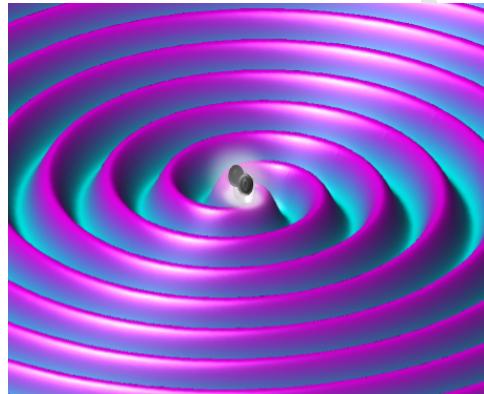


# Relatividad y Gravitación

## Teoría, algoritmos y problemas



**Jorge I. Zuluaga**

Profesor titular de Astronomía y Física

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Antioquia

30 de septiembre de 2020

BORRADOR

# Índice general

<b>1.</b>	<b>Relatividad Especial</b>	<b>11</b>
1.1.	Motivación . . . . .	11
1.2.	Conceptos básicos . . . . .	11
1.3.	Principio de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo . . . . .	13
1.4.	La relatividad Newtoniana . . . . .	13
1.5.	El problema del electromagnetismo . . . . .	14
1.5.1.	Las ecuaciones de Maxwell . . . . .	14
1.6.	¿Son covariantes las ecuaciones de Maxwell? . . . . .	17
1.7.	Las transformaciones de Lorentz-Einstein . . . . .	19
1.8.	Propiedades de las TLE . . . . .	25
1.8.1.	Unidades luz . . . . .	25
1.8.2.	La TLE como una rotación hiperbólica . . . . .	26
1.8.3.	Las TLE y la notación de Einstein . . . . .	28
1.8.4.	Inversa y transpuesta de las TLE . . . . .	30
1.8.5.	De las TLE a los tensores . . . . .	31
1.8.6.	Las TLE generales . . . . .	32
1.8.7.	El valor del factor de Lorentz-Einstein . . . . .	33
1.8.8.	Mapas de la TLE . . . . .	35
1.9.	Consecuencias de las TLE . . . . .	40
1.9.1.	Transformación de los intervalos . . . . .	40
1.9.2.	Dilatación temporal . . . . .	41
1.9.3.	Intervalos espacialoides y temporaloides . . . . .	47
1.9.4.	El postulado de los relojes . . . . .	48
1.9.5.	Contracción de longitudes . . . . .	51
1.9.6.	Adición de velocidades . . . . .	53
1.9.7.	Transformación de aceleraciones . . . . .	54
1.10.	El espacio-tiempo de Minkowski . . . . .	54
1.10.1.	La norma de Minkowski . . . . .	55
1.10.2.	Las variedades de Lorentz y la métrica de Minkowski	58
1.10.3.	Métrica y tipos de intervalos . . . . .	60
1.10.4.	Métrica y tiempo propio . . . . .	61
1.10.5.	Métrica, dilatación del tiempo y contracción de longitudes . . . . .	62
1.10.6.	Vectores y cálculo en el espacio de Minkowski . . . . .	62
1.10.7.	Minkowski y el postulado de los relojes . . . . .	64
1.10.8.	Transformación general de cuadrivectores . . . . .	65

1.11.	Cinemática relativística . . . . .	65
1.11.1.	Motivación . . . . .	65
1.11.2.	Descripción de una línea de universo . . . . .	66
1.11.3.	Cuadrivelocidad . . . . .	67
1.11.4.	Cuadriaceleración . . . . .	69
1.11.5.	Movimiento con cuadriaceleración constante . . . . .	71
1.11.6.	La velocidad límite . . . . .	75
1.11.7.	Ejemplo: una nave interestelar . . . . .	77
1.12.	Dinámica relativista . . . . .	79
1.12.1.	Masa invariante . . . . .	79
1.12.2.	Momentum relativista . . . . .	79
1.12.3.	Energía cinética relativística . . . . .	82
1.12.4.	Energía total relativista . . . . .	84
1.12.5.	Cuadrimomentum . . . . .	85
1.12.6.	Magnitud del cuadrimomentum y la simetría gauge	86
1.12.7.	Cuadrimomentum en el espacio-tiempo . . . . .	87
1.13.	Colisiones relativistas . . . . .	88
1.13.1.	Energía en el centro de masa . . . . .	88
1.13.2.	Choques con la luz . . . . .	91
1.13.3.	Una aplicación: El límite GZK . . . . .	92
1.13.4.	Colisiones relativistas interactivas . . . . .	93
1.14.	Cuadrifuerza . . . . .	94
1.14.1.	Reglas de transformación de la fuerza . . . . .	98
1.14.2.	La fuerza de Lorentz . . . . .	99
1.14.3.	Movimiento circular bajo la fuerza de Lorentz . . . . .	100
1.14.4.	Ecuación de movimiento relativista . . . . .	101
1.14.5.	Un ejemplo numérico . . . . .	102
1.15.	Síntesis de Mecánica Relativista . . . . .	106
1.15.1.	Síntesis de cinemática relativista . . . . .	106
1.15.2.	Síntesis de dinámica relativista . . . . .	109
1.16.	Óptica relativista . . . . .	111
1.16.1.	Efecto Doppler relativista . . . . .	111
1.16.2.	Aberración de la luz . . . . .	113
1.16.3.	Enfoque relativista . . . . .	114
1.17.	Electrodinámica manifiestamente covariante . . . . .	115
1.17.1.	Ecuaciones de la electrodinámica . . . . .	115
1.17.2.	La cuadricorriente . . . . .	119
1.17.3.	Ecuaciones de Maxwell inhomogéneas . . . . .	120
1.17.4.	Los campos en términos tensoriales . . . . .	121
1.17.5.	El tensor de Faraday . . . . .	121
1.17.6.	Ecuaciones de Maxwell y el tensor de Faraday . . . . .	123
1.17.7.	Álgebra computacional del Tensor de Faraday . . . . .	124
1.17.8.	Transformación de los campos . . . . .	126
1.17.9.	La fuerza de Lorentz . . . . .	128
1.17.10.	Intrepretación geométrica del campo de Faraday . . . . .	130
1.17.11.	Síntesis . . . . .	132
1.17.12.	Ejemplos {ejemplos_electrodinamica} . . . . .	133
1.18.	Problemas Seleccionados . . . . .	136

<b>2. Relatividad General</b>	<b>139</b>
2.1. Motivación . . . . .	139
2.2. Principios y postulados básicos . . . . .	140
2.2.1. Principio de Equivalencia . . . . .	140
2.2.2. Principio de covarianza general . . . . .	145
2.2.3. Tensores generales . . . . .	146
2.3. Transporte paralelo y derivada covariante . . . . .	147
2.3.1. El gradiente no es un tensor general . . . . .	147
2.3.2. Transporte paralelo . . . . .	148
2.3.3. Derivada direccional general . . . . .	149
2.3.4. Los símbolos de Christoffel . . . . .	151
2.3.5. Cálculo de los símbolos de Christoffel . . . . .	153
2.4. Derivada total general y geodésicas . . . . .	161
2.4.1. Derivada total general . . . . .	161
2.4.2. Derivada total y transporte paralelo . . . . .	162
2.4.3. Transporte paralelo y bases vectoriales . . . . .	162
2.4.4. Bases y componentes vectoriales en espacio curvo . . . . .	163
2.4.5. Ejemplos numéricos de transporte paralelo . . . . .	165
2.4.6. Ecuación geodésica . . . . .	171
2.4.7. Ejemplos numéricos de geodésicas . . . . .	172
2.5. La geodésica y un principio variacional . . . . .	176
2.6. Geodésicas y movimiento inercial . . . . .	178
2.7. Geodésicas en campo débil . . . . .	179
2.7.1. Un ejemplo numérico . . . . .	182
2.8. Simetrías y cantidades conservadas . . . . .	184
2.8.1. La métrica como constante . . . . .	186
2.8.2. Coordenadas cíclicas y vectores de Killing . . . . .	186
2.8.3. Ejemplo: geodésicas en coordenadas cilíndricas . . . . .	187
2.8.4. Ejemplo: geodésicas sobre una esfera . . . . .	188
2.8.5. Ejemplo: geodésicas en la métrica de Newton . . . . .	189
2.9. Transporte paralelo y curvatura . . . . .	190
2.9.1. Propiedades del tensor de Riemann . . . . .	195
2.9.2. Tensor de Riemann para métricas diagonales . . . . .	196
2.9.3. Desviación geodésica . . . . .	197
2.9.4. Tensor de Riemann numérico . . . . .	198
2.9.5. Desviación geodésica numérica . . . . .	210
2.10. Principio de consistencia . . . . .	212
2.11. Una ecuación de campo general . . . . .	213
2.12. Tensor de momentum-energía . . . . .	215
2.12.1. Tensor de momentum-energía para una nube de partículas . . . . .	216
2.12.2. Tensor de momentum-energía para polvo . . . . .	217
2.12.3. Tensor $T^{\mu\nu}$ y el tensor de esfuerzos $\sigma^{\mu\nu}$ . . . . .	218
2.12.4. Tensor de momentum-energía para fluido perfecto . . . . .	218
2.12.5. La conservación de $T^{\mu\nu}$ y la ecuación geodésica . . . . .	219
2.13. La ecuación de campo métrico . . . . .	219
2.13.1. El tensor de Einstein . . . . .	220
2.13.2. Una ecuación de campo general . . . . .	222

2.13.3.	La ecuación de campo y el principio de consistencia	223
2.13.4.	La ecuación de campo débil para fluido perfecto	225
2.13.5.	El término cosmológico	225
2.13.6.	La ecuación de Hilbert-Einstein	227
<b>3.</b>	<b>Aplicaciones de la relatividad general</b>	<b>231</b>
3.1.	Ondas gravitacionales	232
3.1.1.	Historia de las ondas gravitacionales	232
3.1.2.	Un programa de estudio	233
3.1.3.	Gravedad linearizada	233
3.1.4.	Ecuación de campo linearizada en el vacío	236
3.1.5.	Libertad gauge	237
3.1.6.	El gauge armónico	238
3.1.7.	La ecuación de campo en el gauge armónico	239
3.1.8.	La ecuación de campo con fuentes	240
3.1.9.	La métrica postnewtoniana	241
3.1.10.	Analogía electromagnética	242
3.1.11.	Ecuación de onda en el vacío	243
3.1.12.	Solución general a la ecuación de onda	244
3.1.13.	El gauge transversal de traza cero	245
3.1.14.	Geodésicas en una onda gravitacional	248
3.1.15.	Distancias en una onda gravitacional	250
3.1.16.	Detectores de ondas gravitacionales	254
3.1.17.	Simulación de una señal	261
3.1.18.	Emisión de ondas gravitacionales	265
3.1.19.	Energía transportada por ondas gravitacionales	270
3.1.20.	La fórmula del cuadrupolo	271
3.1.21.	Analogía con el electromagnetismo	272
3.1.22.	Síntesis de emisión de ondas gravitacionales	273
3.1.23.	Estimaciones de la intensidad y la frecuencia	274
3.1.24.	Radiación gravitacional de sistemas binarios	279
3.2.	Agujeros negros	283
3.2.1.	Historia de los agujeros negros	283
3.2.2.	Un temario	286
3.2.3.	Métrica de Schwarzschild	286
3.2.4.	Tensores asociados a la métrica {tensores_schw}	288
3.2.5.	Ecuación de campo y solución {ecuacion_campo_schw}	291
3.2.6.	Cantidades asociadas a la métrica	294
3.2.7.	Integración numérica	295
3.2.8.	Coordenadas y medidas	297
3.2.9.	Dilatación gravitacional del tiempo	299
3.2.10.	Corrimiento al rojo gravitacional	305
3.2.11.	Contracción de longitudes	306
3.2.12.	Movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild	308
3.2.13.	Constantes de movimiento	310
3.2.14.	Caída libre en un agujero negro	311

3.2.15.	Coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	316
3.2.16.	Coordenadas de Painlevé-Gullstrand . . . . .	317
3.2.17.	Coordenadas de Kruskal-Szekeres . . . . .	319
3.3.	Cosmología relativista . . . . .	321
3.3.1.	Plan de temas . . . . .	321
3.3.2.	Propiedades del universo . . . . .	322
3.3.3.	Principios básicos . . . . .	325
3.3.4.	La métrica del Universo . . . . .	327
3.3.5.	La métrica de Robertson-Walker . . . . .	331
3.3.6.	Las ecuaciones de Friedmann . . . . .	332
3.3.7.	El parámetro $\Omega$ . . . . .	334
3.3.8.	Evolución de la densidad cósmica . . . . .	336
3.3.9.	Ecuación de Friedmann y densidad cósmica . . . . .	337
3.3.10.	Tiempo de expansión . . . . .	338
3.3.11.	Distancias cosmológicas . . . . .	338
3.3.12.	Corrimiento cosmológico . . . . .	340
3.3.13.	La ley de Hubble-Lemaitre y la densidad crítica . . . . .	342
<b>4.</b>	<b>Apéndices</b>	<b>345</b>
4.1.	Códigos útiles . . . . .	345
4.1.1.	Cálculo analítico de tensores en relatividad general . . . . .	345
<b>Bibliografía</b>		<b>349</b>

BORRADOR

# Índice de figuras

1.1.	Figura correspondiente al código 1.1.	36
1.2.	Figura correspondiente al código 1.3.	39
1.3.	Figura correspondiente al código 1.4.	44
1.4.	Figura correspondiente al código 1.5.	45
1.5.	Tipos de intervalos en el espacio-tiempo	48
1.6.	Línea de Universo	49
1.7.	Contracción de longitudes.	52
1.8.	Figura correspondiente al código 1.6.	56
1.9.	Trayectoria en el espacio-tiempo	67
1.10.	Figura correspondiente al código 1.7.	69
1.11.	Figura correspondiente al código 1.8.	74
1.12.	Figura correspondiente al código 1.9.	75
1.13.	Cambios en la cuadrvelocidad y la cuadriaceleración	76
1.14.	Nave interestelar	77
1.15.	Figura correspondiente al código 1.10.	81
1.16.	Figura correspondiente al código 1.11.	88
1.17.	Umbral GZK	92
1.18.	Figura correspondiente al código 1.12.	95
1.19.	Figura correspondiente al código 1.13.	106
1.20.	Figura correspondiente al código 1.14.	107
1.21.	Figura	113
1.22.	Tensor de esfuerzos.	131
1.23.	Figura correspondiente al código 1.15.	137
2.1.	Transporte paralelo.	148
2.2.	Derivada direccional.	149
2.3.	Vector transportado de forma paralela en coordenadas cilíndricas	169
2.4.	Vector transportado de forma paralela sobre la superficie de una esfera. Se usa proyección azimuthal para representar las coordenadas (malla punteada).	171
2.5.	Definición de geodésica en el espacio-tiempo plano y sobre la superficie de una esfera.	172
2.6.	Figura correspondiente al código 2.1.	174
2.7.	Figura correspondiente al código 2.2.	176
2.8.	Figura correspondiente al código 2.3.	177
2.9.	Figura correspondiente al código 2.4.	185
2.10.	Figura	193

2.11.	Figura correspondiente al código 2.5 . . . . .	212
3.1.	Ilustración gráfica de cómo al paso de una onda gravitacional las coordenadas de las partículas de prueba se mantienen constantes pero su distancia mutua cambia con el tiempo. . . . .	251
3.2.	Figura correspondiente al código 3.1. . . . .	252
3.3.	Figura correspondiente al código 3.2. . . . .	255
3.4.	Detector de ondas gravitacionales de Joseph Weber . . . . .	255
3.5.	Diseño básico para un interferometro de ondas gravitacionales como el que usa hoy el LIGO . . . . .	256
3.6.	Figura correspondiente al código 3.3. . . . .	259
3.7.	Diseño real de un interferometro de ondas gravitacionales como el que usa hoy el LIGO . . . . .	260
3.8.	Sensibilidad de <i>LIGO avanzado</i> como función de la frecuencia de las ondas gravitacionales detectadas. La <i>sensibilidad</i> esta expresada en términos de lo que se conoce como la <i>amplitud de densidad espectral</i> que tiene unidades del inverso de la raíz cuadrada de la frecuencia. . . . .	261
3.9.	Figura correspondiente al código 3.4. . . . .	266
3.10.	Primera señal de ondas electromagnéticas detectada GW150914. . . . .	275
3.11.	Karl Schwarzschild . . . . .	284
3.12.	Imagen del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 obtenida por el <i>Event Horizon Telescope</i> el 10 de abril de 2019 . . . . .	286
3.13.	Figura correspondiente al código 3.5. . . . .	298
3.14.	Figura correspondiente al código 3.6. . . . .	301
3.15.	Geodésica nula de rayos de luz que viajan radialmente hacia afuera desde el mismo punto. . . . .	302
3.16.	Valores del factor de dilatación de Schwarzschild para distintos valores de . . . . .	304
3.17.	Figura correspondiente al código 3.7. . . . .	309
3.18.	Figura correspondiente al código 3.8. . . . .	314
3.19.	Figura correspondiente al código 3.9. . . . .	315
3.20.	Geodésica nula en las coordenadas de Finkelstein-Eddington . . . . .	317
3.21.	Mapa del espacio tiempo en las coordenadas de Kruskal-Szekeres . . . . .	321
3.22.	Ley de Hubble Lemaitre. En el eje vertical se muestra el módulo de distancia $\mu = m - M = 5 \log_{10}(d) - 5$ donde la distancia esta en pc. Una distancia de 1 Gpc corresponde a un módulo de distancias de 40. Fuente: <a href="https://physics.stackexchange.com/questions/361438/interpretation-of-hubble-diagram">https://physics.stackexchange.com/questions/361438/interpretation-of-hubble-diagram</a> . . . . .	323
3.23.	Parámetro de Hubble . . . . .	324
3.24.	Imagen del cúmulo de la bala mostrando la distribución reconstruida de materia oscura . . . . .	325
3.25.	Observadores fundamentales de acuerdo con el principio de Weyl . . . . .	327
3.26.	Dilatación del tiempo cosmológica . . . . .	341

# Capítulo 1

# Relatividad Especial

**Resumen.** Este capítulo está dedicado a la Relatividad especial.

## 1.1. Motivación

¿Qué son las leyes de la física?. Son regularidades observadas (¿o reales?) en los fenómenos que vemos en el mundo. Estas regularidades se expresan normalmente como relaciones matemáticas entre cantidades observadas.

Tomen por ejemplo esta regularidad:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Siempre que un cuerpo de masa  $m$  (una propiedad intrínseca suya), es sometido a una “perturbación” (una fuerza  $\vec{F}$ ), el cuerpo, sin importar el estado de movimiento en el que estaba, cambia su estado en una magnitud  $\vec{a}$  (aceleración).

Esta regularidad ha sido observada en los laboratorios en la Tierra (edificios). ¿Pero es válida en el resto del Universo y para todos los observadores?. Esta es la pregunta del millón de la física y el corazón de la relatividad.

### Conjetura 1.1

**Las leyes de la física son universales.** Cualquiera sea la regularidad que llamemos *ley física* debe ser realmente universal, debe cumplirse en todas partes, a todas horas y con independencia de quién la registre. En caso contrario lo que tendríamos sería solo una regularidad contingente.

## 1.2. Conceptos básicos

Para abordar la pregunta básica de la sección anterior debemos primero introducir una serie de conceptos:

- **Cantidad física.** Las leyes físicas son patrones matemáticos entre números (y otras entidades matemáticas) que asociamos a los fenómenos. Piense por ejemplo en la velocidad. Es un número que asociamos al desplazamiento de un cuerpo en el tiempo. Para definir cualquier cantidad física se necesitan: patrones (comparación), una calibración (definir los ceros o puntos de referencia) e instrumentos (dispositivos que realicen la comparación).

Por ejempl para medir la posición (lugar) uso como partrón una varilla de longitud fija, mi calibración es el lugar que escojo como punto de partida y el instrumento de medida es la misma varilla. Para medir el tiempo (fecha) uso como patrón un fenómeno repetitivo, como calibración escojo el instante a partir del cuál contar las oscilaciones y el instrumento es un reloj.

Para obtener el *valor* de una cantidad física se pueden usar medios directos o indirectos. Preferimos los medios directos que implican la comparación de lo medido con el instrumento (el patrón y la calibración) **localmente**: es decir debemos poner el instrumento donde ocurre el fenómeno.

- **Espacio-tiempo.** Es el escenario en el que ocurre el universo. Matemáticamente es un espacio geométrico en el que a todo lugar e instante se le asocian unas coordenadas:

$$[x^\mu]_{\mu=0,1,2,3}$$

esta será una notación que usaremos en lo sucesivo y que adoptará sentido más adelante.

- **Evento.** Es uno de los puntos del espacio-tiempo. Un evento físico es equivalente
- **Observador.** También llamado (de forma intercambiable) **sistema de referencia**. Un observador es una entidad que registra cualquier cantidad física que ocurre en el espacio-tiempo usando un conjunto (infinito) de instrumentos físicos, que usan el mismo patrón y calibración, distribuidos (idealmente) por todos los eventos del espacio-tiempo. El observador lleva un registro de todos los fenómenos sin importar que tan lejos estén del lugar espacial en el que se encuentre.

Existen un conjunto de leyes que fueron formuladas originalmente con la idea de universalidad que mencionamos antes. Son las leyes del movimiento de Newton:

- **Ley de Inercia.** En la ausencia de fuerzas (interacciones) el *estado de movimiento* se conserva.
- **Ley de fuerza.** La acción de una fuerza cambia el *estado de movimiento*.
- **Ley de acción y reacción.** El cambio en el estado de movimiento de un sistema A que interactúa con otro B, es igual en magnitud pero de sentido contrario, que el cambio de movimiento que experimenta B.

Sabemos que estas leyes de pueden resumir en una sola relación matemática. Si definimos la *cantidad de movimiento* o momento lineal  $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ , entonces:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Este conjunto de leyes se mantienen las mismas si se usan **observadores inerciales**.

#### Definición 1.1

**observador inercial.** Es un observador para el cuál sus registros muestran que la ley de inercia es válida.

Registrar la validez de la ley de inercia no es experimentalmente fácil.

**Proposición: Observadores con velocidad relativa constante.** Si un observador  $O$  es por definición o demostración inercial, cualquier observador  $O'$  cuyo origen de coordenadas se mueva respecto al origen de coordenadas de  $O$  con velocidad  $\vec{u}$  constante, será también un observador inercial.

### 1.3. Principio de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo

#### Postulado 1.1

**Principio de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo.** Cualquier experimento que se realice en un sistema de referencia inercial tendrá exactamente el mismo resultado sin importar dónde se realice (homogeneidad) o en qué tiempo se realice. Alrededor de todos los eventos del espacio-tiempo, los experimentos producen las mismas regularidades.

De acuerdo al principio de homogeneidad, todos los observadores inerciales que solo difieren por su origen en el espacio o por su origen en el tiempo registrarán las mismas leyes de la física. Se puede probar que el principio de homogeneidad e isotropía es *equivalente* lógicamente al principio fundacional de la teoría de la relatividad.

#### Postulado 1.2

**Principio de relatividad especial.** Todas las leyes de la física deben ser iguales para todos los observadores inerciales.

### 1.4. La relatividad Newtoniana

Una cosa es decir que las leyes son las mismas y otra muy distinta es demostrar que lo son.

Las leyes son relaciones matemáticas entre cantidades físicas de modo que para demostrar su validez hay que probar que las relaciones son las mismas.

### Definición 1.2

**Covarianza de las leyes físicas.** Llamamos *covarianza* de una ley física al hecho de que su forma matemática no se modifique independientemente de las transformaciones geométricas (cambios de sistemas de referencia o coordenadas) que se operen.

La pregunta es: dos observadores inerciales  $S$  y  $S'$  que miden cantidades físicas distintas  $m$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  (y las respectivas cantidades primadas), al describir las mismas regularidades llegarán a:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}'$$

Para ello debemos *postular* (¿o deducir?) la relación entre las cantidades implicadas.

**Definición: Transformaciones de Galileo-Newton.** La siguiente es la relación entre las cantidades cinemáticas y dinámicas básicas entre dos observadores inerciales:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ m' &= m \\ \vec{F}' &= \vec{F} \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{u}t \end{aligned}$$

> donde  $\vec{u}$  es la velocidad relativa en el espacio entre los dos observadores.

Puede probarse que si las leyes de Newton son válidas en  $O$  también lo serán en  $O'$ .

## 1.5. El problema del electromagnetismo

Pero las leyes de la física no se restringen a la mecánica. También están las leyes de la termodinámica, la óptica, el electromagnetismo, la física nuclear, etc. ¿Son también estas leyes covariantes bajo las transformaciones de Galileo-Newton.

### 1.5.1. Las ecuaciones de Maxwell

Aparte de la mecánica una de las más importantes teorías de la física clásica es la teoría electromagnética. En su forma matemática unificada la teoría fue formulada por James Clerk Maxwell y presentada en una serie de trabajos incluyendo su artículo muy influyente *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* de 1864 [REFERENCIA] en el que predice la existencia de las ondas electromagnéticas. El electromagnetismo fue desarrollado posteriormente por contemporáneos de Maxwell y otros que le sucedieron como Oliver Heaviside, J.J. Thomson, Hendrik Lorentz entre otros.

La teoría electromagnética de Maxwell establece una relación entre las propiedades eléctricas de la materia, cuantificadas en dos cantidades, la densidad espacial de carga eléctrica  $\rho$  y la densidad de corriente eléctrica  $\vec{J}$ , con las propiedades del *campo electromagnético*, cuantificadas por la intensidad del campo eléctrico  $\vec{E}$  y la intensidad del campo magnético  $\vec{H}$ . Otras cantidades auxiliares son la densidad de flujo de campo eléctrico  $\vec{D}$  y la densidad de flujo magnético  $\vec{B}$ , que se relacionan además con propiedades *macroscópicas* de la materia tales como la polarización  $\vec{P}$  y la magnetización  $\vec{M}$ .

Uno de los logros más increíbles del electromagnetismo clásico fue el de reducir todas las relaciones entre estas cantidades en cuatro ecuaciones diferenciales relativamente simples, conocidas universalmente como las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones permiten encontrar el campo eléctrico  $\vec{E}$  o su densidad de flujo  $\vec{D}$  y el campo magnético  $\vec{H}$  o su densidad de flujo  $\vec{B}$  en cada punto del espacio dentro de un medio en el que hay una densidad de carga libre  $\rho$  y de corriente libre  $\vec{J}$  y una polarización  $\vec{P}$  y magnetización  $\vec{M}$ . Las ecuaciones en su **forma canónica macroscópica** son:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

donde  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  y  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ .

Nos concentraremos aquí en las ecuaciones escritas para sistemas de partículas, es decir en situaciones en las que fenómenos como la polarización y la magnetización son colectivos y deben *emergir* de la dinámica de todas las partículas. Llamamos a esa la **descripción microscópica** y las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

donde  $c \equiv 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  es la velocidad de la luz.



### Nota

**Velocidad de la luz**  $c$ . Es una constante de la naturaleza  $c = 2,999792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ . Se relaciona con otra constante que no aparece explícitamente en la versión de las ecuaciones escritas arriba, la permeabilidad eléctrica del vacío,  $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ m}^{-2} \text{ N}^{-1}$ . Usando  $\epsilon_0$ , la velocidad se escribe:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Para hacer más clara la conexión entre los campos eléctrico y magnético los físicos teóricos acostumbran usar en electromagnetismo un conjunto de unidades particulares conocidas como **unidades gaussianas**. La fundamental de estas unidades, es que la ley de Coulomb (que inspira la primera ecuación de Maxwell o se deriva de ella), que en un sistema de unidades convencional se escribe como:

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

en el nuevo sistema se escribe como:

$$\vec{F} = \frac{Q_1^G Q_2^G}{r^2} \hat{r}$$

En unidades gaussianas las cantidades mecánicas, como  $\vec{F}$  y  $r$  se miden en el sistema *cgs* (centímetros, gramos y segundos).

Las unidades gaussianas esencialmente corresponden a una elección conveniente de las unidades de carga que permiten: 1) absorber el factor constante  $4\pi$  y 2) hacer la constante  $\epsilon_0^G = 1$ .

Una situación similar se produce con la ley de Biot-Savart, que en un sistema convencional de unidades es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{r^2} d\vec{l}$$

pero en unidades gaussianas se convierte en:

$$\vec{B}^G = \frac{1}{c} \oint \frac{\vec{I}^G \times \hat{r}}{r^2} d\vec{l}$$

donde debemos mantener presente que  $c \approx 3 \times 10^{10} \text{ cm/s}$ .

Con el cambio de unidades, las ecuaciones microscópicas de Maxwell se convierten en:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^G &= 4\pi\rho^G \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^G &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}^G &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}^G}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}^G &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}^G + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}^G}{\partial t}\end{aligned}$$

Nótese que la introducción de las unidades gaussianas hace desaparecer el factor  $4\pi$  de las leyes de Coulomb y Biot-Savart pero las traslada a las ecuaciones de Maxwell.

En lo sucesivo en este libro usaremos las unidades gaussianas para describir los fenómenos electromagnéticos. Por la misma razón no haremos la distinción  $\vec{E}^G, \rho^G$ , etc. y escribiremos las ecuaciones simplemente como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.4)$$

## 1.6. ¿Son covariantes las ecuaciones de Maxwell?

Hemos contado antes que las leyes de Newton son covariantes bajo las TGN. Pero, ¿son las ecuaciones de Maxwell también covariantes bajo este conjunto de transformaciones?. Para ilustrar, tomemos el caso de las ecuaciones microscópicas de Maxwell en el vacío ( $\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}$ ) y en particular analicemos las denominadas *ecuaciones inhomogéneas*, correspondientes a las leyes de Maxwell-Faraday y de Ampere-Maxwell respectivamente:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.6)$$

Para verificar la covarianza escojamos las componentes  $z$  de la primera ecuación y la componente  $y$  de la segunda ecuación:

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = -\frac{1}{c} \partial_t B_z \quad (1.7)$$

$$\partial_x B_z - \partial_z B_x = \frac{1}{c} \partial_t E_y \quad (1.8)$$

donde en lo sucesivo usaremos la notación  $\partial_q \equiv \partial/\partial q$ .

Necesitamos saber como convierten las derivadas parciales bajo las TGN. Para ello usaremos una convención que será muy común en lo sucesivo. Escojeremos la dirección de los ejes de tal manera que el eje  $x$  va en la dirección de la velocidad relativa de los sistemas de referencia  $\vec{u}$ . De este modo las TGN, correspondientes al espacio y el tiempo se reducen a:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

La transformación se puede escribir de modo más general como:

$$\begin{aligned} t' &= a_{tt}t \\ x' &= a_{xt}t + a_{xx}x \\ y' &= a_{yy}y \\ z' &= a_{zz}z \end{aligned}$$

donde  $a_{tt} = a_{xx} = a_{yy} = a_{zz} = 1$  y  $a_{xt} = -u$ . Llamamos a esta una **transformación lineal con coeficientes constantes**.

Los coeficientes de la transformación constituyen una matriz  $\mathcal{G}$  que puede escribirse como:

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} a_{tt} & a_{tx} & a_{ty} & a_{tz} \\ a_{xt} & a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yt} & a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zt} & a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix}$$

Las derivadas parciales se pueden escribir usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \partial_t &= (\partial_t t')\partial_{t'} + (\partial_t x')\partial_{x'} + (\partial_t y')\partial_{y'} + (\partial_t z')\partial_{z'} \\ \partial_x &= (\partial_x t')\partial_{t'} + (\partial_x x')\partial_{x'} + (\partial_x y')\partial_{y'} + (\partial_x z')\partial_{z'} \\ \partial_y &= (\partial_y t')\partial_{t'} + (\partial_y x')\partial_{x'} + (\partial_y y')\partial_{y'} + (\partial_y z')\partial_{z'} \\ \partial_z &= (\partial_z t')\partial_{t'} + (\partial_z x')\partial_{x'} + (\partial_z y')\partial_{y'} + (\partial_z z')\partial_{z'} \end{aligned}$$

Usando los coeficientes de la transformación queda:

$$\begin{aligned} \partial_t &= a_{tt}\partial_{t'} + a_{xt}\partial_{x'} + a_{yt}\partial_{y'} + a_{zt}\partial_{z'} \\ \partial_x &= a_{tx}\partial_{t'} + a_{xx}\partial_{x'} + a_{yx}\partial_{y'} + a_{zx}\partial_{z'} \\ \partial_y &= a_{ty}\partial_{t'} + a_{xy}\partial_{x'} + a_{yy}\partial_{y'} + a_{zy}\partial_{z'} \\ \partial_z &= a_{tz}\partial_{t'} + a_{xz}\partial_{x'} + a_{yz}\partial_{y'} + a_{zz}\partial_{z'} \end{aligned}$$

Nótese que la transformación de las derivadas parciales usa la *transpuesta* de la matriz de transformación  $\mathcal{G}$ .

Para el caso particular de las reglas de transformación de las TGN la transformación de las derivadas queda:

$$\begin{aligned} \partial_t &= \partial_{t'} - u\partial_{x'} \\ \partial_x &= \partial_{x'} \\ \partial_y &= \partial_{y'} \\ \partial_z &= \partial_{z'} \end{aligned}$$

Reemplazando en las ecuaciones de Maxwell obtenemos:

$$\partial_{x'} E_y - \partial_{y'} E_x = -\frac{1}{c}(\partial_{t'} - u\partial_{x'})B_z$$

Reuniendo términos iguales en la derivada:

$$\partial_{x'} \left( E_y - \frac{u}{c} B_z \right) - \partial_{y'} E_x = -\frac{1}{c} \partial_{t'} B_z$$

Para que haya covarianza los campos deben relacionarse así:

$$E'_y = E_y - \frac{u}{c} B_z$$

y

$$B'_z = \frac{c'}{c} B_z$$

donde hemos admitido la posibilidad de que la velocidad de la luz medida por los dos observadores sea diferente.

Un procedimiento similar sobre la ecuación de Ampère-Maxwell conduce a que para que haya covarianza debe cumplirse que:

$$B'_z = B_z - \frac{u}{c} E_y$$

y

$$E'_y = \frac{c'}{c} E_y$$

Estos dos conjuntos de ecuaciones deben ser consistentes uno con otro. Al hacer el álgebra obtenemos el siguiente resultado:

$$c' = c - v$$

es decir, para que las ecuaciones de Maxwell sean covariantes debemos admitir que la velocidad de la luz sea relativa, es decir que cambie obedeciendo la ley de adiciones de velocidades clásica.

En los años 1890 se realizaron experimentos muy sensibles en el laboratorio para percibir este cambio usando el hecho de que la Tierra se mueve respecto al baricentro del sistema solar. Los resultados fueron contundentes. La velocidad de la luz parecía ser la misma medida en todas direcciones. ¡Algo está mal con el electromagnetismo!

## 1.7. Las transformaciones de Lorentz-Einstein

Como vemos las leyes del electromagnetismo no son covariantes bajo las TGN. ¿Qué está mal? ¿las transformaciones o las leyes del EM?. Supongamos que son las transformaciones.

### Postulado 1.2

**Covarianza manifiesta de las ecuaciones de Maxwell.** Las ecuaciones de Maxwell son *manifestamente covariantes*, es decir, la forma en la que fueron escritas originalmente por Maxwell es covariante para observadores inerciales.

Este postulado es fuerte en el sentido en el que da mucha confianza a un conjunto de ecuaciones que esencialmente se obtienen a partir de experimentos. Esta es una prueba de la confianza que tenían los Einstein en el electromagnetismo incluso sobre

Como ya vimos que las ecuaciones no son covariantes bajo las transformaciones de Galileo-Newton, debemos encontrar un conjunto nuevo de transformaciones con las cuales las ecuaciones de Maxwell si son covariantes. Para ello asumamos que existe una familia de transformaciones lineal más generales que relacionan las coordenadas.

$$t' = a_{tt}t + a_{tx}x \quad (1.9)$$

$$x' = a_{xt}t + a_{xx}x \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

donde los coeficientes  $a_{tt}$ ,  $a_{tx}$ ,  $a_{xt}$ ,  $a_{xx}$  son cantidades que no dependen de la posición, ni del tiempo y a lo sumo pueden depender de la velocidad relativa  $u$  entre los sistemas coordenados:

$$a_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}(u)$$

donde  $\mu : t, x$ .

#### Nota

**Las transformaciones entre sistemas inerciales son lineales.** En principio las transformaciones entre las variables de dos sistemas de referencia podrían tener una forma funcional arbitraria:

$$\begin{aligned} t' &= t'(t, x) \\ x' &= x'(t, x) \end{aligned}$$

sin embargo la definición misma de observador inercial, sumado al principio de homogeneidad e isotropía, restringen el número posible de funciones.

Por la definición de sistema de referencia inercial, debe cumplirse que si el observador  $O$  observa una partícula que se mueve con velocidad constante  $v = dx/dt$  constante (no actúa ninguna fuerza sobre ella), también el observador  $O'$  debe medir  $v' = dx'/dt'$  constante. Para calcular esta última cantidad primero podemos determinar los diferenciales:

## Nota (Cont.)

$$dx' = dt \left( \frac{\partial x'}{\partial x} v + \frac{\partial x'}{\partial t} \right) \quad (1.12)$$

$$dt' = dt \left( \frac{\partial t'}{\partial x} v + \frac{\partial t'}{\partial t} \right) \quad (1.13)$$

(1.14)

de donde se sigue que:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v \partial x' / \partial x + \partial x' / \partial t}{v \partial t' / \partial t + \partial t' / \partial t}$$

de esta última expresión se ve que solo si las derivadas parciales respecto al espacio y el tiempo de las reglas de transformación son constantes, es decir, solo si las transformaciones son lineales, entonces  $v$  constante implicará  $v'$  constante y viceversa.

Sin necesidad de conocer la forma funcional de los coeficientes de las transformaciones generales, es posible encontrar algunas propiedades básicas que nos permiten simplificar mucho la búsqueda de sus valores. Así por ejemplo:

1. Por la definición misma de observador inercial sabemos que el origen del sistema  $O'$  está localizado en  $x' = 0$  según su propio sistema de referencia, mientras que en el sistema  $O$  se encuentra ubicado en  $x = ut$ . Reemplazando estas dos condiciones en la Ec. (1.10) obtenemos:

$$0 = a_{xt}t + a_{xx}ut$$

Para  $t > 0$  esta condición implica que  $a_{xt} = -ua_{xx}$  con lo que la Ec. (1.10) se escribe:

$$x' = a_{xx}(-ut + x) \quad (1.15)$$

(1.16)

2. Un razonamiento similar pero aplicado al origen del sistema  $O$  para el cual  $x = 0$  y  $x' = -ut'$  conduce a las condiciones:

$$\begin{aligned} t' &= a_{tt}t \\ -ut' &= -ua_{xx}t \end{aligned}$$

Para  $t > 0, t' > 0$  lo que implica: 1)  $a_{tt} > 0$  y 2) dividiendo término a término las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$a_{tt} = a_{xx} \equiv \gamma(u) > 0$$

donde hemos introducido la función  $\gamma(u)$ .

3. Si introducimos un tercer observador  $O''$  que se mueve con velocidad  $-u$  (en dirección del eje  $x$  respecto de  $O$ , el tiempo de eventos en el origen de coordenadas de  $O$  registrados por  $O''$  será:

$$t'' = \gamma(-u)t$$

Ahora bien, por la postulado de isotropía, un observador que se dirige hacia  $+x$  y uno que se dirige hacia  $-x$  deben producir las mismas medidas de un evento en el lugar común  $x = 0$ , es decir para este evento  $t'' = t'$  y por lo tanto:

$$\gamma(-u) = \gamma(u)$$

Con estas propiedades, la transformación general de coordenadas entre observadores inerciales que satisfacen el postulado de homogeneidad e isotropía se pueden escribir como:

$$t' = \gamma(u)(t + bx) \quad (1.17)$$

$$x' = \gamma(u)(-ut + x) \quad (1.18)$$

$$(1.19)$$

donde hemos definido  $b \equiv a_{tx}/\gamma$ .

No es difícil mostrar que las derivadas parciales respecto a las variables espacio-temporales serán entonces:

$$\partial_t = \gamma(\partial_{t'} - u\partial_{x'}) \quad (1.20)$$

$$\partial_x = \gamma(b\partial_{t'} + \partial_{x'}) \quad (1.21)$$

$$\partial_y = \partial_{y'} \quad (1.22)$$

$$\partial_z = \partial_{z'} \quad (1.23)$$

El reto consiste en encontrar las cantidades  $\gamma$  y  $b$  de la transformación tal que las ecuaciones de Maxwell sean covariantes.

La componente  $z$  de la ley de Faraday:

$$\frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

es:

$$\frac{1}{c}\partial_t B_z = \partial_z E_x - \partial_x E_y \quad (1.24)$$

Escrita después de aplicar las transformaciones de las derivadas será:

$$\frac{1}{c}\gamma(\partial_{t'} - u\partial_{x'})B_z = \partial_z E_x - \gamma(b\partial_{t'} + \partial_{x'})E_y$$

reuniendo términos semejantes:

$$\frac{1}{c'} \partial_{t'} \left[ \gamma \left( \frac{c'}{c} B_z + b c E_y \right) \right] = \partial_z E_x - \partial_{x'} \left[ \gamma \left( E_y - \frac{u}{c} B_z \right) \right]$$

Para que la ley de Faraday sea covariante y la ecuación anterior tenga la misma forma que la Ec. (1.24) se debe cumplir que:

$$B'_z = \gamma \left( \frac{c'}{c} B_z + b c E_y \right) \quad (1.25)$$

$$E'_y = \gamma \left( E_y - \frac{u}{c} B_z \right) \quad (1.26)$$

Por otro lado, la componente  $y$  de la ley de Ampere-Maxwell:

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

es:

$$\frac{1}{c} \partial_t E_y = \partial_y B_x - \partial_x B_z \quad (1.27)$$

Aplicando un procedimiento análogo obtenemos que para que esta ecuación sea covariante bajo la transformación lineal general definida antes, la regla de transformación de las componentes  $z$  y  $y$  de los campos debería ser:

$$B'_z = \gamma \left( B_z - \frac{u}{c} E_y \right) \quad (1.28)$$

$$E'_y = \gamma \left( \frac{c'}{c} E_y + b c B_z \right) \quad (1.29)$$

Es claro que para que las Ecs. (1.25), (1.26) y (1.28), (1.29) correspondan al mismo conjunto de ecuaciones, sin importar cuál es el valor de los campos se debe cumplir que:

$$c' = c$$

y

$$b = -\frac{u}{c^2}$$

De donde obtenemos nuestro primer resultado significativo:

### Proposición 1.3

**Invarianza de la velocidad de la luz.** La velocidad de la luz medida por dos observadores inerciales diferentes es siempre la misma:

$$c = c'$$

Esta conclusión es muy interesante y contraintuitiva. La velocidad de propagación de la luz juega un papel central en la relatividad y en la física en general.

Lograr que su valor sea una cantidad constante independiente del observador inercial es significativo. No era para menos puesto que sabemos que la cantidad en la teoría electromagnética depende de dos constantes de la naturaleza:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

En la versión original de la teoría presentada por los Einstein, la constancia de la velocidad de la luz aparece como una hipótesis sin ninguna justificación. La aproximación utilizada aquí, por lo menos, obtiene este resultado como consecuencia de la covarianza de las ecuaciones de Maxwell, es decir es un teorema que se deriva de un postulado muy razonable, a saber que las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo son *manifestamente covariantes*.

Adicionalmente encontramos la manera como se relacionan las componentes  $y$  y  $z$  de los campos eléctrico y magnético:

$$B'_z = \gamma \left( B_z - \frac{u}{c} E_y \right) \quad (1.30)$$

$$E'_y = \gamma \left( E_y - \frac{u}{c} B_z \right) \quad (1.31)$$

Solo nos queda una cuestión por resolver: ¿cuánto vale  $\gamma$ ?

La inversa de las transformaciones en las Ecs. (1.30) y (1.31) se puede obtener cambiando  $u$  por  $-u$ :

$$B_z = \gamma \left( B'_z + \frac{u}{c} E'_y \right) \quad (1.32)$$

$$E_y = \gamma \left( E'_y + \frac{u}{c} B'_z \right) \quad (1.33)$$

donde hemos usado el hecho que  $\gamma(-u) = \gamma(u)$ .

Las 4 ecuaciones anteriores son completamente independientes. Conociendo el valor de  $\gamma$  y  $u$ , podrían usarse para encontrar el valor de cualquier componente del campo en función de las demás. Pero una característica curiosa que tienen es que pueden usarse también para encontrar el valor de gamma.

Si reemplazamos el  $B_z$  de la Ec. (1.32) y el  $E_y$  de la Ec. (1.33) en la ecuación para  $B'_z$  (Ec. 1.30) obtenemos:

$$B'_z = \gamma \left[ \gamma \left( B'_z + \frac{u}{c} E'_y \right) - \frac{u}{c} \gamma \left( E'_y + \frac{u}{c} B'_z \right) \right]$$

y reuniendo los términos comunes obtenemos:

$$\left[ 1 - \gamma^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right] B'_z = 0$$

Puesto que suponemos que esta relación es válida para cualquier campo magnético, entonces:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

**Proposición 1.4**

**Transformaciones de Lorentz-Einstein (TLE).** Las transformaciones de coordenadas que dejan covariantes las ecuaciones de Maxwell ante cambios de observador inercial con velocidad relativa  $u_x = u$  son:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - ux/c^2) \\ x' &= \gamma(-ut + x) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (1.35)$$

se conocerá en lo sucesivo como el **factor de Lorentz** o **factor de Einstein**.

Una interesante consecuencia matemática de todo el razonamiento anterior es:

**Proposición 1.5**

**La velocidad de la luz es la máxima velocidad relativa.** Dado que  $\gamma > 0$  y es real, es fácil mostrar que siempre:

$$0 \leq u < c$$

## 1.8. Propiedades de las TLE

Las transformaciones de Lorentz-Einstein juegan un papel central en el estudio de todas las propiedades del espacio-tiempo que se derivan de los postulados de la relatividad.

**Postulado 1.6**

**Postulado de relatividad espacial.** Todas las leyes de la física son covariantes bajo las transformaciones de Lorentz-Einstein.

### 1.8.1. Unidades luz

La característica más notable de las TLE es que combinan espacio y tiempo en un mismo conjunto de ecuaciones de transformación. Este hecho de entrada rompe con el tiempo absoluto de la física newtoniana.

Al hacerlo sin embargo crea el problema de que en una misma ecuación (y en otros contextos en la teoría) tengamos cantidades muy diferentes desde el punto de vista físico y dimensional como lo son el tiempo y el espacio.

Una manera de subsanar este inconveniente es midiendo una de estas cantidades con unidades análogas a la otra. En Astronomía estamos por ejemplo acos-

tumbrado a medir las distancias con unidades de tiempo cuando decimos que la estrella más cercana esta a 4.2 años-luz (al) de distancia. Dada una cantidad  $x$ , medida en unidades de longitud, la cantidad equivalente medida en unidades de tiempo será:

$$x_L = \frac{x}{c}$$

donde  $[x_L] = \text{sl}$  (segundos luz).

Menos frecuente es usar unidades de distancia para referirse al tiempo. De manera análoga a como medimos 1 segundo-luz (sl), podemos definir 1 metro-luz (ml) como el tiempo que le toma a la luz recorrer un metro. El tiempo  $t_L$  en metros luz se calcula como:

$$t_L = ct$$

¿Cuál de estos dos usar? Por razones que comprenderemos más adelante, nos inclinaremos por usar el sistema de unidades luz en el que la distancia se mide en segundos(luz). De ese modo, al menos para el espacio-tiempo, todas las cantidades involucradas quedarán definidas con unidades de tiempo.

En unidades luz, la velocidad (la rapidez o cualquier componente) es:

$$v_L = \frac{dx_L}{dt} = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{v}{c}$$

es decir, esta cantidad es adimensional y de acuerdo con la proposición que se sigue de las transformaciones de Lorentz-Einstein, para cualquier sistema de referencia estará siempre en el rango:

$$0 \leq v_L < 1$$

Durante este capítulo usaremos las *unidades luz* para escribir el mayor número de cantidades física, cinemáticas y dinámicas.

### 1.8.2. La TLE como una rotación hiperbólica

Las transformaciones de Lorentz en términos de cantidades escritas en unidades luz serán:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - u_L x_L) \\ x'_L &= \gamma(-u_L t + x_L) \end{aligned}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'_L \end{pmatrix} = \Lambda(u_L) \begin{pmatrix} t \\ x_L \end{pmatrix}$$

donde

$$\Lambda(u_L) \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u_L \\ -\gamma u_L & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{y } \gamma = (1 - u_L^2)^{-1/2}.$$

Esta matriz tiene dos propiedades interesantes:

1.  $\det \Lambda = 1$
2.  $\Lambda(u_L)^{-1} = \Lambda(-u_L)$

Que son las mismas propiedades de las matrices de rotación:

$$R(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

lo que sugiere que podemos considerarla como tal. Pero hay un inconveniente. Los signos de la diagonal de la matriz TLE no son contrarios. Una solución para ello es usar una matriz de *rotación hiperbólica*:

$$R_h(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix}$$

donde  $\phi$  más que un ángulo, es un parámetro de rotación, llamado en relatividad la **rapidez**.

Si hacemos la identificación:

$$\cosh \phi \equiv \gamma$$

es fácil probar entonces que

$$\sinh \phi = \gamma u_L$$

por lo que concluimos que la transformación que relaciona las coordenadas espacio-tiempo de dos observadores iniciales con velocidad relativa  $u_L$  es una rotación hiperbólica con parámetro  $\tanh \phi = u_L$ .

### Definición 1.3

**Cuadrivector posición y gradiente en el espacio-tiempo.** Al vector:

$$\tilde{x} : \begin{pmatrix} t \\ x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix}$$

lo llamaremos el vector posición o **cuadrivector** posición en el espacio-tiempo. En lo sucesivo usaremos la notación  $\tilde{x}$  para denotar los objetos vectoriales abstractos en cuatro dimensiones.

Por su parte el gradiente será:

$$\tilde{\partial} : \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_{x_L} \\ \partial_{y_L} \\ \partial_{z_L} \end{pmatrix}$$

En términos del cuadrivector posición podemos escribir las TLE como:

$$\tilde{x}' = \Lambda \tilde{x}$$

y las transformaciones de las derivadas parciales como:

$$\tilde{\partial} = \Lambda^T \tilde{\partial}'$$

### 1.8.3. Las TLE y la notación de Einstein

Otra manera de escribir la TLE expresando explícitamente las componentes de la matriz es:

$$x'^\mu_L = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} x^\nu_L$$

donde  $\mu, \nu : 0(t), 1(x), 2(y), 3(z)$  y  $\Lambda_{\mu\nu}$  son las componentes de la matriz de rotación.

Con lo común que será manipular expresiones como estas, estar escribiendo sumatorias por todas partes se hace muy incómodo. Para evitarlo Einstein inventó la notación:

$$x'^\mu_L = \Lambda_{\mu\nu} x^\nu_L$$

donde la sumatoria queda indicada por el hecho que el índice  $\nu$  a la derecha está repetido en los dos términos. Siempre que encontramos un índice repetido indicará que existe una suma no explícita sobre ese índice.

Está última expresión aunque en principio correcta desde el punto de vista aritmético, todavía no es rigurosa desde el punto de vista del manejo de los índices. Una de las características más conocidas del formalismo matemático de la teoría de la relatividad, que naturalmente hereda de las áreas de las matemáticas que lo soportan (análisis tensorial y álgebra multilineal) es el manejo riguroso de los índices. Para precisar esto debemos introducir unas definiciones “nuevas”.

#### Definición 1.4

**componentes covariantes y contravariantes de un vector.** Dado un espacio coordenado de  $n$  dimensiones, y un conjunto de  $n$  vectores de base (no necesariamente unitarios)  $\tilde{e}_0, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ . Cualquier vector  $\tilde{v}$  en el espacio tiene asociados  $n$  números que llamamos sus componentes, definidos de la siguiente manera:

1. **Componentes covariantes**,  $\tilde{v} : (v_0, v_1, v_2, v_3)$ , que son tales que:

$$v_0 = \tilde{v} \cdot \tilde{e}_0, v_1 = \tilde{v} \cdot \tilde{e}_1, v_2 = \tilde{v} \cdot \tilde{e}_2, v_3 = \tilde{v} \cdot \tilde{e}_3$$

Los llamamos *covariantes* porque si un cambio de escala modifica las longitudes de  $\tilde{e}_\mu$  por un factor  $k$ , las componentes  $v_\mu$  se modificarán también por el mismo factor *k* (*en el mismo sentido* de los vectores de base).

2. **Componentes contravariantes**, que se denotan como  $\tilde{v} : (v^0, v^1, v^2, \dots, v^n)$  y se definen en términos de la combinación

### Definición 1.4 (Cont.)

lineal:

$$\tilde{v} = v^0 \tilde{e}_0 + v^1 \tilde{e}_1 + v^2 \tilde{e}_2 + \dots + v^n \tilde{e}_n$$

y que llamaremos *contravariantes* porque si un cambio de escala modifica las longitudes de  $\tilde{e}_\mu$  por un factor  $k$ , las componentes  $v^\mu$  se modificarán por un factor  $1/k$  (*contrario* a los vectores de base).

Las componentes contravariantes y covariantes de un vector coinciden si: 1) El **producto punto** es igual el definido en espacios euclidianos o pseudoeuclidianos y 2) si los **vectores de base son ortogonales**. Un video con una explicación de la diferencia entre componentes contravariantes y covariantes puede encontrarse en el sitio web <https://www.youtube.com/watch?v=CliW7kSxxWU>.

Usando la notación de Einstein, un vector en  $n$  dimensiones se puede escribir en términos de una base y sus componentes contravariantes como:

$$\tilde{v} = v^\mu \tilde{e}_\mu$$

Dado que el índice repetido  $\mu$  solo juega aquí el papel de indicar la existencia de una sumatoria que no se escribe, podría ser reemplazado por cualquier otra letra:

$$\tilde{v} = v^\nu \tilde{e}_\nu = v^\alpha \tilde{e}_\alpha$$

y lo llamaremos por tanto un **índice mudo**.

#### NOTA

**Notación intercambiable.** En lo sucesivo usaremos la expresión  $v^\mu$  para referirnos de forma intercambiable al cuadrvector mismo  $\tilde{v}$  y a la componente contravariante  $\mu$ . Cuándo  $v^\mu$  será el cuadrvector y cuándo su componente dependerá del contexto.

Nótese que las componentes del vector gradiente  $\partial/\partial x^\mu$  son covariantes: al multiplicar por un factor  $k$  los vectores de base, las componentes  $x^\mu$  se reducen en un factor  $k$  pero las derivadas *aumentan* en el mismo factor. Por lo tanto podemos escribir:

$$\tilde{\delta} : \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \equiv \partial_\mu$$

En términos de la notación de Einstein y de las componentes contravariantes del vector posición  $x^\mu$  las TLE se pueden escribir como:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\phantom{\mu'} \nu} x^\nu$$

aquí  $\nu$  es un índice mudo y  $\mu'$  es el índice de la ecuación.

Esta expresión tiene dos novedades:

- El apóstrofe, que indica que las componentes son aquellas medidas por el observador primado, se aplica al índice y no a la letra del cuadrvector. Esto tiene dos propósitos: el primero es respetar el hecho que el vector abstracto  $\tilde{x}$ , en realidad no se modifica con la transformación; el segundo tiene que ver con la notación para la matriz de transformación.
- Los índices de la matriz de transformación. Hemos puesto los índices de modo que a ambos lados de la expresión estén equilibrados. Por eso cambiamos a una *posición contravariante* el primer índice de la matriz (sin que eso necesariamente signifique que esa sea estrictamente una componente contravariante de una entidad que no es *vectorial*).

El uso de los apóstrofes en los índices tiene la ventaja adicional de permitirnos escribir expresiones mucho más económicas como:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}$$

donde los índices  $\mu'$  y  $\mu$  son claramente índices diferentes.

Teniendo en cuenta que en la *configuración estándar* (eje  $x$  apuntando en la dirección de  $\vec{u}$ ):

$$\Lambda(u_L) \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u_L & 0 & 0 \\ -\gamma u_L & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las componentes explícitas de la matriz  $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$  se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \Lambda^{0'}_0 &= \Lambda^{1'}_1 = \gamma \\ \Lambda^{0'}_1 &= \Lambda^{1'}_0 = -u_L \gamma \\ \Lambda^{2'}_2 &= \Lambda^{3'}_3 = 1 \end{aligned}$$

#### 1.8.4. Inversa y transpuesta de las TLE

Aunque ya habíamos visto en un contexto más físico, cómo se determina la inversa y qué uso tiene la transpuesta de la TLE (para el cálculo de las derivadas), la introducción de la notación de Einstein y los índices covariantes y contravariantes de los cuadrvectores, hacen interesante revisar nuevamente esas cantidades en la nueva notación.

Partiendo de la TLE original:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} x^{\mu}$$

la inversa se escribe como:

$$\Lambda_{\mu'}^{\mu} x^{\mu'} = x^{\mu}$$

donde:

$$\Lambda_{\mu'}^{\mu} = (\Lambda^{\mu'}_{\mu})^{-1}$$

Por razones físicas sabemos que:

$$\Lambda_{\mu'}^{\mu}(u_L) = \Lambda^{\mu'}_{\mu}(-u_L)$$

Por otro lado habíamos probado que:

$$\partial_{\mu} = (\Lambda^{\mu'}_{\mu})^T \partial_{\mu'}$$

que se puede escribir más convenientemente como:

$$\partial_{\mu} = \Lambda_{\mu'}^{\mu} \partial_{\mu'}$$

Podemos resumir entonces la notación de la transformación así:

- $\Lambda^{\mu'}_{\mu}$ , **transformación original**: el índice  $\mu'$  denota las filas.
- $\Lambda_{\mu'}^{\mu}$ , **transformación inversa**: se cambian de posición los índices pero  $\mu'$  siguen siendo las filas.
- $\Lambda_{\mu'}^{\mu}$ , **transformación transpuesta**: se transponen los índices y ahora el índice  $\mu$  son las filas.

### 1.8.5. De las TLE a los tensores

Las TLE hacen parte de un conjunto muy general de transformaciones de la forma

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^{\mu})$$

Nótese que en esta *confusa expresión* la  $x^{\mu'}$  a la izquierda y la  $x^{\mu}$  a la derecha, denotan el *valor* de las componentes de los cuadrvector posición en el sistema primado y no primado (respectivamente), pero la  $x^{\mu'}$  en el lado derecho es una *función escalar*.

Una transformación general inversa se escribe como:

$$x^{\mu} = x^{\mu}(x^{\mu'})$$

Reconociendo este hecho y usando la notación de Einstein, la transformación del gradiente se puede escribir con la regla de la cadena como:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}$$

o bien:

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \partial_{\mu'}$$

En el caso de las TLE, terminamos reconociendo que:

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}$$

y por lo tanto:

$$\Lambda^{\mu'}_{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$$

Estas ideas nos permiten introducir una definición general que será de mucha utilidad en lo sucesivo:

### Definición 1.5

**Tensor de primer rango.** Una cantidad  $\tilde{A}$ , elemento de un espacio vectorial geométrico, es un **tensor de primer rango**, si bajo una transformación de las coordenadas del espacio  $x^{\mu}$  ( $x^{\mu}$ ), sus componentes contravariantes transforman como:

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} A^{\mu}$$

y sus componentes covariantes lo hacen siguiendo la regla:

$$A_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} A_{\mu}$$

De acuerdo a la definición anterior, la cuadriposición y el cuadrigradiente son tensores de primer rango bajo las TLE.

No es difícil generalizar este resultado para definir cantidades más generales:

### Definición 1.6

**Tensor.** Una cantidad  $A$  se llama un tensor, si bajo una transformación de las coordenadas del espacio  $x^{\mu'}$  ( $x^{\mu}$ ), sus componentes:

$$A_{\alpha'\beta'\dots(m)}^{\mu'\nu'\dots(n)} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \cdots A_{\alpha\beta\dots(m)}^{\mu\nu\dots(n)}$$

decimos que es un tensor de rango  $n + m$ ,  $n$  veces contravariante y  $m$  veces covariante.

Es importante anotar que esta definición de tensor, es una definición informal muy propia de la física. Si bien es válida para los casos particulares que usamos en la teoría de la relatividad, en casos más generales debe precisarse mejor. Una definición rigurosa y más general puede encontrarse en textos de álgebra multilineal.

### 1.8.6. Las TLE generales

Las transformaciones deducidas hasta aquí asumían que la velocidad relativa entre los sistemas de referencia inerciales iba en la dirección del eje x (configuración estándar). Aunque siempre es posible hacer esa elección, puede ser también común que otras direcciones sean comparativamente importantes para definir nuestro sistema de coordenadas. Por tal razón tiene mucho interés escribir las TLE cuando  $\vec{u}$

es arbitraria.

### Proposición 1.7

**Transformaciones de Lorentz-Einstein vectoriales.** Si dos sistemas de referencia  $O$  y  $O'$  tienen velocidad relativa  $\vec{u}$ , sus medidas de espacio y tiempo se relacionan a través de:

$$t' = \gamma(t - \vec{u}_L \cdot \vec{r}_L) \quad (1.36)$$

$$\vec{r}'_L = \vec{r}_L + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \vec{r}_L - \gamma t \right) \vec{u}_L \quad (1.37)$$

Esta transformación general puede entenderse si se escribe  $\vec{r} = r_{\parallel} \hat{u} + r_{\perp} \hat{v}$ , donde  $\hat{v} \cdot \hat{u} = 0$ . Remplazando, la transformación queda:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left( t - u_L r_{L\parallel} \right) \\ r'_{L\parallel} &= r_{L\parallel} + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} u_L r_{L\parallel} - \gamma t \right) u_L \\ &= \gamma(-u_L t + r_{L\parallel}) \\ r'_{L\perp} &= r_{L\perp} \end{aligned} \quad (1.38)$$

que es exactamente la TLE original.

Es posible probar que las componentes de la matriz de rotación del TLE en el caso general son:

$$\Lambda^{0'}_0 = \gamma \Lambda^{0'}_i = \Lambda^{i'}_0 = -\gamma u_L^i \Lambda^{i'}_j = \delta_{ij} + (\gamma - 1) u_L^i u_L^j / u_L^2 \quad (1.39)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kroenecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i = j \\ 0 & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

#### 1.8.7. El valor del factor de Lorentz-Einstein

Las TLE dependen del valor de  $u_L$  y del factor de Lorentz  $\gamma$ . Es importante familiarizarse con el valor de estas cantidades.

La primera propiedad importante es que  $u_L < 1$  y por lo tanto  $\gamma \geq 1$ . Ahora bien para velocidades comunes (la velocidad de un vehículo, un avión, un planeta, incluso una estrella o una galaxia),  $u_L \ll 1$ . Por la misma razón entonces el factor se puede expandir usando el teorema del binomio o una serie de Taylor.

Para ello nos valdremos aquí del paquete SymPy que usaremos con frecuencia en lo sucesivo:

```
import sympy as sp

#Se definen los símbolos que usaremos
u=sp.symbols("u")

#Todas las funciones especiales (ej. raíz o sqrt) deben tomarse de sympy
gamma=1/sp.sqrt(1-u**2)

gamma
```

Out[2] :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Una vez definida la función podemos pedir a SymPy que haga la expansión en series de Taylor:

```
sp.diff(gamma,u)
```

Out[3] :

$$\frac{u}{(1 - u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

```
sp.integrate(gamma,u)
```

Out[4] :

$$\arcsin(u)$$

```
sp.integrate(gamma,(u,0,0.5))
```

Out[5] :

$$0.523598775598299$$

```
sp.series(gamma,n=16)
```

Out[6] :

$$1 + \frac{u^2}{2} + \frac{3u^4}{8} + \frac{5u^6}{16} + \frac{35u^8}{128} + \frac{63u^{10}}{256} + \frac{231u^{12}}{1024} + \frac{429u^{14}}{2048} + O(u^{16})$$

Reteniendo solo los términos de orden cuadrático en  $u_L$  nos queda:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u_L^2}} = 1 + \frac{u_L^2}{2} + \mathcal{O}(u_L^4)$$

o lo que es lo mismo:

$$\gamma - 1 = \frac{u_L^2}{2} + \mathcal{O}(u_L^4)$$

Como se ve en esta última expresión, es más fácil calcular  $\gamma - 1$  que  $\gamma$  mismo.

Un gráfico del factor de Lorentz como función de la fracción  $u_L$  se muestra en la figura abajo.

(Algoritmo 1.1)

```
from numpy import log10,sqrt,logspace

#Rango de valores
us=logspace(log10(1e-5),log10(0.9999),1000)

#gama-1 exacto
gammas=1/sqrt(1-us**2)-1

#gama-1 aproximado
gamma_approx=us**2/2

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(us,gammas,label='Exacto')
ax.plot(us,gamma_approx,label='Aprox. binomial')

#Ejes
ax.set_xscale("log")
ax.set_yscale("log")
ax.set_xlim((1e-2,1e0))
ax.set_ylim((1e-5,1e1))

#Decoración
ax.set_xlabel(r"\$u/c\$")
ax.set_ylabel(r"\$\gamma-1\$")
ax.legend()
ax.grid()
fig.tight_layout()
```

*ver Figura 1.1*

Nótese que la aproximación  $\gamma - 1 \approx u_L^2/2$  es suficientemente bueno (error relativo menor a  $\sim 1\%$ ) hasta  $u_L \approx 0,2$

### 1.8.8. Mapas de la TLE

Como hemos visto las TLE definen un conjunto de reglas en las que dadas las cantidades cinemáticas básicas (tiempo y posición) medidas por ejemplo por un observador inercial  $O'$  (que tiene velocidad  $\vec{u}$  respecto a otro observador inercial  $O$ ), podemos calcular los valores de las mismas cantidades cinemáticas medida por  $O$ , usando la regla matricial:

$$\tilde{x} = \Lambda(-\vec{u})\tilde{x}'$$

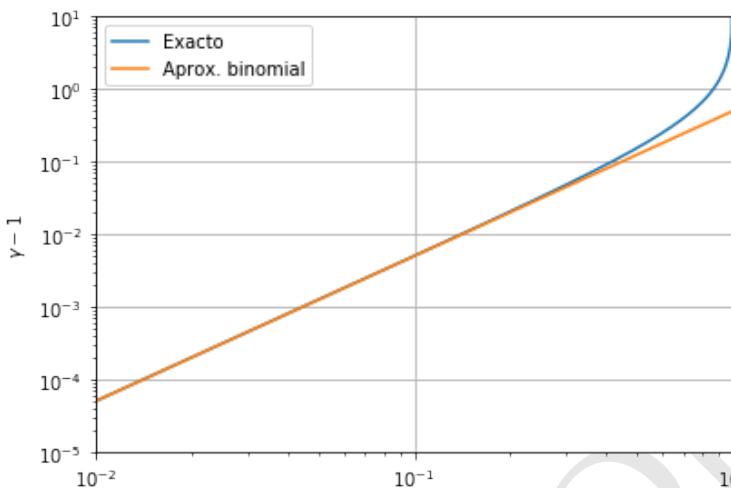


Figura 1.1: Figura correspondiente al código 1.1.

donde  $\Lambda(\vec{u})$  es la matriz general de las TLE (Ecs. 1.39). ¿Cómo representar gráficamente esta transformación?

### Nota

**Sistemas de referencia del Viajero y del Laboratorio.** La elección de cuál es el observador primado y cuál es el no primado en relatividad es completamente arbitraria y simétrica. Esta idea está en el corazón mismo de los postulados de la teoría. Sin embargo, conceptualmente, la elección apropiada de uno u otro, puede llegar a ser muy importante para ilustrar las consecuencias de las TLE.

En lo sucesivo llamaremos al sistema primado **sistema de referencia del viajero, observador viajero** o simplemente el **Viajero** (con mayúscula inicial). Aunque la palabra viajero da a entender que tiene un estado de movimiento absoluto, esta elección simplemente refleja la importancia que daremos a las medidas del *Observador* que se define a continuación. Este sistema de referencia puede estar atado a una partícula, a una nave o a un sistema físico que observamos. Es interesante anotar que no en todos los ejemplos el observador viajero  $O'$  necesariamente será inercial.

El observador no primado y al que llamaremos aquí el **sistema de referencia del laboratorio** o simplemente el **Laboratorio** (con mayúscula inicial), será cualquier sistema en el Universo donde se quiere saber el valor de aquellas cantidades físicas medidas por el Viajero, pero en términos de las coordenadas locales.

Normalmente quién estudia un fenómeno en relatividad se considera así mismo el Laboratorio, de modo que las etiquetas de Viajero y Labo-



### Nota (Cont.)

ratorio pueden intercambiarse.

En lo sucesivo daremos las observaciones del Viajero (sistema primado), como fuente de muchos de los datos físicos primarios (en este sentido este observador se comporta como el experimentador que se pone en una situación incómoda para estudiar el mundo), hará que sea mucho más común usar las TLE inversas:

$$\Lambda_{\mu'}^{\nu}(u) = \Lambda_{\nu}^{\mu'}(-\vec{u})$$

en lugar de las transformaciones originales, es decir de aquellas que nos dan las observaciones del Laboratorio en función de las del Viajero.

Para ello comenzemos por definir una rutina que nos permita calcular los elementos de la matriz  $\Lambda$  dado cualquier valor de la velocidad relativa  $\vec{u}$ , siempre en unidades luz. Debemos implementar las transformaciones:

$$\Lambda^{0'}_0 = \gamma \Lambda^{0'}_i = \Lambda^{i'}_0 = -\gamma u_L^i \Lambda^{i'}_j = \delta_{ij} + (\gamma - 1) u_L^i u_L^j / u_L^2$$

(Algoritmo 1.2)

```
from numpy import zeros
def Lambda_TLE(u):
    """
    Calcula la matriz de transformación de Lorentz-Einstein
    para una velocidad relativa arbitraria.

    Entradas:
        u (array de 4 dimensiones): velocidad relativa

    Salidas:
        Lambda (matriz de 4x4): TLE.
    """
    Lambda=zeros((4,4))

    #Factor de Lorentz
    umag=(u[0]**2+u[1]**2+u[2]**2)**0.5
    gamma=(1-umag**2)**(-0.5)

    #Lambda
    Lambda[0,0]=gamma
    Lambda[0,1:]=-u*gamma
    Lambda[1:,0]=-u*gamma
    for i in range(1,4):
        for j in range(1,4):
            dij=0
            if i==j: dij=1
            #i-1, j-1 en la velocidad porque sus índices empiezan en 0
            Lambda[i,j]=(dij+(gamma-1)*u[i]*u[j])/umag
```

```
Lambda[i,j]=dij+(gamma-1)*u[i-1]*u[j-1]/umag**2
```

```
return Lambda
```

Construyamos por ejemplo una transformación del observador viajero al observador del laboratorio escogiendo una velocidad en la dirección de  $x$  (configuración estándar):

```
from numpy import array
u=array([0.5,0.0,0.0])
Lambda=Lambda_TLE(-u)

Lambda (u = [ 0.5  0.  0. ]) =
[[1.15470054 0.57735027 0.          0.          ]
 [0.57735027 1.15470054 0.          0.          ]
 [0.          0.          1.          0.          ]
 [0.          0.          0.          1.          ]]
```

Para visualizar las TLE construyamos una red (*grid*) de eventos en el espacio-tiempo de  $O'$ . Las filas de esta red serán eventos que ocurren en el mismo lugar  $x'$  del espacio (un lugar diferente para cada fila) y las columnas representan eventos que tienen el mismo valor  $t'$ , es decir, eventos simultáneos para  $O'$ .

```
#Red de valores de t' y x'
from numpy import linspace
rmax=10
xps=linspace(0,rmax,rmax+1,endpoint=True)
tps=linspace(0,rmax,rmax+1,endpoint=True)
```

Calculemos y grafiquemos los valores correspondientes de las posiciones y velocidades de esos mismos eventos medidos por el observador en el laboratorio usando la transformación  $\tilde{x} = \Lambda(-\vec{u})\tilde{x}'$ :

(Algoritmo 1.3)

```
#Iniciamos en cero los valores
from numpy import zeros_like
ts=zeros_like(tps)
xs=zeros_like(xps)

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

#Por cada fila calculamos los valores de t,x y graficamos el resultado
from numpy import matmul
for xp in xps:
    for i,tp in enumerate(tps):
        ts[i],xs[i],y,z=matmul(Lambda,[tp,xp,0,0])
        ax.plot(ts,xs,'r-')

#Por cada columna calculamos los valores de t,x y graficamos el resultado
```

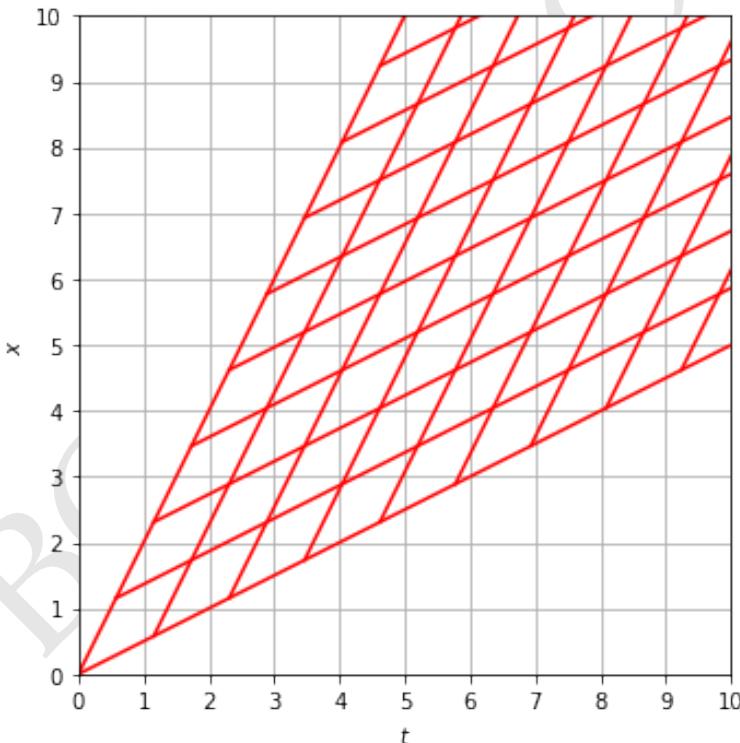
```

for tp in xps:
    for i,xp in enumerate(xps):
        ts[i],xs[i],y,z=matmul(Lambda,[tp,xp,0,0])
    ax.plot(ts,xs,'r-')

#Decoración
ax.set_xticks(xps)
ax.set_yticks(xps)
ax.set_xlabel("$t$")
ax.set_ylabel("$x$")
ax.set_xlim((0,rmax))
ax.set_ylim((0,rmax))
ax.grid()
fig.tight_layout()

```

*ver Figura 1.2*



**Figura 1.2:** Figura correspondiente al código 1.3.

Un vistazo a este resultado nos revela inmediatamente las consecuencias mejor conocidas y más sorprendentes de las TLE (y de la relatividad Einsteiniana en general):

- **Relatividad de la simultaneidad.** Los eventos que escogimos como simultá-

neos para el observador viajero (columnas de la malla roja) en el sistema de referencia del laboratorio no lo son.

- **Dilatación del tiempo.** Nótese que la escala de la malla también cambio. La separación entre las líneas verticales en el sistema del laboratorio (que definiría lo que llamaríamos la duración de un fenómeno) es menor que la misma separación de las líneas de igual tiempo en el sistema viajero. Esto implica que cualquier fenómeno que mida el observador viajero y que mida para él un tiempo dado, tendrá una duración mayor medida en el sistema del laboratorio. Llamamos a ese efecto la dilatación del tiempo.

En las siguientes secciones discutiremos en detalle ambos efectos.

Para una versión interactiva del mapa de las TLE vea la [versión electrónica de este libro](#)<sup>1</sup>.

## 1.9. Consecuencias de las TLE

Las TLE que introdujimos en las secciones anteriores no serían más que reglas matemáticas de transformación requeridas para juzgar si una ley física lo es realmente, sin mayores consecuencias en nuestro entendimiento del Universo. A excepción del resultado un poco sorprendente de que la velocidad de la luz es la misma independiente del sistema de referencia en el que se la mida, las transformaciones no parecerían contener ninguna consecuencia física muy relevante. Sin embargo, cuando se examinan con cuidado, y esto fue justamente lo que hicieron Albert Einstein y Mileva Maric, se descubre que las transformaciones esconden algunos “secretos” bien guardados de la naturaleza del espacio-tiempo. Esencialmente, nos obligan a repensar la manera como pensamos en algunos de los conceptos más fundamentales de la física: el espacio, el tiempo, la simultaneidad, la causalidad, entre otros.

Hemos dicho que una de las ideas más importantes de fondo en la relatividad es que el Universo está “sumergido” en un continuo espacio-temporal en el que coexisten aquí y allá, hoy, ayer, mañana. Todos los eventos del universo están reunidos en una sola entidad geométrica. Moverse dentro del espacio-tiempo tan solo implica una rotación de los ejes coordenados.

El gran reto de esta sección será mostrar como las propiedades del espacio-tiempo se ven reflejadas en las cantidades que efectivamente medimos en los laboratorios.

### 1.9.1. Transformación de los intervalos

Si tomamos dos eventos en el espacio tiempo  $E_1$  y  $E_2$  con coordenadas  $x_1^\mu : (t_1 x_{1L} y_{1L} z_{1L})^T$  y  $x_2^\mu : (t_2 x_{2L} y_{2L} z_{2L})^T$ , la diferencia entre sus coordenadas espacio-temporales, medida para dos observadores iniciales es de forma general igual a:

$$\Delta x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu \Delta x^\nu$$

---

<sup>1</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

En la expresión anterior sabemos que los coeficientes de  $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$  son constantes y es por eso que al calcular la diferencia entre las coordenadas de los eventos, no hemos cambiado esta cantidad.

En términos explícitos, podemos escribir los intervalos asumiendo la configuración estándar como:

$$\begin{aligned}\Delta t' &= \gamma (\Delta t - u_L \Delta x_L) \\ \Delta x'_L &= \gamma (-u_L \Delta t + \Delta x_L) \\ \Delta y'_L &= \Delta y_L \\ \Delta z'_L &= \Delta z_L\end{aligned}$$

o de forma más general:

$$\Delta t' = \gamma (\Delta t - \vec{u}_L \cdot \Delta \vec{r}_L) \quad (1.40)$$

$$\Delta \vec{r}'_L = \Delta \vec{r}_L + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \Delta \vec{r}_L - \gamma \Delta t \right) \vec{u}_L \quad (1.41)$$

### 1.9.2. Dilatación temporal

#### Definición 1.7

**Duración.** La duración  $T$  de un fenómeno que comienza en un evento  $E_1$  y termina en un evento  $E_2$  es la diferencia entre las coordenadas temporales de los dos eventos:

$$T \equiv t_2 - t_1 = \Delta t$$

La *duración* es solo una parte de la diferencia que existe entre dos eventos. Durante la historia de la física esta cantidad ha tenido un papel central en la descripción de los fenómenos. En los *Principia* por ejemplo, Newton señala que este número solo difiere de un observador a otro por las unidades que utilizan para medir el tiempo, pero que en el fondo todos los observadores miden la misma cantidad y si usaran las mismas unidades, obtendrían el mismo resultado. Esta idea está íntimamente ligada con el concepto **tiempo absoluto**, que era la *creencia* (que hoy sabemos infundada) de que existe algo así como un tiempo registrado por los *relojes de dios* (una entidad sobrenatural hipotética que todo lo conoce) que es común a todos los observadores. El tiempo absoluto fue central en la filosofía y la física pre relativista.

#### Nota 1.8

**¿Relativístico o relativista?** Es frecuente encontrarse en algunos textos en español el adjetivo *relativístico* para algo que está relacionado con la teoría de la relatividad de Einstein y sus consecuencias. La palabra es derivada del término *relativistic* en inglés. Sin embargo el adjetivo *relativístico* no exis-

**Nota 1.8 (Cont.)**

te en castellano y es solo una mala transliteración del término en inglés. El adjetivo correcto es **relativista**. > También es interesante anotar que aunque lo **relativista** existe desde los tiempos de Galileo y Newton, el uso se ha generalizado para referirse únicamente a los desarrollos de la relatividad después de los trabajos de Albert Einstein y Mileva Maric.

Por las transformaciones de Lorentz-Einstein sabemos que la duración registrada por dos observadores inerciales es definitivamente distinta, incluso si usan las mismas unidades. Así por ejemplo, si la velocidad relativa entre los observadores es arbitraria  $\vec{u}$ , la relación entre la duración de un fenómeno medida en el laboratorio  $T$  se relacionará con la duración medida por el viajero  $T'$  como:

$$T = \gamma (T' + \vec{u}_L \cdot \Delta \vec{r}'_L)$$

que en la configuración estándar será:

$$T = \gamma (T' + u_L \Delta x')$$

Entender esta última expresión no es fácil. En ella se combinan tiempos con intervalos espaciales  $\Delta x'$  de una manera que no es común para nosotros en la física clásica. ¿Qué significa que la duración de un fenómeno para el Observador dependa no solo de su duración para el Viajero, sino de la ubicación espacial de los eventos que lo limitan?. Es extraño, pero debemos tratar de entenderlo.

Podemos entender este resultado de dos maneras diferentes. La primera es apelar a los *mapas de las transformaciones* que construimos en las secciones anteriores. Consideremos dos sistemas de coordenadas que tienen velocidad relativa  $u_L = 0,3$ :

```
from numpy import array
u=array([0.3,0,0])
```

Ahora tomemos dos fenómenos limitados por tres eventos  $E_0$  y  $E_1$  y  $E_2$  con coordenadas para el viajero dadas por:

```
#Las coordenadas son: t', x', y', z'
E0p=array([0,0,0,0])
E1p=array([5,0,0,0])
E2p=array([5,2,0,0])
```

Llamaremos a los fenómenos  $E_0E_1$  y  $E_0E_2$ . Ambos fenómenos empiezan en el mismo evento,  $E_0$ . Los eventos  $E_1$  y  $E_2$  ocurren en el mismo instante en el futuro, pero en lugares diferentes en el espacio.  $E_1$  sin embargo ocurre en el mismo lugar del espacio (medido por el viajero) que el evento inicial  $E_0$ .

Las coordenadas de los evento para el observador, se pueden calcular usando la matriz de la transformación de Lorentz, que podemos calcular con la rutina Lambda\_TLE que introdujimos en una sección anterior:

```

from export import Lambda_TLE

#Calculamos la inversa porque queremos pasar de 0' a 0
Lambda=Lambda_TLE(-u)

#Aplicamos las transformaciones
from numpy import matmul
E0=matmul(Lambda,E0p)
E1=matmul(Lambda,E1p)
E2=matmul(Lambda,E2p)

E1 = [0. 0. 0. 0.]
E2 = [5.24142418 1.57242726 0.          0.        ]
E3 = [5.87039509 3.66899693 0.          0.        ]

```

Como era de esperarse las coordenadas para los dos observadores difieren de forma no trivial.

En el siguiente algoritmo usamos la rutina `mapa_TLE` para mostrar la malla de valores constantes de  $t$  y  $x$  para los dos observadores inerciales. Allí representamos además la posición de los eventos

(Algoritmo 1.4)

```

from export import mapa_TLE
fig=mapa_TLE(*u)
ax=fig.gca()
ax.annotate("E0",xy=(E0[0],E0[1]),arrowprops={'fc':'k'});
ax.annotate("E1",xy=(E1[0],E1[1]),arrowprops={'fc':'k'});
ax.annotate("E2",xy=(E2[0],E2[1]),arrowprops={'fc':'k'});

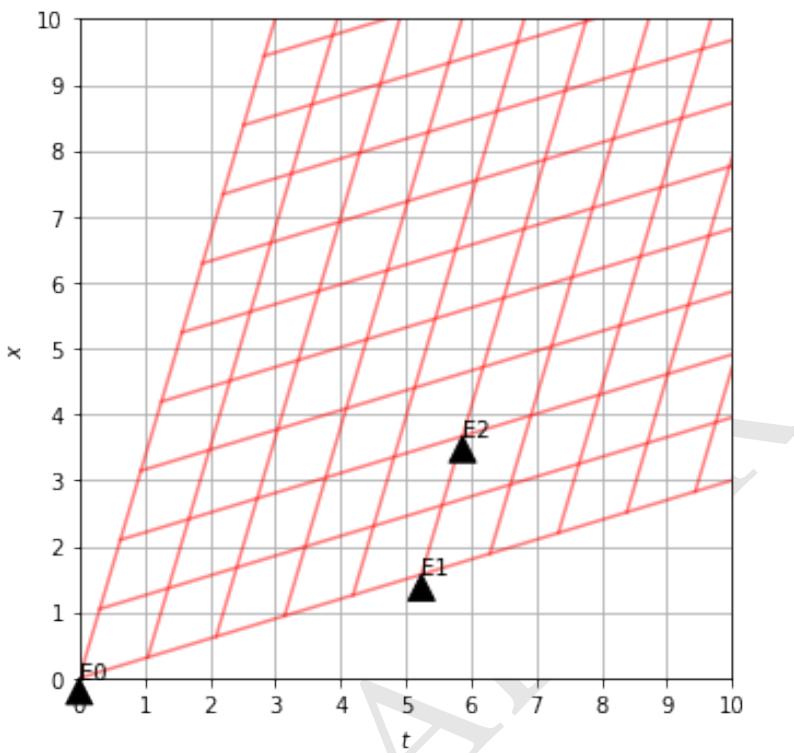
```

*ver Figura 1.3*

Como vemos en el gráfico, la duración del fenómeno  $E_0E_1$  que para el Viajero es  $T' = 5$ , es mayor para el Laboratorio  $T = 5,24$ . Por otro lado el fenómeno  $E_0E_1$  que también dura  $T' = 5$  para el Viajero, pero que ocurre en lugares muy separados del espacio, tiene para el Observador una duración aún mayor  $T = 5,87$ .

Tres cosas son claras sin embargo:

1. Las duraciones de los eventos no son las mismas registradas por distintos observadores y esto contradice abiertamente nuestras intuiciones clásicas del tiempo.
2. La duración de cualquier fenómeno es mayor en el Laboratorio que para el Viajero. Este resultado se conoce de forma general en relatividad como **dilatación del tiempo**.
3. La duración de dos fenómenos depende del lugar del espacio en el que ocurrán los eventos que los limitan.
4. La diferencia entre la duración para el Viajero y el Laboratorio tiene un valor mínimo si el fenómeno ocurre en reposo en el laboratorio (los eventos que lo limitan ocurren en el mismo lugar).



**Figura 1.3:** Figura correspondiente al código 1.4.

Este último resultado conduce a una importante definición en relatividad:

#### Definición 1.9

**Duración propia.** Llamamos **duración propia** (o **tiempo propio**) y la denotamos como  $T_0$  a la duración que tiene un fenómeno medida por un sistema de referencia inercial en el cual sus eventos límite ocurren en el mismo lugar del espacio.

En el ejemplo anterior la duración propia del fenómeno  $E_0E_1$  es  $T_0 = T' = 5$  y es la que es medida por el Viajero, que es donde los dos eventos ocurren en el mismo lugar del espacio  $\Delta x' = 0$ .

La duración propia del fenómeno  $E_0E_2$ , por otro lado, no es  $T' = 5$  (que es la duración mide el Viajero). Tampoco es  $T = 5,8$  (la que mide el Laboratorio). Para hallarla tendríamos que construir un sistema de referencia en el que  $E_0$  y  $E_2$  ocurrieran en el mismo lugar del espacio. Es claro de la figura anterior que el nuevo sistema de referencia debe tener una velocidad  $v$  mayor que la velocidad  $u$  del Viajero.

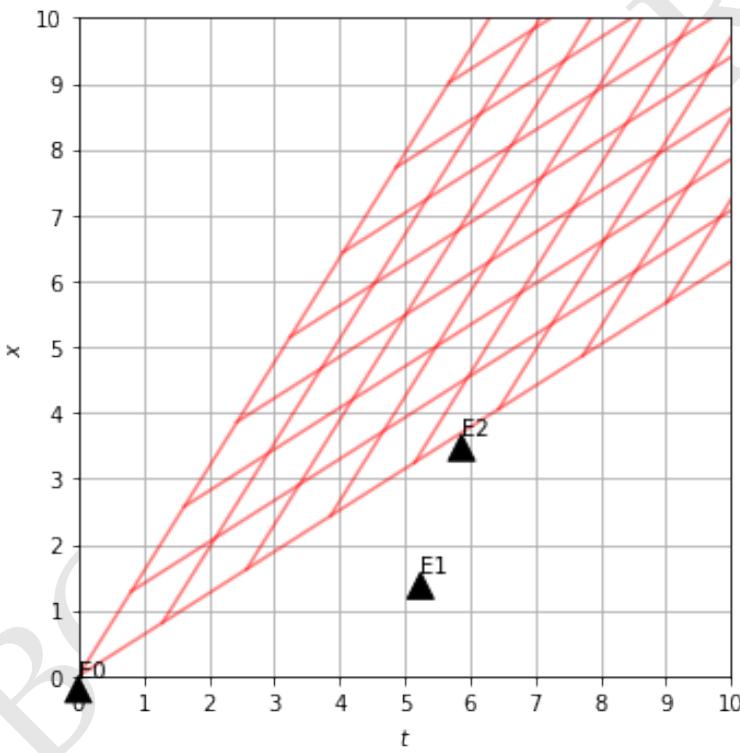
En el gráfico abajo vemos que si nos montamos en un sistema de referencia con una velocidad  $v_L \approx 0,63$ , los dos eventos  $E_0$  y  $E_2$  ocurren en el mismo lugar del

espacio:

(Algoritmo 1.5)

```
from export import mapa_TLE
v=array([0.63,0,0])
fig=mapa_TLE(*v)
ax=fig.gca()
ax.annotate("E0",xy=(E0[0],E0[1]),arrowprops={'fc':'k'});
ax.annotate("E1",xy=(E1[0],E1[1]),arrowprops={'fc':'k'});
ax.annotate("E2",xy=(E2[0],E2[1]),arrowprops={'fc':'k'});
```

*ver Figura 1.4*



**Figura 1.4:** Figura correspondiente al código 1.5.

La duración registrada por este nuevo sistema de referencia ahora si será la duración propia del fenómeno  $E_0E_2$ , y vemos es aún menor que 5.

¿Cómo encontramos la velocidad  $v_L \approx 0,63?$ . Esta no es otra cosa que la velocidad obtenida dividiendo diferencia en  $x$  medida en el laboratorio ( $\Delta x_L = 3,7$ ), y la duración  $T = 5,9$  en el mismo sistema de referencia:

$$v_L \equiv \frac{\Delta x_L}{T}$$

Llamaremos a esta, la **velocidad asociada** con el fenómeno. Nótese que la velocidad asociada con el fenómeno no es la de una partícula u objeto real. Es simplemente la velocidad que *debería* tener un observador inercial viajero para que ambos eventos ocurran en el mismo lugar del espacio.

En términos de la velocidad asociada con cualquier fenómeno, la relación entre su duración en el laboratorio  $T$  y su duración propia  $T_0$  será, en virtud de las TLE:

$$\begin{aligned} T &= \gamma(v_L)(T' + v_L\Delta x') \\ &= \gamma(v_L)T_0 \end{aligned}$$

puesto que en este sistema asociado al fenómeno  $\Delta x' = 0$ .

### Proposición 1.8

**La duración propia es la mínima duración.** La duración  $T$  de un fenómeno con una velocidad asociada  $v_L$  es:

$$T = \gamma(v_L)T_0$$

donde  $T_0$  es su duración propia del fenómeno,  $v_L = \Delta x_L/T$  es la velocidad asociada al fenómeno y  $\gamma(v_L) = (1 - v_L^2)^{-1/2}$ .  $T$  es siempre mayor que la duración propia o en otras palabras *la duración propia es la mínima duración que podemos asociar a un fenómeno*.

Vemos en esta definición que el factor de Lorentz-Einstein,  $\gamma$  juega un papel muy importante porque nos da la razón entre la duración de un fenómeno y su duración propia:

$$\gamma = \frac{T}{T_0}$$

### Nota

**Gamas distintos.** Es importante también entender que el  $\gamma$  que asociamos a un fenómeno, no es conceptualmente el mismo que el que usamos en las transformaciones de Lorentz. La razón más obvia es que el  $\gamma$  de un fenómeno, depende de una velocidad, la *velocidad asociada al fenómeno* que puede o no ser una velocidad real. En cambio el  $\gamma$  de las transformaciones de Lorentz esta asociado con la velocidad relativa entre dos sistemas de referencia muy reales. Las fórmulas son las mismas, el origen del factor es el mismo pero *conceptualmente* las dos cantidades son distintas.

Con todos estos elementos a la mano podemos finalmente formular este resultado:

**Proposición 1.9**

**Dilatación del tiempo.** La duración de un fenómeno es siempre mayor si se percibe el fenómeno en movimiento a si se lo hace en reposo.

Un ejemplo clásico de esto es la desintegración radioactiva de una partícula elemental. Si la partícula está en reposo respecto al Observador, su tiempo de decaimiento será el tiempo propio. En cambio si la partícula se mueve con velocidad constante  $v_L$  con respecto a él, su tiempo de decaimiento será mayor. Las partículas duran más en movimiento que en reposo.

**1.9.3. Intervalos espacialoides y temporaloides**

En el apartado anterior definimos cantidades asociadas a los eventos extremos de un fenómeno (cuándo y dónde empieza y cuándo y dónde termina). Geométricamente siempre es posible trazar una línea recta entre dos fenómenos del espacio tiempo. Esta línea recta tiene un nombre muy específico en relatividad:

**Definición 1.10**

**intervalo espacio-temporal.** Dados dos eventos  $E_1$  y  $E_2$ , el intervalo espacio-temporal  $S$  entre ellos es el segmento de línea que los une.

¿Qué es físicamente el intervalo espacio-temporal? Como cada punto del segmento es en sí mismo un evento, el intervalo es un fenómeno también (una colección de eventos). ¿Qué relación guardan esos eventos?. He ahí el problema.

Comencemos por el caso más simple. Dos eventos que ocurren en el mismo lugar del espacio. En ese caso los puntos del intervalo corresponden a los eventos que le ocurren a un observador local que está justamente en reposo en el lugar donde ocurren los eventos.

Consideremos ahora dos eventos que ocurren en lugares distintos del espacio pero tal que  $\Delta x_L < T$ . La velocidad asociada con el fenómeno será  $v_L = \Delta x_L/T < 1$ . Por lo tanto en este caso, siempre es posible encontrar un observador inercial tal que los dos eventos ocurran en el mismo lugar del espacio. Este intervalo y el anterior serán entonces conceptualmente equivalentes.

En los dos casos anteriores y por las definiciones dadas en secciones anteriores, para este tipo de fenómeno siempre será posible definir un tiempo propio. Es por esta razón que los llamamos **intervalos temporaloides** (en inglés *time-like*).

Pero ¿qué pasa en el caso en el que  $\Delta x_L > t$ ? En este caso la velocidad asociada  $v_L = \Delta x_L/T > 1$  y por la misma razón no será posible encontrar un observador un sistema de referencia para el cuál los eventos ocurran en el mismo lugar del espacio. Decimos que los eventos *no tienen* una separación temporaloide y por lo tanto tampoco constituyen un fenómeno.

En este caso, sin embargo, si es posible encontrar un observador para el cuál los dos eventos ocurren al mismo tiempo (son simultáneos), es decir, tienen la misma coordenada  $t'$ : están en lugares distintos del espacio pero son simultáneos para ese observador hipotético. Al intervalo entre eventos de este tipo los llamaremos

**intervalos espacialoides** (en inglés *space-like*).

¿Y que pasa si  $\Delta x_L = t$ ? Por definición este intervalo estará limitado por eventos en los que solo puede estar un rayo de luz (o cualquier otra onda que viaje a esa velocidad). Por esa razón a estos intervalos los llamamos **intervalos luminoides**.

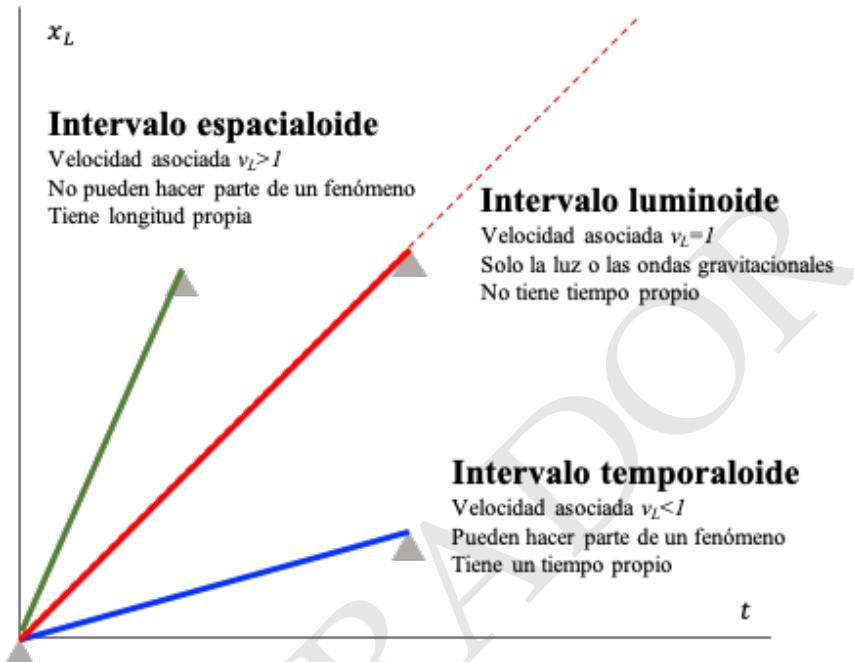


Figura 1.5: Tipos de intervalos en el espacio-tiempo

#### 1.9.4. El postulado de los relojes

En las sección anterior existe una imprecisión. Definimos la duración propia entre dos eventos (separados por un intervalo temporaloide) como la duración medida por un observador en el que los eventos se registran en el mismo lugar del espacio. Sin embargo nunca especificamos el lugar de los eventos intermedios del fenómeno.

Así por ejemplo, si el fenómeno es el movimiento de una partícula en un sincrotrón, para el Laboratorio el fenómeno “la partícula da una vuelta completa” está limitado por eventos que ocurren en el mismo lugar del espacio. Podría uno decir que la duración propia del fenómeno es la que mide por tanto el Laboratorio. Pero podemos también preguntarnos ¿qué miden los relojes de la partícula?

Esta pregunta no tiene ninguna respuesta en el marco de la teoría tal y como ha sido formulada hasta ahora. La razón es sencilla. No existe ningún sistema de referencia inercial que podamos asociar a la partícula. Todos los resultados obtenidos hasta ahora solo aplican para este tipo de sistemas de referencia.

¿Qué hacer entonces?. Una construcción posible sería la de suponer que lo que observa la partícula (al menos en términos de la medida de duraciones) es la acumulación de los efectos observados por una infinidad de sistemas de referencia

inerciales que instantáneamente se mueven con la velocidad (variable)  $v(t)$  de la partícula.

### Definición 1.11

**Línea de universo.** La línea de universo de una partícula es la colección de todos los eventos en los que está la partícula al pasar el tiempo. Geométricamente, la línea de universo es la **concatenación de intervalos microscópicos temporaloides**, entre puntos adyacentes de su trayectoria.

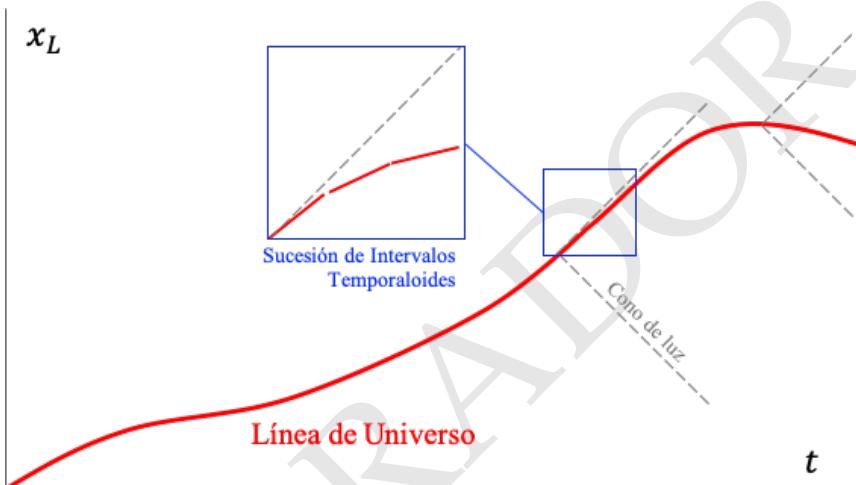


Figura 1.6: Línea de Universo

Podemos dividir la línea de universo de la partícula en intervalos temporaloides infinitesimales. La duración propia de cada subintervalo será:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

donde por razones que veremos en un momento, hemos llamado  $d\tau$  y  $dt$  y no  $dT_0$  y  $dT$ , a las duraciones propia y medida del intervalo infinitesimal.

La construcción anterior se puede expresar matemáticamente diciendo que el tiempo propio asociado a la trayectoria de la partícula será:

$$T_0 = \int_0^t d\tau$$

Pero esto, ¡no es más que una suposición!. Pero es una suposición tan importante que ha sido elevada a la altura de un postulado:

**Postulado: Postulado de los relojes o hipótesis de los relojes.** El tiempo propio medido por un observador que se mueve en una trayectoria espacial con velocidad variable  $\vec{v}(t)$  (tiempo medido por relojes ideales

transportador por el observador) entre dos eventos limitados por  $t = t_1$  (inicio de la línea de universo) y  $t = t_2$  es igual a:

$$\Delta\tau[v_L](t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v_L(t)^2} dt$$

Varias anotaciones:

- Representamos el tiempo propio como  $\tau$  por que de la misma manera que  $t$  puede usarse como un parámetro para distinguir cada punto de la línea de universo,  $\tau$  puede jugar también el mismo papel.
- La notación  $\Delta\tau[v]$  indica que  $\tau$  es un funcional de  $v(t)$ . En términos físicos, por cada  $v(t)$  hay un  $\tau$  diferente.
- La duración propia  $T_0$  que habíamos definido antes entre dos eventos, es igual al tiempo propio  $\tau(T)$  medido a lo largo del intervalo entre ellos:

$$\Delta\tau = \frac{1}{\gamma} \Delta t$$

que es la forma más común en la que se presenta este resultado.

### Nota 1.12

**atraso presente y atraso acumulado.** Un efecto muy importante asociado al atraso de los relojes por movimiento tiene que ver con el efecto de la aceleración. A la luz del postulado de los relojes podemos preguntarnos: ¿produce la aceleración dilatación temporal o atraso de los relojes?. Para responder esta pregunta debemos distinguir dos conceptos:

El **atraso presente** es el efecto que produce en los relojes de un viajero la velocidad a la que se mueve. La velocidad produce un atraso presente a través de la expresión:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

sin embargo la aceleración no tiene ese efecto. A pesar de que la velocidad, de la que depende  $\gamma$  puede variar en virtud de una aceleración, la aceleración no aparece explícitamente en  $\gamma$ . Decimos que **la aceleración no produce atraso presente**.

El **atraso acumulado** es el que se produce a lo largo de una línea de universo en la que la velocidad no es constante:

$$\Delta\tau[v_L](t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v_L(t)^2} dt$$

Nótese que aunque la aceleración tampoco aparece explícitamente en esta expresión es claro que afectará el resultado de la expresión a través de la integral. Decimos que **la aceleración produce atraso acumulado**.

### 1.9.5. Contracción de longitudes

De la misma manera que podemos definir la duración de un fenómeno (una colección de intervalos temporaloides), se puede definir la longitud de un objeto (una colección de intervalos espacialoides).

Pensemos por ejemplo en una regla de 30 cm sobre una mesa. En un momento dado (un valor específico del tiempo) los eventos que definen el estado de los extremos de la regla, están naturalmente separados por intervalos espacialoides. Imaginemos que la regla rotará 180 grados. ¿Cómo se define la longitud de la regla? Ciertamente pensar en la longitud simplemente como la diferencia entre las posiciones espaciales de dos eventos cualquiera en los extremos no es adecuado. Uno podría definir como evento 1 "centímetro cero de la regla al principio" y el evento 2 "centímetro 30 de la regla al final". Si se hiciera así la regla mediría 0 centímetros (porque después de la rotación en 180 grados el centímetro 30 quedaría en la misma posición que el centímetro 0).

Para definir la longitud de un objeto se debe tomar la posición espacial de sus extremos (de cualquier sección transversal) en el mismo tiempo.

#### Definición 1.13

**Longitud de un objeto.** Dado un *objeto* que está limitado en un instante dado, por eventos espacialoides, definimos la longitud instantánea del objeto en una cierta dirección, como la diferencia entre las coordenadas espaciales en esa dirección de eventos que en el sistema de referencia ocurren simultáneamente.

¿Es la longitud de una regla transportada por el Viajero igual para el Viajero y el Laboratorio?. Los eventos  $E_1$  y  $E_2$  de nuestro ejemplo anterior satisfacen la condición de ser eventos espacialoides para ambos observadores.

Para el viajero la longitud de un objeto limitado por ellos será:

$$L_p = E_2 p[1] - E_1 p[1]$$

$$L \text{ (Viajero)} = 2$$

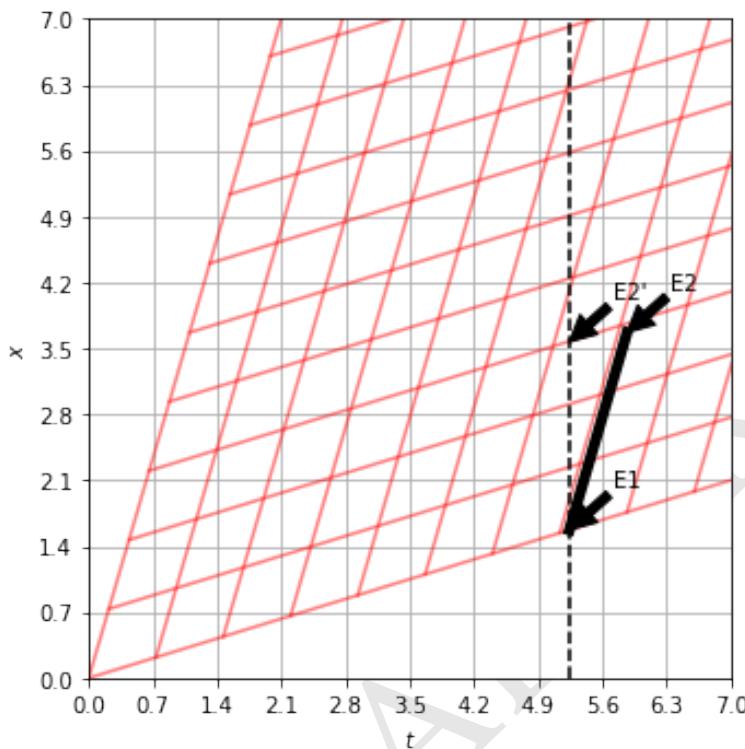
El problema es que la longitud medida por el Observador no puede obtenerse de estos dos eventos puesto que en sus sistema de referencia ellos no son simultáneos. Para encontrar la longitud en este sistema, hay que encontrar un evento  $E_2'$  que sea para el observador simultáneo a  $E_1$ . Veamos esto gráficamente:

Por inspección en la figura se ve que al identificar ese evento, la diferencia de coordenadas será menor en el sistema de referencia del laboratorio:

$$L(\text{Laboratorio}) < L(\text{Viajero})$$

¿Cuál es esa diferencia?. Podemos usar las transformaciones de Lorentz para encontrarla. Para ello usemos:

$$\Delta x' = \gamma(-u_L \Delta t + \Delta x)$$



**Figura 1.7:** Contracción de longitudes.

La separación espacial entre dos eventos que estén en los extremos de la regla, **siempre** será  $L_0$  para el Viajero. Para el Laboratorio la separación entre esos eventos solo será la longitud  $L$  si los eventos son tales que  $\Delta t = 0$ . De la anterior relación obtenemos entonces que:

$$L_0 = \gamma(-u_L 0 + L)$$

o bien

$$L_0 = \gamma L$$

#### Proposición 1.10

**Contracción de Longitudes.** La longitud de un objeto que se mueve, medida en la dirección de movimiento es siempre menor que su longitud medida en reposo:

$$L = \frac{1}{\gamma} L_0$$

### 1.9.6. Adición de velocidades

Una de las consecuencias más sonadas de las TLE es la manera como transforman las velocidades. De acuerdo con las Transformaciones de Galileo-Newton, si una partícula tiene una velocidad  $\vec{v}'$  para un Viajero que se mueve con velocidad relativa  $\vec{u}$  respecto a un Observador, su velocidad  $\vec{v}$  para el Observador será simplemente:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

¿Qué pasa en el caso de la relatividad?. Para calcular la manera como se relacionan escojamos un sistema de ejes coincidentes (eje  $x$  en dirección de  $\vec{u}$ ) y notemos que transcurrido un intervalo de tiempo infinitesimal  $dt'$  en el sistema de referencia del Viajero, el tiempo y las posiciones en los tres ejes medidas por el Viajero y el observador cambiarán de acuerdo con:

$$\begin{aligned} dt &= \gamma (dt' + u_L dx'_L) \\ dx_L &= \gamma (u_L dt + dx'_L) \\ dy_L &= dy'_L \\ dz_L &= dz'_L \end{aligned}$$

La velocidad instantánea se define como  $d\vec{v}_L/dt$ , de modo que dividiendo término a término los intervalos infinitesimales de espacio obtenemos:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{u_L + v'_{xL}}{1 + u_L v'_{xL}} \\ v_y &= \frac{1}{\gamma} \frac{v'_{yL}}{1 + u_L v'_{xL}} \\ v_z &= \frac{1}{\gamma} \frac{v'_{zL}}{1 + u_L v'_{xL}} \end{aligned}$$

o si definimos:

$$D \equiv \frac{1}{1 + u_L v'_{xL}}$$

entonces:

$$\begin{aligned} v_x &= D(u_L + v'_{xL}) \\ v_y &= \frac{D}{\gamma} v'_{yL} \\ v_z &= \frac{D}{\gamma} v'_{zL} \end{aligned}$$

Nótese que si  $\vec{v}'_L : (1, 0, 0)$  (un rayo de luz) entonces:

$$D = \frac{1}{1 + u_L}$$

y la velocidad medida por el observador será:

$$v_{xL} = \frac{1}{1 + u_L} (u_L + 1) = 1$$

Es decir, la teoría desarrollada es autoconsistente, en tanto la velocidad de un rayo de luz será la misma sin importar el observador.

Usando las transformaciones generales de Lorentz-Einstein es posible generalizar la ley de adición de velocidades relativistas como:

$$\begin{aligned} v_{\parallel L} &= D(u_L + v'_{\parallel L}) \\ v_{\perp L} &= \frac{D}{\gamma} v'_{\perp L} \end{aligned} \tag{1.42}$$

donde

$$D \equiv \frac{1}{1 + \vec{u}_L \cdot \vec{v}'_L}$$

### 1.9.7. Transformación de aceleraciones

Un procedimiento similar pero mucho más laborioso algebraicamente conduce al resultado:

$$\begin{aligned} a_{\parallel L} &= \frac{D^3}{\gamma^3} a'_{\parallel L} \\ a_{\perp L} &= \frac{D^3}{\gamma^2} [a'_{\perp L} + (\vec{v}'_L \cdot \vec{u}_L a'_{\perp L} - \vec{a}'_L \cdot \vec{u}_L v'_{\perp L})] \end{aligned} \tag{1.43}$$

En este último caso, nótese que si  $\vec{v}' = 0$  (la partícula se encuentra en reposo respecto al Viajero), la transformación para la componente perpendicular de la aceleración se reduce a:

$$a_{\perp L}^0 = \frac{D^3}{\gamma^2} a'_{\perp L}^0$$

donde el superíndice 0 indica que es la aceleración calculada para la partícula en reposo en el sistema del viajero.

## 1.10. El espacio-tiempo de Minkowski

Una forma poderosa de sintetizar todos los resultados anteriores fue presentada en un artículo en 1908 por Herman Minkowski quién había sido profesor de

Albert Einstein en la Universidad. Al principio Einstein consideró esta formulación de la teoría especial de la relatividad una curiosidad matemática. Esto fue hasta que en 1912 y después de 5 largos años de esfuerzos en la búsqueda de una *generalización* de la teoría, Einstein descubrió que la mejor manera de describir matemáticamente la relatividad era usando la aproximación geométrica de Minkowski.

### 1.10.1. La norma de Minkowski

Hasta ahora hemos usado los diagramas de espacio-tiempo como una *mera* herramienta gráfica para representar las TLE y sus consecuencias. Sin embargo es posible concebir los puntos en estos *diagramas* como formando un espacio geométrico con propiedades más generales.

Considere por ejemplo la situación representada con el siguiente algoritmo:

(Algoritmo 1.6)

```
from export import mapa_TLE
fig=mapa_TLE(ux=0.3,ngrid=20,nticks=20)
ax=fig.gca()
ax.plot([3,9],[3,7],'k-',lw=5)
ax=fig.gca()
```

*ver Figura 1.8*

Vemos allí un intervalo espacio temporal (línea negra). Podemos usar las TLE o el mismo gráfico para encontrar las coordenadas espacio-temporales de los eventos que limitan el intervalo:

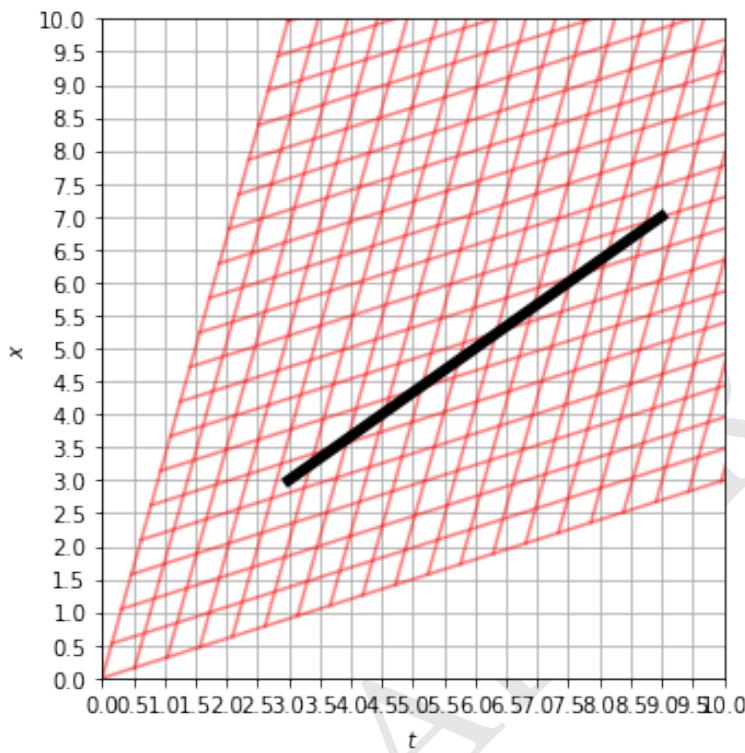
```
from numpy import array
#Observador
E1=array([3,3,0,0])
E2=array([9,7,0,0])
#Viajero
Ep1=array([2.25,2.25,0,0])
Ep2=array([7.25,4.5,0,0])
```

Como vemos las coordenadas espacio-temporales son muy diferentes al aplicar una transformación hiperbólica en el espacio-tiempo, lo que era de esperarse por las TLE. Si pensamos ahora el problema desde un punto de vista geométrico y miramos el gráfico nos damos cuenta que hay una propiedad del intervalo que no puede ser distinta a pesar de la rotación hiperbólica. Esa propiedad es la *longitud* del intervalo. Pero, ¿cuánto vale esa longitud?

Si usamos la *fórmula clásica* de la longitud (también llamada *norma euclídea*), la distancia en el espacio-tiempo  $\Delta s$  entre los eventos sería:

$$\Delta s_{\text{Euclídea}}^2 = \Delta t^2 + \Delta x_L^2 + \Delta y_L^2 + \Delta z_L^2$$

obtenemos:



**Figura 1.8:** Figura correspondiente al código 1.6.

```
#Observador
Ds2=(E2[0]-E1[0])**2+\n      (E2[1]-E1[1])**2+\n      (E2[2]-E1[2])**2+\n      (E2[3]-E1[3])**2\n\n#Viajero
Dsp2=(Ep2[0]-Ep1[0])**2+\n      (Ep2[1]-Ep1[1])**2+\n      (Ep2[2]-Ep1[2])**2+\n      (Ep2[3]-Ep1[3])**2
```

$Ds^2$  euclidiana (Observador) = 52  
 $Ds^2$  euclidiana (Viajero) = 30.0625

Como vemos las distancias calculadas entre los dos eventos no son las mismas. Este hecho es ciertamente preocupante puesto que una propiedad que debería ser obviamente la misma resulta relativa.

**Nota**

**Unidades de ds.** Como vemos las unidades de la amétrica ds son las mismas unidades que escogamos usar para  $t$  o para  $x$ . En la elección que hemos hecho en este libro, es decir, en unidades luz en el que el tiempo se mide en segundos y las distancias en segundos-luz, la métrica se escribe  $ds_L^2$  tiene unidades de tiempo.

Herman Minkowski encontró la solución a este problema, mostrando que la norma en el espacio-tiempo debía ser distinta:

$$\Delta s_{\text{L,Minkowski}}^2 = \Delta t^2 - (\Delta x_L^2 + \Delta y_L^2 + \Delta z_L^2)$$

¿Por qué el signo menos?. Comprobémoslo numéricamente:

```
#Observador
Ds2=(E2[0]-E1[0])**2-\n    ((E2[1]-E1[1])**2+\n     (E2[2]-E1[2])**2+\n     (E2[3]-E1[3])**2)

#Viajero
Dsp2=(Ep2[0]-Ep1[0])**2-\n    ((Ep2[1]-Ep1[1])**2+\n     (Ep2[2]-Ep1[2])**2+\n     (Ep2[3]-Ep1[3])**2)
```

Ds euclidiana (Observador) = 20  
Ds euclidiana (Viajero) = 19.9375

El signo menos garantiza que efectivamente la distancia entre los eventos sea la misma (aproximadamente) en nuestro ejemplo sencillo.

**Proposición 1.11**

**Norma de Minkowski.** La distancia entre dos eventos infinitesimalmente cercanos en el espacio-tiempo en un sistema de referencia inercial es:

$$ds_L^2 = dt^2 - dl_L^2$$

donde  $dl_L$  es la norma euclídea que en coordenadas cartesianas  $dl_L = \sqrt{dx_L^2 + dy_L^2 + dz_L^2}$ .

Esta distancia es independiente del observador que la mida.

Es fácil mostrar que la norma de Minkowski es invariantes bajo transformaciones de Lorentz-Einstein, que es el objetivo que perseguíamos (ver Problemas al final del capítulo).

### 1.10.2. Las variedades de Lorentz y la métrica de Minkowski

Hay una sutil diferencia entre lo que llamamos una *norma*, que es la manera como definimos la magnitud de los vectores en un espacio vectorial (en este caso, el vector desplazamiento en el espacio-tiempo  $dx^\mu$ ) y un concepto geométrico más general, el concepto de *métrica*.

Para introducir este concepto es necesario primero introducir una serie de definiciones matemáticas generales que usaremos a lo largo del texto:

#### Definición 1.14

**Espacio métrico o espacio normado.** Un espacio métrico es un conjunto  $X$  sobre el que podemos definir una *función bilineal*  $g$  entre los elementos del espacio:

$$g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que cumple:

1. Es positiva:  $g(p, q) \geq 0$ .
2. Es simétrica:  $g(p, q) = g(q, p)$ .
3. No es degenerada:  $g(p, q) = 0$  si  $p = q$ .

Donde  $p$  y  $q$  son elementos del conjunto  $X$ . A la función  $g$  se la llama función distancia o **métrica**.

La binealidad de la métrica se expresa mediante las propiedades:

1.  $g(\lambda p_1 + p_2, q) = \lambda g(p_1, q) + g(p_2, q)$
2.  $g(p, \lambda q_1 + q_2) = \lambda g(p, q_1) + g(p, q_2)$

El espacio métrico mejor conocido es el espacio euclíadiano  $\mathbb{R}^3$ , cuyos elementos podemos denotar como  $p : (x_p, y_p, z_p)$  y que tiene métrica:

$$g(p, q) = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2$$

Los conceptos de espacio métrico y métrica se pueden generalizar para construir un conjunto de definiciones que se presentan a continuación de manera *intuitiva* (definiciones más rigurosas pueden encontrarse en textos de geometría diferencial):

#### Definición 1.15

**Conceptos de Variedad.** Una **variedad** es una *estructura matemática* (un conjunto y unas reglas para definir la distancia entre los puntos, es decir, una métrica), que en términos intuitivos generaliza a n-dimensiones los conceptos de curva (1-variedad) y superficie (2-variedad). El espacio euclíadiano  $\mathbb{R}^3$  es una 3-variedad (*trivariedad*). El espacio-tiempo es una 4-

### Definición 1.15 (Cont.)

variedad (*cuadrivariedad*).

Una **variedad diferenciable** es aquella sobre la que podemos definir funciones (campos escalares, campos vectoriales y campos tensoriales) y la operación de derivación. Es decir, sobre una variedad diferenciable se pueden definir y realizar las operaciones propias del cálculo. Así mismo, y usando el mismo cálculo, sobre una variedad diferenciable se puede definir el concepto de longitud de arco.

Alrededor de cada punto de una variedad diferenciable se puede definir un **espacio tangente** que es una variedad euclíadiana que comparte con la variedad original un solo punto. Así por ejemplo: sobre la superficie de una esfera (2-variedad) podemos definir un plano tangente.

Una **variedad de Riemann** es una variedad diferenciable que localmente es *similar* (homeomórfica) al espacio euclíadiano. Un ejemplo de una variedad de Riemann es la superficie de una esfera (2-variedad) que tiene una métrica muy específica. Localmente esta superficie es *similar* a un plano (2-variedad).

Una **pseudo variedad de Riemann** es una variedad diferenciable en la que la función métrica no necesariamente satisface la condición de ser positiva. Localmente una pseudo variedad de Riemann no es *similar* al espacio euclíadiano, sino al que se conoce como el espacio pseudo euclíadiano, que es aquel en el que la función métrica se escribe de forma general como:

$$g(p, q) = (p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_k - q_k)^2 + \dots - (p_{k+1} - q_{k+1})^2 + \dots - (p_N - q_N)^2$$

Nótese que esta métrica es prácticamente idéntica a la métrica euclíadiana, excepto por el signo menos de los últimos términos. Se dice que esta métrica tiene *signatura* (*signature*):  $(k, N - k)$

Una **variedad de Lorentz** es una pseudo variedad de Riemann con una métrica (forma bilineal cuadrática) son *signatura*  $(1, N-1)$ .

De acuerdo con estas definiciones podemos decir que lo que encuentra Minkowski al demostrar que la norma es la que definimos antes es que el espacio-tiempo es una variedad diferenciable pseudo euclíadiana con signatura  $(1, 3)$  y métrica (en el sistema de coordenadas cartesianas):

$$g(x^\mu, x^\mu + dx^\mu) = dt^2 - dx_L^2 - dy_L^2 - dz_L^2$$

En el sistema de coordenadas cilíndricas, la **métrica de Minkowski** será:

$$g(x^\mu, x^\mu + dx^\mu) = dt^2 - dr_L^2 - r^2 d\theta_L^2 - dz_L^2$$

Si usáramos un sistema de coordenadas generalizado y no necesariamente ortogonal, la métrica podría escribirse de forma general como:

$$g(x^\mu, x^\mu + dx^\mu) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

donde  $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$  son cantidades que en general dependen de la posición en el espacio (como lo vemos en la métrica de Minkowski escrita en coordenadas polares y que se conocen como coeficientes métricos).

Por comodidad usaremos la notación:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

En el caso del espacio-tiempo de un observador inercial los coeficientes métricos *en coordenadas cartesianas* son:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Proposición 1.12

**La métrica es un tensor.** La métrica  $g_{\mu\nu}$  es un campo tensorial covariante de segundo orden, es decir, al hacer un cambio de coordenadas  $x^{\mu'}(x^\nu)$  la métrica transforma como:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta}$$

El espacio-tiempo entonces es una variedad diferenciable pseudo-euclíadiana con una métrica de signatura  $(1,3)$ , que llamamos de forma más específica en el contexto de la física, la métrica de Minkowski. Pero más allá de lo rimbombante que estas afirmaciones pueda sonar ¿qué implicaciones tiene todo esto para la relatividad en particular y para la física en general?.

#### 1.10.3. Métrica y tipos de intervalos

Usando la métrica de Minkowski podemos definir los tipos de intervalos así:

- **Intervalo temporaloide.** Este tipo de intervalos se definieron como aquellos en los que se puede encontrar un sistema de referencia en el que los eventos límite ocurran en el mismo lugar del espacio. En otros términos, son intervalos para los cuales se puede encontrar una partícula física que viaje entre ellos. Como sabemos que las partículas viajan con velocidad  $u_L < 1$  entonces  $dt_L^2 < dt^2$  y por lo tanto:

$$ds^2 > 0$$

- **Intervalo espacialoide.** Este tipo de intervalos se definieron como aquellos en los que *no* se puede encontrar un sistema de referencia en el que los eventos límite ocurran en el mismo lugar del espacio. En otros términos, son intervalos para los cuales *no* existe una partícula física que viaje entre ellos. Como

sabemos que las partículas viajan con velocidad  $u_L < 1$  entonces  $dl_L^2 > dt^2$  y por lo tanto:

$$ds^2 < 0$$

- **Intervalo luminoide.** Este tipo de intervalos se definieron como aquellos en los que *no* se puede encontrar un sistema de referencia en el que los eventos límite ocurran en el mismo lugar del espacio, y tampoco en el mismo lugar del tiempo (eventos simultáneos). Solo es posible encontrar rayos de luz que viajen entre ellos, es decir:  $dl_L^2 = dt^2$  y por lo tanto:

$$ds^2 = 0$$

#### 1.10.4. Métrica y tiempo propio

En un sistema de referencia en el que dos eventos (con un intervalo temporaloide) separados en el sistema de referencia del Observador por una distancia  $d\vec{r}_L$ , ocurren en el mismo lugar del espacio, la distancia espacio-temporal es simplemente:

$$ds_L^2 = d\tau^2 - 0^2$$

o bien

$$ds_L = d\tau$$

donde hemos usado de una vez  $\tau$  para representar el hecho de que en este sistema de referencia y como se explicó en sesiones anteriores, este tiempo es el tiempo propio entre los eventos.

Dada la invarianza de la métrica para todos los observadores podemos concluir que **en el caso de intervalos temporaloides y en unidades luz** la métrica (la distancia espacio-temporal entre eventos) no es otra cosa que el tiempo propio entre esos eventos.

Si por el contrario tenemos eventos espacialoides, podemos siempre encontrar un sistema de referencia en el que los eventos límite ocurren en el mismo momento del tiempo, es decir su separación esta relacionada es con la distancia propia entre esos eventos:

$$ds_L^2 = 0^2 - d\lambda_L^2$$

que se podría escribir como:

$$\sqrt{-ds_L^2} = \lambda_L$$

Dada la invarianza de la métrica para todos los observadores podemos concluir que **en el caso de intervalos espacialoides y en unidades luz** la métrica (la distancia espacio-temporal entre eventos) esta relacionada con la distancia propia entre esos eventos.

### 1.10.5. Métrica, dilatación del tiempo y contracción de longitudes

Con las definiciones del aparte anterior se puede entender de forma inmediata la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes.

Consideremos por ejemplo un fenómeno limitado por dos eventos y un intervalo temporaloide. La distancia entre los eventos será:

$$d\tau^2 = dt^2 - dl_L^2$$

donde de una vez hemos usado el hecho que  $ds_L^2 = dt^2$ .

Si reconocemos que  $dl_L/dt = v_L$  es simplemente la velocidad del Viajero, llegamos a la relación conocida:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$$

es decir, la dilatación del tiempo es la manifestación directa de la métrica de Minkowski.

El caso de la contracción de longitudes es un poco más truculento. Para definir la longitud de un objeto que está en reposo para el Viajero, es necesario tomar dos eventos asociados al objeto que ocurren simultáneamente en el sistema del Laboratorio. Para estos dos eventos la distancia medida en los dos sistemas de referencia serán:

$$-dx_L^2 = dt'^2 - d\lambda^2$$

Aquí hay que tener en cuenta que en el sistema del viajero los dos eventos no ocurren simultáneamente sino que ocurren separados por un tiempo  $dt' = u_L d\lambda$ , de allí que:

$$dx_L = \frac{1}{\gamma} d\lambda$$

que ya habíamos obtenido.

### 1.10.6. Vectores y cálculo en el espacio de Minkowski

Possiblemente la más importante de las consecuencias de la *geometrización* de la relatividad, es la idea de que las leyes de la física pueden escribirse en términos de vectores y tensores en el espacio-tiempo y al hacerlo tener la covariancia que esperamos de ellas de acuerdo con el **postulado de relatividad**. Veamos porque.

En el espacio métrico de Minkowski, el vector prototípico es el vector intervalo. Este vector transforma de acuerdo con las TLE como:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Habíamos explicado antes que esta transformación es el equivalente a una rotación hiperbólica en el espacio-tiempo. Sabemos que este vector que transforma de esta manera tiene una propiedad geométrica, su norma, que es invariante bajo TLE:

$$ds^2 = |dx^\mu|^2 = dt^2 - dx_L^2 - dy_L^2 - dz_L^2$$

Podríamos generalizar este resultado para decir que cualquier otro vector que transforme de la manera en la que lo hace el vector intervalo tiene la misma propiedad. Así si una cantidad  $A^\mu : (A^0, A^1, A^2, A^3)$  es tal que:

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu$$

entonces

$$|A^\mu|^2 = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

Una manera más interesante de generalizar lo que sabemos de vectores en el espacio euclidiano a vectores en el espacio de Minkowski es introducir el producto punto o producto interior, que para el vector prototipo (el vector desplazamiento) es:

$$ds^2 = d\tilde{x} \cdot d\tilde{x} \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

y que se puede generalizar para cualquier par de vectores como:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} \equiv g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

o en términos explícitos:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = A^0 B^0 - (A_L^1 B_L^1 + A_L^2 B_L^2 + A_L^3 B_L^3)$$

### Nota

**componentes covariantes y regla de descenso de índices.** Una vez definido el producto punto en el espacio de Minkowski es posible encontrar la relación entre las componentes covariantes y contravariantes de un cuadrivector. Sabemos que las componentes covariantes son:

$$A_\mu = \tilde{A} \cdot \tilde{e}_{(\mu)}$$

Si escribimos el tensor en términos de sus componentes contravariantes como  $\tilde{A} = A^\nu \tilde{e}_{(\nu)}$  y usamos una base ortonormal obtenemos:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Nótese que esta operación parece denotar la idea de que el índice  $\nu$  descendió por efecto de la multiplicación por el tensor métrico y se convirtió en un  $\mu$ . Llamamos a esta una operación de **descenso de índices**. En el espacio de Minkowski y en coordenadas cartesianas la operación de descenso de índices produce:

$$A_t = A^t, A_i = -A^i$$

**Nota (Cont.)**

es decir las componentes covariantes espaciales de un cuadrvector son el negativo de las componentes contravariantes.

La suma de vectores y la multiplicación por un escalar están igualmente definidas en el espacio de Minkowski.

Como sucede en el espacio euclíadiano cualquier expresión matemática que escribamos en términos vectoriales, así por ejemplo

$$\vec{A} + \lambda \vec{B}$$

definirá en sí misma un vector, que transforma como el vector desplazamiento y por lo tanto es covariante bajo las TLE.

El **postulado de relatividad** o postulado de covariancia de las leyes de la naturaleza se puede formular ahora como una proposición:

**Proposición 1.13**

**Leyes físicas y tensores.** Todas las leyes físicas que se expresan en términos de cuadrvectores o tensores de rango superior son covariantes.

Podemos definir una función escalar de variable real  $f(s)$  como es usual (usaremos  $s$  como letra para la variable independiente en lugar de  $x$ ), una función tensorial de variable real  $F^\mu(s)$  o  $g_{\mu\nu}(s)$ , una función escalar o tensorial de variable cuadrvectorial (normalmente de la cuadriposición)  $f(x^\mu)$  o  $F^\mu(x^\mu)$  o  $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ .

Los conceptos regulares del cálculo también están definidos, tales como la derivación:

$$\frac{d}{ds} x^\mu(s) : \left( \frac{d}{ds} t(s), \frac{d}{ds} \vec{r}_L(s), \right)$$

donde  $x^\mu(s)$  describe por ejemplo una línea de universo en el espacio-tiempo y  $s$  puede entenderse como un parámetro que distingue cada punto en el espacio.

La integración:

$$F(s) = \int_0^s f(s') ds'$$

o bien

$$W = \int_0^s F^\mu(s') \cdot dx^\mu(s')$$

### 1.10.7. Minkowski y el postulado de los relojes

De la misma manera que definimos cualquier integral podemos definir la integral de línea fundamental:

$$\tau = \int_0^{s'} ds$$

donde los  $ds$  son temporaloides. Esta es  $s$  la longitud de una curva arbitraria en el espacio tiempo.

Por el postulado de los relojes esta integral es también el tiempo propio de esa línea de universo.

### 1.10.8. Transformación general de cuadrvectores

Hemos visto que cualquier cantidad que transforme como

$$A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} A^\nu$$

es un cuadrvector.

En secciones anteriores habíamos visto una forma general de las transformaciones de Lorentz-Einstein para el cuadrvector posición  $x^\mu : (t, \vec{r}_L)$ :

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \vec{u}_L \cdot \vec{r}_L) \\ \vec{r}'_L &= \vec{r}_L + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \vec{r}_L - \gamma t \right) \vec{u}_L \end{aligned}$$

Esta regla aplicará también para el cuadrvector desplazamiento infinitesimal:

$$dt' = \gamma(dt - \vec{u}_L \cdot d\vec{r}_L) \quad (1.44)$$

$$d\vec{r}'_L = d\vec{r}_L + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot d\vec{r}_L - \gamma dt \right) \vec{u}_L \quad (1.45)$$

Estas relaciones pueden extenderse a cualquier cuadrvector  $A^\mu : (A^0, \vec{A})$ :

$$A^{0'} = \gamma \left( A^0 - \vec{u}_L \cdot \vec{A}_L \right) \quad (1.46)$$

$$\vec{A}'_L = \vec{A}_L + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \vec{A}_L - \gamma A^0 \right) \vec{u}_L \quad (1.47)$$

## 1.11. Cinemática relativística

### 1.11.1. Motivación

En las secciones precedentes construimos las bases teóricas de una relatividad que es consistente con la covarianza de las ecuaciones de Maxwell. Al hacerlo descubrimos propiedades completamente nuevas del espacio y el tiempo de las que no fuimos conscientes antes del advenimiento de las ideas de Albert Einstein y Mileva Maric.

Entre los resultados más sorprendentes que obtuvimos está aquel de que la velocidad de la luz es una velocidad máxima entre los observadores inerciales y por extensión entre cualquier partícula o sistema que se mueva siguiendo una línea de universo temporaloide (que satisface relaciones de causalidad).

Este resultado está sin embargo en abierta contradicción con la cinemática que permite, dada una aceleración arbitraria conseguir una velocidad arbitraria también. Así por ejemplo, si la aceleración de una partícula es constante  $\vec{a}_0$  tal y como es medida en el laboratorio, de acuerdo a un resultado elemental de la cinemática su velocidad será:

$$\vec{v} = \vec{a}_0 t$$

Transcurrido el tiempo suficiente (exactamente  $t = c/a_0$ ) un cuerpo animado con cualquier aceleración conseguirá alcanzar la velocidad de la luz, e incluso superar la barrera. ¿Qué puede estar mal en la cinemática? ¿no es la cinemática nada más que una descripción (sin compromiso con una teoría física específica) del movimiento?

En las siguientes secciones construiremos una nueva cinemática sobre la base de los postulados físicos y matemáticos definidos en las secciones precedentes. El objetivo primario de este esfuerzo será el de deducir una descripción nueva del movimiento en la que, por un lado, no se produzcan situaciones paradójicas como las mencionadas antes y por el otro, la descripción sea rigurosa en el espacio-tiempo.

### 1.11.2. Descripción de una línea de universo

El movimiento de los cuerpos se realiza en el continuo cuadridimensional del espacio-tiempo. Cualquier descripción del movimiento debe ser una descripción de su trayectoria en cuatro dimensiones, su línea de universo como definimos previamente.

En el espacio de Minkowski (en el que se puede definir un sistema de referencia-espacio temporal global) cada punto sobre una línea de universo esta descrito por el cuadrivector posición:

$$\tilde{x} : (t, \vec{r}_L)$$

donde en lo sucesivo usaremos los ":" para indicar que una cosa es el cuadrivector abstracto  $\tilde{x}$  y su representación como una tupla de componentes espacio temporales, que en coordenadas cartesianas serán:

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$$

Cada punto en una línea de universo se distingue del otro por un parámetro arbitrario  $\lambda$ . Como se acostumbra en el cálculo diferencial y en la cinemática clásica este parámetro puede escogerse de muchas maneras. Es corriente usar la longitud de arco  $\ell$  en cálculo o el tiempo  $t$  en cinemática.

En el contexto de la relatividad, sin embargo, es conveniente escoger un parámetro que no cambie al cambiar de sistema de referencia inercial. Esto es, la idea es que el número que usemos para identificar cada punto de la línea de universo sea el mismo independientemente del sistema de referencia que usemos.

En la sección anterior vimos que el *intervalo*  $s$ , medido como la longitud de la línea de universo respecto a un punto de referencia, es el candidato perfecto. Por definición es una cantidad invariante. Pero vimos también que en virtud del postulado de los relojes,  $s$  es equivalente al tiempo propio  $\tau$  medido sobre la línea de universo respecto al mismo punto de referencia.

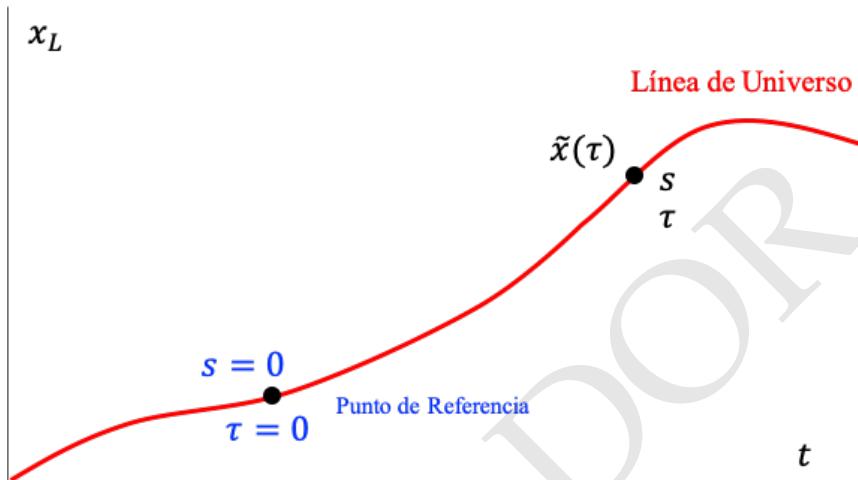


Figura 1.9: Trayectoria en el espacio-tiempo

Esa es la distinción fundamental entre la cinemática clásica en el espacio y la cinemática en cuatro dimensiones.

### 1.11.3. Cuadrivelocidad

En secciones precedentes habíamos definido ya las dos cantidades cinemáticas básicas en el espacio-tiempo.

Definimos la cuadrivelocidad media de una partícula que se mueve entre dos eventos separados por un intervalo temporaloide como:

$$\langle \tilde{U} \rangle = \frac{\Delta \tilde{x}}{\Delta \tau}$$

donde  $\Delta\tau$  es el tiempo propio entre los eventos.

Usando el mismo método de la mecánica convencional podemos extender este concepto al de cuadrivelocidad instantánea:

$$\tilde{U} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{x}^\mu}{\Delta \tau} = \frac{d\tilde{x}}{d\tau}$$

En términos de componentes explícitas:

$$\tilde{U} : \left( \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}_L}{d\tau} \right)$$

Usando el hecho que  $d\tau = dt/\gamma$ , la derivada respecto a  $\tau$  en lo sucesivo será:

$$\frac{d}{d\phi} = \gamma \frac{d}{dt}$$

donde  $\gamma = (1 - v_L^2)^{1/2}$ . Así la cuadrvíelocidad será:

$$\tilde{U} : \gamma (1, \vec{v}_L)$$

donde hemos definido

$$\vec{v}_L \equiv \frac{dx_L^\mu}{dt}$$

### Proposición 1.14

**Cuadrirapidez constante.** Todas las partículas del universo ( $v_L < 1$ ) tienen la misma cuadrirapidez:

$$|\tilde{U}|_L = 1$$

o en unidades convencionales:

$$|\tilde{U}| = c$$

Un resultado que podríamos también formular diciendo que en el espacio-tiempo de Minkowski todas las partículas se mueven con la rapidez de la luz.

Un gráfico de todas las cuadrvíelocidades de todas las partículas en el universo son:

```
%matplotlib inline

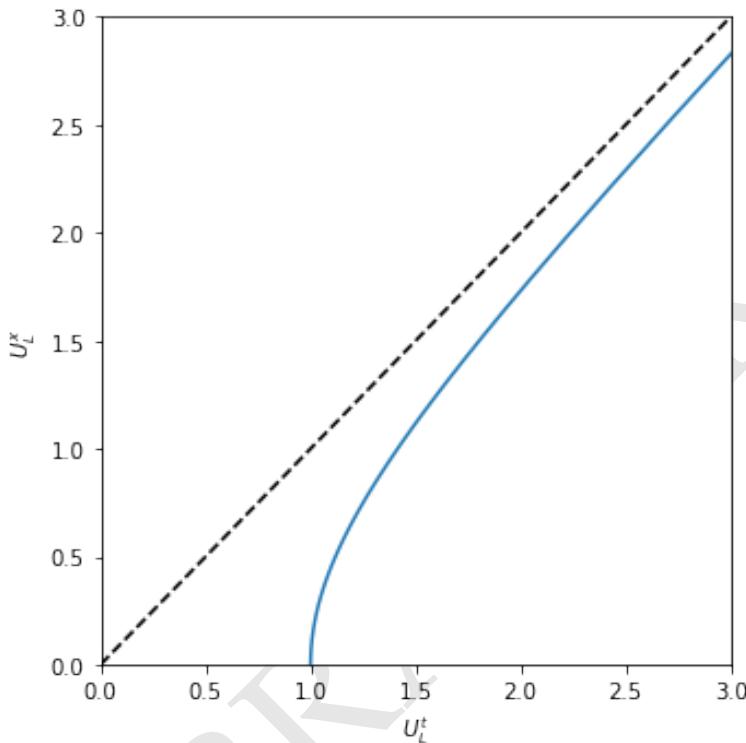
from numpy import linspace
vl=linspace(0,0.95)
gamma=1/(1-vl**2)**0.5
U0=gamma
Ux=gamma*vl

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

ax.plot(U0,Ux)
ax.set_xlim((0,3))
ax.set_ylim((0,3))
ax.plot([0,3],[0,3],'k--')
ax.set_xlabel("$U_L t$")
ax.set_ylabel("$U_{[L]} x$")
fig.tight_layout()
```

(Algoritmo 1.7)

ver Figura 1.10



**Figura 1.10:** Figura correspondiente al código 1.7.

Si incluimos las 3 dimensiones espaciales, todas las cuadrivelocidades del universo están sobre un hiper-hiperboloide de revolución (alrededor del eje  $t$ ):

$$1 = (U_L^0)^2 - (U_L^1)^2 - (U_L^2)^2 - (U_L^3)^2$$

#### 1.11.4. Cuadriaceleración

De la misma manera que definimos la cuadrivelocidad promedio, podemos definir la cuadriaceleración promedio:

$$\langle \tilde{A} \rangle = \frac{\Delta \tilde{U}}{\Delta \tau}$$

La aceleración instantánea sería:

$$\tilde{A} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{U}}{\Delta \tau} = \frac{d \tilde{U}}{d \tau} = \frac{d^2 \tilde{x}}{d \tau^2}$$

Usando el hecho que  $\tilde{U} : (\gamma, \gamma \vec{v}_L)$ , podemos obtener la aceleración con el siguiente procedimiento de SymPy. Primero definimos las variables y funciones básicas:

```
import sympy as sp

#Definimos las variables
t=sp.symbols("t")

#Definimos las funciones básicas
v=sp.Function("v")

#Cantidades derivadas
g=1/sp.sqrt(1-v(t)**2)
```

Después de las definiciones podemos proceder:

```
#Definición de la cuadrivelocidad
U=sp.Array([g,v(t)*g])

#Calculamos la cuadriaceleración
A=g*sp.simplify(sp.diff(U,t))
A
```

**Out[34] :**

$$\left[ \frac{v(t) \frac{d}{dt} v(t)}{(1-v^2(t))^2} \quad \frac{\frac{d}{dt} v(t)}{(1-v^2(t))^2} \right]$$

De donde obtenemos finalmente que en la configuración estándar:

$$A_L^\mu : \gamma^4 (a_{xL} v_{xL}, a_{xL})$$

donde  $a = dv_{xL}/dt$  es la aceleración espacial.

En la configuración general:

$$A_L^\mu : \gamma^4 (\vec{a}_L \cdot \vec{v}_L, \vec{a}_L)$$

Naturalmente aquí  $\vec{a}_L \cdot \vec{v}_L$  es el producto punto euclíadiano.

### Nota

**De unidades luz a unidades convencionales.** Si en un problema dado obtenemos el desplazamiento, la velocidad (cuadrivelocidad) o la aceleración (cuadriaceleración) en unidades luz, podemos volver a obtener las unidades originales como:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} &= c \Delta \vec{r}_L \\ \vec{v} &= c \vec{v}_L \\ \vec{a} &= c \vec{a}_L\end{aligned}$$

Con estas transformaciones, la cuadriaceleración se puede escribir co-

**Nota (Cont.)**

mo:

$$A^\mu : c\gamma^4 \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{c^2}, \frac{\vec{a}}{c} \right)$$

Nótese que si  $\vec{v}_L = \vec{o}$  entonces:

$$A_L^\mu : (0, \vec{\alpha}_L)$$

de donde vemos que el módulo cuadrado de la cuadriaceleración es espacialoide:

$$|A_L^\mu|^2 = -\alpha_L^2$$

Dado que esta cantidad es invariante (la misma para el Observador y el viajero) llamamos a  $\alpha_L$  la aceleración propia de la partícula.

**Proposición 1.15**

**La relación entre la cuadriaceleración y la cuadrivelocidad.** La cuadrivelocidad y la cuadriaceleración son perpendiculares:

$$A^\mu \cdot U^\nu = 0$$

### 1.11.5. Movimiento con cuadriaceleración constante

En un movimiento en el cuál tanto la velocidad como la aceleración dependen del tiempo  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{a}(t)$ , siempre es posible encontrar un sistema de referencia inercial que se mueve instantáneamente con velocidad  $\vec{v}(t)$  tal que la aceleración del cuerpo es la aceleración propia.

Podemos modelar lo que pasa a una partícula que se mueve de una manera tal que su aceleración propia  $\alpha_L$  es constante. En este caso se cumple que:

$$(A_L^0)^2 - (A_L^x)^2 = \alpha_L^2$$

Para saber cuánto valen las componentes de la cuadriaceleración en un momento dado podemos escribir su relación con las componentes de cuadrivelocidad:

$$A_L^0 U_L^0 - A_L^x U_L^x = 0$$

Por otro lado las componentes de la cuadrivelocidad satisfacen:

$$(U_L^0)^2 - (U_L^x)^2 = 1$$

Eliminando obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_L^0 &= \alpha_L U_L^x \\ A_L^x &= \alpha_L U_L^0 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Si derivamos la segunda ecuación respecto del tiempo propio, obtenemos:

$$\frac{dA_L^x}{d\tau} = \alpha_L A_L^0 = \alpha_L^2 U_L^x$$

donde hemos usado primero el hecho que  $dU_L^0/d\tau = A_L^0$  y luego la primera ecuación. Esta ecuación se puede escribir como:

$$\frac{d^2 U_L^x}{d\tau^2} = \alpha_L^2 U_L^x$$

Que tiene como solución general:

$$U_L^x = A \exp(\alpha_L \tau) + B \exp(-\alpha_L \tau)$$

Asumiendo que  $U_L^x(0) = 0$  y  $dU_L^x(0)/d\tau = \alpha_L$  obtenemos la solución para la componente  $x$  de la cuadrvelocidad:

$$U_L^x = \sinh(\alpha_L \tau)$$

Si reconocemos que  $U_L^x = \gamma v_{Lx}$  y despejamos la velocidad obtenemos:

$$v_{Lx} = \tanh(\alpha_L \tau)$$

Si integramos ahora  $U_L^x$  obtenemos para  $x_L$ :

$$x_L(\tau) = \frac{1}{\alpha_L} \cosh(\alpha_L \tau) + k$$

donde  $k$  es una constante. Adumiendo que  $x_L(0) = 0$  la solución para la posición es:

$$x_L(\tau) = \frac{1}{\alpha_L} [\cosh(\alpha_L \tau) - 1]$$

Queda un problema por resolver. Estamos describiendo el movimiento de la partícula en el sistema de referencia del observador donde el tiempo es  $t$ . ¿Cómo se relacionan  $t$  con  $\tau$ ? Nos olvidamos que hay una ecuación diferencial para  $\tau$  que viene dada por  $U_L^0 = dt/d\tau$ . Si usamos la ecuación:

$$A_L^0 = \alpha_L U_L^0$$

y tenemos en cuenta que  $A_L^x = dU_L^x/d\tau = \alpha_L \cosh(\alpha_L \tau)$ , la ecuación para  $t$  queda:

$$\frac{dt}{d\tau} = \cosh(\alpha_L \tau)$$

que se resuelve trivialmente con condición inicial  $t(0) = 0$  como:

$$t = \frac{1}{\alpha_L} \sinh(\alpha_L \tau)$$

**trayectoria de una partícula con aceleración propia constante.** Si una partícula tiene aceleración propia constante  $\alpha_L$ , en la configuración estándar su posición y velocidad son iguales a:

$$t(\tau) = \frac{1}{\alpha_L} \sinh(\alpha_L \tau) \quad (1.49)$$

$$x_L(\tau) = \frac{1}{\alpha_L} [\cosh(\alpha_L \tau) - 1] \quad (1.50)$$

$$v_{Lx}(\tau) = \tanh(\alpha_L \tau) \quad (1.51)$$

Usando esta solución podemos graficar en el espacio tiempo la trayectoria de la partícula:

(Algoritmo 1.8)

```
#Cuadriaceeleración propia constante
alphaL=0.02

#Tiempos propios
from numpy import linspace
taus=linspace(0,100,1000)

#Solución
from numpy import sinh,cosh,tanh
ts=(1/alphaL)*sinh(alphaL*taus)
xLs=(1/alphaL)*(cosh(alphaL*taus)-1)
vLs=tanh(alphaL*taus)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(ts,xLs)

#Decoración
rang=xLs.max()
ax.set_xlim(0,rang)
ax.set_ylim(0,rang)
ax.plot([0,rang],[0,rang], 'k--')
ax.set_xlabel("$t$");
ax.set_ylabel("$x_L$");
ax.grid();
```

ver Figura 1.11

Una prueba muy importante de todo resultado en relatividad es verificar que coincide con el resultado Newtoniano en el límite de velocidades muy pequeñas.

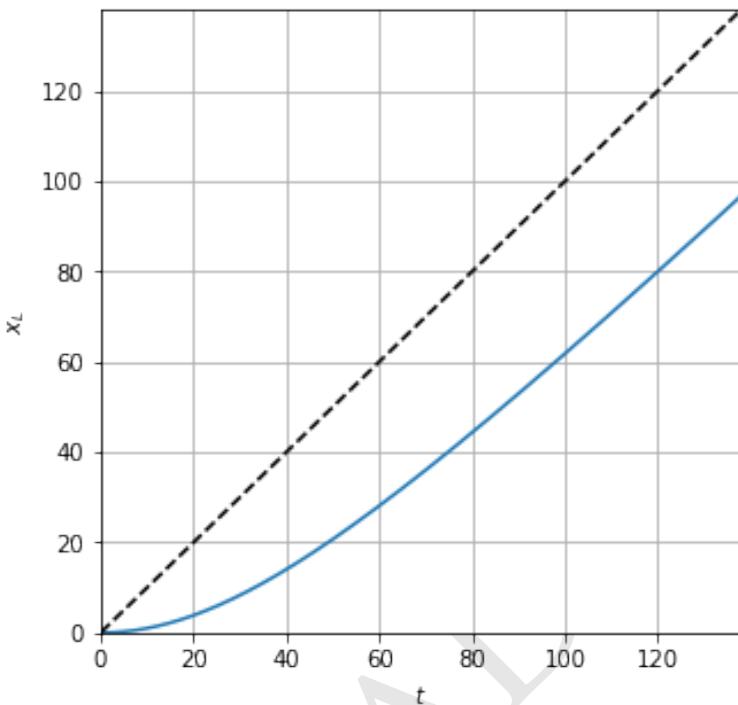


Figura 1.11: Figura correspondiente al código 1.8.

Si usamos la expansión en series de potencias para las funciones  $\sinh$ ,  $\cosh$  y  $\tanh$ :

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (1.52)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (1.53)$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (1.54)$$

$$(1.55)$$

y descartamos términos de orden superior en  $\alpha_L \tau$  obtenemos:

$$t \approx \tau \quad (1.56)$$

$$v_{Lx} \approx \alpha_L \tau \quad (1.57)$$

$$x_L \approx \alpha_L \frac{\tau^2}{2} \quad (1.58)$$

que coincide con las ecuaciones clásicas.

### 1.11.6. La velocidad límite

Hay una interesante consecuencia del resultado obtenido en esta sección. Hábiamos visto que si se mantiene constante la aceleración la velocidad de la partícula es:

$$v_{Lx} = \tanh(\alpha_L \tau)$$

Este resultado no parece más que una curiosidad matemática pero en realidad contiene una consecuencia importante. Para entenderla hagamos un gráfico de  $v_{Lx}$ :

(Algoritmo 1.9)

```
from numpy import linspace,tanh

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

for alfaL in linspace(1e-2,1e-1,5):
    taus=linspace(0,100,100)
    vLxs=tanh(alfaL*taus)
    ax.plot(taus,vLxs,label=fr"\alpha_L={alfaL:.2f}")

ax.legend()
ax.set_xlabel(fr"\tau");
ax.set_ylabel(fr"\$v_{\{Lx\}}\$");
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.12

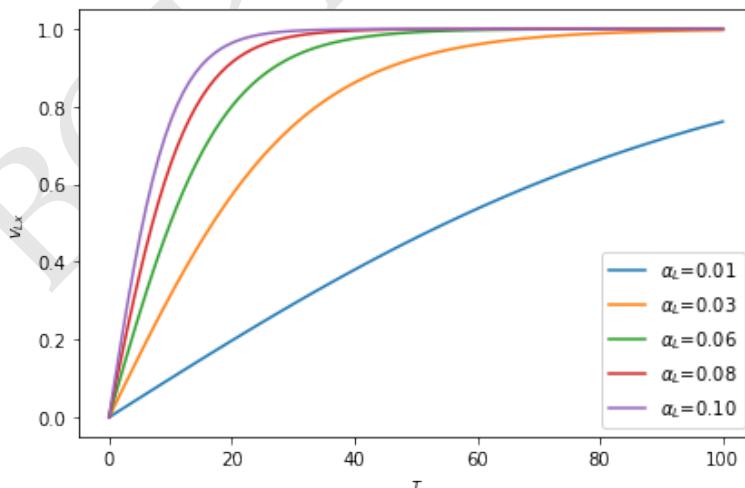
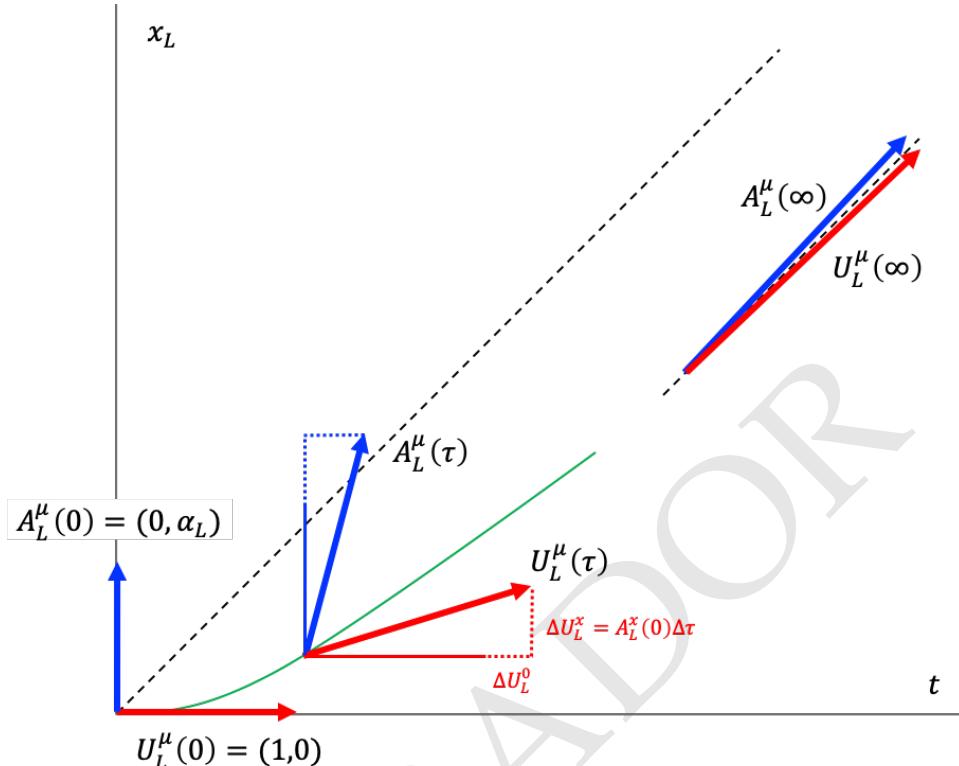


Figura 1.12: Figura correspondiente al código 1.9.

Lo que notamos es que independientemente del valor de la aceleración propia,



**Figura 1.13:** Cambios en la cuadrivelocidad y la cuadriaceleración

la velocidad de la partícula nunca logra ser mayor que 1 (en unidades convencionales, la velocidad de la luz). Esto es consistente con los resultados obtenidos hasta ahora.

Habrá una explicación física de por qué es así, ¿por qué, a pesar de la aceleración sostenida por la partícula, esta nunca logra llevarla a una velocidad mayor que la de la luz?

Una manera posible de explicarlo es apelando a la propiedad nueva de ortogonalidad entre la cuadrivelocidad y la cuadriaceleración. Lo que pasa cuando la velocidad aumenta es que la componente temporal de la cuadriaceleración va aumentando también:

$$A_L^\mu : \gamma^4 (\vec{a}_L \cdot \vec{v}_L, \vec{a}_L)$$

Como resultado no solo la componente espacial de la cuadrivelocidad de la partícula se hace mayor, sino que también lo hace su componente temporal:

$$U_L^\mu : (\gamma, \gamma \vec{v}_L)$$

Cuando la velocidad es próxima a la velocidad de la luz  $v_L \rightarrow 1$ , la cuadriaceleración tiene casi idénticas componentes temporal y espacial  $A_L^\mu \rightarrow (\gamma^4 a_L, \gamma^4 a_L)$ , esto implica que toda ganancia en la componente temporal de la cuadrivelocidad

es igual a la ganancia en la componente espacial de la misma. De este modo, la cuadrivelocidad se mantiene cerca pero nunca igual a la correspondiente a la luz.

Otra manera de entenderlo es ver lo que pasa con la aceleración espacial  $a_L$  cuando la velocidad va aumentando. En la configuración estándar y por la invarianza del módulo de la cuadriaceleración:

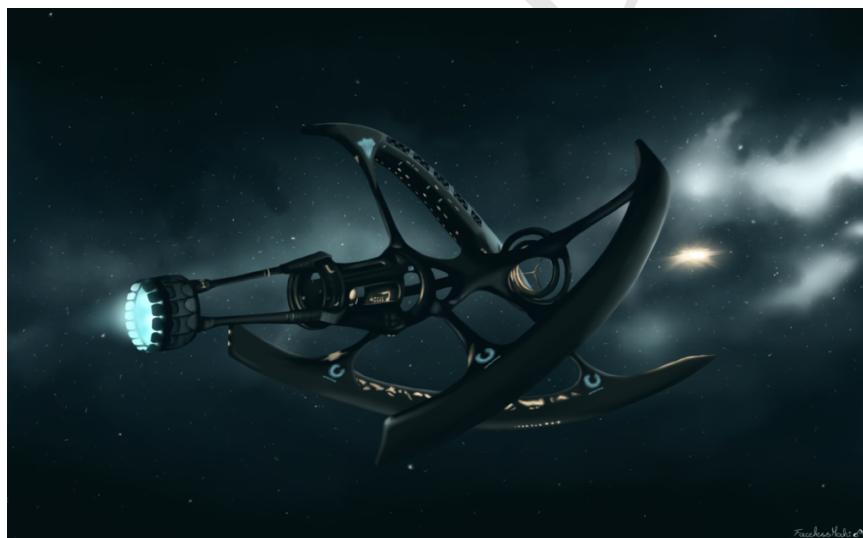
$$\gamma^8(a_L^2 v_L^2 - a_L^2) = -\alpha_L^2$$

de donde despejando  $a_L$  queda:

$$a_L = \frac{1}{\gamma^3} \alpha_L$$

es decir a medida que la velocidad va aumentando ( $\gamma$  va creciendo) la aceleración medida por el Laboratorio se hace cada vez menor. Cuando el cuerpo se aproxima a la velocidad de la luz la aceleración espacial es casi nula y el cuerpo no gana ni un ápice más de velocidad.

### 1.11.7. Ejemplo: una nave interestelar



**Figura 1.14:** Nave interestelar

Uno de los más grandes sueños de exploración de la humanidad ha sido viajar a otras estrellas. Para hacerlo un diseño posible es el de construir una nave capaz de sostener una aceleración constante igual a la aceleración de la gravedad en la Tierra (para simular justamente los efectos de la gravedad), en unidades luz  $\alpha_L = g/c$ . ¿Cuánto le tomaría a una nave así, ir hasta Alpha Centauri situada en  $x_L = 4$  años-luz?

Para encontrar la solución a este problema basta que despejemos  $\tau$  de la ecuación de la posición:

$$\tau = \frac{1}{\alpha_L} \cosh^{-1}(\alpha_L x_L + 1)$$

El manejo de las unidades aquí debe ser cuidadoso. Nótese que  $[\alpha_L] = 1/T_L$  y  $[x_L] = T_L$ , de modo que una vez se escogen las unidades de  $\alpha_L$  quedan fijas las unidades de  $x_L$ .

$$\alpha_L = \frac{g}{c} = \frac{9,8 \text{ m/s}^2}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3,27 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

En este caso las unidades de  $x_L$  deben ser segundos(-luz).

```
#Velocidad de la luz
c=3e8 #m/s

#Aceleración
alphaL=9.8/3e8 #1/segundos-luz = 1 / s-l

#Distancia a recorrer
year=365.25*86400 # segundos
xL=4*year #s-l

#Tiempo propio
from numpy import arccosh
tau=arccosh(alphaL*xL+1)/alphaL #s

#Tiempo coordenado
from numpy import sinh
t=(1/alphaL)*sinh(alphaL*tau) #s

#Velocidad al llegar
from numpy import sinh
vL=tanh(alphaL*tau) # u.l.

print(f"alpha_L = {alphaL} 1/s-1")
print(f"x_L = {xL} s-1")
print(f"alpha_L x_L = {alphaL*xL}")
print(f"tau = {tau} s = {tau/year} años")
print(f"t = {t} s = {t/year} años")
print(f"v_L = {vL} = {vL*c} m/s")
```

```
alpha_L = 3.266666666666667e-08 1/s-1
x_L = 126230400.0 s-1
alpha_L x_L = 4.1235264
tau = 70938597.2561709 s = 2.2479084992575764 años
t = 153826219.22447002 s = 4.874458742885074 años
v_L = 0.9807678219437598 = 294230346.5831279 m/s
```

Para ver las figuras interactivas busque la [versión electrónica del libro](#)<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

## 1.12. Dinámica relativista

Hemos visto:

- Las transformaciones de Galileo-Newton no mantienen las ecuaciones de Maxwell covariantes.
- Para mantener las ecuaciones de Maxwell covariantes deben usarse las transformaciones de Lorentz-Einstein (TLE).
- Las TLE y sus consecuencias demuestran que la física debe hacerse en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones y las cantidades físicas deben representarse como tensores (que transforman como las TLE) y las leyes como ecuaciones tensoriales.

¿Cómo se escriben las leyes de la mecánica en términos tensoriales? (en términos de invariantes). Llamaremos a la mecánica así construida **mecánica relativista**.

### 1.12.1. Masa invariante

El primer concepto central a la meánica relativista es el de **masa invariante**. Llamaremos así a la masa que asignamos a una partícula en un sistema de referencia que en un instante dado se mueve con la misma velocidad instantánea que ella. La masa invariante también se podría llamar **masa propia** siguiendo la convención semántica que habíamos usado hasta ahora.

Consideramos que esta es una cantidad verdaderamente escalar en el contexto del espacio-tiempo y por lo tanto que es una cantidad invariante, es decir, todos los observadores inerciales coincidirán en el valor de esta cantidad.

### 1.12.2. Momentum relativista

Si queremos formular una teoría mecánica relativista (covariante) debemos expresar todas las cantidades en términos de cantidades invariantes, cuadrivectores y tensores.

El momentum newtoniano:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m \frac{d\vec{r}}{dt}$$

claramente no es ni un cuadrivector, ni parte de él. La razón básica es que esta cantidad no transforma como  $dx^\mu$  que es nuestro cuadrivector prototipo.

Si definimos el momentum como:

$$\vec{p} \equiv m \frac{d\vec{r}}{d\tau}$$

dado que  $m$  y  $d\tau$  son invariantes, las componentes de este vector serán *parte* de un verdadero cuadrivector.

#### Definición 1.16

**Momentum relativista.** Una partícula que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  tiene un momento relativista:

**Definición 1.16 (Cont.)**

$$\vec{p} \equiv \gamma(v)m\vec{v}$$

Nótese que el momentum relativista coincide con el momentum clásico para  $v \ll c$ .

De aquí podemos postular:

**Postulado 1.3**

**Conservación del momentum relativista.** El momentum relativista total de un sistema aislado se mantiene constante. Es decir, en ausencia de fuerzas externas:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \sum \vec{p}_i \right) = \frac{d}{d\tau} \left( \sum \gamma(v_i)m_i\vec{v}_i \right) = 0$$

Este postulado ha sido probado experimentalmente en incontables experimentos realizados en aceleradores de partículas.

**Nota**

**unidades luz de la masa y el momentum.** Como hemos venido trabajando en unidades luz todas las cantidades cinemáticas, es interesante preguntarse por cuáles son las unidades del momentum. Tal y como es definido el momentum en unidades convencionales y el momentum en unidades luz se relacionaran como:

$$\vec{p} = c\vec{p}_L$$

A velocidades intermedias y conservando los términos de orden  $v_L^3$  la magnitud del momentum relativista es:

$$p_L \approx mv_L + \frac{1}{2}mv_L^3$$

Este segundo término no se conocía en el mundo clásico.

En el algoritmo abajo mostramos el momentum relativista de una partícula como función de su velocidad.

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 1.10)

```
from numpy import linspace
vLs=linspace(0,0.5,100)
gammas=1/(1-vLs**2)**0.5
```

```
m=1

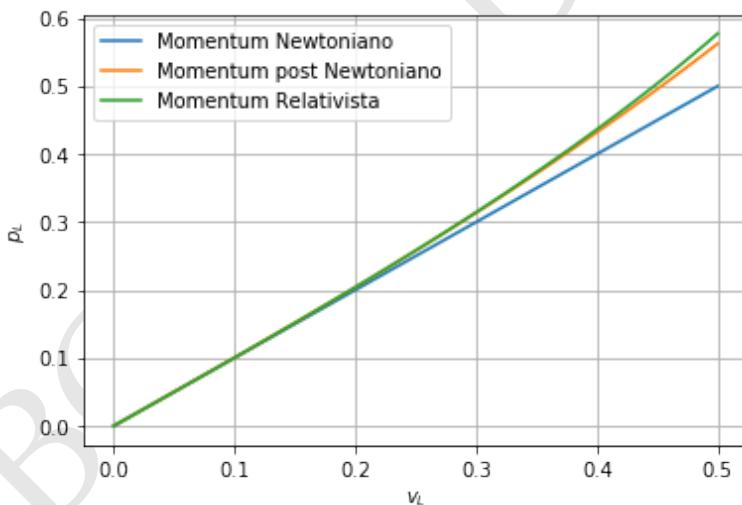
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

pLs_new=m*vLs
pLs_rel=gammas*m*vLs
pLs_apr=m*vLs+0.5*m*vLs**3

ax.plot(vLs,pLs_new,label="Momentum Newtoniano")
ax.plot(vLs,pLs_apr,label="Momentum post Newtoniano")
ax.plot(vLs,pLs_rel,label="Momentum Relativista")

ax.set_xlabel("$v_{\text{L}}$")
ax.set_ylabel("$p_{\text{L}}$")
ax.legend()
ax.grid();
```

*ver Figura 1.15*



**Figura 1.15:** Figura correspondiente al código 1.10.

### Nota

**masa relativística.** Una interpretación *clásica* del momentum relativístico es decir que lo que sucede cuando una partícula se mueve su masa aumenta siguiendo la prescripción:

### Nota (Cont.)

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v_L^2}}$$

donde  $m_r$  se conoce como la **masa relativística**. La mayoría de los autores consideran hoy esta interpretación como conceptualmente imprecisa sino incorrecta. Hay varias razones para ello, siendo la más importante el hecho que siendo  $m$  un escalar no asociado a ninguna cantidad geométrica, no existe una justificación de porque debería transformar como se indica arriba.

Adicionalmente si vemos la expresión para el momentum post Newtoniano:

$$p_L \approx mv_L + \frac{1}{2}mv_L^3$$

notamos que en realidad el aumento de  $p_L$  con la velocidad, por encima del valor newtoniano  $mv_L$  es producto de los términos que no habían sido *descubiertos* y no del aumento en la masa.

### 1.12.3. Energía cinética relativista

El momentum relativista nos sirve para definir otras cantidades útiles. En mecánica clásica el teorema del trabajo y la energía establece que:

$$K = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En esta expresión  $d\vec{r}$  es parte de un cuadrivector, pero la fuerza clásica  $\vec{F}$  no lo es.

Una forma más conveniente de escribir esta expresión clásicamente es identificando:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{v} \cdot d\vec{p}$$

Escribiendo la energía cinética de este modo:

$$K = \int \vec{v} \cdot d\vec{p}$$

#### Postulado 1.4

**Postulado de la energía cinética.** La energía cinética relativista (covariante) se relaciona con el momentum relativista como:

$$k \equiv \int_0^{\vec{v}} \vec{v} \cdot d\vec{p}$$

o en unidades luz:

**Postulado 1.4 (Cont.)**

$$k_L \equiv \int_0^{\vec{v}_L} \vec{v}_L \cdot d\vec{p}_L$$

Por la definición de la energía cinética relativista, la relación entre esta cantidad expresada en unidades luz y la misma cantidad expresada en unidades convencionales es:

$$k = c^2 k_L$$

¿Cómo se expresa la energía cinética explícitamente como función de la velocidad?. En la mecánica Newtoniana sabemos que:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

**Nota**

**cambio de mayúsculas por minúsculas en mecánica relativista.** Es corriente cambiar las letras que usamos para las cantidades mecánica de acuerdo a si son las clásicas (newtonianas) o las relativísticas. Normalmente, si una cantidad se representa con una letra minúscula en la mecánica newtoniana, se representará con una letra mayúscula en la mecánica relativista y viceversa. Existen, naturalmente, algunas excepciones notables. A continuación se enumeran estas *transformaciones* de notación:

Mecánica Newtoniana	→	Mecánica Relativista [Factor luz, Unidades]
$dt$	→	$d\tau$ (tiempo) [ $1/\gamma, s$ ]
$d\vec{r}$	→	$d\tilde{x}$ (cuadrídesplazamiento) [ $1/c, sl$ ]
$\vec{v}$	→	$\tilde{U}$ (cuadrivelocidad) [ $1/c, adim.$ ]
$\vec{a}$	→	$\tilde{A}$ (cuadriaceleración) [ $1/c, 1/sl$ ]
$m$	→	$m$ (masa invariante) [ $1, kg$ ]
$\vec{p}$	→	$\tilde{p}$ (trimomentum) [ $1/c, kgl$ ]
$\vec{p}$	→	$\tilde{P}$ (cuadrimomentum) [ $1/c, kgl$ ]
$K$	→	$k$ (energía cinética relativista) [ $1/c^2, kgl$ ]
$E$	→	$E$ (energía total relativista) [ $1/c^2, kgl$ ]
$\vec{F}$	→	$\tilde{f}$ (cuadrifuerza) [ $1/c, kgl$ ]

Por el *factor luz* entendemos el factor de conversión entre la cantidad en unidades convencionales y unidades-luz. Así por ejemplo:

$$E_L = \frac{E}{c^2}$$

Las unidades "sl" (segundos-luz, 1 sl =  $c$  km) y "kgl" (kilogramos-luz,

**Nota (Cont.)**

$1 \text{ kgl} = c^2 \text{ kg}$ ) son unidades especiales usadas aquí para hacer consistentes las unidades en todas las expresiones.

Reemplazando la definición del momentum relativista en la definición de energía cinética:

$$k_L = \int_0^{\vec{v}_L} \vec{v}_L \cdot m \, d\left(\frac{\vec{v}_L}{\sqrt{1 - v_L^2}}\right)$$

Integrando por partes obtenemos:

$$k_L = (\gamma - 1)m$$

o en unidades convencionales

$$k = (\gamma - 1)mc^2$$

Expandiendo  $\gamma - 1$ :

$$k_L \approx \frac{1}{2}mv_L^2$$

que coincide con lo que sabemos en mecánica Newtoniana.

#### 1.12.4. Energía total relativista

Una manera de escribir la energía cinética es:

$$k_L = \gamma m - m$$

o en unidades convencionales:

$$k = \gamma(v)mc^2 - \gamma(0)mc^2$$

donde hemos usado el hecho de que  $\gamma(0) = 1$ .

Estas dos expresiones dan la idea de que cuando sobre una partícula se realiza un trabajo (igual a  $k$ ) una cantidad asociada con la partícula cambia de valor. No importa la naturaleza del trabajo realizado, siempre esa cantidad cambia de valor. La cantidad es:

$$E = \gamma mc^2$$

o en unidades luz:

$$E_L = \gamma m$$

¿Qué tiene de especial esta cantidad?. Puede mostrarse (ver Problemas al final del capítulo) que esta cantidad se conserva.

### 1.16

**Proposición. Conservación de la energía total relativista.** Dado un sistema aislado formado por partículas de masas invariantes  $\{m_i\}$  que se mueven con velocidades instantáneas  $\{\vec{v}_i\}$  que pueden cambiar en el tiempo como resultado de su mutua interacción, entonces la cantidad:

$$E \equiv \sum_i (k_i + m_i c^2) = \sum_i \gamma(v_i) m_i c^2$$

es constante. Llamarémos a  $E$  la **energía total** del sistema.

En unidades luz:

$$E_L \equiv \sum_i \gamma(v_{Li}) m_i$$

#### 1.12.5. Cuadrimomentum

Hasta ahora todas las cantidades mecánicas definidas son cantidades vectoriales (trivectores) o escalares. Sin embargo para formular leyes físicas covariantes, estas deben escribirse rigurosamente en términos de tensores.

Existe una poderosa simetría en relatividad que emerge de las relaciones anteriores.

Nótese que hemos postulado y demostrado la conservación de dos cantidades claves:

- Momentum relativista:  $\vec{p}_L = \gamma m \vec{v}_L$
- Energía relativista:  $E_L = \gamma m$

¿Podrían estas dos cantidades usarse para definir una única cantidad conservada en 4 dimensiones?. Es fácil ver que si definimos la cantidad:

$$\tilde{P}_L : (E_L, \vec{p}_L)$$

las componentes de esta cantidad serán conservadas y por lo tanto la cantidad cuadrivectorial será conservada también.

En términos de la masa invariante y la velocidad la cantidad se escribe:

$$\tilde{P}_L : m\gamma(1, \vec{v}_L)$$

pero identificamos aquí a la cuadrivelocidad  $\tilde{U}_L : \gamma(1, \vec{v}_L)$  y por lo tanto podemos escribir:

$$\tilde{P}_L = m\tilde{U}_L$$

o en general:

$$\tilde{P} = m\tilde{U}$$

**Proposición: Conservación del cuadrimomentum.** Si en un sistema aislado definimos el cuadrimomentum como:

$$\tilde{P} \equiv \sum_i m_i \tilde{U}_i$$

entonces esta cantidad se mantiene constante. El cuadrimomentum de cada partícula tiene componentes:

$$\tilde{P}_{iL} : (E_{iL}, \vec{p}_{iL})$$

o en unidades convencionales:

$$\tilde{P}_i : (E/c, \vec{p}_i)$$

### 1.12.6. Magnitud del cuadrimomentum y la simetría gauge

¿Cuál era la simetría de la que hablábamos antes?. La magnitud del cuadrimomentum es por definición:

$$|\tilde{P}_L|^2 = |mU_L^\mu|^2 = m^2$$

y por componentes:

$$|\tilde{P}_L|^2 = E_L^2 - p_L^2$$

De aquí se sigue la relación fundamental:

$$m^2 = E_L^2 - p_L^2$$

o en unidades convencionales:

$$m^2 = E^2/c^4 - p^2/c^2$$

que se escribe tradicionalmente como:

$$(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$$

#### Nota

**La masa como una cantidad geométrica.** Vemos que el cuadrimomentum ofrece una interesante interpretación para la masa. La masa como la magnitud del cuadrimomentum. Esto explica su invarianza (los módulos son invariantes geométricos). Sin embargo debe entenderse que la masa como módulo del cuadrimomentum es *resultado* de asumir que es una cantidad invariante y no al revés.

Esta relación es increíble porque abre la posibilidad para que las partículas tengan masa nula. Si

$$E_L = p_L$$

o lo que es lo mismo, en unidades convencionales:

$$E/c^2 = p/c$$

o bien

$$E = pc$$

entonces la partícula tendrá masa nula.

Esta última relación es conocida en el electromagnetismo y es la relación entre la energía y el momentum transportado por una onda electromagnética. Es decir, podemos asociar a las ondas electromagnéticas masa nula. En la moderna teoría cuántica de campos a esta condición se la llama **simetría gauge**.

### 1.12.7. Cuadrimomentum en el espacio-tiempo

La relación entre la masa, la energía y el momentum, muestra una propiedad muy interesante en el espacio-tiempo. Si construimos un espacio con coordenadas  $E_L$  y  $p_{Lx}$  (espacio energía-momentum) entonces la ecuación de la masa indica que no importa el estado de movimiento en el que se encuentre una partícula siempre estará sobre una hipérbola en este espacio.

Si usamos el hecho:

$$E_L^2 = m^2 + p_{Lx}^2$$

podemos hacer una gráfica del lugar geométrico del cuadrimomentum en el espacio energía-momentum para distintas velocidades.

```
%matplotlib inline

#Masa de la partícula
m=1 # kg

#Momenta y energías
from numpy import linspace,sqrt
pLs=linspace(0,3)
ELs=sqrt(m**2+pLs**2)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(ELs,pLs)

#Decoración
rang=ELs.max()
```

(Algoritmo 1.11)

```

ax.set_xlim((0,rang))
ax.set_ylim((0,rang))
ax.plot([0,rang],[0,rang], 'k--')
ax.set_xlabel("$E_L$");
ax.set_ylabel("$p_{Lx}$");
ax.grid();
fig.tight_layout();

```

*ver Figura 1.16*

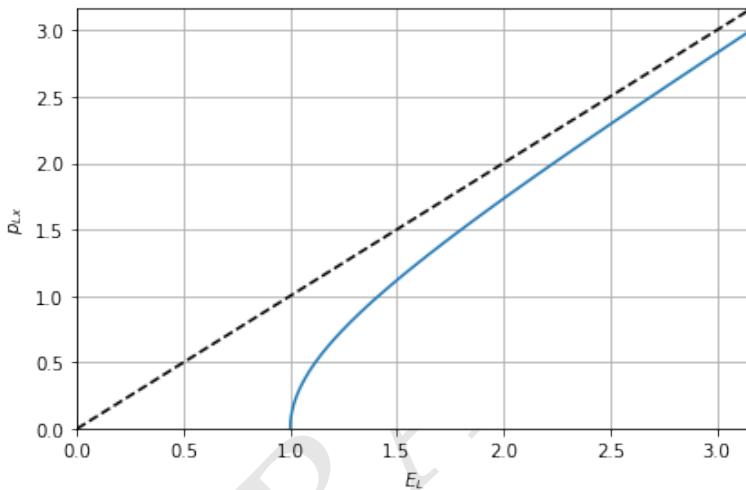


Figura 1.16: Figura correspondiente al código 1.11.

## 1.13. Colisiones relativistas

Una de las más interesantes aplicaciones que tiene la dinámica relativista, es el estudio de colisiones entre partículas de alta energía. Estas colisiones pueden ocurrir en el Universo en el interior de estrellas agonizantes, en el Universo primitivo, en los rayos cósmicos cuando colisionan con el medio interestelar o la atmósfera de la Tierra e incluso con la radiación de fondo. Naturalmente, en la Tierra, las colisiones de alta energía se han usado por décadas para estudiar la estructura íntima de la materia y el funcionamiento de las fuerzas fundamentales.

### 1.13.1. Energía en el centro de masa

Considere dos partículas idénticas que chocan. Una de ellas está animada de una velocidad muy grande (vista en el sistema de referencia del observador (que llamaremos aquí **sistema de referencia del laboratorio**) y la otra está en reposo allí. ¿Cómo son sus cuadrimomentos individuales? ¿cuál es su cuadrimomento total?

Consideremos en general dos partículas de masas diferentes,  $m_1$  (impactor) y  $m_2$  (objetivo o *target*). Inicialmente el impactor tiene una velocidad en el sistema

de referencia del laboratorio  $v_1^{\text{lab}}$  que lo anima de un momento lineal allí  $p_{L1} = \gamma_1 m_1 v_1^{\text{lab}}$ . El cuadrimomento total en el laboratorio será:

$$P_L^{\text{lab}} : (E_{L1}^{\text{lab}}, p_{L1}^{\text{lab}}) + (E_{L2}^{\text{lab}}, 0)$$

El módulo de este cuadrimomento será:

$$\begin{aligned} M^2 &= (E_{L1}^{\text{lab}} + E_{L2}^{\text{lab}})^2 - (p_{L1}^{\text{lab}})^2 \\ &= (E_{L1}^{\text{lab}})^2 - (p_{L1}^{\text{lab}})^2 + (E_{L2}^{\text{lab}})^2 + 2E_{L1}^{\text{lab}} E_{L2}^{\text{lab}} \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{L1}^{\text{lab}} \end{aligned}$$

donde hemos introducido el parámetro  $M$  como el módulo del cuadrimomento total.

Si nos pasamos ahora al **sistema de referencia del centro de masa**, es decir, aquel en el que el momento lineal total del sistema es cero:

$$P_L^{\text{CM}} : (E_{L1}^{\text{CM}}, p_L^{\text{CM}}) + (E_{L2}^{\text{CM}}, -p_L^{\text{CM}})$$

En este sistema de referencia el módulo del cuadrimomento será el mismo, pero su dependencia de las masas de las partículas individuales será diferente:

$$M^2 = (E_{L1}^{\text{CM}} + E_{L2}^{\text{CM}})^2 = (E_L^{\text{CM,fix}})^2$$

La diferencia será que esta energía está completamente disponible para la producción de partículas. Igualando nos queda:

$$E_L^{\text{CM,fix}} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_{L1}^{\text{lab}}}$$

Si asumimos que la energía de la partícula impactora es mucho mayor que su masa y la del blanco  $E_{L1}^{\text{lab}} \gg m_1, m_2$ , entonces la energía del impacto en el centro de masa será:

$$E_L^{\text{CM,fix}} \approx \sqrt{2m_2 E_{L1}^{\text{lab}}}$$

¿Qué pasa ahora si lo que tengo ahora son dos partículas que se mueven una hacia la otra con una cierta velocidad?. EN ese caso el momento total será:

$$P_L^{\text{lab}} : (E_{L1}^{\text{lab}}, p_{L1}^{\text{lab}}) + (E_{L2}^{\text{lab}}, -p_{L2}^{\text{lab}})$$

cuyo módulo será:

$$\begin{aligned} (E_L^{\text{CM,col}})^2 &= (E_{L1}^{\text{lab}} + E_{L2}^{\text{lab}})^2 - (p_{L1}^{\text{lab}} - p_{L2}^{\text{lab}})^2 \\ &= (E_{L1}^{\text{lab}})^2 - (p_{L1}^{\text{lab}})^2 + (E_{L2}^{\text{lab}})^2 - (p_{L2}^{\text{lab}})^2 + 2(E_{L1}^{\text{lab}} E_{L2}^{\text{lab}} + p_{L1}^{\text{lab}} p_{L2}^{\text{lab}}) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_{L1}^{\text{lab}} E_{L2}^{\text{lab}} + p_{L1}^{\text{lab}} p_{L2}^{\text{lab}}) \end{aligned}$$

¿Cuál es la diferencia entre esta situación y la anterior?. Si suponemos que  $E_{L1}^{\text{lab}}, E_{L2}^{\text{lab}} \gg m_1, m_2$  y por tanto  $p_{L1}^{\text{lab}} \approx E_{L1}^{\text{lab}}$  y  $p_{L2}^{\text{lab}} \approx E_{L2}^{\text{lab}}$ , entonces la energía en el centro de masa de estas colisiones será:

$$E_L^{\text{CM,col}} \approx \sqrt{4E_{L1}^{\text{lab}} E_{L2}^{\text{lab}}}$$

Comparando las energía disponibles en el centro de masa en el caso de una colisión con un objetivo fijo y la colisión de dos haces, vemos que la energía disponible en este segundo caso es mucho mayor.

Pongámosle número a estos procesos. Imaginemos que tenemos un acelerador que puede llevar protones hasta 7 TeV de energía (energía típica en el LHC). ¿Cuánta energía en el centro de masa podemos conseguir si disparamos estos protones hacia protones que están en reposo? En unidades convencionales:

$$\frac{E_{CM,fix}}{c^2} \approx \sqrt{2m_2 \frac{E_1^{lab}}{c^2}}$$

o lo que es lo mismo:

$$E_{CM,fix} \approx \sqrt{2(m_2 c^2) E_1^{lab}}$$

La energía en reposo de un protón  $mc^2 = 938 \text{ MeV} = 0,938 \text{ TeV}$ .

```
#Masa del protón
mc2=0.938 #TeV
E1_lab=7 #TeV

#Energía en el centro de masa para choque fijo
ECM_fix=(2*mc2*E1_lab)**0.5
```

`ECM_fix = 3.6238101495525394 TeV`

En contraposición la energía en el centro de masa obtenida si hacemos chocar dos haces de protones con 7 TeV es:

```
#Energía en el centro de masa para colisión
ECM_col=(4*E1_lab*E1_lab)**0.5
```

`ECM_col = 14.0 TeV`  
`ECM_col / ECM_fix = 3.86`

Es decir, con una colisión frontal es posible extraer casi 4 veces más energía de una colisión que con la colisión en reposo.

Cuánta energía necesitaría un haz de protones que choca contra un blanco fijo de protones para igualar esta energía e 14 TeV. Igualando  $E_{CM,fix}$  con  $E_{CM,lab}$  obtenemos:

$$\sqrt{2m E_L^{lab,fix-eq}} = \sqrt{4(E_L^{lab,col})^2}$$

y despejando  $E_L^{lab,fix-eq}$  obtenemos:

$$E_L^{lab,fix-eq} = \frac{2(E_L^{lab,col})^2}{m}$$

De modo que para igualar la energía en el centro de masa obtenida por una colisión de haces de protones ( $mc^2 = 0,938 \text{ TeV}$ ) con energía  $E^{lab,col} = 14 \text{ TeV}$ , será:

$$E_L^{lab,fix-eq} \approx 418 \text{ TeV}$$

### 1.13.2. Choques con la luz

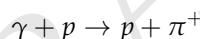
Los choques con fotones son una de las situaciones más comunes en astrofísica de altas energías. Lo que debemos tener en cuenta cuando describimos la colisión con un fotón es que su masa invariante es cero, de modo que:

$$E_L^{\text{fotn}} = p_L^{\text{fotn}}$$

Existen tres posibles resultados de la colisión con un fotón:

1. **Efecto Compton.** La dispersión de un fotón de alta energía contra una partícula, de modo que la partícula recibe energía del fotón.
2. **Efecto Compton inverso.** La dispersión de una partícula de alta energía contra un fotón, de modo que el fotón recibe energía.
3. **Absorción.** La absorción de un fotón de alta energía por una partícula y la producción de nuevas partículas a partir de este proceso.

Consideremos el último proceso. Un caso particular de una reacción de este tipo se produce en la radiación cósmica de fondo (RCF). En este caso protones de alta energía pueden chocar con los fotones de la RCF produciendo la reacción:



donde  $m_p c^2 = 938 \text{ MeV}$  y  $m_\pi c^2 = 140 \text{ MeV}$ . ¿Cuál es la energía mínima que deber tener el protón para producir esta reacción con un fotón con una energía dada?

Podemos calcular esta energía asumiendo que al crearse, el neutrón y el pión resultante de la reacción anterior se crean en reposo en el sistema de referencia de su centro de masa (esta sería la mínima energía). Ahora bien, como el módulo del cuadrimomentum es el mismo en cualquier sistema de referencia de modo que:

$$\begin{aligned} |P_{L\gamma}^{\text{lab}} + P_{Lp}^{\text{lab}}|^2 &= |P_{Lp}^{\text{res}} + P_{L\pi}^{\text{res}}|^2 \\ |(E_{L\gamma}^{\text{lab}} + E_{Lp}^{\text{lab}}, E_{L\gamma}^{\text{lab}} - p_{Lp}^{\text{lab}})|^2 &= (m_p + m_\pi)^2 \\ 2E_{L\gamma}^{\text{lab}} E_{Lp}^{\text{lab}} + m_p^2 + 2p_{Lp}^{\text{lab}} E_{L\gamma}^{\text{lab}} &= (m_p + m_\pi)^2 \end{aligned}$$

Si dejamos solo las propiedades del protón en un solo lado:

$$E_{Lp}^{\text{lab}} + p_{Lp}^{\text{lab}} = \frac{(m_p + m_\pi)^2 - m_p^2}{2E_{L\gamma}^{\text{lab}}}$$

Usando la relación  $(p_{Lp}^{\text{lab}})^2 = (E_{Lp}^{\text{lab}})^2 - m_p^2$ , la energía del protón estaría determinada por:

$$E_{Lp}^{\text{lab}} + \sqrt{(E_{Lp}^{\text{lab}})^2 - m_p^2} = \frac{m_\pi^2 + 2m_\pi m_p}{2E_{L\gamma}^{\text{lab}}}$$

### 1.13.3. Una aplicación: El límite GZK

Ahora bien ¿en qué situaciones un protón de alta energía puede toparse con un fotón? Para que esto pase la abundancia de fotones debe ser enorme. Los fotones más energéticos en el Universo son los fotones de la radiación cósmica de fondo que tienen además una muy pequeña energía  $E_\gamma = 2,5 \times 10^{-10}$  MeV. Esto implica que para producir la reacción anterior el protón debe tener una energía enorme,  $E_{Lp}^{\text{lab}} \gg m_p$ . Con esto podemos finalmente aproximar la expresión anterior como:

$$E_{Lp}^{\text{lab}} \approx \frac{m_\pi^2 + 2m_\pi m_p}{4E_{L\gamma}^{\text{lab}}}$$

que en unidades convencionales quedaría:

$$E_p^{\text{lab}} \approx \frac{(m_\pi c^2)^2 + 2(m_\pi c^2)(m_p c^2)}{4E_\gamma^{\text{lab}}}$$

Usando la energía de los fotones de rayos gama obtenemos:

```
mpc2=938 #MeV
mpic2=140 #MeV
ERCF=2.5e-10 #MeV

Ep=((mpic2)**2+2*mpic2*mpc2)/(4*ERCF)
```

Energía límite de protones = 2.822400e+20 eV

Llamamos a este el *umbral de Greisen–Zatsepin–Kuzmin* y corresponde a la energía máxima en la que un protón de rayos cósmicos puede viajar sin sufrir interacciones relevantes con los fotones de la radiación de fondo.

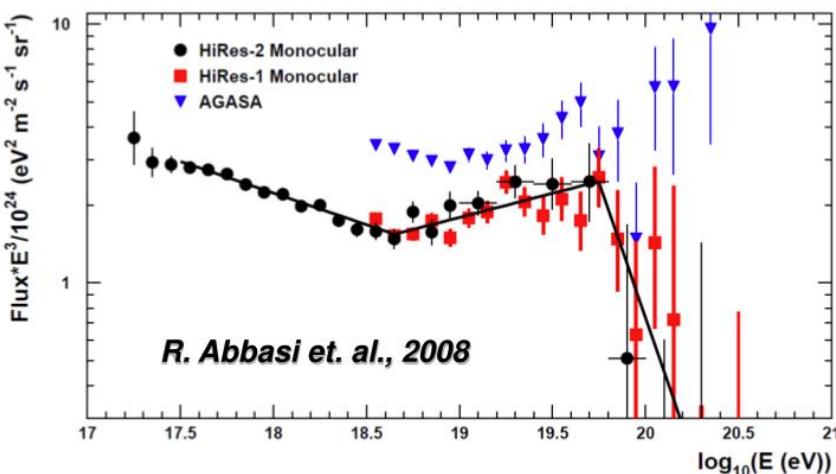


Figura 1.17: Umbral GZK

### 1.13.4. Colisiones relativistas interactivas

Una excelente manera de entender las colisiones relativistas y algunos de los resultados que hemos mostrado antes es graficando el resultado de estas interacciones en diagramas espacio-tiempo.

En el código interactivo abajo podemos ver el resultado de la colisión de dos partículas cuya naturaleza se puede modificar a voluntad y cambiar el sistema de referencia desde el que se ve la colisión.

```

def colision_relativista(m1=940,E1=7000,
                         m2=940,E2=940,
                         uL=0.0,
                         rang=5000,
                         ):
    m1=float(m1)
    m2=float(m2)
    E1=float(E1)
    E2=float(E2)

    #Factor gama de las partículas
    if m1>0:
        gama1=E1/m1
        pc1=(E1**2-m1**2)**0.5
    else:
        pc1=E1
    if m2>0:
        gama2=E2/m2
        pc2=(E2**2-m2**2)**0.5
    else:
        pc2=E2

    #Componentes de los cuadrimomentos
    from numpy import array
    P1=array([E1,pc1])
    P2=array([E2,-pc2])

    #Rotar los ejes de acuerdo a uL
    gamma=1/(1-uL)**0.5
    Pp1=array([0,0])
    Pp1[0]=gamma*(P1[0]-uL*P1[1])
    Pp1[1]=gamma*(-uL*P1[0]+P1[1])
    Pp2=array([0,0])
    Pp2[0]=gamma*(P2[0]-uL*P2[1])
    Pp2[1]=gamma*(-uL*P2[0]+P2[1])

    #Cuadrimomento total
    PpT=Pp1+Pp2

    #Masa asociada
    M=(PpT[0]**2-PpT[1]**2)**0.5

```

```

#Gráfica
import matplotlib.pyplot as plt
plt.close("all")
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

ax.arrow(0,0,Pp1[0],Pp1[1],color='r',lw=2,zorder=100)
ax.arrow(0,0,Pp2[0],Pp2[1],color='r',lw=2,zorder=100)
ax.arrow(0,0,PpT[0],PpT[1],color='b',zorder=100)
ax.arrow(0,0,M,0,color='k',lw=2,alpha=0.3,zorder=100)

#Decoración
ax.grid(zorder=-100);
ax.set_xlim((-0.1,rang));
ax.set_ylim((-rang,rang));
ax.set_title(f"\$u_L={uL:0.2f}\$ c, \$m_1\ c^2={m1}\$ MeV, \$m_2\ c^2={m2}\$ MeV",fontsize=10)
ax.set_xlabel(f"\$E\$ [MeV]");
ax.set_ylabel(f"\$pc\$ [MeV]");
fig.tight_layout();

```

(Algoritmo 1.12)

```

from ipywidgets import interact,fixed,widgets
opciones=dict(continuous_update=False)
interact(colision_relativista,
         uL=widgets.FloatSlider(value=0.0,min=-0.99,max=0.99,step=0.01,**opciones),
         rang=widgets.FloatSlider(value=10000.0,min=1000,max=50000,step=1000,**opciones),
         m1=widgets.Text(value="940",**opciones),
         m2=widgets.Text(value="940",**opciones),
         E1=widgets.Text(value="1000",**opciones),
         E2=widgets.Text(value="940",**opciones),
         );

```

ver Figura 1.18

## 1.14. Cuadrifuerza

Uno de los conceptos más complicados de la mecánica Newtoniana es el concepto de fuerza. Podría decirse que, incluso en el siglo xxi las discusiones alrededor de este concepto han sido difícilmente resueltas. No es la excepción para el mismo concepto pero en el contexto de la dinámica relativista.

En la mecánica newtoniana la *fuerza resultante* se define como:

$$\vec{\mathcal{F}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

es decir, entendemos por fuerza la manifestación de cualquier cambio en el momento lineal de una partícula. Una cosa muy diferente es cuál es el origen de ese cambio.

Independientemente se postula la existencia de fenómenos que se manifiestan a través de lo que podemos llamar *fuerzas aplicadas*  $\vec{F}$ . Así por ejemplo la fricción

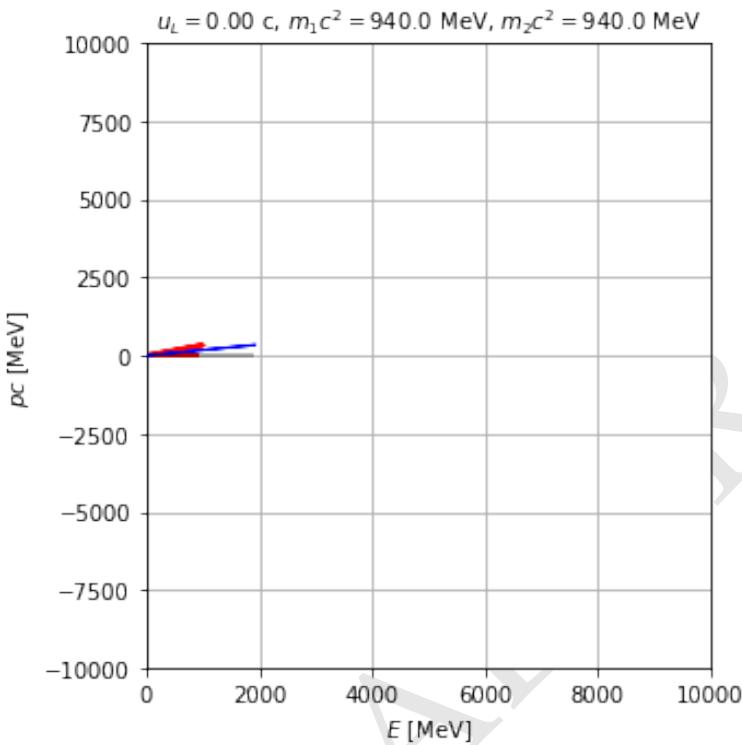


Figura 1.18: Figura correspondiente al código 1.12.

de dos superficies en el movimiento de cuerpos macroscópicos se describe con una fuerza aplicada efectiva que llamamos *fuerza de fricción* y que se modela de formas muy diversas. La atracción evidente entre cuerpos con masa se modela también con una fuerza aplicada conocida, la fuerza gravitacional, y el caso de una partícula cargada que se mueve en un campo eléctrico y magnético, también puede modelarse usando una fuerza aplicada (la fuerza de Lorentz).

El postulado de fuerza Newtoniano se puede formular diciendo que la fuerza aplicada (cualquiera de las anteriores) es igual a la fuerza resultante:

$$\vec{F} = \vec{F}$$

o en otros términos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

que es la que llamamos también la *segunda ley de Newton*.

La pregunta de la relatividad sería ¿cuál es la versión covariante de esta ley? ¿se reduce la versión covariante del postulado de fuerzas a la versión relativista a bajas velocidades?

Previamente habíamos definido el trimomentum como:

$$\vec{p} \equiv \gamma(v)m\vec{v}$$

Mostramos que esta cantidad se conserva en las colisiones.

De aquí podemos definir la trifuerza resultante como:

$$\vec{\mathcal{F}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m\vec{v})}{dt}$$

esta cantidad es la que está implicada en los procesos de interacción reales (covariantes), aquella que se relaciona con la conservación del trimomentum. Nótese la diferencia entre esta definición y la definición clásica, en tanto en esta definición está presente el factor de Lorentz-Einstein.

**Nota: Unidades luz de la trifuerza.** Por la definición misma de la trifuerza,  $\vec{\mathcal{F}} = d\vec{p}/dt$  la relación entre la fuerza en unidades luz y la fuerza en unidades convencionales sería:

$$\vec{F} = c\vec{\mathcal{F}}_L$$

Curiosamente, el desarrollo del lado derecho de la ecuación anterior no conduce a ninguna expresión relevante o simple (aunque naturalmente puede hacerse). Solo la introducción de una cantidad más general puede darnos luz sobre la verdadera interpretación de esta cantidad.

De la misma manera como definimos el cuadrimomentum podemos definir ahora la cuadrifuerza en analogía:

$$\tilde{f} \equiv \frac{d\tilde{P}}{d\tau}$$

Esta ecuación puede escribirse de dos maneras diferentes:

- Como una forma generalizada de la *segunda ley de Newton* en el espacio-tiempo:

$$\tilde{f} = m\tilde{A}$$

de donde podemos obtener las componentes de la cuadrifuerza usando aquellas que dedujimos para la cuadriaceletación:

$$\tilde{f}_L : \gamma^4(m\vec{a}_L \cdot \vec{v}_L, m\vec{a}_L)$$

- Derivando explícitamente las componentes del cuadrimomentum obtenemos:

$$\tilde{f}_L : \left( \gamma \frac{dE_L}{dt}, \gamma \vec{\mathcal{F}}_L \right)$$

La componente temporal de este cuadrivector es, como la trifuerza truculenta de calcular. Sin embargo si usamos la propiedad de ortogonalidad  $\tilde{A} \cdot \tilde{U} = 0$  y sabemos que  $\tilde{f} \propto \tilde{A}$ , podemos decir que:

$$f_L^0 U_L^0 = \vec{f}_L \cdot \vec{U}_L$$

de donde obtenemos:

$$f_L^0 = \vec{f}_L \cdot \vec{v}_L$$

Finalmente las componentes de la cuadrifuerza se pueden escribir como:

$$\tilde{f}_L : \gamma(\vec{\mathcal{F}}_L \cdot \vec{v}_L, \vec{\mathcal{F}}_L)$$

De esta última expresión derivamos la importante relación:

$$\frac{dE_L}{dt} = \vec{\mathcal{F}}_L \cdot \vec{v}_L$$

que es idéntica a su análoga newtoniana pero con la energía cinética.

Como sabemos que  $E_L = \gamma m$  esta relación puede también escribirse como:

$$\frac{d(\gamma m)}{dt} = \vec{\mathcal{F}}_L \cdot \vec{v}_L$$

Volviendo a la definición de trifuerza:

$$\vec{\mathcal{F}}_L = \frac{d(\gamma m \vec{v}_L)}{dt} = \frac{d(\gamma m)}{dt} \vec{v}_L + \gamma m \vec{a}_L$$

y usando la relación recien obtenida obtenemos:

$$\vec{\mathcal{F}}_L = \gamma m \vec{a}_L + (\vec{\mathcal{F}}_L \cdot \vec{v}_L) \vec{v}_L$$

### Proposición 1.17

**Ley de fuerza relativista.** Si sobre una partícula (masa invariante constante  $m$ ) actua una fuerza aplicada  $\vec{F}_L$ , entonces la aceleración espacial experimentada por la partícula esta dada por:

$$\vec{a}_L = \frac{1}{\gamma m} [\vec{F}_L - (\vec{F}_L \cdot \vec{v}_L) \vec{v}_L]$$

Es interesante notar que a diferencia de la aceleración newtoniana, la aceleración relativista  $\vec{a}_L$  no es necesariamente paralela a la fuerza aplicada. La ley de fuerza relativista muestra que los tres vectores residen sobre el mismo plano, pero no necesariamente son paralelos unos a otros.

Una manera alternativa de escribir la ley de fuerza relativista sería descomponer la aceleración y la fuerza en componentes paralelas y perpendiculares a la velocidad:

$$\gamma m (\vec{a}_{L\parallel} + \vec{a}_{L\perp}) = \vec{F}_{L\perp} + \vec{F}_{L\parallel} - \vec{F}_{L\parallel} v_L^2$$

igualando componente a componente, podemos reescribir la ley como:

$$a_{L\parallel} = \frac{1}{\gamma^3 m} F_{L\parallel}$$

$$a_{L\perp} = \frac{1}{\gamma m} F_{L\perp}$$

En unidades convencionales:

$$a_{\parallel} = \frac{1}{\gamma^3 m} F_{\parallel}$$

$$a_{\perp} = \frac{1}{\gamma m} F_{\perp}$$

### Definición 1.17

**Inercia direccional.** Definimos la **inercia** de una partícula en una dirección  $\hat{v}$ ,  $\mathcal{I}_v$ , como el cociente entre la componente de la fuerza aplicada en esa dirección y la componente de la aceleración experimentada en la misma dirección:

$$\mathcal{I}_{\hat{v}} \equiv \frac{\vec{F} \cdot \hat{v}}{\vec{a} \cdot \hat{v}}$$

De forma interesante la ley de fuerza relativista muestra que una partícula tiene una inercia diferente en distintas direcciones relativas a su velocidad. Así, en dirección perpendicular a la velocidad la inercia de una partícula es  $\mathcal{I}_{\perp} = \bigcirc \Downarrow$  mientras que en dirección paralela es  $\mathcal{I}_{\parallel} = \bigcirc \Downarrow \Downarrow$ .

#### 1.14.1. Reglas de transformación de la fuerza

Una interesante consecuencia de los desarrollos anteriores alrededor de los conceptos de fuerza en la dinámica relativista es entender que a diferencia de lo que pasa en la física newtoniana, en la relatividad la fuerza no es la misma cuando es medida por distintos observadores iniciales.

La cuadrifuerza transforma de acuerdo a las TLE:

$$f^\mu = \Lambda_{\mu'}{}^\mu f^{\mu'}$$

De allí se deduce que la trifuerza resultante  $\vec{F}$  debe transformar como lo hace la componente espacial de cualquier cuadrivector:

$$\gamma_v \vec{F}_L = \gamma_{v'} \vec{F}'_L + \left( \frac{\gamma_u - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \gamma_{v'} \vec{F}'_L + \gamma_u \gamma_{v'} \vec{F}'_L \cdot \vec{v}'_L \right) \vec{u}_L$$

o su inversa:

$$\gamma_{v'} \vec{F}'_L = \gamma_v \vec{F}_L + \left( \frac{\gamma_u - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \gamma_v \vec{F}_L - \gamma_u \gamma_v \vec{F}_L \cdot \vec{v}_L \right) \vec{u}_L$$

Aquí es importante aclarar que en la expresión aparecen dos velocidades: la velocidad relativa entre los sistemas de referencia  $\vec{u}$  y la velocidad de la partícula sobre la que actúa la fuerza  $\vec{v}$ . Por la misma razón aparecen también dos  $\gamma$  diferentes, uno para cada velocidad.

Una primera consecuencia de esta relación es que si en un sistema de referencia una partícula está en equilibrio  $\vec{F} = \vec{o}$ , también lo estará en el otro sistema de referencia. Es decir, el equilibrio es invariante.

Si descomponemos la fuerza en una componente paralela a la velocidad y una perpendicular a ella

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}$$

y asumimos que la partícula se mueve instantáneamente en la misma dirección relativa de los sistemas de referencia, es decir  $\vec{v} \parallel \vec{u}$ , entonces las dos componentes transformaran de acuerdo con las ecuaciones (ver Problemas al final del capítulo):

$$F_{\parallel} = \frac{F'_{L\parallel} + \vec{u}_L \cdot \vec{F}'_L}{1 + \vec{v}'_L \cdot \vec{u}_L} \quad (1.59)$$

$$F_{\perp} = \frac{\gamma_u^{-1} F'_{L\perp}}{1 + \vec{v}'_L \cdot \vec{u}_L} \quad (1.60)$$

$$(1.61)$$

Un hecho interesante que se deriva de estas relaciones es que la trifuerza relativista no puede tener cualquier forma, sino solo aquella que transforme de acuerdo con las anteriores condiciones. En particular vemos que la trifuerza relativista depende de la velocidad de una forma no trivial.

Una fuerza que no cumple esa condición es la fuerza de atracción gravitacional de Newton que puede probarse fácilmente, no transforma de acuerdo a las reglas anteriores. Es decir la fuerza gravitacional no es una fuerza compatible con la dinámica relativista. Si queremos modelar la gravedad será necesario que desarrollemos una teoría nueva sobre esta fuerza. Ese es justamente el propósito de la **teoría general de la relatividad**.

### 1.14.2. La fuerza de Lorentz

La única fuerza modelada clásicamente que transforma de acuerdo a la prescripción anterior es la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

Si tomamos el caso elemental en el que  $\vec{B}$  solo tiene componente  $z$  y hay un campo eléctrico en dirección de  $y$  la fuerza sería:

$$F_y = qE_y - qv_L B_z$$

donde  $v_L = v_x/c$  es la velocidad instantánea de la partícula en dirección  $x$  y en unidades luz.

Vamos a ver si esta fuerza transforma de acuerdo a lo que habíamos dicho. Para ello tomemos un observador inercial que se mueve con velocidad  $u_L$  en dirección de x. las leyes de transformación para los campos que habíamos derivado antes son:

$$\begin{aligned}B_z &= \gamma_u \left( B'_z + u_L E'_y \right) \\E_y &= \gamma_u \left( E'_y + u_L B'_z \right)\end{aligned}$$

Reemplazando queda:

$$F_y = \gamma_u [q E'_y (1 - u_L v_L) - q(u_L - v_L) B'_z]$$

Reuniendo términos obtenemos:

$$F_y = \gamma_u (1 - u_L v_L) \left( q E'_y - q \frac{u_L - v_L}{1 - u_L v_L} B'_z \right)$$

Reconciendo que por la ley de adición de velocidades relativista:

$$v'_L = \frac{u_L - v_L}{1 - u_L v_L}$$

la anterior ecuación se puede escribir como:

$$F'_y = \frac{\gamma_u^{-1}}{1 - u_L v_L} F_y$$

que es justamente la regla de transformación para la componente perpendicular. Con esto queda probado que la fuerza de Lorentz es una trifuerza en sentido estricto.

### 1.14.3. Movimiento circular bajo la fuerza de Lorentz

No hay muchos problemas que se puedan resolver fácilmente usando el concepto de cuadrifuerza por sus rigurosas condiciones de transformación. Sin embargo hay una situación particular y muy útil en la cual se puede aplicar la teoría vista hasta ahora.

Imaginemos que tenemos un electrón que entra en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  con una velocidad inicial  $\vec{v}$  constante y perpendicular al campo. ¿Cuál es la trayectoria que describe el electrón en el espacio?

De acuerdo con la fuerza de Lorenz la fuerza que experimenta el electrón es constante e igual a:

$$F = |q| \frac{v}{c} B$$

Dado que la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad la partícula, concluimos que la partícula describirá una trayectoria circular y su velocidad se mantendrá constante. Esto no cambia así tengamos dinámica relativista.

Usando la ley de fuerza relativista y dado que la fuerza siempre es perpendicular, la aceleración centripeta estará dada por:

$$a = \frac{F}{\gamma m}$$

Dado que geometricamente sabemos que sobre un círculo  $a = v^2/R$ :

$$\frac{v^2}{R} = \frac{F}{\gamma m}$$

y reemplazando la fuerza de Lorentz obtenemos:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{|q|vB}{\gamma mc}$$

Despejando el radio obtenemos:

$$R = \frac{\gamma mc v}{qB}$$

Este resultado contrasta con el resultado clásico:

$$R_N = \frac{mc v}{qB}$$

por el factor  $\gamma$ .

#### 1.14.4. Ecuación de movimiento relativista

De la misma manera que en la teoría newtoniana el movimiento de una partícula se predice una vez se han especificado las fuerzas que actúan sobre ella a través de la denominada ecuación de movimiento, podemos hacer lo mismo en el marco de la teoría de la relatividad.

Para ello partimos de la definición:

$$\tilde{A}_L : \left( \frac{d^2t}{d\tau^2}, \frac{d^2\vec{r}_L}{d\tau^2} \right)$$

y de la ley de fuerza covariante:

$$\tilde{f} = m\tilde{A}$$

Usando las componentes de la cuadrifuerza podemos escribir las ecuaciones de movimiento en función de la fuerza aplicada como:

$$m \frac{d^2t}{d\tau^2} = \gamma \vec{F}_L \cdot \vec{v}_L \quad (1.62)$$

$$m \frac{d^2\vec{r}_L}{d\tau^2} = \gamma \vec{F}_L \quad (1.63)$$

con  $\gamma = (1 - v_L^2)^{-1/2}$ .

Estas ecuaciones corresponden a un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden en las que debe especificarse explícitamente la forma de la fuerza que en general depende de la posición, la velocidad y el tiempo propio:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_L(\vec{r}_L, \vec{v}_L, \tau)$$

Debe recordarse, sin embargo, que  $\vec{F}_L$  debe satisfacer las reglas de transformación definidas antes, tal y como lo hacen por ejemplo las fuerzas de Lorentz.

### 1.14.5. Un ejemplo numérico

Para poner en práctica todo lo visto en esta sección podemos estudiar el movimiento de un electrón en un campo magnético en condiciones mucho más generales de las consideradas en el ejemplo analítico de la sección anterior. Es natural que en una situación real el electrón radiara parte de su energía y el resultado que obtendremos no será el mismo pero supongamos que esas perdidas son pequeñas.

Para ello primero debemos escribir el sistema de ecuaciones de primer orden correspondiente a las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= U_t \\ \frac{dx_L}{d\tau} &= U_{Lx} \\ \frac{dy_L}{d\tau} &= U_{Ly} \\ \frac{dz_L}{d\tau} &= U_{Lz} \\ \frac{dU_t}{d\tau} &= \frac{\gamma}{m} \vec{F}_L \cdot \vec{v}_L \\ \frac{dU_{Lx}}{d\tau} &= \frac{\gamma}{m} \vec{F}_{Lx} \\ \frac{dU_{Ly}}{d\tau} &= \frac{\gamma}{m} \vec{F}_{Ly} \\ \frac{dU_{Lz}}{d\tau} &= \frac{\gamma}{m} \vec{F}_{Lz}\end{aligned}$$

Podemos además usar el hecho que  $U_t = \gamma$ . Si hacemos la asignación  $Y_i : (t, x_L, y_L, z_L)$  y  $Y_{4+i} : (U_t, U_{Lx}, U_{Ly}, U_{Lz})$  para  $i = 0, 1, 2, 3$ , las anteriores ecuaciones se pueden implementar con la siguiente rutina:

```
def edm_lorentz(Y, tau, m, q, EL, BL):
    """
    Ecuaciones de movimiento de la dinámica relativista
    """
    #tiempo, posicion y velocidad
    t=Y[0]
    rL=Y[1:4]
    Ut=Y[4]
    UL=Y[5:]

    #Factor gamma
    from numpy import sqrt
```

```

gama=Ut
vL=UL/gama

#Trifuerza
from numpy import cross
FL=q*EL(rL,t)+q*cross(vL,BL(rL,t))

#Ecuaciones de movimiento
from numpy import dot
dtdtau=Ut
drdtau=UL
dUtdtau=gama*dot(FL,vL)/m
dULdtau=gama*FL/m

return [dtdtau]+list(drdtau)+[dUtdtau]+list(dULdtau)

```

Las propiedades de las partículas serán:

```

c=3e8 #m/s
me=9.11e-31 #kg
e=-1.6e-19 #C

#Velocidad inicial
v=0.5*c
gama=1/(1-(v/c)**2)**0.5

#Campo magnético y eléctrico
Bo=10.0 #Teslas
Eo=0.0 #V/m

#Radio de giro
Rg=gama*me*c*v/abs(e)*Bo #Relativista
Rc=me*c*v/abs(e)*Bo #Clásico

#Tiempo en el laboratorio de giro
from numpy import pi
Tg=2*pi*Rg/v

print(f"Radio de giro predicho clásico = {Rc/1e3} km")
print(f"Radio de giro predicho relativista = {Rg/1e3} km")
print(f"Tiempo de giro predicho = {Tg} s")

```

Radio de giro predicho clásico = 25.621875 km  
 Radio de giro predicho relativista = 29.58559285678589 km  
 Tiempo de giro predicho = 0.0012392784156130296 s

Definamos ahora nuestro campo eléctrico y magnético:

```

from numpy import array
c=3e8 #m/s

```

```

def ELfunc(rL,t):
    #[rL]: unidades luz, [t]: s
    E=array([Eo,0,0]) #V/m
    return E/c

def BLfunc(rL,t):
    #[rL]: unidades luz, [t]: s
    B=array([0,0,Bo]) #Teslas
    return B/c

```

Y las condiciones iniciales:

```

c=3e8 #m/s

#Condiciones iniciales
tau0=0
rL0=array([0,-Rg,0])/c
vL0=array([v,0,0])/c

from numpy.linalg import norm
gama0=1/(1-norm(vL0)**2)**0.5

#Componentes de la cuadrivelocidad
Ut0=gama0
UL0=gama0*vL0

#Vector de condiciones iniciales resultante
Y0s=array([tau0]+list(rL0)+[Ut0]+list(UL0))

Y_0 =
[ 0.0000000e+00  0.0000000e+00 -9.86186429e-05  0.0000000e+00
  1.15470054e+00  5.77350269e-01  0.0000000e+00  0.0000000e+00]

```

Probemos llamando a la ecuación de movimiento:

```
dYdtau=edm_lorentz(Y0s,0,me,e,ELfunc,BLfunc)
```

```
dY/dtau_0 =
[1.1547005383792517, 0.5773502691896258, 0.0, 0.0, 0.0, -0.0, 3380.023529833155, -0.0]
```

Y ahora podemos proceder a resolver las ecuaciones de movimiento:

```

from numpy import linspace
taus=linspace(0,10*Tg,1000)

from scipy.integrate import odeint
solucion=odeint(edm_lorentz,Y0s,taus,args=(me,e,ELfunc,BLfunc))

```

Un gráfico de la trayectoria será:

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 1.13)

```

#Extraemos las posiciones
r=solucion[:,1:4]*c # Posición en metros

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

#Coordenadas x-y
ax.plot(r[:,0]/1e3,r[:,1]/1e3,'ko-')

#Círculo
from matplotlib.patches import Circle
ax.add_patch(Circle((0,0),Rg/1e3,color='r',
                     fill=False,zorder=100))
ax.add_patch(Circle((0,0),Rc/1e3,color='b',
                     ls="--",fill=False,zorder=100))

#Decoración
ax.grid();
ax.set_title(f"v = {v/c}c, B = {Bo} T")
ax.set_xlabel("$x$ [km]");
ax.set_ylabel("$y$ [km]");

fig.tight_layout();

```

ver Figura 1.19

Podemos tambien graficar otras cantidades, por ejemplo el tiempo y el tiempo propio:

(Algoritmo 1.14)

```

ts=solucion[:,0]

fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

ax.plot(taus,ts)
ax.plot(taus,taus,'r:')

ax.set_xlabel(f"${\tau}$ [s]");
ax.set_ylabel(f"${t}$ [s]");

trange=taus.max()
ax.set_xlim((0,trange))
ax.set_ylim((0,trange))
ax.grid()
fig.tight_layout()

```

ver Figura 1.20

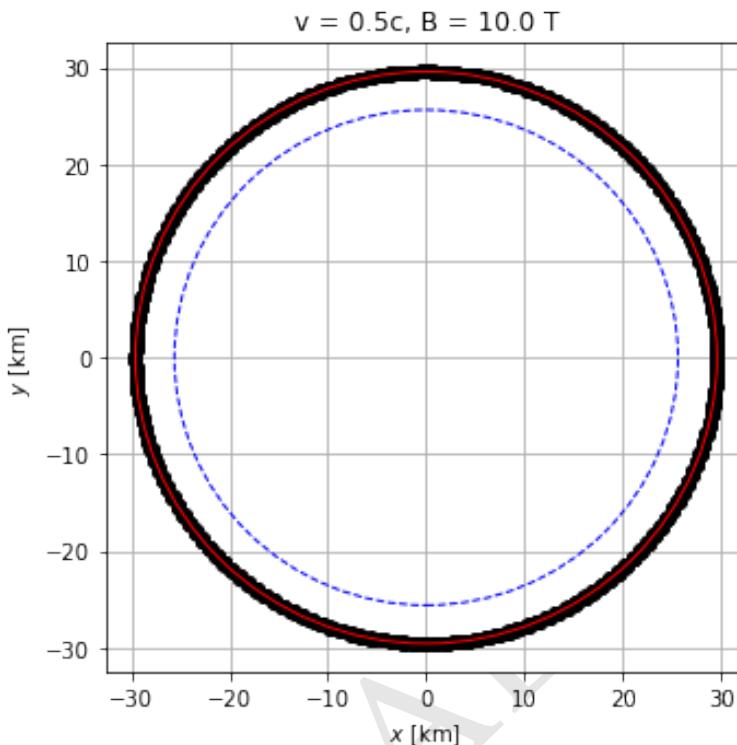


Figura 1.19: Figura correspondiente al código 1.13.

Como la velocidad es constante la relación entre el tiempo de laboratorio y el tiempo propio es  $t = \gamma\tau$ .

## 1.15. Síntesis de Mecánica Relativista

Después de introducir las cantidades y postulados claves en las secciones anteriores, estamos listos para hacer una síntesis completa de la nueva mecánica, de la **mecánica covariante** o la **mecánica relativista**.

### 1.15.1. Síntesis de cinemática relativista

Las propiedades cinemáticas de una partícula se describen con las siguientes propiedades básicas:

- **Cuadriposición:**  $x^\mu$

- Indica la posición de un evento en el espacio tiempo.
- Las componentes generales:  $x^\mu : (ct, \vec{r})$ 
  - Componente temporal:  $t$ , tiempo coordenado.
  - Componentes espaciales:  $\vec{r}$ , vector posición.
- En unidades luz:

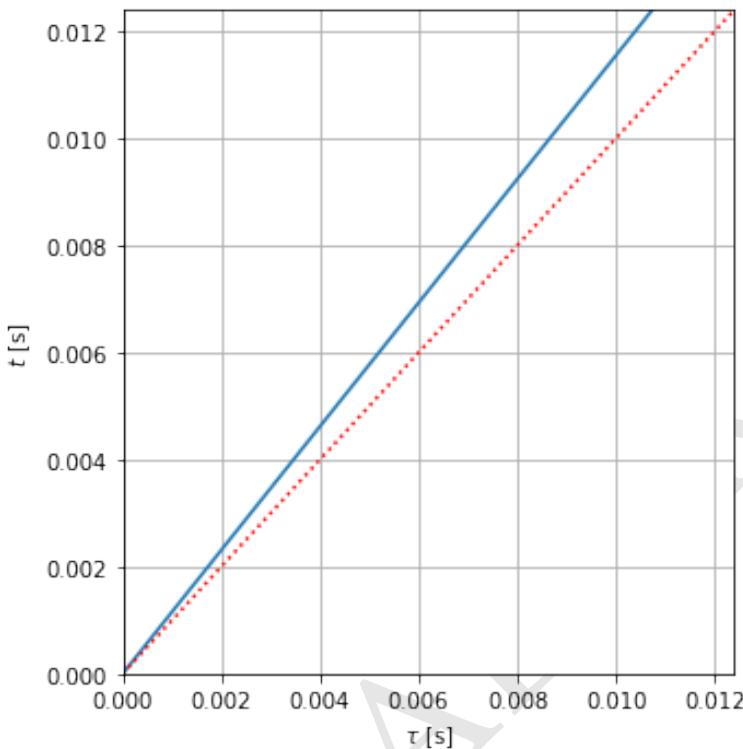


Figura 1.20: Figura correspondiente al código 1.14.

- Vector posición:  $\vec{r}_L = \vec{r}/c$
- Cuadrivector:  $x_L^\mu : (t, \vec{r}_L)$
- Módulo:
  - Temporaloide: Tiempo propio  $\tau^2 = t^2 - r_L^2$
  - Espacialoide: Longitud propia  $-\lambda_L^2 = t^2 - r_L^2$
- Transformación de sistemas coorenadas:
  - General:  $x^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu$
  - Vectorial:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \vec{u}_L \cdot \vec{r}_L) \\ \vec{r}'_L &= \vec{r}_L + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \vec{r}_L - \gamma t \right) \vec{u}_L \end{aligned}$$

- **Cuadridesplazamiento:**  $dx^\mu$ 
  - Intervalo infinitesimal entre dos eventos vecinos.
  - Las componentes generales:  $dx^\mu : (ct, d\vec{r})$
  - En unidades luz:
    - Vector posición:  $d\vec{r}_L = d\vec{r}/c$

- Cuadrivector:  $dx_L^\mu : (dt, d\vec{r}_L)$

- Módulo:

- General: Intervalo  $ds^2 = dt^2 - dr_L^2$
- Temporaloide: Diferencial de tiempo propio  $d\tau^2 = dt^2 - dr_L^2$
- Factor de Lorentz:  $dt = \gamma_v d\tau$ ,  $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

- Transformación de sistemas coorenadas:

- General:  $dx^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^{\nu'}$

■ **Trivelocidad:**  $\vec{v}$

- Definición:  $\vec{v} \equiv d\vec{r}/dt$ .
- Velocidad medida en el laboratorio.
- En unidades luz:  $\vec{v}_L = \vec{v}/c$
- Factor de Lorentz:  $\gamma_v = 1/\sqrt{1 - v_L^2}$ .
- Transformación de sistemas coorenadas:

- Vectorial:

$$\begin{aligned} v_{L\parallel} &= D(u_L + v'_{L\parallel}) \\ \vec{v}_{L\perp} &= \frac{D}{\gamma_u} \vec{v}'_{L\perp} \end{aligned} \tag{1.64}$$

donde

$$D \equiv \frac{1}{1 + \vec{u}_L \cdot \vec{v}'_L}$$

■ **Cuadrivelocidad:**  $U^\mu$

- Definición:  $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ .
- Solo se define en líneas de universo (elemento de línea temporaloide).
- Las componentes generales:

$$U^\mu : \left( \frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right)$$

- En unidades convencionales:

$$U^\mu : \gamma(c, \vec{v})$$

- En unidades luz:

- Vector posición:  $U_L^\mu = U^\mu/c$ 
  - Componente temporal:  $U_L^0 = dt/d\tau = \gamma$ , velocidad en el tiempo.
  - Componentes espaciales:  $\vec{U}_L = d\vec{r}_L/d\tau = \gamma \vec{v}_L$ , velocidad escalada.

- Componentes explícitas:

- Unidades luz:

$$U_L^\mu : \gamma(1, \vec{v}_L)$$

- Módulo:
  - Unidades convencionales:  $|U^\mu| = c$ .
  - Unidades luz:  $|U_L^\mu| = 1$ .
- Transformación de sistemas coorenadas:
  - General:  $U^\mu = \Lambda_{\nu'}^\mu U^{\nu'}$

■ **Triaceleración:**  $\vec{a}$

- Definición:  $\vec{a} \equiv d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$ .
- Aceleración medida en el laboratorio.
- En unidades luz:  $\vec{a}_L = \vec{a}/c$

■ **Cuadriaceleracion:**  $A^\mu$

- Definición:  $A^\mu = dU^\mu/d\tau = d^2x^\mu/d\tau^2$ .
- Las componentes generales:

$$A^\mu : \left( \frac{d(\gamma c)}{d\tau}, \frac{d(\gamma \vec{v})}{d\tau} \right)$$

- Componentes explícitas en unidades convencionales

$$A^\mu : \gamma^4 \left( \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{c}, \vec{a} \right)$$

- Componentes explícitas en unidades luz:

$$A_L^\mu : \gamma^4 (\vec{a}_L \cdot \vec{v}_L, \vec{a}_L)$$

- Módulo:
  - Aceleración propia:  $|A_L^\mu|^2 = -\alpha_L^2$ .
  - Relación componentes:  $\alpha_L^2 = |\vec{A}_L|^2 - (A_L^0)^2$ .
- Ortogonalidad: la aceleración siempre es ortogonal a la cuadrivelocidad,

$$A^\mu U_\mu = A_L^0 U_L^0 - \vec{A}_L \cdot \vec{U}_L = 0$$

## 1.15.2. Síntesis de dinámica relativista

■ **Masa invariante:**  $m$

- Masa de una partícula (valor constante).
- Es una cantidad escalar y no depende del observador.

■ **Trimomentum:**  $\vec{p}$

- Definición:  $\vec{p} \equiv \gamma v m \vec{v}$ .
- Momento lineal medido en el laboratorio.
- Se conserva en todas las colisiones.
- En unidades luz:  $\vec{p}_L^\mu = \vec{p}/c$

■ **Energía cinética relativista:**  $k$

- Definición:  $k \equiv \int_0^p \vec{v} \cdot d\vec{p}$ .
- En unidades luz:  $k_L = k/c^2$
- Explícitamente como función de la velocidad:
  - En unidades luz:  $k_L = (\gamma - 1)m$
  - En unidades convencionales:  $k = (\gamma - 1)mc^2$

■ **Energía total relativista:**  $E$

- Definición:  $E \equiv mc^2 + k$ .
- La energía total de una partícula se conserva.
- Unidades luz:  $E_L = E/c^2 = m + k_L$
- Expresión única:
  - En unidades convencionales:  $E = \gamma mc^2$ .
  - En unidades luz:  $E_L = \gamma m$ .

■ **Cuadrimomentum:**  $P^\mu$

- Definición:  $P^\mu \equiv mU^\mu$ .
- El cuadrimomento de un sistema aislado de partículas se conserva.
- Las componentes generales:

$$P^\mu : \left( m \frac{d(ct)}{d\tau}, m \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right)$$

- En unidades convencionales:  $P^\mu : (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$
- En términos de la energía y el trimomentum:  $P^\mu : (E/c, \vec{p})$
- En unidades luz:  $P_L^\mu = P^\mu/c$ .
- En términos de la energía y el trimomentum:  $P_L^\mu : (E_L, \vec{p}_L)$
- Módulo:
  - En unidades convencionales:  $(mc^2)^2 = (E)^2 - (pc)^2$
  - En unidades luz:  $m^2 = E_L^2 - p_L^2$

■ **Trifuerza:**  $\vec{\mathcal{F}}$

- Definición:  $\vec{\mathcal{F}} \equiv d\vec{p}/dt = d(\gamma m\vec{v})/dt$
- Fuerza medida en el laboratorio.
- En unidades convencionales:  $\vec{F}_L = \vec{\mathcal{F}}/c$ .
- Relación con la aceleración:
  - General:  $\gamma m\vec{a}_L = \vec{\mathcal{F}}_L - (\vec{\mathcal{F}}_L \cdot \vec{v}_L)\vec{v}_L$
  - Componentes:

$$\begin{aligned} a_{||} &= \frac{1}{\gamma^3 m} F_{||} \\ \vec{a}_{\perp} &= \frac{1}{\gamma m} \vec{F}_{\perp} \end{aligned}$$

- Transformación:

- Componentes:

$$F_{\parallel} = \frac{F'_{L\parallel} + \vec{u}_L \cdot \vec{F}'_L}{1 + \vec{v}'_L \cdot \vec{u}_L} \quad (1.65)$$

$$F_{\perp} = \frac{\gamma_u^{-1} F'_{L\perp}}{1 + \vec{v}'_L \cdot \vec{u}_L} \quad (1.66)$$

(1.67)

■ **Cuadrifuerza:**  $f^{\mu}$

- Definición:  $f^{\mu} \equiv dP^{\mu}/d\tau$ .
- Ley de fuerza generalizada:  $f^{\mu} = mA^{\mu}$ .
- Componentes explícitas:
  - En unidades luz:  $f_L^{\mu} : \gamma^4(m\vec{a}_L \cdot \vec{v}_L, m\vec{a}_L)$
  - En unidades convencionales:  $f^{\mu} : \gamma^4(m\vec{a} \cdot \vec{v}/c, m\vec{a})$

## 1.16. Óptica relativista

Para entender la manera en la que las propiedades de la luz transforman de un observador inercial a otro en relatividad especial (óptica relativista). Consideremos el hecho de que cualquier onda monocromática se puede describir en el espacio-tiempo usando el cuadrivector de propagación:

$$k_L^{\mu} : \frac{2\pi}{\lambda}(1, \hat{k})$$

donde  $\hat{k}$  es la dirección de propagación de la onda y  $\lambda$  es la longitud de onda.

La relación de dispersión de la onda en el vacío será:

$$\lambda\nu = c$$

donde  $\nu$  es la frecuencia.

Esta cantidad debe transformar como lo hace cualquier cuadrivector:

$$k^0 = \gamma \left( k'^0 + \vec{u}_L \cdot \vec{k}'_L \right) \quad (1.68)$$

$$\vec{k}_L = \vec{k}'_L + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \vec{k}'_L + \gamma k'^0 \right) \vec{u}_L \quad (1.69)$$

### 1.16.1. Efecto Doppler relativista

Supongamos que emitimos una onda monocromática en dirección de  $x$  (la misma dirección de la velocidad relativa entre los sistemas). En este caso:

$$k^{\mu} : \frac{2\pi}{\lambda}(1, 1, 0, 0)$$

La ecuación de transformación de la componente temporal del cuadrivector de propagación será:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \gamma \left( \frac{2\pi}{\lambda'} + u_L \frac{2\pi}{\lambda'} \right)$$

De donde obtenemos:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda'} \frac{1 + u_L}{\sqrt{1 - u_L^2}}$$

Si identificamos  $\lambda_{\text{em}} = \lambda'$  y  $\lambda_{\text{obs}} = \lambda$ , entonces:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \sqrt{\frac{1 - u_L}{1 + u_L}}$$

Nótese que si  $u_L \ll 1$  y usamos el teorema del binomio para expandir el factor en el radical en el lado derecho:

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{em}} \left( 1 - \frac{1}{2}u_L + \dots \right) \left( 1 - \frac{1}{2}u_L + \dots \right)$$

conservando solo los términos lineales en  $u_L$  obtenemos:

$$\lambda_{\text{obs}} \approx \lambda_{\text{em}} (1 - u_L)$$

que se puede escribir como:

$$\frac{\lambda_{\text{em}} - \lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} \approx u_L$$

De aquí identificamos el corrimiento al rojo clásico:

$$z = u_L$$

### 1.16.2. Aberración de la luz

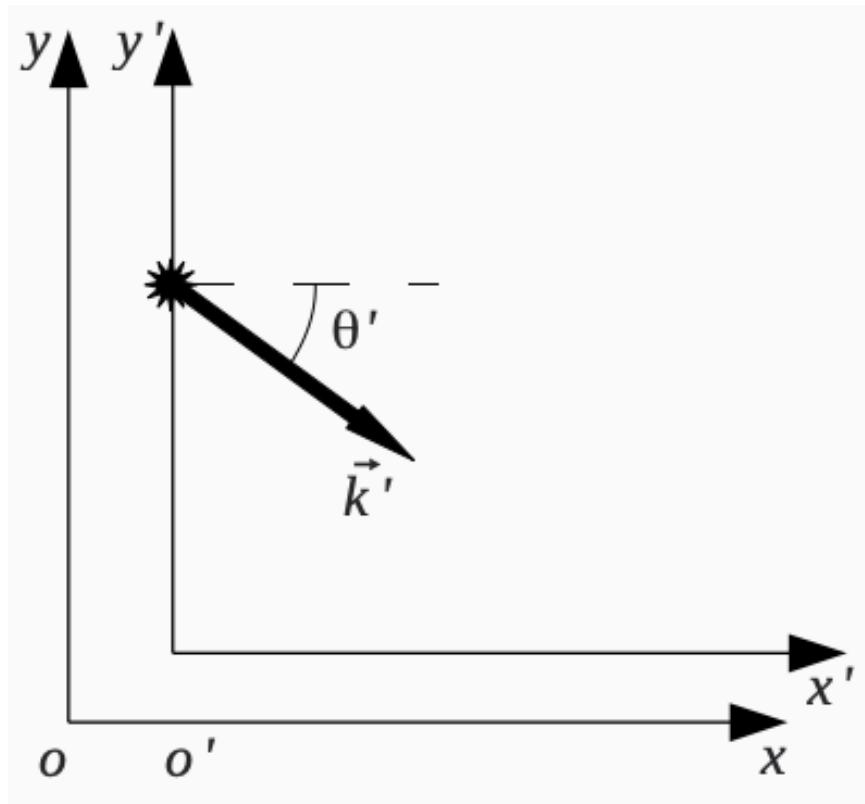


Figura 1.21: Figura

Veámos ahora que pasa con un rayo de luz emitido en una dirección diferente de  $\vec{u}_L$ . En este caso la transformación de las componentes espaciales del vector de propagación será:

$$k^0 = \gamma (k^{0'} + \vec{u}_L \cdot \vec{k}'_L) \quad (1.70)$$

$$\vec{k}_L = \vec{k}'_L + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \vec{k}'_L + \gamma k^{0'} \right) \vec{u}_L \quad (1.71)$$

Identificando  $k^0 = 2\pi/\lambda$  y  $\vec{k}_L = 2\pi/\lambda \hat{k}$  y dividiendo la segunda ecuación por la primera, obtenemos:

$$\hat{k} = \frac{\hat{k}' + \left( \frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \hat{k}' + \gamma \right) \vec{u}_L}{\gamma (1 + \vec{u}_L \cdot \hat{k}')}$$

Consideremos ahora el caso particular en el que  $\hat{k}$  se encuentra sobre el plano  $x - y$  y se puede parametrizar como:

$$\begin{aligned}\hat{k} &= \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \\ \hat{k}' &= \cos \theta' \hat{e}_x + \sin \theta' \hat{e}_y\end{aligned}$$

La componente temporal queda:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{obs}}} = \frac{1}{\lambda_{\text{obs}}} \gamma (1 + u_L \cos \theta')$$

De aquí se obtiene que si  $\theta' = 0$  se reproduce la fórmula del efecto Doppler. Pero hay un resultado más interesante que se obtiene si  $\theta' = \pi/2$ . En este caso:

$$\lambda_{\text{obs}}^{\perp} = \frac{1}{\gamma} \lambda_{\text{em}}$$

que se conoce como el efecto Doppler transversal.

Al reemplazar  $\hat{k}$  y  $\hat{k}'$  en la ley de transformación obtenemos:

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + u_L}{1 + u_L \cos \theta'} \quad (1.72)$$

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta'}{\gamma (1 + u_L \cos \theta')} \quad (1.73)$$

que puede probarse cumplen  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

¿Qué pasa cuando  $\cos \theta' = 0$ ? En este caso en el sistema del Observador se ve:

$$\cos \theta = u_L$$

Es decir, la luz que debería llegar al observador de la vertical aparece en un ángulo muy pequeño desviada respecto a esa vertical. A este fenómeno se lo llama **aberración de la luz**.

### 1.16.3. Enfoque relativista

Imagine que desde una fuente astrofísica que se mueve con velocidad  $\vec{u}_L$  respecto al observador, emite radiación en todas las direcciones. ¿En qué direcciones se verá venir la radiación? ¿cómo se distribuye la potencia de la radiación de la fuente?

Si la emisión es isotrópica una cuarta parte de la radiación se emitirá entre  $\theta' = 0$  y  $\theta' = \pi/2$ . Sin embargo, en el sistema de referencia del observador esa misma energía se emitirá entre  $\theta = 0$  y  $\theta = \theta_b < \pi/2$  donde  $\theta_b$  se conoce como el ángulo de enfoque y es igual a:

$$\cos \theta_b = u_L$$

o bien:

$$\theta_b = \cos^{-1} u_L$$

Es posible mostrar que para  $\gamma \gg 1$  el ángulo de enfoque es:

$$\theta_b \approx \frac{1}{\gamma}$$

Para visualizar el efecto de enfoque relativista vea la figura interactiva en la [versión electrónica del libro](#)<sup>3</sup>.

## 1.17. Electrodinamica manifiestamente covariante

En la deducción de las transformaciones de Lorentz-Einstein habíamos encontrado que por ser covariantes los campos eléctrico y magnético deben transformar como:

$$\begin{aligned} B'_z &= \gamma \left( B_z - \frac{u}{c} E_y \right) \\ E'_y &= \gamma \left( E_y - \frac{u}{c} B_z \right) \end{aligned}$$

Esta relación es una interesante novedad en el electromagnetismo clásico en tanto propone una conexión entre los campos eléctrico y magnético (incluso estáticos) que no estaba en la teoría original de Maxwell. Nos lleva a pensar en la idea de que existe una manera alternativa y más general de escribir la teoría electromagnética consistente con los postulados de la relatividad.

Como hemos visto antes, una manera de garantizar que las nuevas ecuaciones sean covariantes sería escribirlas en términos de escalares y tensores, o en otros términos necesitamos escribir las **ecuaciones de la electrodinámica manifiestamente covariantes**.

### 1.17.1. Ecuaciones de la electrodinámica

Las ecuaciones de Maxwell microscópicas y en unidades gaussianas y que necesitamos escribir de forma manifiestamente covariantes, las introducimos en una sección anterior y se pueden escribir como:

- **Ecuaciones de Maxwell:**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (\text{Gauss - E}) \quad (1.74)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Gauss - B}) \quad (1.75)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Maxwell - Faraday}) \quad (1.76)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (\text{Ampere - Maxwell}) \quad (1.77)$$

$$(1.78)$$

Pero estas ecuaciones por sí solas no expresan todas las posibles relaciones entre las cantidades de la teoría. A continuación presentamos una síntesis de otras

---

<sup>3</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

relaciones y cantidades complementarias importantes, bien reconocidas en la teoría electromagnética.

- **Conservación de la carga eléctrica:** La carga eléctrica es una cantidad clave en el universo. Como la masa, la carga de una partícula o de un sistema en su totalidad, es independiente del sistema de referencia en el que se mida (esto debemos elevarlo a la categoría de un postulado). Esta idea se expresa, clásicamente en la forma de la ecuación de continuidad que se escribe:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

- **Ley de Lorentz:** Una de las consecuencias tardías de la teoría electromagnética de Maxwell fue la descripción de la fuerza que experimenta una carga eléctrica que se mueve en presencia de un campo eléctrico y un campo magnético. En unidades gaussianas la fuerza es:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B})$$

Si lo que tenemos es un flujo de corriente con densidad  $\vec{J}$  la densidad de fuerza  $\vec{F}$  será:

$$\vec{F} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B}$$

- **Potencial escalar eléctrico  $\phi$  y vectorial magnético  $\vec{A}$ .** Las fuerzas eléctrica y magnética son conservativas. Esto significa que pueden escribirse en términos de funciones de potencial o simplemente potenciales. Los potenciales escalar eléctrico  $\phi$  y vectorial magnético  $\vec{A}$  permiten expresar los campos y sus relaciones de formas alternativas. En unidades gaussianas los campos eléctrico y magnético se obtienen a partir de los potenciales con las relaciones:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- **Libertad Gauge.** Es importante tener en cuenta que los potenciales eléctrico y magnético son cantidades matemáticas auxiliares. Su valor puntual no es físicamente significativo. Así por ejemplo, en el caso el potencial escalar eléctrico, sabemos que sumar o restar una constante no afecta el campo eléctrico. Decimos que son las *diferencias e potencial* lo que es físicamente medible. Estas ideas se expresan diciendo que hay una *libertad* en la elección de los potenciales. Llamamos a esta la *libertad gauge* (libertad de calibración). Puede probarse que la forma más general de escribir la libertad gauge es suponiendo que existe una función arbitraria del  $\chi(t)$ . Dados un potencial escalar  $\phi$  y uno vectorial  $\vec{A}$ , los siguientes potenciales también describirán los campos en una situación dada:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

La elección de  $\chi(t)$  será cuestión de conveniencia.

- **Gauge de Coulomb.** Si se reemplaza la definición del campo eléctrico en la ecuación (Gauss – E) se obtiene:

$$-\vec{\nabla}^2\phi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 4\pi\rho$$

Esta ecuación adopta la forma de la ley de Coulomb si se escoge arbitrariamente que el potencial vectorial magnético cumpla la condición:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Es decir, debemos escoger la función de libertad gauge  $\chi(t)$  tal que en todos los puntos del espacio se cumpla esta condición. Llamamos a este el **gauge de Coulomb**.

Es de anotarse, sin embargo, que esta condición no es covariante bajo TLE (no involucra tensores, ni cantidades invariantes como veremos) y por lo tanto no es apropiada para la relatividad.

- **Gauge de Lorentz.** Un gauge que si resulta ser covariante bajo las TLE puede escribirse como:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Llamamos a este el **gauge de Lorentz**. Bajo el gauge de Lorentz la ecuación (Gauss – E) adopta una interesante forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\phi = 4\pi\rho$$

Por otro lado la ecuación (Ampre – Maxwell) puede probarse, se puede escribir de forma análoga como:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

Estas dos ecuaciones son ecuaciones de onda para los potenciales escalar y vectorial con fuentes  $\rho$  y  $\vec{J}$ , respectivamente.

El gauge de Lorenz entonces, no solo es covariante, sino que dadas las condiciones de frontera apropiadas, predice la existencia de ondas electromagnéticas. Estas ondas transportan los campos en tiempos finitos de unos puntos a

otros del espacio-tiempo. Es interesante anotar, en contraste, que el gauge de Coulomb y la ley de Coulomb derivada de él asume la existencia de una acción a distancia. Su falta de covarianza es evidencia de la falta de consistencia de esta ley con la idea del espacio-tiempo y de un límite para la propagación de información. Podríamos decir que la teoría electromagnética, incluso antes del descubrimiento de la relatividad, ya lo sabía todo.

- **Solución de ondas planas.** Una solución central a la ecuación de ondas en el vacío y bajo unas condiciones de frontera, es la de ondas planas. Bajo estas condiciones el campo escalar y vectorial se puede escribir como:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.79)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (1.80)$$

donde:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}$$

es el vector de ondas,  $\lambda$  es la longitud de onda y  $\hat{k}$  es la dirección de propagación.

Por otro lado

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P}$$

es la frecuencia angular siendo  $f$  la frecuencia de la onda y  $P$  su período.

En el vacío, el número de onda (la longitud de onda) y la frecuencia angular (la frecuencia) se relacionan a través de la relación de dispersión:

$$\omega = ck$$

que equivale a:

$$\lambda f = c$$

- **Cálculo de los potenciales.** En el Gauge de Lorenz los potenciales vectorial y escalar pueden calcularse usando las ecuaciones:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

y

$$\phi(\vec{r}, t) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r}', t') d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde el tiempo  $t'$  usado en las expresiones anteriores se conoce como el tiempo retardado:

$$t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

### 1.17.2. La cuadricorriente

La primera cantidad que podemos escribir como un tensor es la densidad de corriente eléctrica.

En el sistema de referencia propio de una nube de cargas, la densidad de carga eléctrica es:

$$\rho_0 = \frac{\sum q_i}{V_0}$$

En un sistema de referencia inercial arbitrario sabemos que la carga es invariante pero el volumen transforma como  $V = V_0/\gamma$  de modo que la densidad en el sistema del observador:

$$\rho = \gamma \rho_0$$

Por otro lado la densidad de carga eléctrica de una nube que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  respecto al observador es:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \gamma \rho_0 \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Al comparar las cantidades anteriores con el cuadrivector velocidad podemos ver que tanto  $\rho$  como  $\vec{J}$  se pueden considerar las componentes temporal y espacial del cuadrivector:

$$J^\mu = \rho_0 U^\mu : \gamma \rho_0 (c, \vec{v}) : (c\rho, \vec{J})$$

En términos de la cuadricorriente la ecuación de continuidad o de conservación de la carga se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial J_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \sum_i \frac{\partial J_i}{\partial x^i} &= 0\end{aligned}$$

y usando la notación de Einstein:

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

#### Definición 1.18

**Derivada covariante o derivada coma.** Definimos la **derivada covariante o derivada coma** de un campo tensorial  $A^{\alpha\beta\gamma\dots}$  como la derivada del campo respecto a una componente:

$$A^{\alpha\beta\gamma\dots,\mu} \equiv \partial_\mu A^{\alpha\beta\gamma\dots}$$

Usando la notación de la derivada coma, la ecuación de continuidad se escribe finalmente como:

$$J^\mu_{,\mu} = 0$$

Esta es la forma **manifestamente covariante** de la ecuación de continuidad.

### 1.17.3. Ecuaciones de Maxwell inhomogéneas

Habíamos escrito las ecuaciones (Gauss – E) y (Ampre – Maxwell) como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \phi &= 4\pi\rho \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{aligned}$$

En estas ecuaciones se pueden reconocer algunas propiedades importantes para nuestro propósito:

- El operador diferencial en las dos ecuaciones se puede escribir en términos de la derivada covariante como:

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu$$

donde  $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  es la inversa de la métrica de Minkowski que es igual a ella misma. Llamamos a este el **operador d'Alambertiano**.

- El lado derecho de las dos ecuaciones son las componentes de la cuadri-corriente  $\vec{J}$ .

De este modo las ecuaciones se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \left( \frac{\phi}{c} \right) &= \frac{4\pi}{c} J^0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \end{aligned} \tag{1.81}$$

Es decir si definimos la cantidad:

$$A^\mu : (\phi/c, \vec{A})$$

las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell se pueden escribir de forma manifestamente covariantes como:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

y de la naturaleza tensorial de las cantidades involucrados podemos deducir que  $A^\nu$  es también un tensor que podríamos llamar el **cuadripotencial** electromagnético.

O usando la notación *coma*:

$$A^\nu_{,\mu}{}^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

Nótese que el cuadripotencial se puede obtener mediante la integral:

$$A^\mu(\tilde{x}) = \frac{1}{c} \int_{\Omega} \frac{J^\mu(\tilde{x}') d^3\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde imponemos adicionalmente la condición que el intervalo entre los eventos  $\tilde{x}'$  con respecto al evento  $\tilde{x}$ ,  $\Delta\tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}'$  debe ser luminoide:

$$|\Delta\tilde{x}| = 0$$

que es el equivalente a la condición de retraso en la formulación clásica.

Ahora bien, por el gauge de Lorenz:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_\mu A^\mu = 0$$

#### 1.17.4. Los campos en términos tensoriales

La introducción del cuadripotencial nos permite escribir los campos eléctrico y magnético en términos tensoriales, lo que será muy útil para derivar la forma de las ecuaciones de Maxwell manifiestamente covariantes.

Por definición de los potenciales:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

Si lo escribimos en términos de las componentes explícitas del cuadripotencial obtenemos:

$$\begin{aligned}B^i &= \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j A^k \\ E^i &= -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i\end{aligned}$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de Levi-Civita:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{Si hay un ndice repetido} \\ +1 & \text{Si } ijk \text{ es permutacin par} \\ -1 & \text{Si } ijk \text{ es permutacin impar} \end{cases}$$

#### 1.17.5. El tensor de Faraday

Una interesante simetría se produce si escribimos las componentes explícitas:

$$\begin{aligned} B^1 &= \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 \\ E^1 &= -\partial_1 A^0 - \partial_0 A^1 \end{aligned}$$

Si usamos las componentes contravariantes de la derivada (que implican simplemente un cambio en el signo de las componentes espaciales de las derivadas) podemos escribir:

$$\begin{aligned} B^1 &= -\partial^2 A^3 + \partial^3 A^2 \\ E^1 &= \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 \end{aligned}$$

que se puede escribir como:

$$\begin{aligned} B^1 &= -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \\ E^1 &= -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \end{aligned}$$

Estas relaciones dejan adivinar que la combinación de cantidades  $\partial^m u A^\nu$  parece jugar un papel unificador en la nueva formulación de la teoría electromagnética, de la misma manera que los campos eléctrico y magnético lo jugaron en el tiempo de Maxwell. Esta nueva cantidad es tensorial y tiene segundo rango (es la combinación simultánea del tensor derivada y el tensor potencial).

De aquí, si definimos el tensor contravariante de segundo rango:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Vemos que el campo eléctrico y el campo magnético se pueden escribir en términos de este tensor como:

$$\begin{aligned} B^i &= -\epsilon_{ijk} F^{jk} \\ E^i &= -F^{0i} \end{aligned}$$

donde es importante anotar que en la primera expresión no se usa la convención de suma de Einstein.

Otra manera de verlo podría ser escribir explícitamente las componentes del tensor en coordenadas cartesianas:

$$F^{\mu\nu} : \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Llamamos a  $F^{\mu\nu}$  el **tensor electromagnético o tensor de Faraday**.

**Propiedades del tensor de Faraday.** El tensor de Faraday tiene las siguientes propiedades:

- **Antisimetría:**  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$
- **Traza nula:**  $\sum_\mu F^{\mu\mu} = 0$
- **Propiedad cíclica de la derivada contravariante:**

$$\partial^{[\alpha} F^{\mu\nu]} = F^{[\mu\nu,\alpha]} \equiv \partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = 0$$

donde en lo sucesivo  $[\alpha\beta\gamma] = \alpha\beta\gamma, \beta\gamma\alpha, \gamma\alpha\beta$  es la permutación cíclica de los índices.

■ **Determinante invariante:**  $\det F^{\mu\nu} = (\vec{E} \cdot \vec{B})^2$

■ **Escalar:**  $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(B^2 - E^2)$ .

### 1.17.6. Ecuaciones de Maxwell y el tensor de Faraday

Las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas las habíamos escrito como:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

Podemos sumar y restar  $\partial_\mu \partial^\nu A^\mu$  para obtener:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

Como para escribir la ecuación anterior asumimos el Gauge de Lorentz,  $\partial_\mu^\mu A^\nu = 0$  las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas se pueden escribir en términos del tensor de Faraday como:

$$F^{\mu\nu}_{,\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

Qué es la **forma manifiestamente covariante de las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell**.

¿Y las ecuaciones de Maxwell homogéneas?. Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{1.82}$$

Vemos que se trata de 4 ecuaciones que se pueden escribir también en la forma:

$$\begin{aligned}\partial_1 B_x + \partial_2 B_y + \partial_3 B_z &= 0 \\ \partial_0 B_x + \partial_2 E_z - \partial_3 E_y &= 0 \\ \partial_0 B_y + \partial_3 E_x - \partial_1 E_z &= 0 \\ \partial_0 B_z + \partial_1 E_y - \partial_2 E_x &= 0\end{aligned}$$

Reemplazando los valores del campo por las respectivas entradas del vector de Faraday estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\partial_1 F^{32} + \partial_2 F^{13} + \partial_3 F^{21} &= 0 \\ \partial_0 F^{32} + \partial_2 F^{30} - \partial_3 F^{20} &= 0 \\ \partial_0 F^{13} + \partial_3 F^{10} - \partial_1 F^{30} &= 0 \\ \partial_0 F^{21} + \partial_1 F^{20} - \partial_2 F^{10} &= 0\end{aligned}$$

Si se cambian las derivadas covariantes por derivadas contravariantes y se reorganizan los índices, se obtienen expresiones que recuerdan una propiedad introducida antes:

$$\begin{aligned}\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} &= 0 \\ \partial^0 F^{32} + \partial^3 F^{20} + \partial^2 F^{03} &= 0 \\ \partial^0 F^{13} + \partial^1 F^{30} + \partial^3 F^{10} &= 0 \\ \partial^0 F^{21} + \partial^2 F^{10} + \partial^1 F^{02} &= 0\end{aligned}$$

que no son otra cosa que la propiedad cíclica de la derivada contravariante del tensor de Faraday:

$$\partial^{[\alpha} F^{\mu\nu]} = 0$$

En síntesis, en términos explícitamente covariantes, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como:

$$F^{\mu\nu}_{,\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (\text{Gauss - E}) \text{ y } (\text{Ampere - Maxwell}) \quad (1.83)$$

$$\partial^{[\alpha} F^{\mu\nu]} = 0 \quad (\text{Gauss - B}) \text{ y } (\text{Maxwell - Faraday}) \quad (1.84)$$

(1.85)

### 1.17.7. Álgebra computacional del Tensor de Faraday

Algunas de las propiedades mencionadas antes se pueden expresar y desarrollar en sistemas de álgebra computacional como SymPy. Para hacerlo primero debemos definir las componentes de los campos:

```
import sympy as sp
Ex,Ey,Ez,Bx,By,Bz=sp.symbols("E_x,E_y,E_z,B_x,B_y,B_z")
```

La representación matricial del tensor electromagnético será:

```
F=sp.Matrix([[0,-Ex,-Ey,-Ez],[Ex,0,-Bz,By],[Ey,Bz,0,-Bx],[Ez,-By,+Bx,0]])
```

**Out[66]:**

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Con esta representación podemos obtener el tensor de Faraday completamente covariante usando:

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$$

¿Cómo puede calcularse esta operación matricialmente? El producto de dos matrices  $A$  y  $B$  se puede escribir como:

$$(AB)_{ij} = \sum_n A_{in}B_{nj}$$

Usando la representación matricial de los tensores como:

$$F_c = \eta F \eta^T$$

### Proposición 1.18

**Transformación de tensores de segundo rango.** Si  $A^{\mu\nu}$  es un tensor de segundo rango y  $A$  es su representación matricial (una matriz  $4 \times 4$  con entradas iguales a las componentes del tensor en una base dada) en el sistema de referencia del laboratorio, la representación matricial del tensor en el sistema de referencia vijero es:

$$A' = \Lambda A \Lambda^T$$

Para calcular la representación matricial del tensor de Faraday covariante, debemos introducir el tensor métrico:

```
eta=sp.Matrix([[1,0,0,0],[0,-1,0,0],[0,0,-1,0],[0,0,0,-1]])
```

Y hacer el producto matricial:

```
Fcov=eta*F*sp.transpose(eta)
Fcov
```

**Out[68] :**

$$\begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

En términos de las componentes matriciales del tensor el producto del tensor de Faraday contravariante y covariante se puede escribir como:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = - \sum_{\mu} \left( \sum_{\nu} F^{\mu\nu} F_{\nu\mu} \right)$$

El producto entre paréntesis se puede considerar las diagonales de la matriz:

$$A = FF_c$$

que a su vez es la representación matricial del tensor  $A^{\mu}_{\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$ . Así el escalar buscado es la traza, es decir la *suma de las componentes en la diagonal*, de la matriz A:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = - \sum_{\mu} A^{\mu}_{\mu} = - A^{\mu}_{\mu} \equiv -\text{tr}(A^{\mu}_{\nu})$$

O en términos matriciales:

$$FF_c = -\text{tr}(A)$$

### Proposición 1.19

**Módulo de un tensor de segundo rango.** Si  $A^{\mu\nu}$  es un tensor de segundo rango y  $A$  es su representación matricial (una matriz  $4 \times 4$  con entradas iguales a las componentes del tensor en una base dada),  $A_{\mu\nu}$  es el correspondiente tensor covariante con  $A_c$  su representación matricial, el módulo del tensor se define como:

$$|A| \equiv A^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$$

Si definimos el tensor  $\bar{A}_\nu^\mu = A^{\mu\alpha} A_{\alpha\nu}$ , con representación matricial  $\bar{A} = AA_c$ , la magnitud de un tensor simétrico sera:

$$|A| = \text{tr}(\bar{A})$$

y si es antisimétrico:

$$|A| = -\text{tr}(\bar{A})$$

En SymPy:

```
A=-(F*Fcov).trace()
A
```

**Out [69] :**

$$2B_x^2 + 2B_y^2 + 2B_z^2 - 2E_x^2 - 2E_y^2 - 2E_z^2$$

Que es justamente lo que habíamos calculado previamente.

¿Cómo calcular ahora el determinante del tensor de Faraday?

```
sp.factor(F.det())
```

**Out [70] :**

$$(B_x E_x + B_y E_y + B_z E_z)^2$$

Que es justamente la propiedad que habíamos visto antes.

### 1.17.8. Transformación de los campos

Llegados a este punto podemos encontrar las leyes de transformación de los campos eléctricos y magnético.

Siendo el tensor de Faraday, un tensor, al pasar de un sistema de referencia inercial a otro a través de las transformaciones de Lorentz-Einstein  $\Lambda_\nu^{\mu'}$  el tensor transforma como:

$$F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} F^{\mu\nu}$$

Si definimos la matriz  $\bar{F}$  como:

$$\bar{F}^{\mu'\nu} = \sum_{\mu} \Lambda^{\mu'}_{\mu} F^{\mu\nu}$$

o bien, matricialmente:

$$\bar{F} = \Lambda F$$

Entonces la transformación original es:

$$F^{\mu'\nu'} = \sum_{\nu} \bar{F}^{\mu'\nu} \Lambda^{\nu'}_{\nu}$$

Por la simetría de la transformación de Lorentz-Einstein:

$$F^{\mu'\nu'} = \sum_{\nu} \bar{F}^{\mu'\nu} \Lambda_{\nu}^{\nu'}$$

que en términos matriciales se puede escribir como:

$$F' = \Lambda F \Lambda^T$$

Podemos intentar realizar estas operaciones usando SymPy. Para ello definamos los símbolos que usaremos:

Ahora veamos como es la transformación. Para ello introduzcamos primero la TLE en la configuración estándar:

```
u=sp.symbols("u_L")
g=1/sp.sqrt(1-u**2)
D=sp.Matrix([[g,-g*u,0,0],[-g*u,g,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]])
D
```

**Out [71]:**

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-u_L^2}} & -\frac{u_L}{\sqrt{1-u_L^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{u_L}{\sqrt{1-u_L^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-u_L^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La transformacion nos quedará:

```
sp.simplify(D*F*sp.transpose(D))
```

**Out [72]:**

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_x & \frac{B_z u_L - E_y}{\sqrt{1-u_L^2}} & -\frac{B_y u_L + E_z}{\sqrt{1-u_L^2}} \\ E_x & 0 & \frac{-B_z + E_y u_L}{\sqrt{1-u_L^2}} & \frac{B_y + E_z u_L}{\sqrt{1-u_L^2}} \\ \frac{-B_z u_L + E_y}{\sqrt{1-u_L^2}} & \frac{B_z - E_y u_L}{\sqrt{1-u_L^2}} & 0 & -B_x \\ \frac{B_y u_L + E_z}{\sqrt{1-u_L^2}} & -\frac{B_y + E_z u_L}{\sqrt{1-u_L^2}} & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

De donde resulta entonces que en la transformación estándar las reglas de transformación de los campos eléctricos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - u_L B_z) \\ E'_z &= \gamma(E_z - u_L B_y) \end{aligned}$$

Y las del campo magnético:

$$\begin{aligned} B'_x &= B_x \\ B'_y &= \gamma(B_y + u_L E_z) \\ B'_z &= \gamma(B_z - u_L E_y) \end{aligned}$$

Las componentes  $E_y$  y  $B_z$  de esta transformación coinciden con las que habíamos obtenido en la deducción de las transformaciones de Lorentz-Einstein, con lo que la teoría es completamente consistente.

Es posible mostrar que para una configuración general, la transformación de los campos sería:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}' + (\gamma - 1)\vec{E}_\perp - \gamma \vec{u}_L \times \vec{B} \\ \vec{B} &= \vec{B}' + (\gamma - 1)\vec{B}_\perp + \gamma \vec{u}_L \times \vec{E} \end{aligned}$$

donde  $\vec{E}_\perp$  y  $\vec{B}_\perp$  son los vectores de campo eléctrico y magnético perpendiculares a la velocidad relativa del sistema de referencia.

### 1.17.9. La fuerza de Lorentz

Si bien en la teoría electromagnética clásica, la fuerza de Lorentz se postula, en realidad esta resultad de las transformaciones del tensor de Faraday que vimos en la sección anterior.

Para ello considere por ejemplo el caso de una carga que se mueve en un campo magnético estático  $\vec{B}$ . En el sistema de referencia de la carga ( $\vec{u}_L = \vec{v}_L$ ):

$$\vec{E}' = \gamma_v \vec{v}_L \times \vec{B}$$

y si postulamos que la fuerza es simplemente  $\vec{F}' = q\vec{E}'$  la fuerza será:

$$\vec{F}' = \gamma_v q \vec{v}_L \times \vec{B}$$

Ahora bien, sabemos de las reglas de transformación de la fuerza que la componente perpendicular transforma como:

$$\vec{F}_\perp = \frac{\gamma_u^{-1}}{1 + \vec{u}_L \cdot \vec{v}_L'} F'_\perp$$

Dado que en el sistema de referencia de la carga  $\vec{v}_L' = \vec{o}$  y que  $\vec{u}_L = \vec{v}_L$  la fuerza sobre la carga en el sistema de referencia del observador será:

$$\vec{F} = q\vec{v}_L \times \vec{B}$$

Si además hay un campo eléctrico en el sistema del observador (donde la partícula se mueve) la fuerza será entonces:

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{1}{c} q\vec{v} \times \vec{B}$$

**Nota 1.19**

**La fuerza de Lorentz y la rotación del campo de Faraday.** Una manera e interpretar el resultado anterior y el origen en general de la fuerza de Lorentz podría ser la de pensar de la siguiente manera. El campo de Faraday cuando solo hay campo magnético tiene solo componentes espaciales. Cuando una carga eléctrica está en movimiento es como si el campo de Faraday se rotara. Al rotarse aparecen componentes temporales del campo de Faraday que la carga percibe como campo eléctrico y de allí que experimente una fuerza.

Escribiendo explícitamente la componente  $x$  queda:

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{q}{c}(cE_x + v_yB_z - v_zB_y)$$

Multiplicando por  $\gamma$  a ambos lados podemos escribir:

$$\frac{dP^1}{d\tau} = \frac{q}{c}(U^0F^{10} - U^2F^{12} - U^3F^{13})$$

o en términos de las componentes covariantes de la cuadrvelocidad,

$$\frac{dP^1}{d\tau} = \frac{q}{c}(U^0F^{10} + U_2F^{12} + U_3F^{13})$$

De donde podemos proponer la generalización para calcular la cuadrifuerza:

$$f^\mu = \frac{q}{c}U_\nu F^{\mu\nu}$$

que llevada a un conjunto de cargas se puede escribir como:

$$K^\mu = J_\nu F^{\mu\nu}$$

donde en esta última expresión  $K^\mu$  representa una densidad de fuerza (fuerza por unidad de volumen).

**Nota**

**La componente temporal de la fuerza de Lorentz.** La generalización presentada en el párrafo anterior apareció simplemente como un ejercicio de inducción, pero no lo es estrictamente. Si bien las componentes espaciales de la cuadrifuerza siguen la misma regla:

$$f^i = \frac{q}{c}F^{iv}U_v$$

la componente temporal no tiene porque seguirla. ¿De dónde viene la idea de que podemos generalizarla a esta componente?. Hagamos el ejercicio inverso e intentemos determinar en términos de cantidades convencionales que significa esta componente:

### Nota (Cont.)

$$f^0 = \frac{q}{c} F^{0\nu} U_\nu = \frac{q}{c} (F^{01} U_1 + F^{02} U_2 + F^{03} U_3)$$

Si recordamos que  $E^i = -F^{i0}$  y  $U_i = -U^i$  entonces:

$$f^0 = \gamma \frac{q}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}$$

en unidades luz y reconociendo que la trifuerza experimentada por una carga en presencia de un campo eléctrico es  $\vec{F} = q\vec{E}$  obtenemos:

$$f_L^0 = \gamma \vec{F} \cdot \vec{v}_L$$

que es justamente lo que sabíamos sobre la componente temporal de la fuerza. Es decir la componente temporal de la fuerza de Lorentz no es otra cosa que la componente temporal de la cuadrifuerza de un campo eléctrico.

Ahora bien, sabemos también que  $f_L^0 = dE/dt$ , siendo  $E$  en este contexto, la energía total de la partícula. De allí que la componente cero de la fuerza de Lorentz es simplemente la potencia de la fuerza de Lorentz, la tasa a la cual se transfiere o remueve energía de la partícula.

### 1.17.10. Interpretación geométrica del campo de Faraday

Uno de los aspectos más oscuros de la teoría electromagnética es la interpretación intuitiva de cada una de las cantidades relevantes de la teoría. Si bien la interpretación de los campos es relativamente directa, están asociados con las fuerzas que experimentan partículas y corrientes eléctricas en presencia de ellos, la interpretación de los potenciales es un poco más complicada.

Si eso pasa con la electrodinámica vectorial en tres dimensiones, la electrodinámica covariante en cuatro dimensiones no es menos sencilla.

La fuerza de Lorentz sin embargo nos ofrece un raro vistazo a la geometría del tensor de Faraday en 4 dimensiones. Para entenderlo mejor podemos apelar a una cantidad clásica: el **tensor de esfuerzos**  $\sigma_{ij}$ .

### Definición

**Tensor de esfuerzos.** El tensor de esfuerzos es una cantidad clásica usada en la mecánica del continuo para calcular la *tracción* producida en cualquier punto dentro de un sólido por el material vecino. La tracción  $\vec{T}^{(\hat{n})}$  se define como la fuerza por unidad de área que experimenta el elemento de sólido en dirección de una superficie imaginaria definida por el vector  $\hat{n}$ . La tracción viene dada en términos del tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$  por el producto punto:

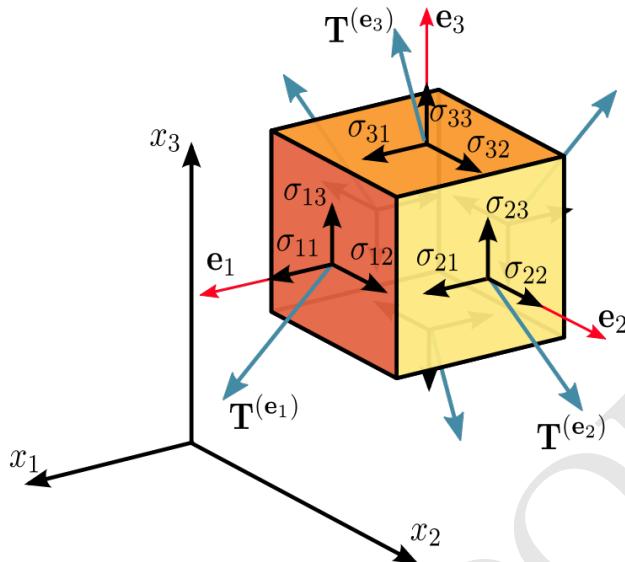


Figura 1.22: Tensor de esfuerzos.

### Definición (Cont.)

$$\vec{T}^{(\hat{n})} : \left( \sum_i n_i \sigma_{i1}, \sum_i n_i \sigma_{i2}, \sum_i n_i \sigma_{i3} \right) \equiv \hat{n} \cdot \sigma$$

La característica más interesante y relevante para nuestra discusión es que el producto punto de un vector (dirección) y un tensor de segundo rango (tensor de esfuerzos) produce un vector (tracción).

Particularmente interesantes son las componentes de la tracción en dirección de los vectores coordenados:

$$\begin{aligned}\vec{T}^{(e_1)} &: (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \\ \vec{T}^{(e_2)} &: (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) \\ \vec{T}^{(e_3)} &: (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})\end{aligned}$$

Escrito de esta manera, nos damos cuenta que las componentes del tensor de esfuerzo en la base  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  no son otra cosa que las componentes de las tracciones sobre la superficie en cada una de las direcciones. Esto le da una interpretación geométrica concreta a la tracción.

Con el tensor de Faraday sucede una situación similar. La cuadrifuerza de Lorentz  $f^\mu$  juega aquí el papel de la tracción y el tensor de Faraday es como el tensor de esfuerzos:

$$f_L^\mu = q F^{\mu\nu} U_{L\nu}$$

De modo que uno puede ver las componentes del tensor de Faraday como los

factores por los que hace falta multiplicar la velocidad para obtener las componentes de la cuadrifuerza sobre la partícula. En otros términos, del tensor de Faraday:

$$F^{\mu\nu} : \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}$$

podemos pasar al cuadrivector de fuerza escrito de la forma:

$$\begin{pmatrix} dE/dt \\ F_{Lx} \\ F_{Ly} \\ F_{Lz} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0+ & (-v_{Lx})(-E_x) + & (-v_{Ly})(-E_y) + & (-v_{Lz})(-E_z) \\ E_x+ & 0+ & (-v_{Ly})(-B_z) + & (-v_{Lz})(+B_y) \\ E_y+ & (-v_{Lx})(+B_z) + & 0+ & (-v_{Lz})(-B_x) \\ E_z+ & (-v_{Lx})(-B_y) + & (-v_{Ly})(+B_x) + & 0 \end{pmatrix}$$

donde asumimos que sumamos sobre las filas de la matriz anterior (abusando de la notación).

Es decir, las filas del tensor de Faraday nos dan una idea de cuánto vale la fuerza electromagnética en una determinada dirección.

Ahora bien. Si hacemos por ejemplo  $\vec{v} : (v_x, 0, 0)$ , la fuerza de Lorentz queda:

$$\begin{pmatrix} dE/dt \\ F_{Lx} \\ F_{Ly} \\ F_{Lz} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0+v_x E_x \\ E_x+0 \\ E_y-v_x B_z \\ E_z+v_x B_y \end{pmatrix}$$

Es decir, si se proyecta el vector de Faraday sobre una dirección de la velocidad específica el negativo de la columna de correspondiente a la velocidad nos dará las componentes de la fuerza espacial magnética experimentada por la partícula. Es como si la proyección espacial del tensor de Faraday produjera las fuerzas electromagnéticas.

Por otro lado si la partícula está quieta  $U_L^\mu : (1, 0, 0, 0)$  entonces:

$$\begin{pmatrix} dE/dt \\ F_{Lx} \\ F_{Ly} \\ F_{Lz} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

de modo que podríamos interpretar la proyección temporal del vector de Faraday como relacionada con la fuerza eléctrica experimentada por la partícula.

### 1.17.11. Síntesis

En síntesis la dinámica de cargas y campos electromagnéticos clásicos se describen con:

$$F^{\mu\nu}_{,\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad (\text{Gauss - E}) \text{ y } (\text{Ampere - Maxwell}) \quad (1.86)$$

$$F^{[\mu\nu,\alpha]} = 0 \quad (\text{Gauss - B}) \text{ y } (\text{Maxwell - Faraday}) \quad (1.87)$$

$$J^\mu_{,\mu} = 0 \quad (\text{Continuidad}) \quad (1.88)$$

$$K^\mu = F^{\mu\nu} J_\nu \quad (\text{Fuerza de Lorentz}) \quad (1.89)$$

donde  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  y el cuadripotencial cumple  $A^\mu_{,\mu} = 0$  (gauge de Lorenz).

### 1.17.12. Ejemplos {ejemplos\_electrodinamica}

No puede subestimarse el poder que tiene la formulación covariante de la electrodinámica que hemos desarrollado en esta sección. En los ejemplos a continuación ilustramos la manera en la que se aplica lo que hemos visto para resolver algunas situaciones particulares que son de interés físico aunque no necesariamente son las más generales.

#### Campo producido por una carga en movimiento

Uno de los más interesantes ejemplos de aplicación de la electrodinámica manifiestamente covariante es el cálculo del campo electromagnético producido por una carga en movimiento rectilíneo y uniforme.

El cálculo de este campo usando la electrodinámica clásica es realmente laborioso. Sin embargo si usamos los resultados vistos en esta sección el cálculo resulta bastante directo.

El truco consiste siempre en describir el problema en un sistema de referencia en el que el cálculo del campo sea realmente sencillo. En este caso el sistema de referencia es aquel que se mueve con la misma velocidad de la partícula. En este sistema de referencia esta probado no hay campo magnético producido por la carga y solo hay un campo eléctrico que viene dado por:

$$\vec{E}' = \frac{q}{r'^3} \vec{r}'$$

donde  $\vec{r}' = \Delta x' \hat{e}_x + \Delta y' \hat{e}_y + \Delta z' \hat{e}_z$ .

Según las reglas de transformación el campo en el sistema de referencia del observador quedaría:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}' + (\gamma - 1) \vec{E}'_\perp \\ \vec{B} &= \gamma \vec{u}_L \times \vec{E}' \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\vec{E}' - \vec{E}'_\perp = \vec{E}'_\parallel$  y que  $\vec{u}_L \times \vec{E}' = \vec{u}_L \times \vec{E}'_\perp$ , el resultado se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}'_\parallel + \gamma \vec{E}'_\perp \\ \vec{B} &= \vec{u}_L \times \vec{E} \end{aligned}$$

Aquí notamos un interesante efecto: el campo eléctrico en dirección del movimiento no se modifica, pero si lo hace en dirección perpendicular donde es incrementado por un factor  $\gamma$ .

Ahora bien, el valor del campo dado por la ley de Coulomb tiene una modificación debido a la contracción de longitudes en dirección de propagación. Si fijamos el eje  $x$  en la dirección de la velocidad, entonces:

$$\vec{r}' = \gamma \Delta x \hat{e}_x + \Delta y \hat{e}_y + \Delta z \hat{e}_z$$

de donde:

$$r'^2 = \gamma^2 \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

que se puede escribir como:

$$r'^2 = \gamma^2 r^2 (1 - v_L^2 \sin^2 \theta)$$

donde  $\sin \theta = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2} / \Delta x$  es el ángulo entre la dirección al punto en la que se está calculando el campo y la dirección e propagación. Este resultado es general independientemente de si se usa o no la configuración estándar.

Con este resultado el campo eléctrico en el sistema de referencia del observador se puede escribir como:

$$\vec{E} = \frac{1}{\gamma^2 (1 - v_L^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

El campo magnético por otro lado está dado por:

$$\vec{B} = \frac{1}{\gamma^2 (1 - v_L^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{q}{r^3} \vec{v}_L \times \vec{r}$$

Como vemos en cada momento ambos campos siguen disminuyendo como  $1/r^2$ , pero su magnitud depende de la dirección en la que mida el campo respecto a su dirección de propagación.

Cuando  $\theta = 0, \pi$  (en la dirección de movimiento o en dirección contraria) la magnitud del campo eléctrico es:

$$E(\theta = 0, \pi) = \frac{q}{(\gamma r)^2}$$

Es decir, en dirección del campo la contracción de longitudes hace que en el sistema de referencia del observador el campo a una distancia  $r$  dada tenga una intensidad equivalente a la que vería la carga a una distancia  $\gamma r$ .

En dirección perpendicular al campo  $\theta = \pm \pi/2$  el campo por otro lado es:

$$E(\theta = \pm \pi/2) = \frac{(\gamma q)}{r^2}$$

En dirección perpendicular el efecto es curioso. En este caso es como si el campo fuera producido por una carga más intensa (carga relativista)  $q_r = \gamma q$ . En realidad el efecto es debido a los efectos en el espacio-tiempo en los que el campo magnético que ahora está presente juega también un papel importante.

En síntesis a la misma distancia hacia adelante el campo es  $\gamma^3$  más débil que en dirección perpendicular.

Podemos visualizar este campo de dos maneras diferentes, por un lado mostrando el vector de campo a una distancia determinada.

Fijemos las propiedades de la partícula.

```
q=1
vL=0.7
gamma=1/(1-vL**2)**0.5
```

Calculamos las componentes del campo eléctrico (tanto en reposo como en movimiento) a una distancia constante:

```
#Angulos en los que evaluaremos el campo
from numpy import linspace,concatenate,pi,zeros_like
tetas=concatenate((linspace(-pi,0,10),
                    linspace(0,pi,10)))

#Vector de posición
xs=zeros_like(tetas)
ys=zeros_like(tetas)

#Vector de campo eléctrico
from numpy import zeros_like
Exs=zeros_like(tetas)
Eys=zeros_like(tetas)

Erxs=zeros_like(tetas)
Erys=zeros_like(tetas)

#Distancia constante
r=0.3
from numpy import cos,sin
for i,teta in enumerate(tetas):
    xs[i]=r*cos(teta)
    ys[i]=r*sin(teta)
    # Campo eléctrico en reposo
    Erxs[i]=q/r**3*xs[i]
    Erys[i]=q/r**3*ys[i]
    # Campo eléctrico en movimiento
    Exs[i]=q/(r**3*gamma**2*(1-vL**2*sin(teta)**2)**1.5)*xs[i]
    Eys[i]=q/(r**3*gamma**2*(1-vL**2*sin(teta)**2)**1.5)*ys[i]
```

Ahora podemos graficar el campo:

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 1.15)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

#Gráfico de los puntos
ax.plot(xs,ys,'b--')
#Gráfico de los vectores de campo
ax.quiver(xs,ys,Exs,Eys,
           color='g',alpha=0.5,scale=70,
           label="Carga en reposo")
ax.quiver(xs,ys,Exs,Eys,
           scale=70,
           label="Carga en movimiento")
#Posición de la carga
ax.plot([0],[0],'ro')

#Decoración
ax.legend();
ax.set_xlim((-1,1));
ax.set_ylim((-1,1));
ax.set_xlabel("$x$");
ax.set_ylabel("$y$");

```

ver Figura 1.23

**Campo producido por un alambre recto**

## 1.18. Problemas Seleccionados

1. **Demostración de las derivadas.** Demostrar que las derivadas parciales respecto a las coordenadas del espacio-tiempo transforman como:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \Lambda_{\mu'}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$$

2. **Invariancia de la norma de Minkowski.** Demostrar que la norma de Minkowski:

$$ds^2 = dt^2 - dx_L^2 - dy_L^2 - dz_L^2$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz-Einstein.

3. **Invariancia de la norma de Minkowski.** Demostrar que la métrica  $g_{\mu\nu}$  definida como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

dond  $ds^2$  es un invariante, es un tensor covariante de rango 2.

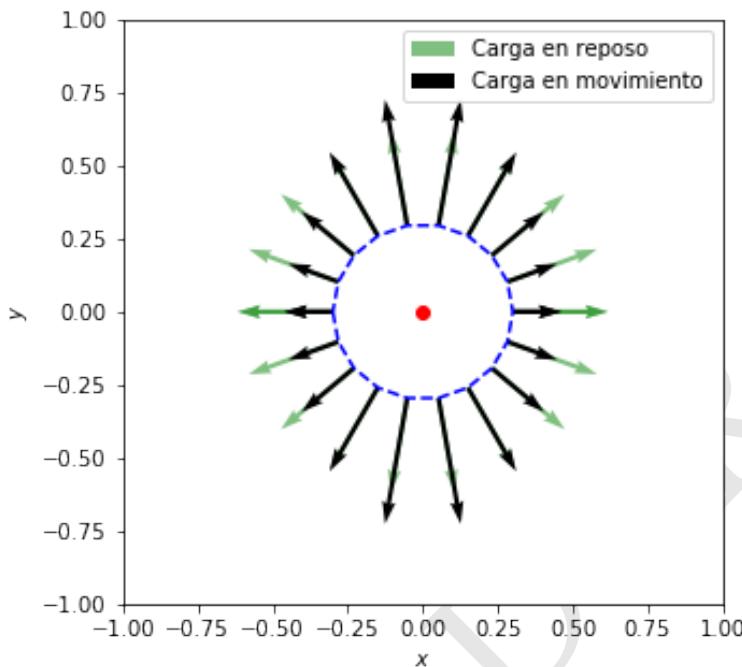


Figura 1.23: Figura correspondiente al código 1.15.

4. **Componentes de la cuadriaceleración.** Partiendo de la definición de cuadri-velocidad demostrar que las componentes de la cuadriaceleración son:

$$A_L^\mu : \gamma^4 (\vec{u}_L \cdot \vec{v}_L, \vec{u}_L)$$

5. **Transformación de la fuerza.** Dado que la componente espacial de la fuerza transforma como:

$$\gamma_v \vec{F}_L = \gamma_{v'} \vec{F}'_L + \left( \frac{\gamma_u - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \gamma_{v'} \vec{F}'_L + \gamma_u \gamma_{v'} \vec{F}'_L \cdot \vec{v}'_L \right) \vec{u}_L$$

mostrar que si la velocidad de la partícula es paralela a la velocidad relativa de los sistemas de referencia, las componentes paralela y perpendicular de la fuerza transforman como:

```
\begin{eqnarray}
\nonumber F_{\parallel} &= & \frac{F_{\parallel} + \vec{u}_L \cdot \vec{F}_L}{1 + \vec{v}_L \cdot \vec{u}_L} \\
\nonumber F_{\perp} &= & \frac{\gamma_u^{-1} F_{\perp}}{1 + \vec{v}_L \cdot \vec{u}_L}
\end{eqnarray}
```

6. **Transformación de la fuerza.** Demostrar que la ley de atracción gravitacional de Newton:

$$\vec{F} = \frac{GMm}{R^3}\vec{R}$$

no transforma de acuerdo a las reglas de transformación de Lorentz-Einstein para la trifuerza y por lo tanto no puede usarse en dinámica relativista.

BORRADOR

# Capítulo 2

# Relatividad General

**Resumen:** Este capítulo está dedicado a la Relatividad general.

## 2.1. Motivación

Históricamente la relatividad general surgió como un esfuerzo del propio Albert Einstein (ahora en solitario) para construir una teoría mucho más general de la relatividad en la que pudiera extender su principio de covariancia para incluir otros observadores diferentes a los observadores inerciales. En el proceso formuló y desarrollo las consecuencias de lo que se conoce hoy como el **principio de covarianza general**.

Conseguir esto no sería sin embargo fácil para Einstein. De un lado las matemáticas necesarias para abordar el problema más general de la relatividad no serían tan sencillas como las que usa la relatividad especial (álgebra y cálculo diferencial e integral esencialmente). Del otro lado, Einstein nunca previó que en su búsqueda se toparía con una nueva teoría del fenómeno gravitacional, que fue finalmente por lo que terminó conociéndose la teoría resultante.

En términos generales, entonces, la **teoría general de la relatividad** es:

- Una teoría sobre las **transformaciones generales de coordenadas** necesarias para relacionar las cantidades registradas por observadores inerciales y no inerciales. En este aspecto la teoría es realmente una *generalización* de la primera parte de la teoría, que por la misma razón tiene sentido llamar **teoría especial de la relatividad**. En este aspecto la teoría no es mucho más que simplemente matemáticas en tanto las transformaciones generales de coordenadas son un problema más de matemáticas que un problema físico.
- Una **teoría fundamental sobre el fenómeno gravitatorio** algo que los filósofos y físicos de toda la historia habían buscado incansablemente desde el tiempo de Aristóteles. . Como hemos visto en secciones precedentes la fuerza gravitacional que está en la base de la teoría gravitatoria de Newton no satisface los criterios de transformación de la teoría especial de la relatividad.

Es decir la fuerza gravitacional vista por un observador inercial no transforma con las reglas de Lorentz-Einstein y por lo tanto no puede ser un modelo fundamental del fenómeno. La teoría general de la relatividad explica el origen de esos fenómenos, la tendencia de toda la materia a acercarse como si se atrajera, el movimiento particular de las partículas cerca a grandes cuerpos astronómicos - caída libre, movimiento orbital, etc. e incluso los efectos que la materia tienen sobre la propagación de la luz. Según esta teoría la gravedad surge porque existe una relación íntima entre el contenido de energía del universo (masa, energía y momentum) y las propiedades geométricas del espacio-tiempo (curvatura). La dinámica de la materia en ese espacio-tiempo distorsionado es lo que vemos como gravedad.

En este capítulo, que podríamos considerar apenas introductorio (las ramificaciones posibles de la teoría general de la relatividad son bastas), introduciremos los postulados y principios básicos que uso Einstein en su momento y que hoy todavía se usan para formular y construir la teoría general de la relatividad. Partiendo de esos principios y de resultados matemáticos conocidos en el análisis tensorial y la geometría diferencial (de los que hemos ya tenido una introducción en el capítulo anterior) deduciremos las principales ecuaciones que describen el fenómeno gravitatorio, desde la ecuación fundamental conocida como la ecuación de campo métrico de Einstein-Hilbert, hasta la ecuación de la geodésica.

Dejaremos para capítulos posteriores la aplicación concreta de estas ecuaciones que forman en sí mismo un cuerpo teórico importante dentro de la física teórica y la astrofísica contemporánea.

## 2.2. Principios y postulados básicos

Hoy se acepta que la teoría general de la relatividad se construye, físicamente, sobre la base de tres principios o postulados básicos:

- El **principio de equivalencia** que tenía ya una historia de más de 350 años desde los experimentos de Galileo con planos inclinados.
- El **principio de covarianza general**, una inteligente generalización del postulado de relatividad especial.
- El **principio de consistencia**, una inteligente idea que, en términos prácticos, permite reconstruir las ecuaciones de teorías nuevas y más fundamentales a partir de las ecuaciones *efectivas* de teorías anteriores.

### 2.2.1. Principio de Equivalencia

El principio de equivalencia fue llamado por Einstein *la idea más feliz de mi vida*. Existen distintas versiones del principio de equivalencia y por razones históricas y de la motivación física de la teoría general bien vale revisar cada una de ellas.

### Principio de Galileo

Es bien conocida la historia apócrifa de Galileo lanzando desde lo alto de la Torre de Pisa bolas metálicas de distinta masa para demostrar, contra la creencia de los filósofos escolásticos que estudiaban la obra de Aristóteles, que sin importar la masa las bolas caían al mismo tiempo.

Este importante resultado no tiene una justificación teórica en el contexto de las ideas galileanas, fue solo una intuición, posiblemente en reacción a las ideas no contrastadas de Aristóteles que formuló Galileo. Por la misma razón se lo puede considerar un principio.

#### Postulado 2.1

**Principio de Galileo.** La trayectoria que sigue un objeto en caída libre y en ausencia del aire (o despreciando su efecto), es independientemente de la constitución y tamaño del objeto.

### Principio de igualdad de las masas

Aunque este principio hunde sus raíces en la teoría Newtoniana, nunca fue formulado explícitamente por Newton.

Existen dos cantidades que llamamos masa en la física Newtoniana: la **masa inercial** que está relacionada con la *resistencia* o *inercia* que opone la partícula a cambiar su estado de movimiento y la **masa gravitacional** que es una medida de su capacidad para producir una atracción sobre otras partículas y para sentirla.

La masa inercial es la que aparece en la definición del momentum de la partícula  $\vec{p} = m^{(i)}\vec{v}$  y por lo tanto (suponiendo que no cambia en un instante dado) es la misma que aparece en el postulado de fuerzas:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m^{(i)}}$$

Por otro lado la masa gravitacional es la que aparece en la definición misma de la fuerza de atracción gravitacional:

$$\vec{F}_g = G \frac{m^{(g)} M^{(g)}}{r^3} \vec{r}$$

Si usamos esta fuerza para calcular la aceleración de caída libre obtenemos:

$$\vec{g} = G \frac{m^{(g)} M^{(g)}}{m^{(i)} r^3} \vec{r}$$

En principio siempre será posible ajustar el valor de la constante de gravedad universal  $G$  para hacer que el valor numérico de la masa gravitacional de un cuerpo sea idéntico el valor numérico de su masa inercial. Sin embargo, y esta es la motivación del principio, experimentalmente se ha mostrado (ver experimento de Eötvos) que una vez ajustado para un cuerpo, la identidad numérica se mantiene para todos independientemente de su composición.

**Postulado: Principio de igualdad de las masas gravitacional e inercial.** Una vez fijado el valor de la constante gravitacional  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  La masa gravitacional e inercial de un cuerpo, en la teoría newtoniana, tienen el mismo valor numérico, independientemente del lugar y de la composición del cuerpo:

$$m^{(i)} = m^{(g)}$$

Este principio es equivalente a decir que la aceleración gravitacional que experimenta un objeto en presencia de otro es *explícitamente*<sup>4</sup> independiente de su masa:

$$\vec{g} = \frac{GM}{r^3} \vec{r}$$

Por este último hecho a este también se lo llama el **principio de universalidad de la caída libre**.

El principio de equivalencia de la masa gravitacional e inercial no implican que sean la misma cantidad, sino simplemente que tienen el mismo valor, pero parecen sugerir de fondo la existencia de un hecho más fundamental, que es precisamente lo que descubrió Einstein.

#### Principio de equivalencia de Einstein

Si la aceleración gravitacional de los cuerpos es explícitamente independiente de su masa, entonces cuerpos que caen libremente en presencia de un cuerpo mayor y que comienzan con condiciones iniciales idénticas, caerán conservando una relación espacial relativa simple.

En un campo gravitacional uniforme  $\vec{g}_0$  los cuerpos se mantendrán a una distancia relativa constante con el tiempo mientras caen. En un campo gravitacional más realista, como el producido por la Tierra, debido a que los cuerpos se mueven hacia el centro del planeta, los cuerpos tenderán a acercarse en dirección perpendicular a la dirección hacia el centro y a alejarse en esa misma dirección. A este efecto se lo llama aceleración de marea.

Sin embargo, si estamos cerca al cuerpo atractor y el sistema en caída libre es suficientemente pequeño, un observador en el interior del sistema podría no percibir que se encuentra en caída libre. Esta fue *la idea más feliz* de la vida de Einstein.

#### Postulado 2.2

**Principio de Equivalencia de Einstein.** Un observador en caída libre (acelerado) en un campo gravitacional arbitrario, es *localmente* indistinguible de un observador inercial.

<sup>4</sup>La independencia explícita no implica que en realidad haya una dependencia implícita en tanto un cuerpo modifica la posición y movimiento de los cuerpos que lo atraen gravitacionalmente, cambiando a su vez su propia aceleración. Este efecto será mayor en tanto mayor sea su masa. Es decir, la aceleración gravitacional de un cuerpo es implícitamente dependiente de su masa.

**Postulado 2.2 (Cont.)**

Otra manera de expresar este principio es decir que *localmente* los efectos cinemáticos de un campo gravitacional son *indistinguibles* de aquellos que se producen en un sistema de referencia acelerado.

Hay dos palabras claves en el principio de equivalencia de Einstein: *local* e *indistinguible*.

Por **local** entendemos que los fenómenos deben estudiarse en la vecindad infinitesimal de un punto, es decir no podemos afirmar que el observador en caída libre sea inercial en todos los puntos de su sistema de referencia. En términos de la fenomenología newtoniana esto es debido a los efectos de marea producidos por la variación del campo gravitacional.

Por **indistinguible** entendemos que no habría ningún experimento cinemático que le permitiera al observador demostrar que esta en un sistema en caída libre o en un sistema inercial, o bien que esta en un campo gravitacional o en un sistema de referencia acelerado.

Otra manera de decirlo sería que la gravedad, al menos sus efectos cinemáticos, son relativos. Este fue justamente el *pensamiento más feliz* de la vida de Einstein.

**Principio de equivalencia fuerte**

Puede decirse que lo postulado por Einstein en su principio de equivalencia no es más que una consecuencia del postulado de la universalidad de la caída libre, algo que podría perfectamente haber descubierto Newton. En este sentido más que un postulado sería un corolario.

Es por eso que muchos autores llaman al principio de equivalencia de Einstein el **principio de equivalencia débil**. Pero la teoría general de la relatividad va más lejos. De la misma manera que la teoría especial donde el principio de relatividad primero se reconoce en los fenómenos electromagnéticos y después se extiende a todos los fenómenos físicos, incluyendo los mecánicos, en relatividad general el principio de equivalencia se extiende también.

**Postulado 2.3**

**Principio de Equivalencia de Fuerte.** Localmente todos los efectos físicos de un campo gravitacional son *indistinguibles* de aquellos que se producen en un sistema de referencia acelerado.

Es decir, no es posible distinguir un campo gravitacional de un sistema de referencia inercial mediante ningún experimento, bien sea este cinemático, dinámico, electromagnético, óptico, nuclear, etc.

**Principio de equivalencia geométrico**

En su versión moderna el principio de equivalencia adopta una formulación mucho más general y poderosa que irá teniendo sentido a lo largo de este capítulo.

### Postulado 2.4

**Principio de equivalencia.** En cualquier evento  $x^\nu$  de un espacio-tiempo arbitrario, donde la métrica sea  $g_{\mu\nu}(x^\nu)$  es posible encontrar un sistema de coordenadas  $x^{\mu'}(x^\nu)$  (transformación general no lineal) tal que se cumplan simultáneamente:

$$g_{\mu'\nu'}|_{x^\nu} = \eta_{\mu'\nu'}$$

y

$$\partial_{\alpha'} g_{\mu'\nu'}|_{x^\nu} = 0$$

En este sistema de coordenadas las ecuaciones manifiestamente covariantes que describen todas las leyes de la física en el espacio-tiempo plano son válidas. Llamamos al sistema de coordenadas donde se cumple esto un **sistema de referencia inercial local** o un **sistema de coordenadas geodésico**.

Las implicaciones de este principio son fantásticas. De un lado implica que todo lo que hemos aprendido en la teoría especial de la relatividad seguirá siendo válido en el contexto de la relatividad general y por lo tanto no hay que construir nuevas leyes para el espacio-tiempo curvo, solo hay que aprender a hacer transformaciones generales (no lineales) de coordenadas en el espacio-tiempo.

#### Nota

**Gravedad no es lo mismo que aceleración.** El principio de equivalencia moderno formulado anteriormente tiene una importante y sutil diferencia con el principio de equivalencia de Einstein de 1907. Según ese principio un campo gravitacional es equivalente a un sistema de referencia acelerado. Si bien en su momento este principio fue de utilidad para Einstein para realizar sus primeras predicciones asombrosas sobre las implicaciones de la teoría de la relatividad, en realidad, como lo probó el mismo Einstein en su versión final de la teoría.

Lo explicaremos más adelante pero bastará con decir por ahora que el principio de equivalencia solo supone la anulación de las primeras derivadas de la métrica en el sistema geodésico, pero en un campo gravitacional las segundas derivadas de la métrica son realmente las más importantes y son diferentes de cero. Esto no se puede conseguir solo con aceleración.

Puesto en otros términos, con sistemas acelerados es imposible *imitar* los efectos de las mareas gravitacionales (que dependen de las segundas derivadas de la métrica).

Una manifestación concreta del hecho de que un sistema de referencia acelerado no es equivalente a un campo gravitacional tiene que ver con el fenómeno de dilatación temporal. Habíamos visto en el postu-

**Nota (Cont.)**

lado de los relojes que la aceleración **no produce atraso presente**, solo se produce atraso a lo largo del tiempo. En cambio, como veremos, la gravedad **produce atraso presente**.

### 2.2.2. Principio de covarianza general

Uno de los fundamentos de la relatividad es la idea que las leyes son las mismas para todos los observadores. Esto fue formulado en su **principio de relatividad especial** y es la base para la construcción de la teoría especial de la relatividad y sus construcciones geométricas incluyendo cuadrivectores y tensores.

La teoría general de la relatividad no se podría levantar sobre un principio menos general y es por eso que ella parte del siguiente postulado:

#### Postulado 2.5

**Principio de covarianza general.** Las leyes de la física son covariantes bajo transformaciones de coordenadas generales  $x^{\mu'}$ , es decir cualquier regularidad física que pueda expresarse como relaciones entre *cantidad tensoriales generales* puede elevarse a la categoría de una ley física.

En el principio de covarianza general el adjetivo *general* para referirse a las transformaciones de coordenadas y a los tensores tiene una connotación matemática muy específica.

Considere por ejemplo el caso de un sistema de referencia que esta acelerado en dirección del eje x respecto a un sistema de referencia inercial. En el caso de la relatividad newtoniana caso las reglas de transformación entre los dos sistemas será:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - ut - gt^2/2 \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Estas transformaciones no son lineales, como lo eran las transformaciones de Galileo-Newton:

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -u - gt$$

Es justamente en ese sentido que hablamos de **transformaciones generales**.

Bajo transformaciones generales de coordenadas no es posible tampoco definir sistemas de referencia globales, que cubran todo el espacio tiempo. Esto es porque bajo estas transformaciones generales el cuadrivector posición ya no transforma de la manera que lo hacía en el caso de las transformaciones lineales de Lorentz-Einstein.

$$x^{\mu'} \neq \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} x^\mu$$

Solo es posible construir sistemas de referencia locales, o en términos matemáticos, solo el intervalo sigue siendo estrictamente un tensor:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

que podemos escribir también como:

$$dx^{\mu'} = g_{\mu'}^{\mu} dx^\mu$$

donde la matriz  $g_{\mu'}^{\mu}$  (que también podemos identificar como el Jacobiano de la transformación) jugará ahora el papel que en la relatividad especial jugó  $\Lambda_\mu^{\mu'}$ , con la diferencia que esta matriz es ahora distinta en cada punto del espacio.

Justamente en términos de la nueva matriz de transformación definimos lo que llamaremos un **tensor general**, que será cualquier cantidad que transforme como lo hace el intervalo:

$$A^{\mu'} = g_{\mu'}^{\mu} A^\mu$$

Bajo transformaciones generales de coordenadas tenemos que admitir también que la métrica no será simplemente la métrica de Minkowski. En general, el espacio-tiempo en estas condiciones tendrá una métrica general definida por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

La cantidad  $g_{\mu\nu}$  es en sí misma un tensor general y transforma entonces de la forma:

$$g_{\mu'\nu'} = g_{\mu'}^{\mu} g_{\nu'}^{\nu} g_{\mu\nu}$$

de modo que  $ds^2$  sigue siendo una cantidad invariante bajo estas transformaciones.

Por definición el tensor métrico es simétrico:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

La inversa del tensor métrico se escribe como  $g^{\mu\nu}$  y se define como:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$$

### 2.2.3. Tensores generales

Casi todo lo que dijimos en la relatividad especial sobre las cantidades tensoriales puede generalizarse cuando trabajamos con transformaciones generales de coordenadas. A continuación se sintetizan las propiedades de los tensores generales:

■ **Reglas de transformación:**

$$A_{\mu'\nu'\dots}^{\alpha'\beta'\dots} = \left( \mathcal{G}_{\mu'}^{\mu'} \mathcal{G}_{\nu'}^{\nu'} \dots \right) \left( \mathcal{G}_{\alpha'}^{\alpha} \mathcal{G}_{\beta'}^{\beta} \dots \right) A_{\mu\nu\dots}^{\alpha\beta\dots}$$

- **Operaciones tensoriales:** la multiplicación (interna y externa por escalares) y la suma de tensores produce también cantidades tensoriales con rango y posición de índices correspondientes. Ejemplo:

$$A_{\mu\nu}^{\alpha} = kB^{\alpha}C_{\mu}D_{\nu} + E_{\mu\nu}^{\alpha}$$

- **Subida y bajada de índices:** Las operaciones de un tensor con la métrica son de suma importancia. Las componentes covariantes del tensor se definen por:

$$A_{\nu} = g_{\mu\nu}A^{\mu}$$

A esta operación se la llama también “bajar un índice” y aplica para cualquier tensor:

$$A^{\mu}_{\nu} = g_{\alpha\nu}A^{\mu\alpha}$$

Usando esta propiedad podemos mostrar que:

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

- **Contracción de índices:** Cuando en un tensor se utilizan los mismos indices se realiza lo que se conoce como una contracción, que equivale a una multiplicación por el tensor métrico

$$A_{\nu} = B^{\mu}_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}B_{\alpha\mu\nu}$$

## 2.3. Transporte paralelo y derivada covariante

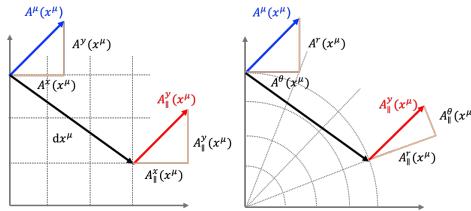
### 2.3.1. El gradiente no es un tensor general

Al introducir las transfromaciones generales de coordenadas hay una cantidad que bajo transformaciones de Lorentz-Einstein (lineales) transformaba como un tensor, pero que bajo transformaciones generales ya no lo hace: la derivada o el gradiente.

Considerese la definición:

$$A^{\alpha}_{,\mu} = \partial_{\mu}A^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}A^{\alpha}$$

Bajo transformaciones generales, la derivada covariante  $\partial_{\mu'}A^{\alpha'}$  en el nuevo sistema será:



**Figura 2.1:** Transporte paralelo.

$$\partial_{\mu'} A^{\alpha'} = \left( \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\mu} \right) \left( \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right) = \mathcal{G}^{\mu}_{\mu'} \partial_{\mu} (\mathcal{G}^{\alpha'}_{\alpha} A^{\alpha})$$

donde para la expresión en el primer paréntesis hemos usado la regla de la cadena.

La diferencia respecto al caso que habíamos estudiado en el capítulo anterior es que ahora las componentes de la matriz de transformación general  $\mathcal{G}^{\alpha'}$  no son constantes y por lo tanto no es posible escribir esta expresión de la forma simple:

$$\partial_{\mu'} A^{\alpha'} \neq \mathcal{G}^{\mu}_{\mu'} \mathcal{G}^{\alpha'}_{\alpha} \partial_{\mu} A^{\alpha}$$

Siendo esta cantidad tan importante para los propósitos de formular teorías físicas manifiestamente covariantes es importante que estudiemos lo que debemos hacer en este caso.

### 2.3.2. Transporte paralelo

Derivar un tensor significa esencialmente calcular la tasa a la que cambian sus componentes al movernos de un evento a otro en el espacio-tiempo.

El problema es que en un sistema de coordenadas general las componentes pueden cambiar por dos razones:

1. Porque el tensor cambie (el campo tensorial) cambie. Este es el cambio que nos interesa.
2. Porque la base sobre la que se define el tensor cambie.

Un caso elemental es el de un vector en el espacio euclíadiano de dos dimensiones. Si se utilizan coordenadas cartesianas y tenemos un campo vectorial constante, las componentes del campo vectorial serán las mismas no importa si te desplazas en el plano (ver panel izquierdo en la [Figura 2.1](#)). En este caso, si al contrario, el vector cambia intrínsecamente lo notarás comparando las componentes. Pero que pasa si usamos coordenadas cilíndricas. En este caso incluso si el campo vectorial es constante, las componentes del campo cambiarán punto a punto debido solamente a la manera en la que se define el sistema de coordenadas (ver panel derecho en la [Figura 2.1](#)).

La manera para determinar si el campo vectorial efectivamente cambia a lo largo de una trayectoria es la de *transportar* el vector del punto en el que se está midiendo al punto original y mirar si hay una discrepancia entre ambos.

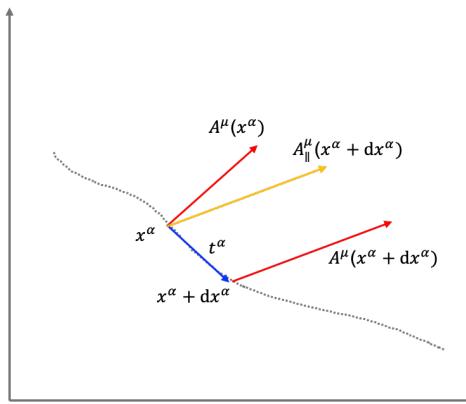


Figura 2.2: Derivada direccional.

El **transporte paralelo** es la operación de transformación de un vector de un punto del espacio a otro de modo que su *dirección intrínseca* no se modifique durante el transporte.

Si el vector lo llamamos  $A^\mu(x^\nu)$  en un evento  $x^\nu$ , el mismo vector transportado de forma paralela a un evento distinto  $y^\nu$  se llamará  $A_{\parallel}^\mu(y^\nu)$

### 2.3.3. Derivada direccional general

Definimos la **derivada direccional general** de un campo tensorial  $A^\mu$  a lo largo de una dirección arbitraria  $t^\alpha$ , y la denotamos como  $(D_t A)^\mu$  mediante la expresión:

$$(D_t A)^\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A_{\parallel}^\mu(x^\alpha + \epsilon t^\alpha) - A^\mu(x^\alpha)}{\epsilon}$$

donde  $dx^\alpha = \epsilon t^\alpha$  y  $A_{\parallel}^\mu(x^\alpha + dx^\alpha)$  son las componentes del campo  $A^\mu$  evaluado en el punto  $x^\alpha + dx^\alpha$  pero transportado de forma paralela a lo largo de  $t^\alpha$  hasta el punto inicial  $x^\alpha$  (ver Figura 2.2).

#### Nota

**¿Es la derivada direccional general una cantidad tensorial?** Nótese que esta definición es una definición geométrica rigurosa y en principio esperaría uno que al definirse de esta manera la cantidad resultante tuviera las propiedades de una cantidad geométrica, i.e. tensorial.

Las componentes del cuadrvector transportado de forma paralela *se pueden* escribir, en general, como:

$$A_{\parallel}^\mu(x^\alpha + dx^\alpha) = A^\mu(x^\alpha + dx^\alpha) + C_{\gamma\delta}^\mu A^\gamma(x^\alpha + dx^\alpha) dx^\delta$$

donde  $C_{\gamma\delta}^\mu$  son en general coeficientes que permiten expresar el cambio en las componentes del cuadrivector transportado en función de las componentes de ambos, el cuadrivector original y el cuadrivector de la dirección de transporte. Llamamos a estos coeficientes **los coeficientes de conexión**. En el caso más general habrán 64 coeficientes (4<sup>3</sup>) de conexión distintos de cero.

Reemplazando en la fórmula para la derivada covariante obtenemos:

$$(D_t A)^\mu = (\partial_t A)^\mu + C_{\gamma\delta}^\mu A^\gamma t^\delta$$

donde hemos usado la definición de la derivada direccional convencional:

$$(\partial_t A)^\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A^\mu(x^\alpha + \epsilon x^\alpha) - A^\mu(x^\alpha)}{\epsilon}$$

En términos de sus componentes la derivada direccional queda:

$$D_\alpha A^\mu t^\alpha = \partial_\alpha A^\mu t^\alpha + C_{\gamma\alpha}^\mu A^\gamma t^\alpha$$

en la que hemos usado la idea bien conocida del cálculo vectorial de que la derivada direccional se puede escribir como  $\partial_t A = \vec{v} A \cdot \vec{t} = \partial_\alpha A^\mu t^\alpha$

Finalmente, suponiendo que las componentes del cuadrivector que define la dirección son independientes, llegamos a una definición general de la derivada bajo una transformación general:

$$D_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + C_{\gamma\alpha}^\mu A^\gamma$$

A esta la llamaremos **derivada covariante general** o simplemente **derivada covariante** y para representarla en lo sucesivo usaremos el símbolo ";" en analogía a como usamos el símbolo "," para representar la derivada covariante  $\partial_\alpha A^\mu$  que introdujimos en las transformaciones lineales, Así:

$$A^\mu_{;\alpha} = A^\mu_{,\alpha} + C_{\gamma\alpha}^\mu A^\gamma$$

### Proposición 2.1

**Propiedades de la derivada covariante.** Las siguientes son propiedades de la derivada covariante:

1. **Derivada covariante de una suma:**  $(A^\mu + B^\mu)_{;\nu} = A^\mu_{;\nu} + B^\mu_{;\nu}$
2. **Derivada covariante de un producto o regla de Leibniz:**  $(A^\mu B^\nu)_{;\alpha} = A^\mu_{;\alpha} B^\nu + A^\mu B^\nu_{;\alpha}$
3. **Derivada covariante de un campo escalar:**  $\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$
4. **Derivada covariante de un tensor contraido:**  $(A^\mu B_\mu)_{;\alpha} = (A^\mu B_\mu)_{,\alpha}$
5. **Derivada covariante de un tensor covariante:**  $B_{\mu;\nu} = B_{\mu,\nu} - C_{\mu\nu}^\gamma B_\gamma$
6. **Derivada covariante de un tensor contravariante de segundo rango:**

$$A^{\mu\nu}_{;\alpha} = A^{\mu\nu}_{,\alpha} + C_{\gamma\alpha}^\mu A^{\gamma\nu} + C_{\alpha\gamma}^\nu A^{\mu\gamma}$$

**Proposición 2.1 (Cont.)****7. Derivada covariante de un tensor covariante de segundo rango:**

$$A_{\mu\nu;\alpha} = A_{\mu\nu,\alpha} - C_{\mu\alpha}^{\gamma} A_{\gamma\nu} - C_{\alpha\nu}^{\gamma} A_{\mu\gamma}$$

¿Es la cantidad  $D_\alpha$  un tensor bajo transformaciones generales? Hasta ahora la construcción geométrica que hemos realizado no hace explícita esta propiedad. En realidad la naturaleza tensorial de ella dependerá de la naturaleza misma de los coeficientes de conexión. Por ahora asumiremos que por el hecho de ser esta cantidad construida de forma geométrica rigurosa, entonces es una cantidad tensorial. Más adelante iremos encontrando evidencias matemáticas de que es así.

**2.3.4. Los símbolos de Christoffel**

¿Qué son y cómo se calculan los coeficientes de conexión?

La primera característica es que no se trata de una cantidad tensorial (ver Problemas al final del capítulo). Si asumimos por ahora que la derivada definida en la sección anterior  $D_\alpha$  es un tensor, es posible demostrar (ver Problemas al final del capítulo) que la conexión afín transforma en general como:

$$C_{\mu'\sigma'}^{\nu'} = g^{\nu'}{}_\nu g^\mu{}_{\mu'} g^\sigma{}_{\sigma'} C_{\mu\sigma}^\nu - g^\mu{}_{\mu'} g^\sigma{}_{\sigma'} \partial_{\mu\sigma}^2 x^{\nu'}$$

En general se puede también demostrar que aunque las conexiones no son tensoriales, es posible definir con ellas un tensor que se conoce como el **tensor de torsión**:

$$T_{\mu\nu}^\alpha = C_{\mu\nu}^\alpha - C_{\nu\mu}^\alpha$$

En general se pueden definir muchas conexiones diferentes en variedades diferenciales generales. Sin embargo hay una familia específica de conexiones que son las de interés para la Relatividad General.

**Definición 2.1**

**Conexión de Levi-Civita y símbolos de Christoffel.** Una conexión afín  $C_{\mu\nu}^\alpha$  que además satisface las condiciones (axiomas):

- Es libre de torsión:  $T_{\mu\nu}^\alpha \equiv C_{\mu\nu}^\alpha - C_{\nu\mu}^\alpha = 0$ .
- Es compatible con la métrica:  $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$ .

Se llama una **conexión de Levi-Civita**. A los coeficientes de una conexión de Levi-Civita se los llama (históricamente) **Símbolos de Christoffel** y se los denota  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ .

Nótese que la propiedad de que el espacio sea libre de torsión implica que los

símbolos de Christoffel son simétricos frente al intercambio de los índices inferiores:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$$

esto implica que no existen 64 símbolos independientes, sino tan solo  $4_{\alpha} \times [(4^2 - 4)/2 + 4]_{\mu\nu} = 40$  símbolos de Christoffel que deben ser especificados para determinar la derivada covariante general en un espacio de Riemanniano o pseudoriemanniano.

La condición de que la métrica no tenga derivada covariante es fundamental y permite derivar expresiones para los símbolos de Christoffel. Para ello podemos comenzar con escribir todas las posibles combinaciones cíclicas de la derivada covariante del tensor métrico así:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\rho} &= g_{\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}g_{\mu\lambda} = 0 \\ g_{\nu\rho;\mu} &= g_{\nu\rho,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}g_{\nu\lambda} = 0 \\ g_{\rho\mu;\nu} &= g_{\rho\mu,\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda}g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}g_{\rho\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Nótese que entre ellas y por la simetría del tensor métrico y de los símbolos de Christoffel hay términos que se repiten. Así por ejemplo en la primera y la segunda ecuación los términos  $-\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda}g_{\lambda\nu}$  y  $-\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}g_{\nu\lambda}$  (respectivamente) son idénticos. Así, restando la primera de la segunda y tercera ecuación obtenemos:

$$g_{\mu\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\mu} - g_{\rho\mu,\nu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\rho} = 0$$

De esta última expresión se puede escribir la forma conocida de los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

Si introducimos la notación:

$$g_{\{\rho\mu,\nu\}} \equiv g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu}$$

donde las llaves {} indican que se debe sumar sobre todas las combinaciones cíclicas de los índices y usar como signo un análogo del símbolo de Levi-Civita, tal que por cada movimiento de la "banda transportadora" (permutación) se multiplica un signo "-". Es por eso que el segundo término, que corresponde a una permutación impar, es negativo.

entonces de forma abreviada:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

### Nota

**Los términos de los símbolos de Christoffel.** Aunque la expresión:

**Nota (Cont.)**

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

es bastante compacta no hay que olvidar que encierra dos operaciones: la operación cíclica sobre el término  $g_{\{\rho\mu,\nu\}}$  que hace que este se convierta en realidad en una suma de 3 términos, y la suma sobre el índice  $\rho$  (4 términos). Eso hace que para calcular cada símbolo de Christoffel, en general, sean necesarios en realidad  $4 \times 3 = 12$  términos:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\lambda 0}(g_{0\mu,\nu} - g_{\mu\nu,0} + g_{\nu 0,\mu}) + \\ &+ \frac{1}{2}g^{\lambda 1}(g_{1\mu,\nu} - g_{\mu\nu,1} + g_{\nu 1,\mu}) + \\ &+ \frac{1}{2}g^{\lambda 2}(g_{2\mu,\nu} - g_{\mu\nu,2} + g_{\nu 2,\mu}) + \\ &+ \frac{1}{2}g^{\lambda 3}(g_{3\mu,\nu} - g_{\mu\nu,3} + g_{\nu 3,\mu})\end{aligned}$$

Como vemos, los símbolos de Christoffel son proporcionales a las primeras derivadas del tensor métrico. Este hecho se puede escribir explícitamente si definimos:

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = g_{\alpha\lambda}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$$

En términos de los símbolos de Christoffel las derivadas del tensor métrico se puede probar (ver Problemas al final del capítulo) son:

$$\begin{aligned}g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}_{\;\;\;\gamma} &= -g^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\gamma}^{\beta}\end{aligned}$$

El hecho que las primeras derivadas del tensor métrico sean proporcionales a los símbolos de Christoffel, explica por que hay 40 valores independientes. Dado que el tensor métrico, por su simetría, tiene 10 componentes independientes (6 fuera de la diagonal y 4 en la diagonal) y cada una de ella tiene 4 componentes de la derivada, existirán en general  $4 \times 10 = 40$  primeras derivadas independientes.

En términos de los símbolos de Christoffel la derivada covariante en un espacio-Riemanniano o pseudoriemanniano con conexión de Levi-Civita se escribirá:

$$\begin{aligned}A^{\mu}_{\;\;\;\alpha} &= A^{\mu}_{\;\;\,\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu}A^{\gamma} \\ A_{\mu;\nu} &= A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}A_{\gamma} \\ A^{\mu\nu}_{\;\;\;\alpha} &= A^{\mu\nu}_{\;\;\,\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu}A^{\gamma\nu} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\nu}A^{\mu\gamma} \\ A_{\mu\nu;\alpha} &= A_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma}A_{\gamma\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma}A_{\mu\gamma}\end{aligned}$$

### 2.3.5. Cálculo de los símbolos de Christoffel

El cálculo de los símbolos de Christoffel es una de las habilidades más importantes en la relatividad general. En esta sección veremos ejemplos específicos del cálculo de estas cantidades para métricas específicas.

Si bien calcular 40 coeficientes mediante la derivada de los coeficientes del tensor métrico no parece una tarea muy agradable, hay algunas propiedades útiles tanto del tensor métrico como de los coeficientes que simplifican la tarea.

### Los símbolos de Christoffel de una métrica diagonal

Como hemos visto en secciones anteriores el tensor métrico es una forma bilineal que nos da la regla para calcular el producto punto entre los cuadrivectores. Si llamamos  $\hat{e}_\mu(x^\nu)$  a los vectores de una base del espacio tiempo definidos en el evento  $x^\nu$ , la métrica se define en términos de:

$$ds^2 = dx^\mu \cdot dx^\nu = (dx^\mu \hat{e}_\mu) \cdot (dx^\nu \hat{e}_\nu) = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu$$

es decir:

$$g_{\mu\nu} = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu)$$

Esto implica que siempre que definamos un sistema de ejes ortogonales la métrica será diagonal:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33})$$

con inversa:

$$g^{\mu\nu} : \text{diag}\left(\frac{1}{g_{00}}, \frac{1}{g_{11}}, \frac{1}{g_{22}}, \frac{1}{g_{33}}\right)$$

Si este es el caso los símbolos de Christoffel se simplifican. En lugar de los 4 términos diferentes que describíamos antes cada símbolo realmente es el resultado del cálculo de un solo término:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\{\lambda\mu,\nu\}} \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} (g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\nu\lambda,\mu}) \end{aligned}$$

Los dos hechos anteriores implican además una segunda propiedad muy interesante. Dado que solo los términos diagonales de la derivada son distintos de cero, entonces la última expresión tendrá potencialmente términos distintos de cero si y solo si al menos dos índices de entre  $\lambda, \mu, \nu$  son repetidos. Esto implica que solo los coeficientes de la forma:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda, \Gamma_{\mu\mu}^\lambda$$

serán distintos de cero e iguales a:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda = +\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda,\nu}$$

con  $\nu \neq \lambda$  que llamaremos los *símbolos mixtos*, y

$$\Gamma_{\mu\mu}^\lambda = -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\mu\mu,\lambda}$$

que llamaremos los *símbolos diagonales*.

En un espacio de 4 dimensiones por cada índice  $\lambda$  hay 3 símbolos mixtos y 4 diagonales, es decir 7 en total. Esta simetría reduce el número posible de símbolos

de Christoffel de 40 a  $4 \times 7 = 28$  componentes distintas de cero (ver Problemas al final del capítulo).

Una última propiedad interesante implica que si una de las variables  $x^\lambda$  tiene coeficiente métrico  $g_{\lambda\lambda}$  constante y ningún otro coeficiente métrico depende de  $x^\lambda$ , es decir  $g_{\mu\mu,\lambda} = 0$  entonces todos los símbolos de Christoffel que tengan  $\lambda$  serán cero:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\mu}^\lambda = 0$$

Por cada componente con esta propiedad se reducen en 7 los símbolos de Christoffel diferentes de cero.

### Símbolos de Christoffel del espacio-tiempo plano

Calculemos los símbolos de Christoffel para el espacio-tiempo plano. En principio podría pensarse que en esta situación los símbolos son todos cero (en tanto dependen de derivadas de la métrica y en el espacio-tiempo plano la métrica es constante). Pero no es así. Todo depende del sistema de coordenadas que estamos utilizando.

En coordenadas cartesianas el elemento de línea del espacio-tiempo es:

$$ds^2 = dt^2 - dx_L^2 - dy_L^2 - dz_L^2$$

de donde la métrica es:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Y de aquí los símbolos de Christoffel resultantes serán:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$$

Esto implica que en el espacio-tiempo de Minkowski y en coordenadas cartesianas la derivada “;” es igual a la derivada “,”.

Si usamos sin embargo coordenadas cilíndricas, la métrica del mismo espacio-tiempo será:

$$ds^2 = dt^2 - dr_L^2 - r^2 d\theta^2 - dz_L^2$$

de donde la métrica es:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(1, -1, -r^2, -1)$$

con inversa:

$$g^{\mu\nu} : \text{diag}(1, -1, -1/r^2, -1)$$

Ahora hay al menos una componente de la métrica  $g_{22}(r) = g_{\theta\theta}(r)$  que depende de las coordenadas. Esto implica entonces que todos aquellos símbolos de Christoffel que incluyan las derivadas del tipo  $g_{\theta\theta,r}$  serán distintos de cero.



### Nota

**Coordenadas en lugar de números.** Es corriente que se use por simplicidad el nombre de las coordenadas en lugar de números para indicar la componentes de la métrica o de los símbolos de Christoffel. Es así como hemos reemplazado  $g_{22}$  por  $g_{\theta\theta}$  o  $g_{\theta\theta,r}$  para denotar  $g_{22,1}$ . Así mismo nos referiremos por ejemplo a  $\Gamma_{r\theta}^t$  para representar el símbolo  $\Gamma_{12}^0$ .

Recordando la definición:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que dado que la matriz es diagonal los únicos símbolos de Christoffel que no serán cero son aquellos para los cuales  $\lambda = \rho$ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

Podemos de entrada descartar todos los casos en los que uno de los índices sea 0 o 4 ( $t$  o  $z$  en nuestra notación) en tanto:

1.  $g_{tt} = 1$  y  $g_{zz} = 1$ , es decir son constantes y no tienen derivadas diferentes de 0.
2.  $g_{it} = 0$  y  $g_{\mu z} = 0$ .
3. Ninguna de las componentes de la métrica depende del tiempo o de  $z$ .

Esto nos permite descartar un número significativo de componentes (34 componentes nulas para ser exactos).

Para el caso en el que  $\rho = r$  tendremos los símbolos potencialmente no nulos  $\Gamma_{rr}^r, \Gamma_{r\theta}^r, \Gamma_{\theta\theta}^r$ . Escribamos explícitamente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^r &= g^{rr}(g_{rr,r} - g_{rr,r} + g_{rr,r}) = 0 \\ 2\Gamma_{r\theta}^r &= g^{rr}(g_{rr,\theta} - g_{r\theta,r} + g_{\theta r,r}) = 0 \\ 2\Gamma_{\theta\theta}^r &= g^{rr}(g_{r\theta,\theta} - g_{\theta\theta,r} + g_{\theta r,\theta}) = -2r\end{aligned}$$

Para el caso en el que  $\rho = \theta$  tendremos los símbolos potencialmente no nulos  $\Gamma_{rr}^\theta, \Gamma_{r\theta}^\theta, \Gamma_{\theta\theta}^\theta$ . Escribamos explícitamente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^\theta &= g^{\theta\theta}(g_{\theta r,r} - g_{rr,\theta} + g_{r\theta,r}) = 0 \\ 2\Gamma_{r\theta}^\theta &= g^{\theta\theta}(g_{\theta r,\theta} - g_{r\theta,\theta} + g_{\theta\theta,r}) = 2r/r^2 \\ 2\Gamma_{\theta\theta}^\theta &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta}) = 0\end{aligned}$$

Finalmente encontramos que las únicas componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= 1/r\end{aligned}$$

Pero ¿qué significa todo esto?. Por la definición de derivada covariante:

$$A^\mu_{;\alpha} = A^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} A^\gamma$$

y por lo que hemos encontrado:

$$\begin{aligned} A^t_{;\alpha} &= A^t_{,\alpha} \\ A^z_{;\alpha} &= A^z_{,\alpha} \\ A^\mu_{;t} &= A^\mu_{,t} \\ A^\mu_{;z} &= A^\mu_{,z} \end{aligned}$$

Es decir, en este espacio tiempo la derivada covariante y la derivada parcial convencional de las componentes temporal y  $z$  serán exactamente las mismas. Además la derivada covariante respecto a estas componentes será igual a su derivada convencional.

Por otro lado las únicas derivadas covariantes que no serán triviales son:

$$\begin{aligned} A^r_{;\theta} &= A^r_{,\theta} + \Gamma^r_{\theta\theta} A^\theta = A^r_{,\theta} - r A^\theta \\ A^\theta_{;r} &= A^\theta_{,r} + \Gamma^\theta_{r\theta} A^\theta = A^\theta_{,r} + A^\theta/r \\ A^\theta_{;\theta} &= A^\theta_{,\theta} + \Gamma^\theta_{\theta r} A^r = A^\theta_{,\theta} + A^r/r \end{aligned}$$

### Símbolos de Christoffel de una superficie esférica

En el caso de una superficie de dos dimensiones embebida en un espacio de tres dimensiones la métrica es:

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

donde  $\theta$  es el ángulo polar (medido respecto al polo de la esfera) y  $\phi$  es el ángulo acimutal. La métrica será en este caso simplemente:

$$g_{ij} : \text{diag}(R^2, R^2 \sin^2 \theta)$$

con inversa:

$$g^{ij} : \text{diag}\left(\frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}\right)$$

En este caso (dos dimensiones), el número de símbolos de Christoffel serán  $n^2(n+1)/2 = 2^2 3/2 = 6$  y de nuevo por ser la métrica diagonal:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ii}_{\{jk\}}$$

Los símbolos de Christoffel correspondientes a la variable  $\theta$  serán:

$$\begin{aligned} 2\Gamma^\theta_{\theta\theta} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta}) = 0 \\ 2\Gamma^\theta_{\phi\theta} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\phi,\theta} - g_{\phi\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\phi}) = 0 \\ 2\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\theta} + g_{\phi\theta,\phi}) = 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Por otro lado, los correspondientes a la variable  $\phi$  serán:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{\phi\phi}^\phi &= g^{\phi\phi}(g_{\phi\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\phi} + g_{\phi\phi,\phi}) = 0 \\ 2\Gamma_{\phi\theta}^\phi &= g^{\phi\phi}(g_{\phi\theta,\theta} - g_{\phi\theta,\phi} + g_{\theta\phi,\phi}) = 2\cos\theta/\sin\theta \\ 2\Gamma_{\theta\theta}^\phi &= g^{\phi\phi}(g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\phi} + g_{\theta\phi,\theta}) = 0 \end{aligned}$$

Es decir solo dos de los 6 símbolos de Christoffel son diferentes de cero:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= \frac{1}{2}\sin 2\theta \\ \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \cot\theta \end{aligned}$$

### Símbolos de Christoffel de una métrica general

Supongamos una métrica general de la forma:

$$ds^2 = \exp(2A) dt_L^2 - \exp(2B) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

donde  $A = A(r)$  y  $B = B(r)$  son funciones solamente de la variable radial. La métrica tiene la forma:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(\exp(2A), -\exp(2B), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$$

con inversa:

$$g^{\mu\nu} : \text{diag} \left( \exp(-2A), -\exp(-2B), -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right)$$

¿Cuáles son los símbolos de Christoffel en este caso? De nuevo por tratarse de una métrica diagonal todos los símbolos de Christoffel tienen la forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

En esta situación tenemos que las componentes de la métrica dependen de forma complicada de las coordenadas con la excepción del tiempo. Esto implica que en general todos los símbolos de Christoffel potencialmente pueden ser distintos de cero y debemos analizarlos uno a uno:

- **Componentes  $t, \Gamma_{\mu\nu}^t$ .** Como sabemos que solo las derivadas  $g_{tt,r}$  son distintas de cero, los únicos símbolos distintos de cero serán aquellos para los que  $\mu = 0$  y  $\nu = r$ :

$$2\Gamma_{tr}^t = g^{tt} g_{tt,r} = 2\exp(-2A) \exp(2A) A' = A'$$

donde  $A' = dA/dr$ .

- **Componentes  $r, \Gamma_{\mu\nu}^r$ .** En este caso de nuevo sabemos que solo las derivadas  $g_{tt,r}, g_{rr,r}$  son distintas de cero, de modo que los símbolos de Christoffel que pueden ser distintos de cero serán aquellos en los que aparece repetidos los índices correspondientes, es decir:  $\Gamma_{tt}^r, \Gamma_{rr}^r, \Gamma_{\theta\theta}^r, \Gamma_{\phi\phi}^r$ . El valor de estos símbolos será:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{00}^r &= -g^{rr}g_{00,r} = 2A' \exp[2(A-B)] \\ 2\Gamma_{rr}^r &= -g^{rr}g_{rr,r} = 2B' \\ 2\Gamma_{\theta\theta}^r &= -g^{rr}g_{\theta\theta,r} = -r \exp(-2B) \\ 2\Gamma_{\phi\phi}^r &= -g^{rr}g_{\phi\phi,r} = -r \sin^2 \theta \exp(-2B) \end{aligned}$$

- **Componentes  $\theta$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}^\theta$ .** En este caso sabemos que solo las derivadas  $g_{\theta\theta,r}$  y  $g_{\phi\phi,\theta}$  serán distintas de cero. De modo que solo aquellos símbolos en los que se repita  $\theta$  y  $\phi$  lo serán también:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{r\theta}^\theta &= g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,r} = 2/r \\ 2\Gamma_{\phi\theta}^\theta &= -g^{\theta\theta}g_{\phi\phi,r} = -2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

- **Componentes  $\phi$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}^\phi$ .** El caso es análogo a la componente anterior y los únicos coeficientes distintos de cero serán:

$$\begin{aligned} 2\Gamma_{r\phi}^\phi &= g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,r} = 2/r \\ 2\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,\theta} = 2 \cot \theta \end{aligned}$$

En total entonces, de las 40 componentes solo 9 de ellas son distintas de cero.

### Cálculo numérico

El cálculo numérico de los símbolos de Christoffel puede ser útil para futuros cálculos.

La rutina para calcular los símbolos de Christoffel será:

```
def Gamma(xmu,gfun,gargs=(),N=4,dxmax=1e-6,alpha=-1, mu=0, nu=0):
    """
    Calcula todos los símbolos de Christoffel
    gfun: función métrica
    xmu: evento
    """
    from scipy.misc import derivative
    from numpy import where, arange
    from numpy import zeros
    #Indices
    index=arange(N)

    #Gamma
    G=zeros((N,N,N))

    for pi in range(N):
        for nu in range(N):
            #Inversa
            gpipi=1/gfun(xmu,pi,*gargs) #g^pi pi
            #Coeficientes diagonales
            xd=xmu[pi] #Punto en el que estoy derivando
            dx=max(dxmax,dxmax*abs(xd))
```

```

gnunu_pi=derivative(lambda x:gfun(where(index==pi,x,xmu),nu,*gargs),xd,dx)
G[pi,nu,nu]=-0.5*gpi*pi*gnunu_pi
#Coeficientes mixtos
if nu==pi:continue
xd=xmu[nu] #Punto en el que estoy derivando
dx=max(dxmax,dxmax*abs(xd))
gpi_pi_nu=derivative(lambda x:gfun(where(index==nu,x,xmu),pi,*gargs),xd,dx)
G[pi,pi,nu]=0.5*gpi*pi*gpi_pi_nu
G[pi,nu,pi]=G[pi,pi,nu]
return G if alpha<0 else G[alpha,nu,nu]

```

Para poner a prueba nuestra rutina, podemos usar algunas de las métricas que habíamos visto antes.

Por ejemplo la métrica en coordenadas cilíndricas:

```

from numpy import array
def g_cilindricas_4d(xmu,mu):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_munu=diag(1,-1,-r^2,-1)
    """
    from numpy import sin
    t,r,teta,z=xmu
    if mu==0:
        g=1
    elif mu==1:
        g=-1
    elif mu==2:
        g=-r**2
    elif mu==3:
        g=-1
    return g

```

Escogemos ahora un punto en el cuál calcular los símbolos de Christoffel:

```
xmu=array([0,2,0,1])
```

E invocamos nuestra rutina:

```
G=Gamma(xmu,g_cilindricas_4d,N=4)
```

Símbolos de Christoffel:

```
[[[-0.  0.  0.  0. ]
 [ 0. -0.  0.  0. ]
 [ 0.  0. -0.  0. ]
 [ 0.  0.  0. -0. ]]]
```

```
[[ 0. -0.  0.  0. ]
 [-0.  0. -0. -0. ]]
```

```
[ 0. -0. -2.  0. ]
[ 0. -0.  0.  0. ]]

[[ 0.   0.   -0.   0. ]
 [ 0.   0.    0.5  0. ]
 [-0.   0.5  0.   -0. ]
 [ 0.   0.   -0.   0. ]]

[[ 0.   0.    0.   -0. ]
 [ 0.   0.    0.   -0. ]
 [ 0.   0.    0.   -0. ]
 [-0.  -0.   -0.   0. ]]]
```

Donde vemos que lo que habíamos determinado en nuestro primer ejercicio es correcto. Solo dos símbolos de Christoffel son diferentes de cero:

```
print(f"G^1_{22} = {G[1,2,2]}")
print(f"G^2_{21} = {G[2,2,1]}")
```

```
G^1_22 = -2.000000000000002
G^2_21 = 0.5000000000005
```

y su valor coincide con el valor teóricamente esperado de  $\Gamma_{22}^1 = -r$  y  $\Gamma_{21}^2 = 1/r$ .

## 2.4. Derivada total general y geodésicas

Una *aplicación* interesante de la derivada covariante es la deducción de una de las ecuaciones más importantes de la relatividad general: la ecuación geodésica.

### 2.4.1. Derivada total general

Hemos introducido ya una forma de la derivada que puede ser usada en las leyes de la física de modo que tengan una forma manifiestamente covariante bajo transformaciones generales. Es la derivada covariante:

$$A^\mu{}_{;\alpha} = A^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} A^\gamma$$

Esta derivada permite definir otra cantidad muy útil, a saber **la derivada total general**, es decir, la derivada total de una cantidad tensorial respecto a un escalar (por ejemplo, el tiempo propio). Como hemos visto en el capítulo anterior, las derivadas totales son muy importantes en la definición de las propiedades cinemáticas y dinámicas en física, de modo que es conveniente definirlas.

Si nos movemos a lo largo de una curva en el espacio-tiempo tal que cada evento es función de una cantidad escalar o parámetro  $u$ , es decir  $x^\mu(u)$ , entonces definiremos la derivada total de un campo tensorial  $A^\mu(x^\mu)$  respecto al parámetro  $u$  como:

$$\frac{D}{Du} A^\mu \equiv A^\mu{}_{,\alpha} \frac{dx^\alpha}{du}$$

que es un análogo a la regla de la cadena en el cálculo vectorial convencional.

Nótese que esta definición es análoga a la que podemos hacer en el caso en el que tengamos transformaciones lineales de coordenadas (métrica de Minkowski), a saber  $dA^\mu/du = A^\mu_{,\alpha}dx^\beta/du$  con la diferencia de que en lugar de usar la derivada “,” usamos la derivada covariante. De nuevo es sencillo probar que la derivada total general es en sí misma una cantidad tensorial (ver Problemas al final del capítulo).

### 2.4.2. Derivada total y transporte paralelo

En términos de la derivada total es posible reinterpretar el concepto de transporte paralelo.

Diremos que un vector es transportado de forma paralela a lo largo de una trayectoria si su derivada total general es proporcional es cero:

$$\frac{D}{Du} A^\mu = 0, \text{ transporte paralelo}$$

Usando la definición de derivada total general:

$$\partial_\alpha A^\mu \frac{dx^\alpha}{du} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu A^\gamma \frac{dx^\alpha}{du} = 0$$

El primer término es la derivada total convencional:

$$\frac{dA^\mu}{du} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu A^\gamma \frac{dx^\alpha}{du} = 0$$

Esta ecuación en definitiva representa la condición matemática para que un vector sea transportado de forma paralela a lo largo de una trayectoria descrita por  $x^\mu(u)$ .

### 2.4.3. Transporte paralelo y bases vectoriales

Existe una manera alternativa de obtener la fórmula de la derivada covariante y de las conexiones que es interesante. Un cuadrivector puede escribirse en términos de los vectores de una base como:

$$\mathbf{A} = A^\mu \hat{e}_\mu$$

Si derivamos respecto de un parámetro  $u$  que define una trayectoria obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{dA^\mu}{du} \hat{e}_\mu + A^\mu \frac{d\hat{e}_\mu}{du}$$

Las derivadas de cada vector de la base respecto a las coordenadas se pueden expresar en términos de los mismos vectores de la base:

$$\partial_\alpha \hat{e}_\mu \equiv G_{\alpha\mu}^\gamma \hat{e}_\gamma \quad (2.1)$$

donde los coeficientes  $G_{\alpha\mu}^\gamma$  conectan las derivadas de cada componente de cada vector unitario con las componentes de los demás vectores unitarios de la base.

Reemplazando queda:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{dA^\mu}{du} \hat{e}_\mu + A^\mu G_{\alpha\mu}^\gamma \hat{e}_\gamma \frac{dx^\alpha}{du}$$

que se puede escribir como:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \left( \frac{dA^\gamma}{du} + G_{\alpha\mu}^\gamma A^\mu \frac{dx^\alpha}{du} \right) \hat{e}_\gamma$$

Para que el vector no varíe a lo largo de la trayectoria es necesario que  $d\mathbf{A}/du = 0$  lo que implica que:

$$\frac{dA^\gamma}{du} + G_{\alpha\mu}^\gamma A^\mu \frac{dx^\alpha}{du} = 0$$

que es justamente la condición que habíamos obtenido antes.

Bastaría ahora con probar que  $G_{\alpha\mu}^\gamma$  son los símbolos de Christoffel. Para ello debemos primero reconocer que la métrica se define en términos del producto punto entre los vectores de la base:

$$g_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu \quad (2.2)$$

Podemos calcular la derivada convencional de los coeficientes métricos:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\mu\nu} &= G_{\alpha\mu}^\gamma \hat{e}_\gamma \cdot \hat{e}_\nu + G_{\nu\beta}^\gamma \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\gamma \\ &= G_{\alpha\mu}^\gamma g_{\gamma\nu} + G_{\nu\beta}^\gamma g_{\mu\gamma} \end{aligned}$$

Si se repite el mismo procedimiento cambiando cíclicamente los índices de  $\partial_\alpha g_{\mu\nu}$  se obtiene:

$$G_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

que es justamente la forma de los símbolos de Christoffel.

#### 2.4.4. Bases y componentes vectoriales en espacio curvo

Las Ecuaciones (2.1) y (2.2) ponen de relieve una importante propiedad que tienen los vectores en el espacio curvo.

Considere por ejemplo el caso en el que tenemos una métrica diagonal. En esta situación la Ec. (2.2) se puede escribir como:

$$|\hat{e}_\mu| = \sqrt{g_{\mu\mu}}$$

Es decir, cuando expresamos un vector en un espacio general los vectores de la base *no son necesariamente unitarios*: ¡esta si que es una sorpresa! Pero la sorpresa va más allá: en realidad este resultado no solo es válido en espacio curvo sino también en el espacio plano.

Consideremos por ejemplo el caso de la descripción del espacio plano de 3 dimensiones en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ ,  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, r^2, 1)$ . En este caso la magnitud de los vectores unitarios será:

$$\begin{aligned} |\hat{e}_r| &= \sqrt{g_{rr}} = 1 \\ |\hat{e}_\theta| &= \sqrt{g_\theta} = r \\ |\hat{e}_z| &= \sqrt{g_z} = 1 \end{aligned}$$

Todo lo que hemos dicho sobre transporte paralelo y derivada covariante aplica para las componentes de vectores definidos sobre esta base, por ejemplo en el caso del espacio euclíadiano de 3 dimensiones y en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{A} = A^r \hat{e}_r + A^\theta \hat{e}_\theta + A^z \hat{e}_z$$

En el cálculo (y por lo tanto en la física, incluyendo en la relatividad especial), por otro lado hemos estado usando bases ortonormales que llamaremos en lo sucesivo, para diferenciarlas de estas *bases curvas*, como  $\hat{u}_\mu$ . En estas bases las componentes del mismo vector mencionado anteriormente se escriben como:

$$\vec{A} = A^{\bar{r}} \hat{u}_r + A^{\bar{\theta}} \hat{u}_\theta + A^{\bar{z}} \hat{u}_z$$

donde nótese que para distinguirlas de las componentes en la *base curva* hemos escrito una *barra* sobre los índices respectivos.

¿Cómo se relacionan las componentes de un vector en la *base curva* con las componentes en la *base ortogonal*? En el caso estudiado aquí, en donde ambas bases son ortogonales y los vectores unitarios de cada una solo se diferencian por su longitud, las relaciones serán simplemente:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \sqrt{g_{rr}} \hat{u}_r = \hat{u}_r \\ \hat{e}_\theta &= \sqrt{g_\theta} \hat{u}_\theta = r \hat{u}_\theta \\ \hat{e}_z &= \sqrt{g_z} \hat{u}_z = \hat{u}_z \end{aligned}$$

y las componentes del vector serán:

$$\begin{aligned} A^r &= A^{\bar{r}} \\ A^\theta &= r A^{\bar{\theta}} \\ A^z &= A^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Es interesante anotar que físicamente estas componentes se diferencian de manera importante. Las componentes que medimos en los laboratorios para las cantidades físicas son las componentes en la base ortogonal. Por tanto es siempre importante cuando trabajamos con métricas arbitrarias tener siempre presente el tipo de transformaciones definidas anteriormente para pasar de las componentes calculadas (normalmente las componentes en la base curva) a las componentes observadas (componentes en la base ortogonal).

Para ponerle orden a todo esto y generalizarlo al espacio-tiempo introducimos las siguientes definiciones:

**Definición: base coordenada y base física.** En cualquier punto de un espacio-tiempo descrito por una métrica  $g_{\mu\nu}$  en un sistema de coordenadas dado siempre es posible construir dos bases vectoriales y respecto a ellas definir las componentes de los cuadrivectores de interés:

- La **base física**, formada por un conjunto de vectores ortonormales  $\hat{u}_\mu$  que cumplen:

$$\hat{u}_\mu \cdot \hat{u}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$

Las componentes de un cuadrivector arbitrario en la base física se denotan como  $A^{\bar{\mu}}$  y satisfacen:

$$\vec{A} = A^{\bar{\mu}} \hat{u}_{\bar{\mu}}$$

Nuestros experimentos miden el valor de  $A^{\bar{\mu}}$ .

- La **base coordenada** o **base curva**, formada por un conjunto de vectores no necesariamente ortogonales y no necesariamente unitarios  $\hat{e}_{\mu}$  que cumplen:

$$\hat{e}_{\mu} \cdot \hat{e}_{\nu} = g_{\mu\nu}$$

Las componentes de un cuadrivector arbitrario en la base coordinada se denotan como  $A^{\mu}$  y satisfacen:

$$\vec{A} = A^{\mu} \hat{e}_{\mu}$$

Nuestros *cálculos* en relatividad general, permiten calcular el valor de  $A^{\mu}$ .

Cada uno de los vectores de la base coordinada se puede expresar en términos de la base física:

$$\hat{e}_{\mu} = e_{\mu}^{\alpha} \hat{u}_{\alpha}$$

y por lo tanto las componentes físicas de un vector se pueden escribir en términos de sus componentes coordinadas como:

$$A^{\bar{\alpha}} = A^{\mu} e_{\mu}^{\alpha}$$

Algunas situaciones prácticas del uso de la base coordinada y la base física se muestran en los ejemplos a continuación.

#### 2.4.5. Ejemplos numéricos de transporte paralelo

Vimos entonces que las componentes coordinadas de un vector transportado de forma paralela a lo largo de una trayectoria  $x^{\mu}(u)$  está dado por:

$$\frac{dA^{\mu}}{du} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} A^{\gamma} \frac{dx^{\alpha}}{du} = 0$$

Esta ecuación, en general, corresponde a un conjunto de 4 (o  $n$  en un espacio de  $n$  dimensiones) ecuaciones diferenciales de primer orden. Cada ecuación contiene en el lado izquierdo un total de (en general)  $1+16=17$  términos (o  $1+n^2$  términos):

$$\frac{dA^{\mu}}{du} + \Gamma_{00}^{\mu} A^0 \frac{dx^0}{du} + \Gamma_{01}^{\mu} A^0 \frac{dx^1}{du} + \dots + \Gamma_{10}^{\mu} A^1 \frac{dx^0}{du} + \Gamma_{11}^{\mu} A^1 \frac{dx^1}{du} + \dots = 0$$

Naturalmente las simetrías de la métrica y de los símbolos de Christoffel hacen que estas ecuaciones sean mucho más cortas.

Implementemos estas ecuaciones en una rutina que podemos integrar numéricamente:

```

def A_parallel(A,u,xfun,gfun,fargs=(),gargs=(),N=4):
    """
    Calcula la derivada de las componentes de un vector A
    respecto al parámetro u de una función xfun

    Parámetros:
        A: Arreglo con componentes coordenadas del vector
        u: Valor del parámetro

    Opciones:
        xfun: función de la trayectoria (posición y derivada)
        gfun: función de la métrica
        fargs: argumentos de la función de la trayectoria
        gargs: argumentos de la función de la métrica
        N: Número de dimensiones
    """
    from export import Gamma
    from numpy import zeros
    dAdu=zeros(N)
    xmu,dxmudu=xfun(u,*fargs)
    G=Gamma(xmu,gfun,gargs,N)
    for pi in range(N):
        for mu in range(N):
            for nu in range(N):
                dAdu[pi]+=-G[pi,mu,nu]*A[mu]*dxmudu[nu]
    return dAdu

```

### Transporte paralelo en coordenadas cilíndrica

Para aplicar la anterior ecuación consideremos por ejemplo el transporte paralelo del siguiente vector en el espacio euclíadiano de 2 dimensiones y en coordenadas cilíndricas.

```

N=2
from numpy import array
A0=array([1,0])

```

Podemos transportar el vector a través de una gran familia de trayectorias, pero debemos cuidar para hacerlo que los símbolos de Christoffel no sean singulares. Como vimos en la sección anterior  $\Gamma_{r\theta}^\theta = 1/r$  de modo que debemos evitar las trayectorias que pasan por el origen.

En la siguiente rutina construimos un conjunto de trayectorias que tienen esa propiedad.

```

def x_fun(u, tipo="circunferencia"):
    """
    Esta función define nuestro camino en el espacio
    """
    from numpy import zeros
    x=zeros(2)

```

```

dxdu=zeros(2)

if tipo=="circunferencia":
    x[0]=1;dxdu[0]=0;
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
if tipo=="cicloide":
    x[0]=2+cos(u);dxdu[0]=-sin(u);
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
if tipo=="espiral":
    x[0]=1+u;dxdu[0]=1;
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
if tipo=="elipse":
    x[0]=1/(1+0.5*cos(u));dxdu[0]=0.5*sin(u)/(1+0.5*cos(u))**2;
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
return x,dxdu

```

Para realizar el transporte paralelo necesitamos por otro lado la función que define la métrica de este espacio que es simplemente:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, r^2)$$

```

def g_cilindricas_2d(xmu,mu):
    """
    Coeficiente métrico  $g_{\mu\mu}$  calculados en el evento  $xmu$ 
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

     $g_{\mu\mu} = \text{diag}(1, r^2)$ 
    """
    r,teta=xmu
    if mu==0:
        g=1
    elif mu==1:
        g=r**2
    return g

```

Ahora podemos resolver la ecuación del transporte paralelo:

```

from numpy import pi,linspace
us=linspace(0,2*pi,20)

from scipy.integrate import odeint
tipo="circunferencia"
#tipo="cicloide"
#tipo="espiral"
#tipo="elipse"
As=odeint(A_parallel,A0,us,args=(x_fun,g_cilindricas_2d,(tipo,),(),N))

A =
[[ 1.      0.     ]
 [ 0.946 -0.325]
 [ 0.789 -0.614]]

```

```
...
[ 0.789  0.614]
[ 0.946  0.325]
[ 1.      0.    ]]
```

¿Qué son estos números? Estas son las componentes coordenadas del vector  $A$  a lo largo de la trayectoria. Recordemos que por componentes coordenadas entendemos las componentes en la base coordenada (que no es de vectores unitarios).

Si queremos representar graficamente el transporte paralelo podemos hacerlo en nuestro familiar sistema de coordenadas cartesianas (en el que funciona justamente el sistema de graficación de Python). Para ello recordemos que la base ortonormal se escribe en términos de los vectores cartesianos como:

$$\begin{aligned}\hat{u}_r &= \cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y \\ \hat{u}_\theta &= -\sin \theta \hat{u}_x + \cos \theta \hat{u}_y\end{aligned}$$

Por lo tanto la base coordinada será:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y \\ \hat{e}_\theta &= -r \sin \theta \hat{u}_x + r \cos \theta \hat{u}_y\end{aligned}$$

Es justamente respecto a esta última base que se calcularon las componentes del vector transportado de forma paralela.

Un gráfico del vector transportado se muestra en la [??](#). En la [versión electrónica del libro](#)<sup>5</sup> pueden encontrar el código usado para generar esta figura.

### Transporte paralelo sobre una esfera

Un caso menos trivial de transporte paralelo es el que se produce en la superficie de una esfera (superficie curva de dos dimensiones), en el que los puntos vienen dados en función de su latitud  $\phi$  y longitud  $\lambda$ . Esta superficie tiene métrica:

$$dl^2 = R^2 d\phi^2 + R^2 \cos^2 \phi d\lambda^2$$

con coeficientes métricos:

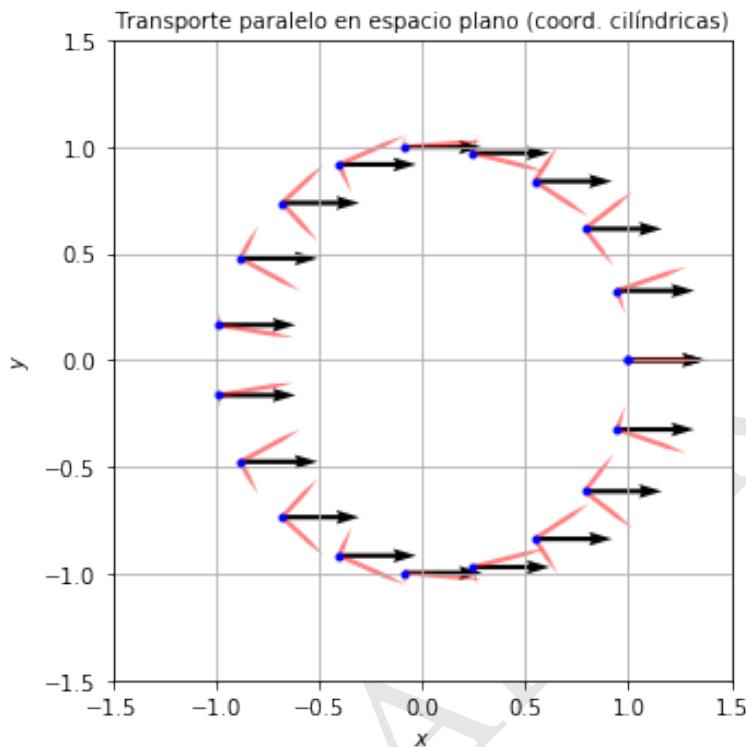
$$g_{ij} : \text{diag}(R^2, R^2 \cos^2 \phi)$$

Podemos implementar esta métrica con la rutina:

```
def g_esfera_2d(xmu, mu, R=1):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados sobre la
    superficie de una esfera de radio R.

    g_munu=diag(1,r^2)
    """
    from numpy import cos
    fi, lamb=xmu
```

<sup>5</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>



**Figura 2.3:** Vector transportado de forma paralela en coordenadas cilíndricas .

```
if mu==0:
    g=R**2
elif mu==1:
    g=R**2*cos(fi)**2
return g
```

Supongamos que queremos transportar de forma paralela el vector que apunta directamente hacia el *norte*:

```
N=2
from numpy import array
A0=array([0,1])
```

Podemos seguir distintas trayectorias. Por ejemplo ir desde el ecuador hasta el polo siguiendo un meridiano ( $\lambda = \text{cte}$ ). O podríamos ir alrededor de la esfera sobre un paralelo ( $\phi = \text{cte}$ ). Podemos implementar estas trayectorias con esta rutina:

```
def x_fun_esfera(u,lat_0=0,lon_0=0,tipos="meridiano"):
    """
    Esta función define nuestro camino en el espacio
    """
```

```

from numpy import zeros
x=zeros(2)
dxdz=zeros(2)
if tipo=="meridiano":
    x[0]=u;dxdz[0]=1;
    x[1]=lon_0;dxdz[1]=0;
if tipo=="paralelo":
    x[0]=lat_0;dxdz[0]=0;
    x[1]=u;dxdz[1]=1;
return x,dxdz

```

Una integral de la ecuación de transporte paralelo se puede obtener usando:

```

from numpy import pi,linspace
us=linspace(0,360*pi/180,10)

from scipy.integrate import odeint
R=1
#tipo="meridiano"
tipo="paralelo"
lat_0=45*pi/180
lon_0=0
As=odeint(A_parallel,A0,us,args=(x_fun_esfera,g_esfera_2d,(lat_0,lon_0,tipo),(R,),N))

A =
[[ 0.      1.      ]
 [-0.335   0.881]
 [-0.59     0.551]
 ...
 [ 0.218   -0.951]
 [ 0.511   -0.691]
 [ 0.682   -0.266]]

```

Para representar este vector realizaremos una proyección ortográfica sobre el plano  $x - y$  usando la regla:

$$x = \theta \cos \lambda y = \theta \sin \lambda$$

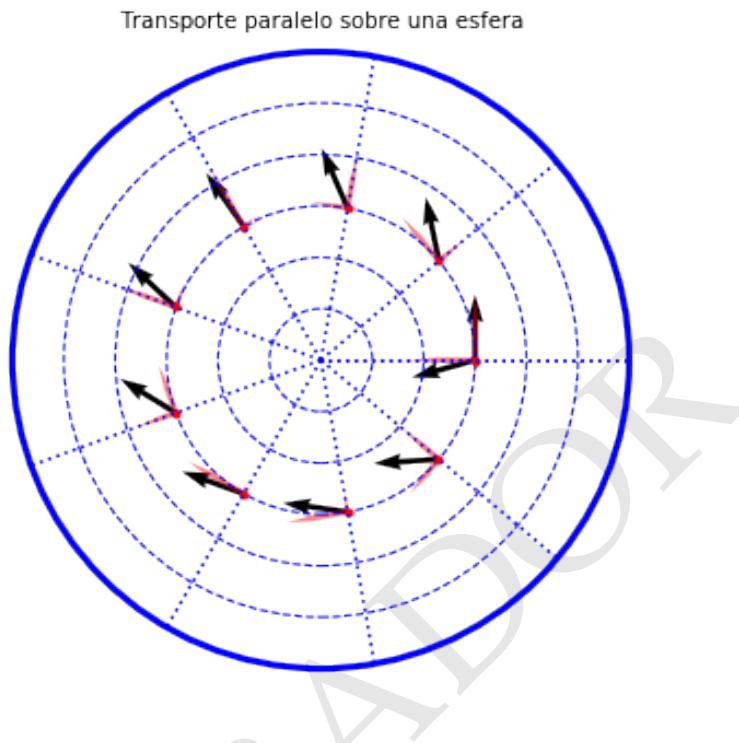
donde  $\theta = \pi/2 - \phi$  es la colatitud.

De nuevo el resultado obtenido esta expresado en la base coordenada sobre la esfera. Podemos expresar esta base en coordenadas cartesianas si hacemos primero una proyección ortonormal en el sistema de coorenadas cartesianas así:

$$\begin{aligned}\hat{u}_\phi &= -\cos \lambda \hat{u}_x - \sin \lambda \hat{u}_y \\ \hat{u}_\lambda &= -\sin \lambda \hat{u}_x + \cos \lambda \hat{u}_y\end{aligned}$$

De allí los vectores coordenados en coordenadas esféricas serán:

$$\begin{aligned}\hat{e}_\phi &= -R \cos \lambda \hat{u}_x - R \sin \lambda \hat{u}_y \\ \hat{e}_\lambda &= -R \cos \theta \sin \lambda \hat{u}_x + R \cos \theta \cos \lambda \hat{u}_y\end{aligned}$$



**Figura 2.4:** Vector transportado de forma paralela sobre la superficie de una esfera. Se usa proyección azimuthal para representar las coordenadas (malla punteada).

#### 2.4.6. Ecuación geodésica

De todos los campos vectoriales que pueden definirse a lo largo de una trayectoria el más importante es aquel que corresponde al vector tangente (o el vector cuadrvélocidad). El transporte paralelo de este vector permite definir un tipo de trayectoria muy especial.

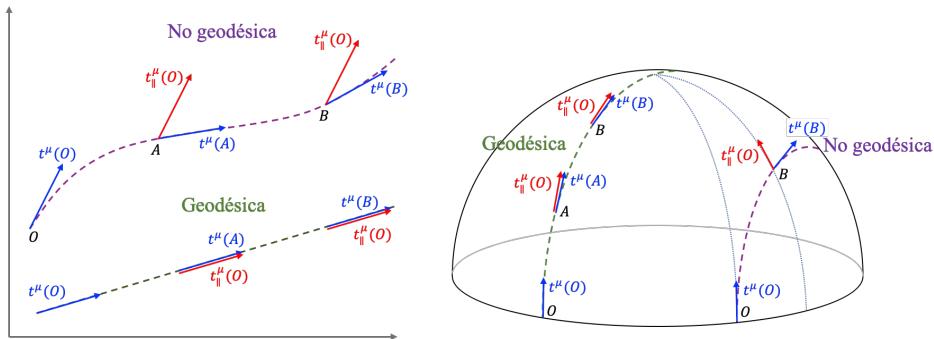
##### Definición 2.2

**Geodésica.** Una trayectoria en un espacio general se define como una geodésica si mantiene a todo lo largo la misma dirección, es decir si el vector tangente  $t^\alpha \equiv dx^\alpha/d\sigma$  en cada punto es *paralelo* (en el sentido de *transporte paralelo*) al vector tangente de cualquier otro punto. Matemáticamente:

$$\frac{D}{D\sigma} t^\alpha = 0$$

donde  $\sigma$  se conoce como el **parámetro afín** de la trayectoria.

Si usamos la definición dada en la sección anterior, la geodésica será la trayectoria que satisfaga la ecuación:



**Figura 2.5:** Definición de geodésica en el espacio-tiempo plano y sobre la superficie de una esfera.

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0$$

## 2.4.7. Ejemplos numéricos de geodésicas

### Geodésica en coordenadas cilíndricas

Nos proponemos ahora a calcular la geodésica que sigue un cuerpo en el espacio plano dada una condición inicial. La ecuación de la geodésica es:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0 \quad (2.3)$$

Para programar la ecuación de la geodésica es necesario linearizarla y expresarla de forma general como:

$$\left\{ \frac{dY^\mu}{d\sigma} = f^\mu(\{Y^\nu\}, u) \right\}$$

En este caso podemos hacer esta asignación:

$$\begin{aligned} Y^\mu &\equiv x^\mu \\ Y^{4+\mu} &\equiv dx^\mu/d\sigma \end{aligned}$$

Con esa identificación la ecuación de la geodésica se puede escribir como:

```
def ecuacion_geodesica(Y,s,gfun,gargs,N=4):
    """
    Opciones:
        gfun: función que da la métrica
        N: Número de dimensiones
    """
    from export import Gamma
    from numpy import zeros
    dYds=zeros(2*N)
```

```

x=Y[:,N]
dxds=Y[N,:]

dYds[:,N]=dxds
G=Gamma(x,gfun,gargs,N)
for pi in range(N):
    for mu in range(N):
        for nu in range(N):
            dYds[N+pi]+=-G[pi,mu,nu]*dxds[mu]*dxds[nu]
return dYds

```

Definamos las condiciones iniciales y de integración:

```

N=2
from numpy import array
Y0s=array([1,0,0.1,+1])
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,10,100)

```

Y podemos integrar:

```

from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_cilindricas_2d,(),N))

```

Hagamos un gráfico de la trayectoria en el espacio:

(Algoritmo 2.1)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

from numpy import sin,cos
for i,Y in enumerate(Ys):

    #Coordenadas
    r=Y[0]
    teta=Y[1]

    #Puntos
    #Vectores unitarios
    er=array([cos(teta),sin(teta)])
    et=array([-sin(teta),cos(teta)])

    #Posición en la trayectoria
    rpos=r*er

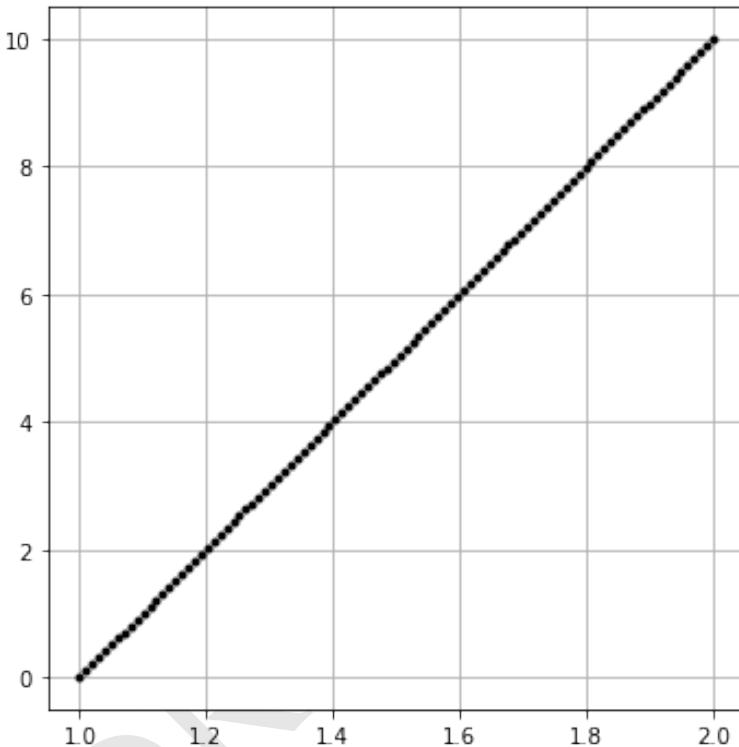
    #Grafica puntos
    ax.plot(rpos[0],rpos[1],'k.')

#ax.set_xlim((0,1.5))

```

```
#ax.set_ylim((0,1.5))
ax.grid()
fig.tight_layout()
```

*ver Figura 2.6*



**Figura 2.6:** Figura correspondiente al código 2.1.

Que coincide con lo que esperábamos: la trayectoria es una línea recta.

#### Geodésica sobre la superficie de una esfera

Un problema más interesante es calcular la geodésica sobre una esfera. Para ello necesitamos la métrica:

Y podemos usar los algoritmos introducidos antes para integrar la geodésica:

(Algoritmo 2.2)

```
#Condiciones iniciales: arrancando en Medellín
N=2
from numpy import array,pi
Y0s=array([6*pi/180,-75*pi/180,0.6,0.2])
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,8,100)
```

```

#Integra la ecuación de la geodésica
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_esfera_2d,(),N))

#Extrae las coordenadas y las convierte a geográficas
from numpy import mod
lons=mod(Ys[:,1]*180/pi,360)
lats=Ys[:,0]*180/pi

#Grafica
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(lons,lats,'r.')

#Decoracion
ax.set_xlim((0,360))
ax.set_ylim((-90,90))
ax.grid()
fig.tight_layout()

```

*ver Figura 2.7*

Para verificar que si es una circunferencia máxima usemos el paquete Basemap que permite representar puntos sobre un mapa realista de la Tierra.

(Algoritmo 2.3)

```

import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.basemap import Basemap
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

#Crea mapa
#m=Basemap(projection='moll',lon_0=0)
m=Basemap(projection='ortho',lon_0=0,lat_0=30)

#Dibuja continentes, lagos y oceanos
m.drawcoastlines()
m.fillcontinents(color='coral',lake_color='aqua')
m.drawmapboundary(fill_color='aqua')

#Calcula la posición de los puntos
x,y=m(lons,lats)
ax.plot(x,y,'ro',ms=1)

#Ajusta el tamaño de la figura
fig.tight_layout()

```

*ver Figura 2.8*

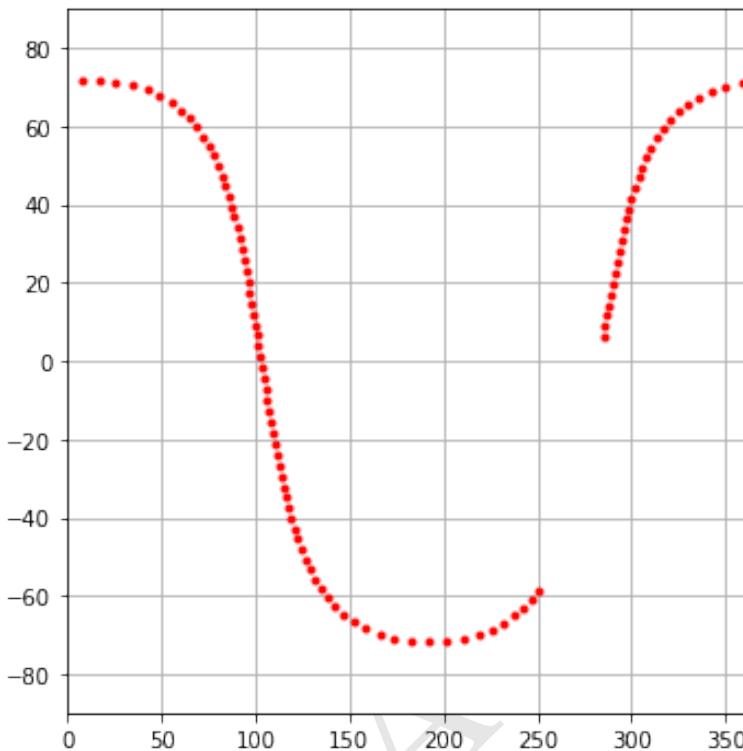


Figura 2.7: Figura correspondiente al código 2.2.

## 2.5. La geodésica y un principio variacional

Una deducción alternativa de la ecuación geodésica se puede obtener mediante un principio variacional.

Sabemos que la longitud de un intervalo en el espacio-tiempo es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

La longitud entonces de una curva hecha solo de intervalos temporaloides o luminoides, entre dos eventos  $A$  y  $B$  será:

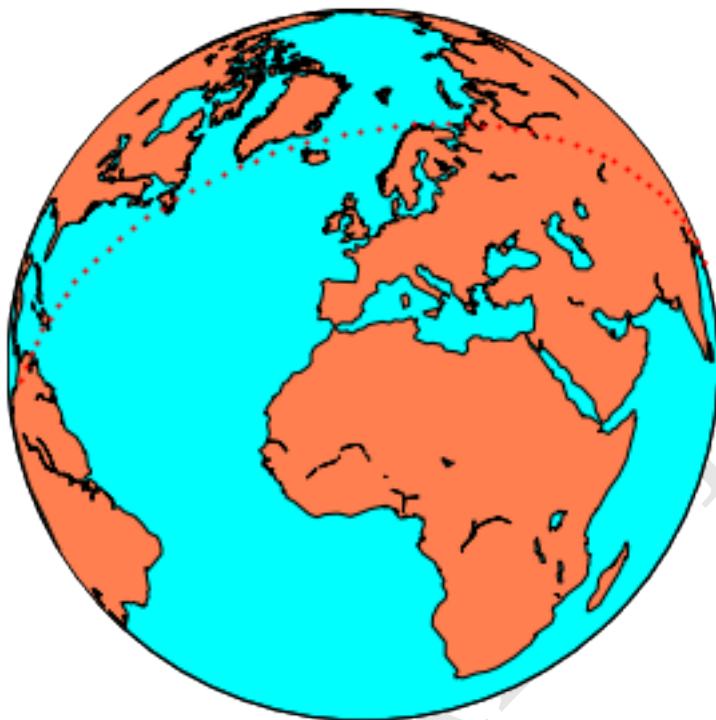
$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu}$$

donde  $x^\alpha$  son los puntos a lo largo de la trayectoria.

Si suponemos que parametrizamos los eventos en la trayectoria con un parámetro  $\lambda$ , de modo que  $x^\alpha(\lambda)$  esta expresión se puede escribir como:

$$S = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

La geodésica entre los eventos  $A$  y  $B$  será aquella curva tal que la longitud total entre ellos es *extremal*:



**Figura 2.8:** Figura correspondiente al código 2.3.

$$\delta S = 0$$

El intervalo entre puntos de la geodésica lo llamaremos en lo sucesivo:

$$d\sigma^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

El problema de la determinación de la geodésica es similar al problema de la mecánica clásica de la determinación de la trayectoria real de un sistema en el espacio de configuración que tiene acción  $S$  y lagrangiano  $L$ .

Aquí vemos que el papel de la acción  $S$  de la mecánica clásica lo juega la longitud de arco y el papel del Lagrangiano lo juega la cantidad:

$$L \equiv \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

Sobre la curva extremal, en general

$$d\sigma^2 = D d\lambda^2$$

donde  $D$  es una constante.

Sabemos por el cálculo variacional que la condición variacional es equivalente a las ecuaciones de Euler:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \Big|_{\lambda=\sigma} = 0$$

donde por brevedad hemos escrito  $\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$

Puede probarse que la ecuación de Euler en este caso resulta igual a:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0$$

que es justamente la ecuación de la geodésica.

Nótese que en realidad la ecuación de la geodésica puede escribirse en general como:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$$

que es independiente de si la geodésica es temporal o nula.

Para el caso de partículas con masa:

$$d\sigma^2 = c^2 d\tau^2$$

por lo tanto es posible usar como parámetro afín  $\lambda = \tau$  de modo que para este caso:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

### Nota

**La geodésica y el principio de máximo envejecimiento.** En el espacio Euclíadiano o en otras variedades Riemannianas la geodésica representa la trayectoria de longitud mínima, el camino de menor distancia. En un espacio Lorentziano, sin embargo, y como vimos en el capítulo de Relatividad Espacial, el camino entre dos puntos a lo largo de la geodésica es realmente el camino más largo. A esto se lo conoce como el **principio de máximo envejecimiento**.

## 2.6. Geodésicas y movimiento inercial

La introducción en la sección anterior del concepto de geodésica conduce a la formulación de un principio físico nuevo en la relatividad general, a saber un principio de inercia generalizado:

### Postulado 2.6

**Postulado de las geodésicas.** Una partícula de prueba completamente libre de fuerzas, en un espacio tiempo general caracterizado por una métrica  $g_{\mu\nu}$  y símbolos de Christoffel (coeficientes conexión) asociado  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , se mueve sobre una geodésica en el espacio-tiempo:

**Postulado 2.6 (Cont.)**

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$$

Es interesante anotar que el resultado anterior vale tanto si la partícula es masiva como si no lo es, es decir, aplica en el caso de la luz o de otras partículas de prueba. La diferencia es que en el caso de una partícula masiva en la cual los intervalos son temporaloides, el parámetro afín puede identificarse con el tiempo propio y la ecuación geodésica adopta la forma general:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

que ahora es una ecuación completamente física (todas las cantidades involucradas son físicas).

Si despejamos  $d^2x^\mu/d\tau^2$  obtenemos:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

Clásicamente se puede interpretar como que un cuerpo en un espacio-tiempo con métrica general, experimenta una aceleración incluso en la ausencia de fuerzas.

**Nota: El principio que realmente es una proposición.** El principio de las geodésicas fue propuesto por Einstein como un elemento adicional físico a la relatividad general independiente de las ecuaciones de campo. Sin embargo, en años posteriores, Einstein y otros colegas demostraron que en realidad este resultado es producto de una propiedad intrínseca de la relatividad, a saber, el teorema de continuidad (conservación de la energía) que puede expresarse matemáticamente como:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

donde  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de esfuerzo-energía que introduciremos en una sección posterior.

## 2.7. Geodésicas en campo débil

Una de las más interesantes aplicaciones de la ecuación de la geodésica se obtiene al aplicarla a una situación en la que el campo gravitacional es poco intenso.

Hay dos cosas que desde el punto de vista de la relatividad caracterizan a un campo gravitacional débil:

1. En movimiento geodésico en el campo, las velocidades espaciales conseguidas por las partículas son pequeñas, i.e.

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$$

recordemos que en unidades luz la primera cantidad nos da la velocidad en unidades de la velocidad de la luz. Por otro lado, en las mismas unidades la segunda cantidad nos da la diferencia entre el tiempo coordenado y el tiempo propio que en campo débil será casi idéntica.

- En campo débil la métrica es aproximadamente igual a la métrica de Minkowski. Podemos escribirla de la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

donde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

A esta forma de escribir la métrica se la llama *linearización* de la métrica y la usaremos más adelante para describir las ondas gravitacionales.

Nos interesa dedicar la ecuación de movimiento de un cuerpo en caída libre en el campo gravitacional, es decir la ecuación  $d^2\vec{r}/dt^2 \approx d^2x^i/d\tau^2$ . En lo sucesivo y para simplificar usaremos la notación de Newton:

$$\ddot{x}^\mu \equiv \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$

entendiendo que el punto hace referencia a la derivada respecto del tiempo propio y no del tiempo coordenado.

En esta notación la ecuación geodésica nos queda:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\gamma$$

Teniendo en cuenta la primera condición podemos escribir una versión aproximada de la ecuación para la componente espacial como:

$$\ddot{x}^0 = -\Gamma_{00}^\mu (\dot{x}^0)^2$$

Si usamos coordenadas ortogonales para la métrica, sabemos que:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\mu} g_{00,\mu}$$

Suponemos un campo estático, de modo que  $\Gamma_{00}^0 = 0$  de donde se sigue que sobre la geodésica, en las condiciones propuestas

$$\dot{x}^0 = 0$$

de donde integrando obtenemos:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = k$$

donde  $k$  es una constante de integración a lo largo de la geodésica. Es fácil ver que dado que:

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

entonces, bajo las aproximaciones podemos escribir, en unidades del sistema internacional:

$$c^2 \approx \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

que es exactamente el mismo resultado:

$$\dot{x}^0 = c$$

Volviendo a la ecuación de la geodésica, la componente temporal queda:

$$\ddot{x}^i = -c^2 \Gamma_{00}^i$$

Usando la linearización de la métrica tenemos:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00,i} = \frac{1}{2} h_{00,i}$$

De donde finalmente la ecuación de movimiento en campo gravitacional débil se puede escribir como:

$$\ddot{x}^i = -\frac{c^2}{2} h_{00,i}$$

En la mecánica Newtoniana sabemos que:

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}\Phi$$

donde  $\phi$  es el potencial gravitacional local (energía potencial gravitacional por unidad de masa) que para la ley de gravitación universal de Newton esta dado por:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

La comparación de estas ecuaciones muestra que podemos hacer la identificación:

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2}$$

De allí que el coeficiente métrico temporal en campo débil sea:

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

De modo que el comportamiento de las partículas en un campo gravitacional Newtoniano se puede reproducir con una métrica del tipo:

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) dt_L^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

llamaremos a esta la **métrica de Newton**.

Una manera de parametrizar la métrica de Newton es haciendo:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{2GM_p}{c^2}$$

la métrica se puede escribir de forma simplificada como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{r}\right) dt_L^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$



### Nota

**El parámetro  $\mathcal{R}$ .** El parámetro  $\mathcal{R}$  es una cantidad de gran relevancia en la relatividad general. Más adelante la obtendremos después de estudiar la métrica de Schwarzschild. Por ahora podemos ver que es una cantidad que es proporcional a la masa de un cuerpo con una constante de proporcionalidad  $2G/c^2 = 1,4852 \times 10^{-27} m^3 kg^{-1}$  muy pequeña. Esta cantidad solo se hace macroscópica para valores de la masa del cuerpo realmente grandes (masas planetarias). Una manera de parametrizar este parámetro es:

$$\mathcal{R} = 2,954 \text{ km} \left( \frac{M_p}{M_\odot} \right)$$

#### 2.7.1. Un ejemplo numérico

Una implementación de la métrica de Newton es:

```
from numpy import array
def g_newtoniana_4d(xmu,mu,R=1):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_munu=diag(A,-1,-r^2,-r^2 sin^2 teta)
    """
    from numpy import sin
    t,r,teta,fi=xmu
    A=(1-R/r)
    if mu==0:
        g=A
    elif mu==1:
        g=-1
    elif mu==2:
        g=-r**2
    elif mu==3:
        g=-r**2*sin(teta)**2
    return g
```

```
%load_ext autoreload
%autoreload 2
```

Vamos a estudiar el movimiento de un cuerpo que es lanzado horizontalmente con una velocidad  $v$  a una altura  $h$  ( $r = R_p + h$ ) sobre la superficie del planeta. Las

condiciones iniciales del problema son por tanto:

$$x_{0L}^\mu : \left( 0, \frac{R_p + h}{c}, \frac{\pi}{2}, 0 \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{dx_{0L}^\mu}{d\sigma} : \left( 1, 0, 0, 0, -\frac{v}{R_p} \right) \quad (2.5)$$

Las propiedades del cuerpo son:

```
#Constantes
c=3e8 # m/s
G=6.67e-11 # m^3 kg^-1 s^-2

#Propiedades del planeta
Mp=5.98e24 # kg
Rp=6.371e6 # m
Phip=-G*Mp/Rp
gp=G*Mp/Rp**2
R=2*G*Mp/c**2
```

$R = 0.00886368888888891 \text{ m}$   
 Potencial en la superficie,  $\Phi(R_p) = -62606498.19494586 \text{ J/kg}$   
 Aceleración gravitacional,  $g(R_p) = 9.826792998735812 \text{ m/s}^2$

Las condiciones iniciales serán por otro lado:

```
#Altura y velocidad
h=100.0 # m
v=10000.0 # m/s
from numpy import sqrt
T=sqrt(2*h/gp)

#Condiciones iniciales
from numpy import array,pi
Y0s=array([0.0,(Rp+h)/c,pi/2,pi/2,
           1,0,0,-v/Rp])
```

```
#Tiempo de integración
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,T,30)
```

```
print(f"Condiciones iniciales = {Y0s}")
```

Condiciones iniciales = [ 0. 0.021 1.571 ... 0. 0. -0.002]

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 2.4)

```

#Integra la ecuación de la geodésica
from scipy.integrate import odeint
from export import ecuacion_geodesica
N=4
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_newtoniana_4d,(R/c,),N))

#Convierde solución en coordenadas esféricas
ts=Ys[:,0]
rs=Ys[:,1]
qs=Ys[:,2]
fs=Ys[:,3]

#Convierde coordenadas esféricas en coordenadas cartesianas
from numpy import sin,cos
xs=rs*sin(qs)*cos(fs)
ys=rs*sin(qs)*sin(fs)
zs=rs*cos(qs)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(c*xs,c*ys-Rp,label="Geodésica")

#Comparación con el movimiento parabólico
xs_par=v**ss
ys_par=h-0.5*gp*ss**2
ax.plot(xs_par,ys_par,'k+',label="Galileo")

#Decoración
ax.legend()
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
fig.tight_layout()

```

*ver Figura 2.9*

Que se corresponde con lo esperado: el cuerpo describe una trayectoria parabólica en el espacio.

## 2.8. Simetrías y cantidades conservadas

Las ecuaciones geodésicas son fundamentales en Relatividad general y como tal deben ser revisadas con sumo cuidado. Como sucede en la mecánica clásica con las ecuaciones de movimiento de Newton o las ecuaciones de Lagrange, ellas representan las ecuaciones diferenciales más importantes de la relatividad general.

Existen distintas maneras de escribir las ecuaciones de la geodésica:

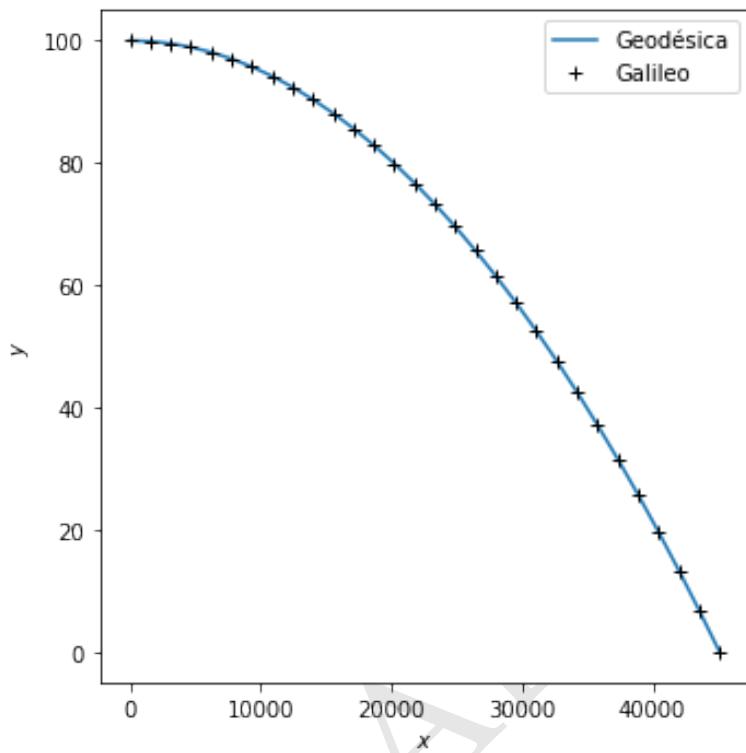


Figura 2.9: Figura correspondiente al código 2.4.

1. Versión original:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

que en notación de Newton es:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

2. Versión linearizada

$$\begin{aligned}\dot{x}^\mu &= U^\mu \\ \dot{U}^\mu &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta\end{aligned}$$

3. Versión variacional: si se define:

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

entonces la ecuación de la geodésica es:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

Esta última manera de expresar la ecuación permite encontrar constantes de movimiento usando principios similares a los que se usaron en la mecánica clásica.

### 2.8.1. La métrica como constante

Como hemos visto antes si se escoge de manera apropiada el parámetro afín entonces el valor de  $L$  resulta constante e igual a  $D$ . De aquí resulta nuestra primera constante de movimiento o cuadratura:

$$\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = D$$

que se puede escribir como:

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = D^2$$

En el caso por ejemplo de una geodésica temporaloide,  $D = c$  y  $\sigma = \tau$  de modo que:

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = c^2$$

### 2.8.2. Coordenadas cíclicas y vectores de Killing

Si una métrica no depende de una de las coordenadas  $x^\kappa$ , entonces la ecuación de Euler (ecuación de la geodésica) se puede escribir como:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\kappa}\right) = 0$$

De aquí se obtiene que la cuadratura:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\kappa} = \text{cte}$$

Desarrollando esta ecuación obtenemos:

$$-g_{\kappa\nu}\frac{1}{L}\frac{dx^\nu}{d\sigma} = -g_{\kappa\nu}U^\nu = \text{cte}$$

Si definimos el vector:

$$\xi^\mu : (0_0, \dots, 1_\kappa, \dots, 0_4)$$

donde la única componente distinta de 0 es la componente  $\kappa$  entonces la constante encontrada se puede escribir como:

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu U^\nu = \text{cte}$$

Que no es otra cosa que el producto punto del cuadrivector  $\xi^\mu$  y la cuadrvelocidad  $U_\nu$ :

$$\xi^\mu U_\mu = \text{cte}$$

Al cuadrvector  $\xi^\mu$  se lo llama el vector de *Killing* asociado con la simetría correspondiente<sup>6</sup>.

### 2.8.3. Ejemplo: geodésicas en coordenadas cilíndricas

Un ejemplo clásico consiste en calcular las geodésicas en un espacio plano cuya métrica es expresada en coordenadas cilíndricas:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$$

Consideremos geodésicas sobre el plano  $z = 0$ . Podemos escribir la ecuación de la geodésica o escribir sus constantes:

1. **Constancia de la métrica:** En este caso podemos escoger un parámetro afín tal que  $D = 1$ :

$$\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 1$$

que se escribe explícitamente como:

$$\left( \frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 1$$

2. **Variables cíclicas:** En este caso  $\phi$  no aparece en la métrica y por lo tanto el vector de Killing es  $\xi^\mu : (0, 1, 0)$ , de allí que la siguiente cantidad sea constante:

$$\xi^\mu \dot{x}_\mu = h$$

aquí hemos escogido llamar  $h$  a la constante. Explícitamente:

$$g_{\mu\nu} \xi^\mu \dot{x}^\nu = h$$

o lo que es lo mismo:

$$g_{\phi\phi} \dot{\phi} = r^2 \dot{\phi} = h$$

Dividiendo esta última ecuación por la primera obtenemos:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} \left( 1 - \frac{h^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

Que puede integrarse para dar:

$$\phi = \phi_0 + \cos^{-1} \left( \frac{h}{r} \right)$$

Despejando  $r$  obtenemos la forma de las geodésicas:

---

<sup>6</sup>El nombre de vector de Killing viene del matemático alemán Wilhelm Killing (1847-1923) y no de que sea un vector con una acción *asesina*.

$$r \cos(\phi - \phi_0) = h$$

Desarrollando el coseno y teniendo en cuenta que  $r \cos \phi = x$  y  $r \sin \phi = y$ :

$$x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0 = h$$

que es la ecuación general de una línea recta y que es lo que estabamos esperando.

#### 2.8.4. Ejemplo: geodésicas sobre una esfera

Un ejemplo clásico consiste en calcular las geodésicas sobre una esfera:

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Ya habíamos hecho este cálculo numéricamente. Hagámoslo ahora analíticamente.

1. **Constancia de la métrica:** En este caso podemos escoger un parámetro afín tal que  $D = 1$ :

$$\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 1$$

que se escribe explícitamente como:

$$R^2 \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + R^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 1$$

2. **Variables cílicas:** En este caso  $\phi$  no aparece en la métrica y por lo tanto el vector de Killing es  $\xi^\mu : (0, 1, 0)$ , de allí que la siguiente cantidad sea constante:

$$g_{\phi\phi} \dot{\phi} = R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = h$$

Dividiendo término a término la primera por el cuadrado de la segunda y reorganizando se produce:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 + 1 = h^2 R^2 \sin^2 \theta$$

Llamando  $\kappa = h^2 R^2$ , la integral y separando variables obtenemos:

$$\pm \int d\phi = \int \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\kappa \sin^2 \theta - 1}}$$

Por tablas de integrales:

$$\tan(\phi + \phi_0) = \mp \frac{\cos \theta}{\sqrt{\kappa \sin^2 \theta - 1}}$$

Que puede escribirse como:

$$\sin(\phi + \phi_0) = \frac{\cos\theta}{\sqrt{\kappa - 1} \sin\theta}$$

Y que se puede desarrollar como:

$$\sin\phi_0(R \sin\theta \cos\phi) + \cos\phi_0(R \sin\theta \sin\phi) = \frac{1}{\sqrt{\kappa - 1}}(R \cos\theta)$$

Que se puede escribir en coordenadas cartesianas como:

$$x \sin\phi_0 + y \cos\phi_0 - z \frac{1}{\sqrt{\kappa - 1}} = 0$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el origen de coordenadas y cuyas coordenadas  $x, y, z$  están sobre la superficie de la esfera. Es decir, esta es la ecuación de una circunferencia máxima, que es lo que sabemos para una geodésica sobre una esfera.

### 2.8.5. Ejemplo: geodésicas en la métrica de Newton

Estudiemos ahora el caso físico de la métrica de Newton:

$$ds^2 = A d\vec{l}_L^2 - d\vec{l}^2$$

donde

$$A \equiv \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

1. **Constancia de la métrica:** En este caso el parámetro afín es  $D = c$ :

$$\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = c$$

que se escribe explícitamente como:

$$A \left(c \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{l}}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

2. **Variables cílicas:** En este caso  $t$  no aparece en la métrica y por lo tanto el vector de Killing es  $\xi^\mu : (1, 0, 0, 0)$ , de allí que la siguiente cantidad sea constante:

$$A \frac{d(ct)}{d\tau} = \kappa$$

Elevando al cuadrado la última ecuación y dividiendo la primera por el resultado obtenemos:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{c^2 A^2} \left(\frac{d\vec{l}}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{\kappa^2}$$

Si identificamos  $v = d\vec{l}/dt$  y expandimos:

$$\frac{1}{A} = 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$$

y

$$\frac{1}{A^2} = 1 - \frac{4\Phi}{c^2}$$

La siguiente relación resulta:

$$1 - \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \left( 1 - \frac{4\Phi}{c^2} \right) = \frac{c^2}{k^2}$$

Si multiplicamos a ambos lados por  $c^2$  y dividimos por 2 y despreciamos el término  $\Phi/c^2$ :

$$\frac{v^2}{2} + \Phi = \frac{c^2}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{k^2} \right)$$

Multiplicando a ambos lados por la masa de la partícula obtenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E$$

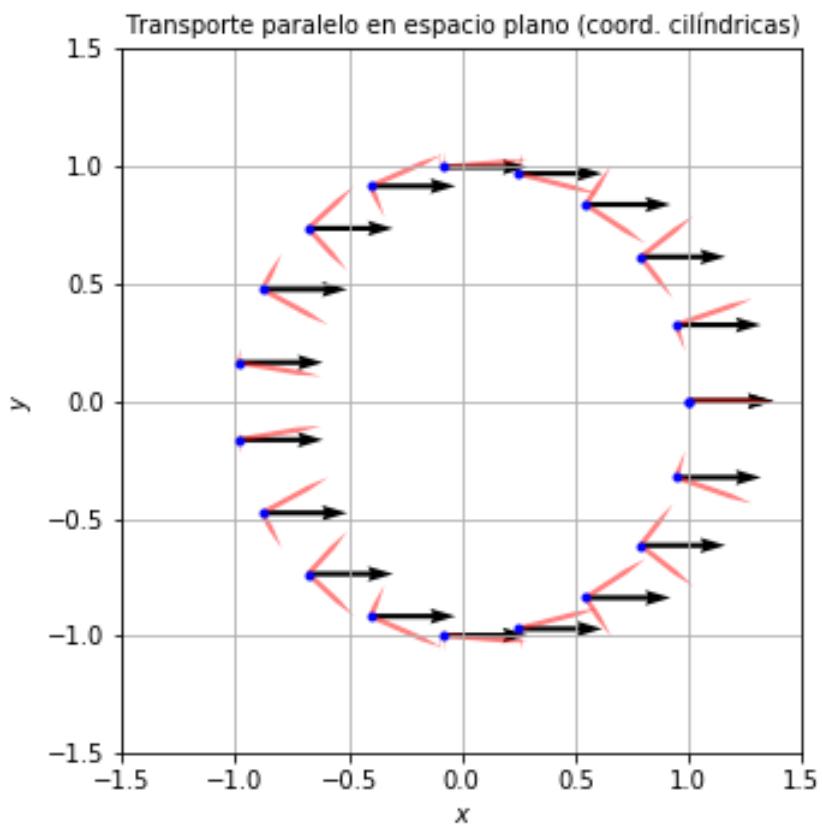
donde

$$E \equiv \frac{mc^2}{2} \left( 1 - \frac{c^2}{k^2} \right)$$

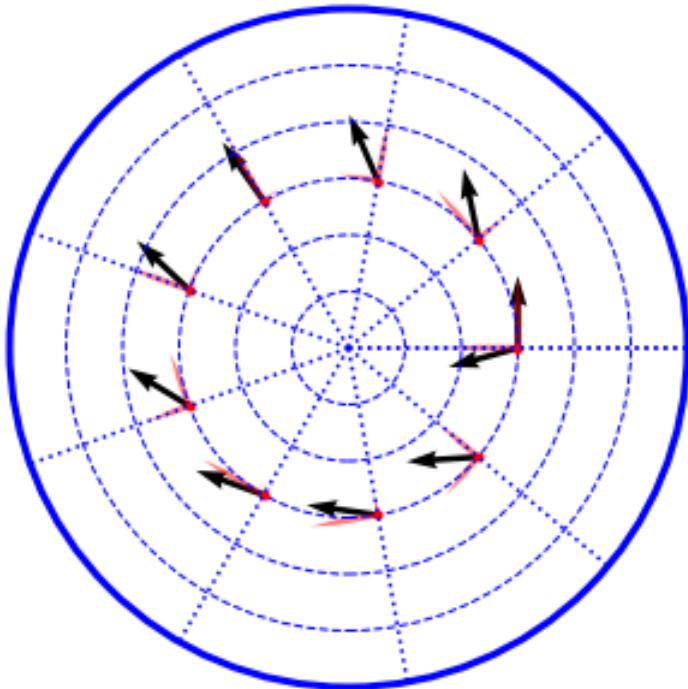
Ya sabíamos en la física Newtoniana de esta cuadratura.

## 2.9. Transporte paralelo y curvatura

En una sección anterior vimos dos situaciones diferentes en el transporte paralelo: en espacio plano y en espacio curvo (ver figuras abajo) y un hecho es notable: al recorrer una trayectoria cerrada en el espacio plano un vector transportado de forma paralela no se modifica. Sin embargo en otro tipo de espacio (sobre la superficie de una esfera), sobre una trayectoria circular un vector transportado de forma paralela no vuelve a ser lo mismo.



Transporte paralelo sobre una esfera



¿Por qué ocurre esto? ¿de qué depende?

Otra manera de expresar la diferencia es decir que el vector transportado de forma paralela depende del camino que se siga. En la figura se muestra el transporte paralelo de un vector  $A^\mu$  desde un punto  $P$  hasta un punto  $Q$  por dos caminos diferentes  $dx^\alpha \rightarrow dx^\beta$  y  $dx^\beta \rightarrow dx^\alpha$

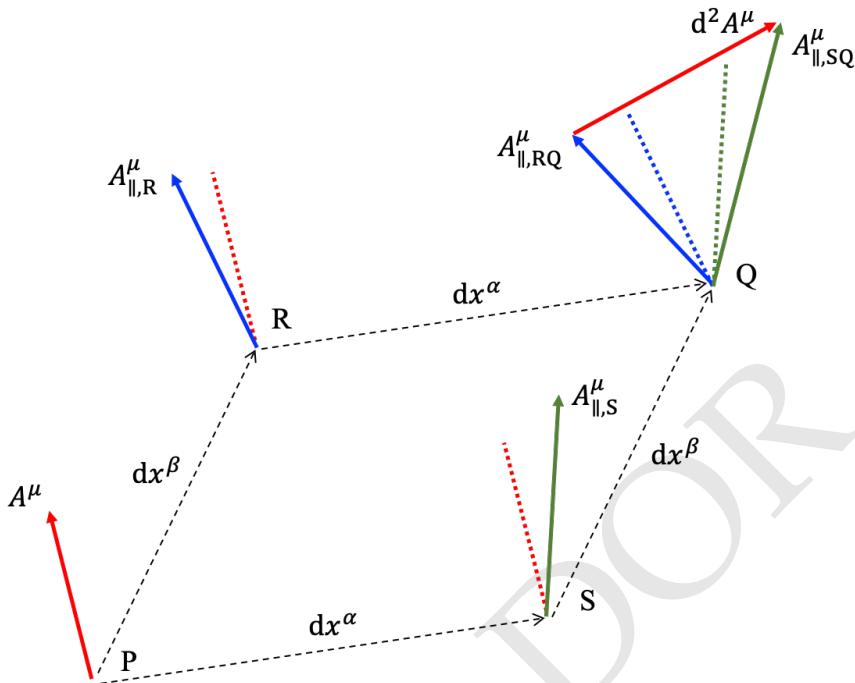


Figura 2.10: Figura

La diferencia a través de los dos recorridos la hemos llamado  $d^2 A^\mu$ .

Usemos la derivada covariante para el transporte paralelo hasta los puntos intermedios  $R$  y  $S$ :

$$A_{\parallel,R}^\mu = A^\mu + D_\beta A^\mu dx^\beta$$

Otro lado es transporte de  $S$  a  $Q$  es:

$$A_{\parallel,RQ}^\mu = A_{\parallel,R}^\mu + D_\alpha A_{\parallel,R}^\mu dx^\alpha$$

reemplazando lo obtenido antes obtenemos:

$$A_{\parallel,RQ}^\mu = A^\mu + D_\beta A^\mu dx^\beta + D_\alpha A^\mu dx^\alpha + D_{\alpha\beta} A^\mu dx^\alpha dx^\beta$$

El recorrido por el otro recorrido es:

$$A_{\parallel,SQ}^\mu = A^\mu + D_\alpha A^\mu dx^\alpha + D_\beta A^\mu dx^\beta + D_{\beta\alpha} A^\mu dx^\alpha dx^\beta$$

Tomando la diferencia obtenemos:

$$d^2 A^\mu = A_{\parallel,SQ}^\mu - A_{\parallel,RQ}^\mu = -(D_{\alpha\beta} - D_{\beta\alpha}) A^\mu dx^\alpha dx^\beta$$

Por otro lado podemos suponer que la diferencia entre el vector transportado por los dos caminos se puede expresar como:

$$d^2 A^\mu \equiv R_{\delta\alpha\beta}^\mu A^\delta dx^\alpha dx^\beta$$

donde los nuevos coeficientes  $R_{\delta\alpha\beta}^\mu$  juegan el papel que en el transporte paralelo convencional jugaban los coeficientes de conexión.

Comparando encontramos que la manera de calcular los coeficientes es:

$$R_{\delta\alpha\beta}^\mu A^\delta = -(D_{\alpha\beta} - D_{\beta\alpha}) A^\mu$$

O en la notación punto y coma de la derivada covariante:

$$R_{\delta\alpha\beta}^\mu A^\delta = -(A_{;\alpha;\beta}^\mu - A_{;\beta;\alpha}^\mu)$$

Veamos cómo es la segunda derivada covariante:

$$\begin{aligned} A_{;\mu;\nu}^\rho &= (A_{;\nu;\mu}^\rho) + [\Gamma_{\mu\sigma}^\rho A_{;\nu}^\sigma] - \{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_{;\lambda}^\rho\} \\ &= (A_{;\nu,\mu}^\rho + \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^\rho A_{;\nu}^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho A_{;\mu}^\sigma) + \\ &\quad + [\Gamma_{\mu\sigma}^\rho A_{;\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma A_{;\lambda}^\rho] + \\ &\quad - \{\Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_{;\lambda}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho A_{;\sigma}^\rho\} \end{aligned}$$

La derivada contraria  $A_{;\nu;\mu}^\rho$  se obtiene intercambiando en la expresión anterior  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Es claro que los términos proporcionales a  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  serán idénticos en ambas derivadas y se eliminaran. Lo mismo pasa con los términos  $A_{;\nu,\mu}^\rho$  y  $\Gamma_{\nu\sigma,\mu}^\rho A_{;\nu}^\sigma$  y  $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho A_{;\nu}^\sigma$ , que serán idénticos a los correspondientes en la derivada con los índices cambiados.

De modo que nos queda:

$$A_{;\mu;\nu}^\sigma - A_{;\nu;\mu}^\sigma = (\{\Gamma_{\nu\sigma,\mu}^\rho + \Gamma_{\mu\delta}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\delta\} - \{\mu \leftrightarrow \nu\}) A_{;\sigma}^\rho$$

donde la notación  $\{\mu \leftrightarrow \nu\}$  indica que lo que hay antes entre llaves se pone igual pero intercambiando los índices  $\mu$  por  $\nu$  y viceversa.

Volviendo a la definición de los coeficientes  $R$  obtenemos entonces que ellos están dados como función de los símbolos de Christoffel y de sus derivadas en la forma más conveniente:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \{\Gamma_{\sigma\mu,\nu}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\rho\} - \{\mu \leftrightarrow \nu\}$$

Esta cantidad transforma como un tensor (ver Problemas al final del capítulo) y se conoce como el **tensor de Riemann**.

### Nota

**El tensor de Riemann y la curvatura.** De acuerdo a lo que habíamos dicho antes, el tensor de Riemann establece si un espacio es curvo o no. Esta condición puede expresarse de dos maneras:

- Si al menos una de las componentes del tensor de Riemann es distinta de cero, el espacio es curvo.

**Nota (Cont.)**

- Si **todas** las componentes del tensor de Riemann son cero, el espacio es **plano**.

### 2.9.1. Propiedades del tensor de Riemann

El tensor de Riemann juega un papel fundamental en la relatividad general de modo que sus propiedades son cruciales para las matemáticas del área.

La primera propiedad y la más obvia es su antisimetría:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu}R^\rho_{\sigma\mu\nu} + R^\rho_{\sigma\nu\mu} = 0$$

que podemos escribir también como:

$$R^\rho_{\sigma[\mu\nu]} = 0$$

¿Cuántas componentes tiene el tensor de Riemann?

De la misma manera que los símbolos de Christoffel pueden ser pensados como una “pila de matrices”, el tensor de Riemann es como una matriz de matrices:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = (R^\rho_\sigma)_{\mu\nu}$$

de donde sabemos que en total el número de componentes totales será  $N^4$  y para el espacio-tiempo 256 componentes.

Ahora bien, por la antisimetría de  $\mu\nu$  sabemos que la diagonal:

$$(R^\rho_\sigma)_{\mu\mu} = 0$$

y por lo tanto cada matriz de matrices tiene por lo menos  $N(N - 1)/2$  componentes independientes, para un total de  $N^3(N - 1)/2$  que en el caso de  $N = 4$  corresponde a 96 componentes independientes.

El número de términos encontrados es todavía muy grande, pero puede mostrarse que es menos si se baja el índice superior:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\rho}R^\rho_{\mu\nu\kappa}$$

Desarrollando en detalle se puede mostrar (ver Problemas al final del capítulo) que esta versión totalmente covariante del tensor de Riemann es:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + g_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - g_{\kappa\mu,\nu,\lambda}) + \\ &\quad + g_{\sigma\xi}(\Gamma^\sigma_{\mu\kappa}\Gamma^\xi_{\lambda\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\xi_{\lambda\kappa}) \end{aligned}$$

O en notación más compacta:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}g_{\{\mu\nu,\lambda,\kappa\}} - g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\lambda\kappa} - \Gamma^\alpha_{\mu\kappa}\Gamma^\beta_{\lambda\nu})$$

Es decir el tensor de Riemann es proporcional a las **segundas derivadas de la métrica**.

Con esta expresión se identifica dos propiedades:

1. Antisimetría frente al intercambio de los primeros indices:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

2. Simetría frente al intercambio de los pares de índices inicial y final:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\beta\alpha}$$

De modo que tenemos una matriz antisimétrica de matrices antisimétricas. Eso implica que hay  $M = N(N - 1)/2$  matrices antisimétricas de  $M = N(N - 1)/2$  términos, es decir  $N^2(N - 1)^2/4$ , para  $N = 4$  el número de términos es  $4^2(4 - 1)^2/4 = 36$  términos independientes. Esos términos son:

$R_{0101}$	$R_{0102}$	$R_{0103}$	$R_{0112}$	$R_{0113}$	$R_{0123}$
$R_{0201}$	$R_{0202}$	$R_{0203}$	$R_{0212}$	$R_{0213}$	$R_{0223}$
$R_{0301}$	$R_{0302}$	$R_{0303}$	$R_{0312}$	$R_{0313}$	$R_{0323}$
$R_{1201}$	$R_{1202}$	$R_{1203}$	$R_{1212}$	$R_{1213}$	$R_{1223}$
$R_{1301}$	$R_{1302}$	$R_{1303}$	$R_{1312}$	$R_{1313}$	$R_{1323}$
$R_{2301}$	$R_{2302}$	$R_{2303}$	$R_{2312}$	$R_{2313}$	$R_{2323}$

Pero por la propiedad 2 de más arriba, este arreglo cuadrado de términos es simétrico y por lo tanto de todos estos términos hay  $6(6 + 1)/2 = 21$  términos independientes.

La conclusión hasta ahora es que para que las componentes del tensor de Riemann que sean independientes y potencialmente distintas de 0 **los primeros índices y los últimos deben ser diferentes entre sí**. Las componentes  $R_{\alpha\alpha\mu\nu}$  o  $R_{\alpha\beta\mu\mu}$  son siempre iguales a cero.

### Proposición 2.2

**Identidades de Bianchi.** Hay dos propiedades adicionales del tensor de Riemann que pueden llegar a ser de alguna utilidad:

1. **Primera identidad de Bianchi:**  $R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0$
2. **Segunda identidad de Bianchi:**  $R_{\beta[\mu\nu;\sigma]}^\alpha = 0$

### 2.9.2. Tensor de Riemann para métricas diagonales

Pensemos ahora nuevamente en el caso en el que la métrica es simétrica. En este caso el tensor de Riemann se simplifica de un general:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}g_{\{\mu\nu,\lambda,\kappa\}} - g_{\alpha\beta}(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\Gamma_{\lambda\kappa}^\beta - \Gamma_{\mu\kappa}^\alpha\Gamma_{\lambda\nu}^\beta)$$

a uno más particular:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}g_{\{\mu\nu,\lambda,\kappa\}} - g_{\alpha\alpha}(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha\Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha - \Gamma_{\mu\kappa}^\alpha\Gamma_{\lambda\nu}^\alpha)$$

De estos aquellos con  $\mu = \nu$  y  $\lambda \neq \kappa \neq \mu$  serán:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}g_{\mu\mu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\lambda}\Gamma_{\mu\mu}^\lambda\Gamma_{\lambda\kappa}^\lambda - g_{\kappa\kappa}\Gamma_{\mu\mu}^\kappa\Gamma_{\lambda\kappa}^\kappa + g_{\mu\mu}\Gamma_{\mu\kappa}^\mu\Gamma_{\lambda\mu}^\mu$$

Y aquellos con  $\mu = \nu$  y  $\lambda = \kappa$  serán:

$$R_{\lambda\mu\mu\lambda} = -\frac{1}{2}(g_{\mu\mu,\lambda,\lambda} + g_{\lambda\lambda,\mu,\mu}) - g_{\alpha\alpha}\Gamma_{\mu\mu}^\alpha\Gamma_{\lambda\lambda}^\alpha + g_{\lambda\lambda}(\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda)^2 + g_{\mu\mu}(\Gamma_{\mu\lambda}^\mu)^2$$

Y si todos son diferentes  $\mu \neq \nu \neq \lambda \neq \kappa$  entonces  $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$ .

Esta condición nos deja un potencial de  $21 - 6 = 15$  componentes del tensor.

### 2.9.3. Desviación geodésica

A parte de servir para darnos una idea de si un espacio es curvo o plano ¿qué otra función física tiene el tensor de Riemann per se?

El tensor de Riemann esta relacionado con la **marea gravitacional**. El fenómeno de marea gravitacional se produce cuando en un sistema de referencia en caída libre (que se mueve sobre una geodésica) se observa que partículas dejadas en reposo en el sistema con el tiempo empiezan a separarse unas de otras. La razón de esto es que las geodésicas tienden a diverger.

Imaginemos dos geodésicas vecinas  $x^\mu(\lambda)$  y  $y^\mu(\lambda)$  y calculemos el intervalo entre ellas:

$$\xi^\mu(\lambda) = y^\mu(\lambda) - x^\mu(\lambda)$$

¿Cómo evoluciona  $\xi^\mu$ ? Para encontrarlo partimos del hecho de que ambas cumplen con la ecuación geodésica:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2y^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dy^\alpha}{d\lambda} \frac{dy^\beta}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

Si reemplazamos  $y^\mu(\lambda) = x^\mu(\lambda) + \xi^\mu(\lambda)$  en su respectiva ecuación geodésica obtenemos:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + \xi) \left( \frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \right) \left( \frac{dx^\beta}{d\lambda} + \frac{d\xi^\beta}{d\lambda} \right) = 0$$

Podemos expandir  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + \xi)$  usando una serie de Taylor y conservando solo los términos lineales en  $\xi$ :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + \xi) \simeq \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) + \Gamma_{\alpha\beta,\sigma}^\mu(x)\xi^\sigma$$

Reemplazando obtenemos:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta,\sigma}^\mu \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

Restando término a término esta ecuación de la ecuación de la geodésica para  $x^\mu$  obtenemos:

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\alpha\beta,\sigma}^\mu \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

Por otro lado tenemos la segunda derivada total covariante de un campo tensorial (ver Problemas propuestos al final del capítulo):

$$\frac{D^2 A^\mu}{D\lambda^2} = \frac{d^2 A^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta,\nu}^\mu A^\alpha \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dA^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (2.6)$$

$$-\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\kappa\lambda}^\beta A^\alpha \frac{dx^\kappa}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma A^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad (2.7)$$

Si se reemplaza la segunda derivada convencional de la desviación geodésica se obtiene:

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\lambda^2} = -\left(\Gamma_{\beta\alpha,\sigma}^\mu - \Gamma_{\beta\sigma,\alpha}^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\omega \Gamma_{\omega\sigma}^\mu - \Gamma_{\beta\sigma}^\omega \Gamma_{\omega\alpha}^\mu\right) \xi^\sigma \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

donde reconocemos precisamente el tensor de Riemann:

$$\frac{D^2\xi^\mu}{D\lambda^2} = R_{\alpha\sigma\beta}^\mu \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

A esta última se la llama, la **ecuación de desviación geodésica**.

### Nota

**Solo hay desviación geodésica en espacio curvo.** La consecuencia más significativa de la ecuación geodésica es probar justamente lo que habíamos intuído. En un espacio plano en el que todas las entradas de  $R_{\alpha\sigma\beta}^\mu$  son cero, no hay desviación geodésica. Es decir dos geodésicas se separaran entre sí a ritmo constante:

$$\frac{D\xi^\mu}{D\lambda} = \text{cte}$$

#### 2.9.4. Tensor de Riemann numérico

Con las reglas simplificadas de más arriba podemos diseñar una rutina para calcular el tensor de Riemann numérico.

```
def GammaRiemann(xmu,gfun,gargs,N=4,dxmax=1e-6,verbose=1):
    from scipy.misc import derivative
    from numpy import zeros,where,arange
    R=zeros((N,N,N,N))
    #Indices
    index=arange(N)
```



```

        dx1=max(dxmax,dxmax*abs(x1d))
        g=lambda x:gfun(where(index==pi,x,xmu_local),
                         mu,*gargs)
        g_pi=derivative(g,x1d,dx1,n=1)
        return g_pi
    #g_mumu,pi_xi
    x2d=xmu[xi] #Punto de derivación
    dx2=max(dxmax,dxmax*abs(x2d))
    gmumu_pi=lambda x:dgdxpi(where(index==xi,x,xmu))
    gmumu_pi_xi=derivative(gmumu_pi,x2d,dx2,n=1)
    if verbose:print(f"\t\t\{mu}\{mu}\{pi}\{xi} = {gmumu_pi_xi}")
    #Terminos
    termino1=-0.5*gmumu_pi_xi
    termino2=-gfun(xmu,pi,*gargs)*G[pi,mu,mu]*G[pi,pi,xi]
    termino3=-gfun(xmu,xi,*gargs)*G[xi,mu,mu]*G[xi,xi,pi]
    termino4=-gfun(xmu,mu,*gargs)*G[mu,mu,pi]*G[mu,mu,xi]
    R[pi,mu,mu,xi]=termino1+termino2+termino3+termino4
    #print(f"Filming: {pi},{mu},{mu},{xi}")
    R[mu,pi,mu,xi]=-R[pi,mu,mu,xi]
    R[mu,pi,xi,mu]=-R[pi,mu,mu,xi]
    R[mu,xi,mu,pi]=+R[pi,mu,mu,xi]
    R[xi,mu,pi,mu]=-R[pi,mu,mu,xi]
    R[mu,xi,pi,mu]=-R[pi,mu,mu,xi]
    R[xi,mu,mu,pi]=+R[pi,mu,mu,xi]
    return G,R

```

Problema con la esfera:

```

from export import g_esfera_2d
from numpy import pi
xmu=[pi/6,0]
R=1
N=2
Gama,Riemann=GammaRiemann(xmu,g_esfera_2d,(R,),N)

G =
[[[-0.      0.      ],
 [ 0.      0.433]]]

[[[-0.      -0.577],
 [-0.577  -0.      ]]]
mu = 0
pi = 1
xi = 1
pi = xi
g_00,1,1 = 0.0
g_11,0,0 = -1.000088900582341
g_00 = 1
G^0_00 = -0.0
G^0_11 = 0.4330127019169794
g_11 = 0.7500000000000001
G^1_00 = -0.0

```

```

G^1_11 = -0.0
Termino 1 = 0.5000444502911705
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.18750000002144285
Termino 4 = 0.0
R_1001 = 0.6875444503126134

mu = 1
pi = 0
xi = 0
pi = xi
g_11,0,0 = -1.000088900582341
g_00,1,1 = 0.0
g_00 = 1
G^0_11 = 0.4330127019169794
G^0_00 = -0.0
g_11 = 0.7500000000000001
G^1_11 = -0.0
G^1_00 = -0.0
Termino 1 = 0.5000444502911705
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.18750000002144285
R_0110 = 0.6875444503126134

```

### Riemann

```

Out[37]: array([[[[ 0.    ,  0.    ],
                  [ 0.    ,  0.    ]],

                 [[ 0.    , -0.688],
                  [ 0.688,  0.    ]]],

                 [[[ 0.    , -0.688],
                  [ 0.688,  0.    ]],
                 [[ 0.    ,  0.    ],
                  [ 0.    ,  0.    ]]]])

```

Ahora probémoslo con el espacio tiempo plano:

```

from export import g_cilindricas_4d
xmu=[0,2,0,0]
N=4
Gama,Riemann=GammaRiemann(xmu,g_cilindricas_4d,(),N)

G =
[[[-0.   ,  0.   ,  0.   ,  0.   ],
  [ 0.   , -0.   ,  0.   ,  0.   ],
  [ 0.   ,  0.   , -0.   ,  0.   ],
  [ 0.   ,  0.   ,  0.   , -0.   ]]]

```

```
[[ 0. -0. 0. 0. ]
 [-0. 0. -0. -0. ]
 [ 0. -0. -2. 0. ]
 [ 0. -0. 0. 0. ]]

[[ 0. 0. -0. 0. ]
 [ 0. 0. 0.5 0. ]
 [-0. 0.5 0. -0. ]
 [ 0. 0. -0. 0. ]]

[[ 0. 0. 0. -0. ]
 [ 0. 0. 0. -0. ]
 [ 0. 0. 0. -0. ]
 [-0. -0. -0. 0. ]]

mu = 0
pi = 1
xi = 1
    pi = xi
    g_00,1,1 = 0.0
    g_11,0,0 = 0.0
        g_00 = 1
        G^0_00 = -0.0
        G^0_11 = -0.0
        g_11 = -1
        G^1_00 = 0.0
        G^1_11 = 0.0
        g_22 = -4
        G^2_00 = 0.0
        G^2_11 = 0.0
        g_33 = -1
        G^3_00 = 0.0
        G^3_11 = 0.0
    Termino 1 = -0.0
    Termino 2 = 0.0
    Termino 3 = 0.0
    Termino 4 = 0.0
    R_1001 = 0.0
xi = 2
    pi != xi
    g_00,1,2 = 0.0
xi = 3
    pi != xi
    g_00,1,3 = 0.0
pi = 2
xi = 1
    pi != xi
    g_00,2,1 = 0.0
xi = 2
    pi = xi
    g_00,2,2 = 0.0
    g_22,0,0 = 0.0
        g_00 = 1
```

```
G^0_00 = -0.0
G^0_22 = -0.0
g_11 = -1
G^1_00 = 0.0
G^1_22 = -2.0000000000002
g_22 = -4
G^2_00 = 0.0
G^2_22 = 0.0
g_33 = -1
G^3_00 = 0.0
G^3_22 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_2002 = 0.0
xi = 3
pi != xi
g_00,2,3 = 0.0
pi = 3
xi = 1
pi != xi
g_00,3,1 = 0.0
xi = 2
pi != xi
g_00,3,2 = 0.0
xi = 3
pi = xi
g_00,3,3 = 0.0
g_33,0,0 = 0.0
g_00 = 1
G^0_00 = -0.0
G^0_33 = -0.0
g_11 = -1
G^1_00 = 0.0
G^1_33 = 0.0
g_22 = -4
G^2_00 = 0.0
G^2_33 = 0.0
g_33 = -1
G^3_00 = 0.0
G^3_33 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_3003 = 0.0
mu = 1
pi = 0
xi = 0
pi = xi
g_11,0,0 = 0.0
```

```
g_00,1,1 = 0.0
g_00 = 1
G^0_11 = -0.0
G^0_00 = -0.0
g_11 = -1
G^1_11 = 0.0
G^1_00 = 0.0
g_22 = -4
G^2_11 = 0.0
G^2_00 = 0.0
g_33 = -1
G^3_11 = 0.0
G^3_00 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_0110 = 0.0
xi = 2
pi != xi
g_11,0,2 = 0.0
xi = 3
pi != xi
g_11,0,3 = 0.0
pi = 2
xi = 0
pi != xi
g_11,2,0 = 0.0
xi = 2
pi = xi
g_11,2,2 = 0.0
g_22,1,1 = -1.999733711954832
g_00 = 1
G^0_11 = -0.0
G^0_22 = -0.0
g_11 = -1
G^1_11 = 0.0
G^1_22 = -2.0000000000002
g_22 = -4
G^2_11 = 0.0
G^2_22 = 0.0
g_33 = -1
G^3_11 = 0.0
G^3_22 = 0.0
Termino 1 = 0.999866855977416
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 4.000000000008001
Termino 4 = 0.0
R_2112 = 4.999866855985417
xi = 3
pi != xi
g_11,2,3 = 0.0
```

```
pi = 3
xi = 0
    pi != xi
    g_11,3,0 = 0.0
xi = 2
    pi != xi
    g_11,3,2 = 0.0
xi = 3
    pi = xi
    g_11,3,3 = 0.0
    g_33,1,1 = 0.0
        g_00 = 1
        G^0_11 = -0.0
        G^0_33 = -0.0
        g_11 = -1
        G^1_11 = 0.0
        G^1_33 = 0.0
        g_22 = -4
        G^2_11 = 0.0
        G^2_33 = 0.0
        g_33 = -1
        G^3_11 = 0.0
        G^3_33 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_3113 = 0.0

mu = 2
pi = 0
xi = 0
    pi = xi
    g_22,0,0 = 0.0
    g_00,2,2 = 0.0
        g_00 = 1
        G^0_22 = -0.0
        G^0_00 = -0.0
        g_11 = -1
        G^1_22 = -2.0000000000002
        G^1_00 = 0.0
        g_22 = -4
        G^2_22 = 0.0
        G^2_00 = 0.0
        g_33 = -1
        G^3_22 = 0.0
        G^3_00 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_0220 = 0.0

xi = 1
```

```
pi != xi
g_22,0,1 = 0.0
xi = 3
pi != xi
g_22,0,3 = 0.0
pi = 1
xi = 0
pi != xi
g_22,1,0 = 0.0
xi = 1
pi = xi
g_22,1,1 = -1.999733711954832
g_11,2,2 = 0.0
g_00 = 1
G^0_22 = -0.0
G^0_11 = -0.0
g_11 = -1
G^1_22 = -2.000000000002
G^1_11 = 0.0
g_22 = -4
G^2_22 = 0.0
G^2_11 = 0.0
g_33 = -1
G^3_22 = 0.0
G^3_11 = 0.0
Termino 1 = 0.999866855977416
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 4.000000000008001
R_1221 = 4.999866855985417
xi = 3
pi != xi
g_22,1,3 = 0.0
pi = 3
xi = 0
pi != xi
g_22,3,0 = 0.0
xi = 1
pi != xi
g_22,3,1 = 0.0
xi = 3
pi = xi
g_22,3,3 = 0.0
g_33,2,2 = 0.0
g_00 = 1
G^0_22 = -0.0
G^0_33 = -0.0
g_11 = -1
G^1_22 = -2.000000000002
G^1_33 = 0.0
g_22 = -4
G^2_22 = 0.0
```

```
G^2_33 = 0.0
g_33 = -1
G^3_22 = 0.0
G^3_33 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_3223 = 0.0

mu = 3
pi = 0
xi = 0
    pi = xi
    g_33,0,0 = 0.0
    g_00,3,3 = 0.0
        g_00 = 1
        G^0_33 = -0.0
        G^0_00 = -0.0
        g_11 = -1
        G^1_33 = 0.0
        G^1_00 = 0.0
        g_22 = -4
        G^2_33 = 0.0
        G^2_00 = 0.0
        g_33 = -1
        G^3_33 = 0.0
        G^3_00 = 0.0
    Termino 1 = -0.0
    Termino 2 = 0.0
    Termino 3 = 0.0
    Termino 4 = 0.0
    R_0330 = 0.0

    xi = 1
        pi != xi
        g_33,0,1 = 0.0
    xi = 2
        pi != xi
        g_33,0,2 = 0.0
pi = 1
xi = 0
    pi != xi
    g_33,1,0 = 0.0
xi = 1
    pi = xi
    g_33,1,1 = 0.0
    g_11,3,3 = 0.0
        g_00 = 1
        G^0_33 = -0.0
        G^0_11 = -0.0
        g_11 = -1
        G^1_33 = 0.0
        G^1_11 = 0.0
```

```

g_22 = -4
G^2_33 = 0.0
G^2_11 = 0.0
g_33 = -1
G^3_33 = 0.0
G^3_11 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_1331 = 0.0
xi = 2
pi != xi
g_33,1,2 = 0.0
pi = 2
xi = 0
pi != xi
g_33,2,0 = 0.0
xi = 1
pi != xi
g_33,2,1 = 0.0
xi = 2
pi = xi
g_33,2,2 = 0.0
g_22,3,3 = 0.0
g_00 = 1
G^0_33 = -0.0
G^0_22 = -0.0
g_11 = -1
G^1_33 = 0.0
G^1_22 = -2.000000000002
g_22 = -4
G^2_33 = 0.0
G^2_22 = 0.0
g_33 = -1
G^3_33 = 0.0
G^3_22 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_2332 = 0.0

```

Todos los términos del tensor de Riemann en este caso deberían dar cero:

### Riemann

```

Out[39]: array([[[[ 0.,  0.,  0.,  0.],
                  [ 0.,  0.,  0.,  0.],
                  [ 0.,  0.,  0.,  0.],
                  [ 0.,  0.,  0.,  0.]],

                 [[ 0., -0.,  0., -0.],

```

```
[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[-0., -0.,  0.,  0.],  
[ 0., -0.,  0.,  0.]],  
  
[[ 0., -0., -0., -0.],  
[-0.,  0., -0.,  0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[ 0.,  0., -0.,  0.]],  
  
[[ 0.,  0.,  0., -0.],  
[ 0.,  0.,  0., -0.],  
[ 0.,  0.,  0., -0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.]],  
  
[[[ 0., -0.,  0., -0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[-0., -0.,  0.,  0.],  
[ 0., -0.,  0.,  0.]],  
  
[[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.]],  
  
[[ 0., -0., -0.,  0.],  
[-0.,  0., -5.,  0.],  
[ 0.,  5.,  0.,  0.],  
[ 0., -0., -0.,  0.]],  
  
[[ 0., -0.,  0., -0.],  
[-0.,  0., -0., -0.],  
[ 0., -0.,  0., -0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.]],  
  
[[[ 0.,  0., -0., -0.],  
[-0.,  0., -0.,  0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[ 0.,  0., -0.,  0.]],  
  
[[ 0., -0., -0.,  0.],  
[ 0.,  0., -5.,  0.],  
[-0.,  5.,  0.,  0.],  
[ 0., -0., -0.,  0.]],  
  
[[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.],  
[ 0.,  0.,  0.,  0.]],  
  
[[ 0.,  0., -0., -0.],
```

```
[ 0.,  0., -0., -0.],
[-0., -0.,  0., -0.],
[ 0.,  0.,  0.,  0.]]],

[[[ 0., -0., -0., -0.],
[ 0.,  0.,  0., -0.],
[ 0.,  0.,  0., -0.],
[ 0.,  0.,  0.,  0.]],

[[ 0., -0.,  0., -0.],
[ 0.,  0.,  0., -0.],
[ 0., -0.,  0., -0.],
[-0.,  0.,  0.,  0.]],

[[ 0.,  0., -0., -0.],
[ 0.,  0., -0., -0.],
[ 0.,  0.,  0., -0.],
[-0., -0.,  0.,  0.]],

[[ 0.,  0.,  0.,  0.],
[ 0.,  0.,  0.,  0.],
[ 0.,  0.,  0.,  0.],
[ 0.,  0.,  0.,  0.]])]
```

### 2.9.5. Desviación geodésica numérica

Podemos poner a prueba los conceptos vistos en esta sección usando la desviación geodésica.

Tomemos el caso de la métrica de Newton:

Usemos las mismas condiciones iniciales que habíamos visto:

```
#Constantes
c=3e8 # m/s
G=6.67e-11 # m^3 kg^-1 s^-2

#Propiedades del planeta
Mp=5.98e24 # kg
Rp=6.371e6 # m
gp=G*Mp/Rp**2
R=2*G*Mp/c**2

#Altura y velocidad
h=100.0 # m
v=10000.0 # m/s
from numpy import sqrt
T=sqrt(2*h/gp)

#Tiempo de integración
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,T,30)
```

Pero vamos a estudiar lo que pasa sobre dos geodésicas vecinas

```
#Condiciones iniciales
from numpy import array,pi
Y1_0s=array([0.0,(Rp+h)/c,pi/2,pi/2,
             1,0,0,-0*v/Rp])

Y2_0s=array([0.0,(Rp+h+0.1)/c,pi/2,pi/2,
             1,0,0,-0*v/Rp])
```

Resolvamos las ecuaciones geodésicas:

```
from scipy.integrate import odeint
from export import ecuacion_geodesica,g_newtoniana_4d
N=4
Y1s=odeint(ecuacion_geodesica,Y1_0s,ss,args=(g_newtoniana_4d,(R/c,),N))
Y2s=odeint(ecuacion_geodesica,Y2_0s,ss,args=(g_newtoniana_4d,(R/c,),N))
```

Grafiquemos:

(Algoritmo 2.5)

```
#Convierte solución en coordenadas esféricas
from numpy import sin,cos
#Geodésica 1
t1s=Y1s[:,0]
r1s=Y1s[:,1]
q1s=Y1s[:,2]
f1s=Y1s[:,3]
x1s=r1s*sin(q1s)*cos(f1s)
y1s=r1s*sin(q1s)*sin(f1s)
z1s=r1s*cos(q1s)
#Geodésica 2
t2s=Y2s[:,0]
r2s=Y2s[:,1]
q2s=Y2s[:,2]
f2s=Y2s[:,3]
x2s=r2s*sin(q2s)*cos(f2s)
y2s=r2s*sin(q2s)*sin(f2s)
z2s=r2s*cos(q2s)

#Desviación geodésica
xi_x=x1s-x2s
xi_y=y1s-y2s
xi_z=z1s-z2s

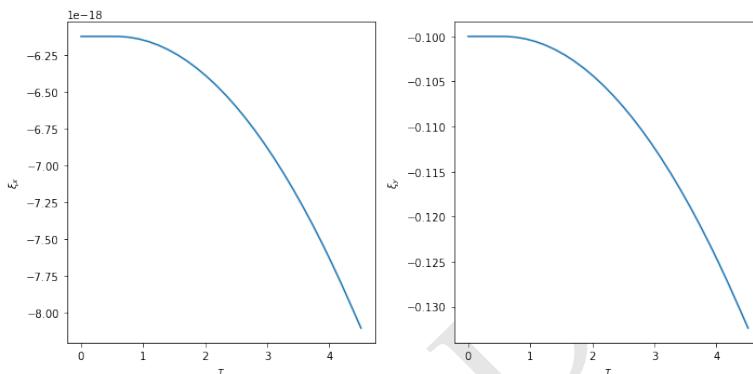
#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig,axs=plt.subplots(1,2,figsize=(10,5))
axs[0].plot(ss,c*xi_x)
axs[0].set_xlabel(r"\tau")
```

```

axs[0].set_ylabel(r"\xi_x")
axs[1].plot(ss,c*x_i_y)
axs[1].set_xlabel(r"\tau")
axs[1].set_ylabel(r"\xi_y")
fig.tight_layout()

```

*ver Figura 2.11*



**Figura 2.11:** Figura correspondiente al código 2.5.

## 2.10. Principio de consistencia

Hasta ahora hemos desarrollado una teoría del movimiento de la materia bajo métricas distintas a la métrica de Minkowski. En secciones anteriores descubrimos que es posible describir los efectos del movimiento en un campo gravitacional débil como movimiento inercial en una métrica simple que llamamos la métrica de Newton. Esta idea, además del principio de equivalencia, nos permite conjeturar que la gravedad es un fenómeno geométrico. Que la presencia de materia tiene un efecto sobre el espacio-tiempo que implica el cambio de la métrica de Minkowski a métricas diferentes.

Pero ¿cómo determina la materia el valor de la métrica? ¿cuáles son las ecuaciones que conectan esas dos cosas?

La teoría general de la relatividad ha resultado ser, sin proponerlo en este desarrollo una teoría de los fenómenos gravitacionales. Nos proponemos en las siguientes secciones desarrollar los elementos centrales de esta teoría partiendo de los conceptos geométricos que hemos visto hasta ahora.

Cualquiera sea la respuesta a la anterior pregunta es necesario que la teoría que desarrollemos prediga, en el límite de curvatura muy pequeña las mismas cosas que veíamos en el caso de la relatividad especial y en la teoría gravitacional de Newton. Esta coincidencia la elevaremos a la altura de un principio:

**Principio 2.1**

**Principio de consistencia.** Cualquier teoría del espacio-tiempo y la manera como sus propiedades son determinadas por la masa-energía y como esas propiedades determinan el movimiento de la materia, debe predecir en el límite de curvatura cercana a cero:

1. Las mismas cosas que predecimos con la teoría de la gravedad Newtoniana.
2. Las mismas cosas que predecimos con la teoría especial de la relatividad.

## 2.11. Una ecuación de campo general

La teoría gravitacional newtoniana se formula normalmente en términos de fuerzas. Para lo que nos proponemos hacer aquí debemos formularla como una teoría de campos, de manera análoga a como lo hicimos con la electrodinámica.

Ya habíamos recordado antes que es posible escribir la aceleración gravitacional producida por un cuerpo puntual como :

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

Podemos definir, como lo hacemos en la teoría electromagnética, el flujo de campo gravitacional como:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

En el caso de una partícula puntual o una distribución esférica de materia:

$$\Phi = 4\pi r^2 g$$

donde  $R$  es la distancia al centro de la distribución esférica de materia y  $g$  es campo gravitacional, constante en este caso a una distancia  $r$  del centro.

En este caso:

$$\Phi = -4\pi G m_r$$

donde  $m_r$  es la cantidad de masa contenida dentro de  $r$

Sabiendo que:

$$m_r = \int_V \rho dV$$

E igualando queda:

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \int_V \rho dV$$

Dado que  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$  independientemente de la distribución de materia, y aplicando el teorema de la divergencia concluimos que:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_0$$

Esta ecuación, que llamamos **la ecuación de Poisson** para el campo gravitacional aplica en general para calcular el potencial gravitacional  $\phi(\vec{r})$  en un punto arbitrario del espacio, dada cualquier distribución de materia con densidad propia  $\rho_0(\vec{r})$ .

Usando la notación que hemos venido utilizando en el curso, la ecuación de Poisson se puede escribir como:

$$\partial_i \partial^i \phi = 4\pi G \rho_0$$

En un espacio  $\partial^i = \partial_i$  esta ecuación se puede escribir también como:

$$\phi_{,i,i} = 4\pi G \rho_0$$

donde hay una suma sobre los índices repetidos que no se representa aquí.

Si queremos construir una teoría consistente con la gravedad Newtoniana, esa teoría debe conducir a una ecuación similar a la anterior.

En secciones anteriores habíamos visto que el potencial gravitacional de un campo débil estaba relacionado con las componentes de la métrica:

$$1 + \frac{2\mathbf{E}}{c^2} = g_{00}$$

Si queremos deducir ecuaciones que describan la gravedad en relatividad y que sean consistentes con las ecuaciones de la gravedad de Newton debemos encontrar una ecuación que sea similar a la ecuación de Poisson pero involucrando la métrica. Derivando dos veces la ecuación anterior, obtenemos:

$$\phi_{,i,i} = \frac{1}{2} g_{00,i,i} c^2$$

Reemplazando en la ecuación de Poisson:

$$\frac{1}{2} g_{00,i,i} c^2 = 4\pi G \rho_0$$

O en términos de la derivada:

$$g_{00,i,i} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0$$

En el lado derecho de esta ecuación aparece la cantidad de materia medida en términos de la densidad de masa. Pero en realidad, para ser consistentes con la relatividad, deberíamos tener la densidad de energía. De modo que la ecuación es:

$$g_{00,i,i} = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2)$$

Esta ecuación nos da el molde básico al cual la ecuación de general que tenemos que deducir. Esta ecuación naturalmente no debería contener solo el coeficiente métrico correspondiente al tiempo y podría contener combinaciones complejas de las segundas derivadas. Podemos conjutar que se escribe así:

$$\mathcal{G}(g_{\mu\nu,\alpha,\alpha}) \equiv \mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} E_{\mu\nu}$$

o de forma más compacta:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} E_{\mu\nu}$$

Llamaremos a esta la **ecuación de campo general**.

Donde la función tensorial  $\mathcal{G}(g_{\mu\nu,\alpha,\alpha}) \equiv \mathcal{G}_{\mu\nu}$ , es una *función lineal* de las segundas derivadas de la métrica (contraídas) y el tensor general  $E_{\mu\nu}$  contiene la densidad de energía. En el límite de campo débil:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{00} &= g_{00,i,i} \\ E_{00} &= \rho_0 c^2\end{aligned}$$

La tarea que nos proponemos es encontrar los tensores  $G_{\mu\nu}$  y  $E_{\mu\nu}$  tal que la ecuación derivada de forma heurística aquí sea consistente físicamente. Lo único que sabemos por ahora es que si las cantidades a la izquierda y a la derecha de la ecuación son *cantidades tensoriales* entonces esta ecuación cumplirá además con el principio de covariancia general.

## 2.12. Tensor de momentum-energía

Cómo construir una cantidad tensorial  $E_{\mu\nu}$  que involucre todas las posibles fuentes de energía que existen en una región del espacio-tiempo dado, tal que:

$$E_{00} = \rho c^2$$

Cualquiera sea la cantidad que construyamos debemos satisfacer el principio de conservación de la energía: dada una región del espacio-tiempo donde hay masa-energía en movimiento, la cantidad de masa-energía debe conservarse.

Ya habíamos visto en la electrodinámica que la conservación de la carga se expresa en la forma de la ecuación de continuidad:

$$J_{,\mu}^{\mu} = 0$$

donde

$$J^{\mu} = \rho \frac{dx^{\mu}}{dt}$$

donde  $dx^{\mu}/dt$  es la velocidad de un elemento de volumen de fluído alrededor del evento en el que la densidad carga es  $\rho(x^{\nu})$ .

Si tenemos un sistema formado por partículas puntuales (masa constante), la conservación de la masa se expresa de forma similar. ¿Cómo generalizar este principio de continuidad a sistemas mecánicos mucho más generales?

Una primera idea sería la de definir una corriente más general:

$$J_q^{\mu} \equiv q \frac{dx^{\mu}}{dt}$$

donde  $q$  es la densidad una cantidad física que asumimos conservada.

La ecuación de continuidad de la electrodinámica será entonces aquella que corresponde a la conservación de la carga:

$$J_{\rho_q, \mu}^\mu = 0$$

donde  $Q = \rho_q$  es la densidad de carga eléctrica, mientras que la conservación de la masa será:

$$J_{\rho_m, \mu}^\mu = 0$$

donde  $Q = \rho_m c^2$  es la densidad de masa.

Pero en mecánica conocemos otras cantidades conservadas, por ejemplo, en ausencia de fuerzas y torques, en una nube de partículas el momentum lineal y angular se conservan. De modo que podemos definir las corrientes de estas cantidades.

Por ejemplo, la densidad de momentum se puede definir como:

$$J^\mu_{\pi_i} = \pi_i \frac{dx^\mu}{dt}$$

donde es importante anotar que  $\pi_i$  no es el momentum convencional, sino su densidad (momentum total por unidad de volumen). Esta cantidad sin embargo no es una cantidad muy apropiada para la relatividad puesto que involucra cantidades vectoriales y tensoriales. Definamos de forma más general la **densidad de flujo de cuadrimomentum**:

$$T^{\mu\nu} \equiv J^\nu_{\pi^\mu} \equiv \pi^\mu \frac{dx^\nu}{dt}$$

donde  $\pi^\mu(x^\alpha)$  es la densidad de cuadrimomentum en el evento  $x^\alpha$  (cuadrimomentum total de un elemento de volumen por unidad de volumen).

Esta cantidad recibe, de forma más conveniente, el nombre de **tensor de momentum-energía** y es la cantidad tensorial que estabamos buscando para nuestra ecuación de campo general, como demostraremos enseguida.

### 2.12.1. Tensor de momentum-energía para una nube de partículas

Para entender mejor lo que es el tensor momentum energía, podemos calcularlo en algunos casos conocidos. El mejor es el de una **nube de partículas no interac-tuantes**.

Cada partícula en la nube tiene masa idéntica  $m$ . La densidad de número de partículas es  $n$ . La velocidad de las partículas en un entorno infinitesimal alrededor de un evento  $x^\alpha$  se considera idéntica e igual a  $U^\mu(x^\alpha)$  y cada partícula tendrá por tanto un cuadrimomentum  $P^\mu(x^\alpha) = mU^\mu(x^\alpha)$ .

En estas condiciones la densidad de momentum en la dirección espacial  $\mu$  se puede escribir como:

$$\pi^\mu(x^\alpha) = nmU^\mu(x^\alpha) = \rho U^\mu(x^\alpha)$$

De allí que el tensor de momentum energía será:

$$T_{\text{nube}}^{\mu\nu}(x^\alpha) = \frac{\rho}{\gamma_v} U^\mu(x^\alpha) U^\nu(x^\alpha) = \rho_0 U^\mu(x^\alpha) U^\nu(x^\alpha)$$

donde hemos usado el hecho:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\gamma_v} U^\mu$$

y hemos reconocido que

$$\rho = nm = (\gamma_v n_0)m$$

donde  $n_0$  es la densidad de número propia en el punto  $x^\alpha$  en la que las partículas tienen velocidad  $\vec{v}(x^\alpha)$ .

En síntesis podemos decir que el tensor momentum-energía para una nube de partículas no interactuantes será:

$$T_{\text{nube}}^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu$$

Otra manera de escribirlo y como se encuentra comúnmente en la literatura es:

$$T_{\text{nube}}^{\mu\nu} = n \left( \frac{P^\mu P^\nu}{E/c^2} \right)$$

donde  $E = \gamma mc^2$ .

Una componente de interés es la componente temporal que será:

$$T_{\text{nube}}^{00} = \rho_0 U^0 U^0 = n_0 m \gamma^2 c^2 = (\gamma n_0)(\gamma mc^2) \equiv \epsilon$$

donde  $\epsilon \equiv n(\gamma mc^2)$  es la densidad de energía.

También podemos escribir como:

$$T_{\text{nube}}^{00} = \gamma \rho c^2$$

donde  $\rho = nm$ .

Podemos finalmente escribir explícitamente las componentes del tensor momentum energía:

$$T_{\text{nube}}^{\mu\nu} = \gamma \rho c^2 \begin{pmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & v_x^2/c^2 & v_x v_y/c^2 & v_x v_z/c^2 \\ v_y/c & v_x v_y/c^2 & v_y^2/c^2 & v_y v_z/c^2 \\ v_z/c & v_x v_z/c^2 & v_y v_z/c^2 & v_z^2/c^2 \end{pmatrix}$$

## 2.12.2. Tensor de momentum-energía para polvo

Si la nube de partículas se mueve con velocidad muy pequeña comparada con la velocidad de la luz el tensor será:

$$T_{\text{polvo}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llamamos a esta situación polvo porque las partículas se mueven lentamente posiblemente debido a que son macroscópicas (galaxias, granos sólidos de polvo, estrellas, etc.)

### 2.12.3. Tensor $T^{\mu\nu}$ y el tensor de esfuerzos $\sigma^{\mu\nu}$

El tensor de momentum-energía tiene relación con un tensor clásico, el **tensor de esfuerzos de Cauchy**, que también miden el flujo de momentum.

Sabemos que la componente  $i$  fuerza que actúa sobre un elemento de volumen es  $F^i = dp^i/dt$ , por tanto la fuerza por unidad de área o tracción  $\sigma^i$  medida en la dirección de la superficie en dirección  $\hat{e}_j$  será:

$$\sigma_j^i \equiv \frac{dF^i}{dA^j} = \frac{d^2p^i}{dtdA^j}$$

que es justo lo que llamamos el flujo de momentum espacial  $p^i$  a través del área  $A^j$ .

El tensor de esfuerzos en un medio elástico se puede escribir como:

$$\sigma_j^i = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

donde  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  se conocen como los resfuerzos normales y  $\tau_{ij}$  se conocen como los esfuerzos cortantes.

Con esta definición podemos escribir el tensor de momentum energía mecánico como:

$$T_{\text{mec}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{01} & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ T^{02} & \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ T^{03} & \sigma^{13} & \sigma^{12} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

### 2.12.4. Tensor de momentum-energía para fluído perfecto

Para un fluído perfecto (no viscosidad, es decir no hay esfuerzos cortantes) en equilibrio hidrodinámico, el tensor de esfuerzos adopta la forma:

$$\sigma_j^i = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

donde  $p$  es la presión en el fluido.

El tensor de esfuerzos contravariante será:

$$\sigma^{ij} = g^{ik}\sigma_k^i = \begin{pmatrix} -g^{11}p & 0 & 0 \\ 0 & -g^{22}p & 0 \\ 0 & 0 & -g^{33}p \end{pmatrix}$$

Si nos paramos en el sistema de referencia del fluido entonces  $T^{00} = \rho_0 c^2$  y  $T^{0i} = 0$  el tensor momentum-energía será:

$$T_{\text{perfecto}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g^{11} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g^{22} p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^{33} p \end{pmatrix}$$

Si ahora observamos el fluído desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad  $\vec{u}$  debemos transformar el tensor de acuerdo con las reglas de transformación generales correspondientes a la métrica  $g_{\mu\nu}$ :

$$T_{\text{perfecto}}^{\mu'\nu'} = \mathcal{G}_{\mu'}^{\mu} \mathcal{G}_{\nu'}^{\nu} T_{\text{perfecto}}^{\mu\nu}$$

Un tedioso cálculo algebraico produce como resultado:

$$T_{\text{perfecto}}^{\mu\nu} = \left( \rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu}$$

### 2.12.5. La conservación de $T^{\mu\nu}$ y la ecuación geodésica

Recordemos que una de las razones por las que dedujimos el tensor de momentum-energía era pensando justamente en que este tuviera la propiedad de conservación de otras corrientes, a saber:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

donde hemos escrito en lugar de la derivada “,” de la ley de conservación de la cuadricorriente, la derivada covariante “;” de la relatividad general.

Es posible partiendo del tensor momentum-energía de una nube de partículas probar que la condición anterior solo se cumple si las partículas de la nube se mueven siguiendo geodésicas (ver Lorenzo, página 295-297):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0$$

Es posible mostrar que la ecuación de conservación se puede escribir también como:

$$T_{\mu\nu}^{;\mu} = 0$$

## 2.13. La ecuación de campo métrico

Tenemos ya todos los elementos para encontrar la ecuación general que conecta el flujo de momentum y energía con la curvatura del espacio tiempo.

Hasta ahora hemos reunido las condiciones que requería el lado derecho de la ecuación general de campo que cumple el principio de consistencia.

$$\mathcal{G}(g_{\mu\nu,\alpha,\alpha}) \equiv \mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} E_{\mu\nu}$$

Construimos una cantidad que cumple la función de  $E_{\mu\nu}$ , el tensor momentum energía:

$$E_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\alpha\beta}$$

que cumple la condición de que en campo débil:

$$E_{00} = \rho_0 c^2$$

De este modo la ecuación general queda:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Esta cantidad satisface un principio de conservación:

$$T_{\mu\nu}^{;\mu} = 0$$

Ahora debemos trabajar para obtener el tensor  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  en el lado que sea una función lineal del D'Alambertiano de la métrica.

El principio de conservación del momentum y la energía exigen que se cumpla la condición:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{;\mu} = 0$$

### 2.13.1. El tensor de Einstein

Conocemos un tensor que depende de la segunda derivada de la métrica, el tensor de Riemann:

$$R^\alpha{}_{\mu\nu\kappa} = g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} g_{\{\mu\nu,\lambda,\kappa\}} - g^{\alpha\lambda} g_{\alpha\beta} (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\lambda\kappa}^\beta - \Gamma_{\mu\kappa}^\alpha \Gamma_{\lambda\nu}^\beta)$$

Un tensor que contiene el D'Alambertiano de la métrica  $g_{\mu\nu,\alpha,\alpha}$  resulta de contraer todas las componentes con igual índices  $\alpha$  y  $\kappa$ :

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha{}_{\mu\nu\alpha} = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\mu\nu\alpha} = R_{\mu\nu}(g_{\mu\nu,\alpha,\alpha})$$

llamamos a este el **tensor de Ricci**.

#### Nota

**Simetría y componentes del tensor de Ricci.** El tensor de Ricci será muy importante en lo sucesivo. Por las propiedades del tensor de Riemann se puede probar que el tensor de Ricci es simétrico:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

esto implica que solo tiene 10 componentes independientes.

La derivada covariante de este tensor cumple tiene una interesante propiedad. Comencemos con la identidad de Bianchi:

$$R^\alpha{}_{\beta[\mu\nu;\sigma]} = 0 R^\alpha{}_{\beta\mu\nu;\sigma} + R^\alpha{}_{\beta\nu\sigma;\mu} + R^\alpha{}_{\beta\sigma\mu;\nu} = 0$$

Si tomamos todos los términos con  $\alpha = \nu$  y sumamos las identidades correspondientes obtenemos:

$$R_{\beta\mu;\sigma} - R_{\beta\sigma;\mu} + R^\alpha{}_{\beta\sigma\mu;\alpha} = 0$$

Si multiplicamos por  $g^{\beta\mu}$  y sumamos sobre todos los  $\mu$  y todos los  $\beta$  obtenemos:

$$g^{\beta\mu} R_{\beta\mu;\sigma} - g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} + g^{\beta\mu} R^\alpha{}_{\beta\sigma\mu;\alpha} = 0$$

Definiendo:

$$R \equiv g^{\beta\mu} R_{\beta\mu}$$

como el **escalar de curvatura**, la anterior ecuación nos queda:

$$R_{;\sigma} - g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} + g^{\beta\mu} R^\alpha{}_{\beta\sigma\mu;\alpha} = 0$$

El tensor de Riemann en el último término se puede escribir como  $R^\alpha{}_{\beta\sigma\mu} = g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\beta\sigma\mu}$  de modo que la ecuación queda:

$$R_{;\sigma} - g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} + g^{\beta\mu} g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\beta\sigma\mu;\alpha} = 0$$

Por definición del tensor de Ricci:

$$g^{\beta\mu} R_{\beta\lambda\sigma\mu} = R_{\lambda\sigma}$$

de donde la ecuación se puede escribir como:

$$R_{;\sigma} - g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} - g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\sigma;\alpha} = 0$$

Aquí se puede ver que los dos últimos términos son idénticos (se pueden poner los índices mudos iguales):

$$R_{;\sigma} - 2g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} = 0$$

Que se puede escribir como:

$$R_{\beta\sigma}{}^{;\beta} - \frac{1}{2} R_{;\sigma} = 0$$

o como

$$\left( R_{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g_{\beta\sigma} R \right)^{;\beta} = 0$$

Si definimos el vector:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

que llamaremos, el **tensor de Einstein**, la identidad de Bianchi contraída resulta ser:

$$G_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$$

**Nota**

**El signo de tensor de Einstein.** Nótese que existe una libertad en la manera en la que elegimos el signo del tensor de Einstein que no afecta sus propiedades.

### 2.13.2. Una ecuación de campo general

Es posible demostrar que los únicos tensores de rango dos que son funciones lineales del D'Alambertiano de la métrica y que al mismo tiempo satisfacen la condición:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^{;\mu} = 0$$

se pueden escribir como:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = kG_{\mu\nu}$$

donde  $k$  es una constante.

De allí que la ecuación más general que describe la relación entre el flujo de momentum y energía y el D'Alambertiano de la métrica será:

$$k(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

o bien,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{kc^4}T_{\mu\nu}$$

Por la simetría el tensor de Ricci esta corresponde a 10 ecuaciones.

Nos restaría por determinar el valor de las constantes  $a$ .

Una propiedad interesante resulta al contraer los índices:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{kc^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

Teniendo en cuenta que  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = 4$  y llamando  $T_\mu^\mu = T$ :

$$R = -\frac{8\pi G}{kc^4}T$$

Reemplazando en la ecuación de campo queda:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{kc^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

que es una versión alternativa de la ecuación.

### 2.13.3. La ecuación de campo y el principio de consistencia

Ahora que tenemos una ecuación candidata volvamos al principio de consistencia.

Volvamos a comenzar con la métrica de campo débil:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

donde  $h_{\mu\nu} \ll 1$ .

Si escribimos la inversa de la métrica como:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + b^{\mu\nu}$$

Puede probarse (ver Problemas al final del capítulo) que:

$$b^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}$$

Los símbolos de Christoffel serán:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu})$$

El tensor de Riemann:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\delta \Gamma_{\mu\delta}^\rho$$

Dado que los símbolos de Christoffel son proporcionales a  $h_{\mu\nu}$  los términos  $\Gamma^2 \sim \mathcal{O}(h^2)$ , de modo que el tensor de Riemann es:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} \approx \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^\rho$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= -\frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + g_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - g_{\kappa\mu,\nu,\lambda}) + \\ &\quad + g_{\sigma\xi} (\Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \Gamma_{\lambda\nu}^\xi - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\lambda\kappa}^\xi) \end{aligned}$$

Eliminando los términos cuadráticos en  $h$ , el tensor de Riemann queda:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx -\frac{1}{2} (h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + h_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - h_{\kappa\mu,\nu,\lambda})$$

Por definición el tensor de Ricci es:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\nu\alpha} \approx \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha$$

O en términos de las derivadas de la métrica:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\mu\nu\alpha} \\ &\approx -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (h_{\mu\nu,\lambda,\alpha} - h_{\nu\lambda,\alpha,\mu} + h_{\lambda\alpha,\mu,\nu} - h_{\alpha\mu,\nu,\lambda}) \end{aligned}$$

Finalmente el tensor métrico:

$$T_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\alpha\beta} \quad (2.8)$$

$$\approx (\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\mu}h_{\beta\nu} + h_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu})T^{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

Para aplicar el principio de consistencia asumimos que tenemos una nube de polvo,  $T^{00} = \text{diag}(\rho_0c^2, 0, 0, 0)$  y la métrica de Newton,  $h_{00} = 2\Phi/c^2$ ,  $h_{ij} = h_{i0} = 0$ .

Tomemos la ecuación 00:

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{kc^4} \left( T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right)$$

La componente  $T_{00}$  será:

$$T_{00} = g_{0\mu}g_{0\nu}T^{\mu\nu} \approx (g_{00})^2T^{00}$$

La traza de  $T$  sera:

$$T = T_{\mu}^{\mu} = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = g_{00}T^{00}$$

Por otro lado el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ :

$$R_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}(h_{\mu\nu,\alpha,\alpha} - h_{\nu\alpha,\alpha,\mu} + h_{\alpha\alpha,\mu,\nu} - h_{\alpha\mu,\nu,\alpha})$$

Como la métrica es estática, las únicas componentes no nulas del tensor son:

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\eta^{ij}h_{00,i,j} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi \quad (2.10)$$

$$(2.11)$$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi = \frac{8\pi G}{kc^4} \left[ (g_{00})^2\rho_0c^2 - \frac{1}{2}(g_{00})^2\rho_0c^2 \right]$$

Haciendo  $(g_{00})^2 = (1 + 2\Phi/c^2)^2 \approx 1$ , la ecuación queda finalmente como:

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi G}{k}\rho_0$$

que es justamente la ecuación de Poisson si  $k = 1$ .

La conclusión de aplicar el principio de consistencia es que una ecuación de campo general es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

o más convenientemente:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

### 2.13.4. La ecuación de campo débil para fluido perfecto

Para un fluido perfecto  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho_0 c^2, p, p, p)$  donde  $p$  es la presión. En la aproximación de campo débil la traza del tensor de momentum energía es:

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \approx T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33} = \rho_0 c^2 - 3p$$

Por otro lado:

$$T_{00} = g_{0\mu} g_{0\nu} T^{\mu\nu} \approx (g_{00})^2 T^{00} \approx T^{00}$$

Mientras que la componente 00 del tensor de Riemann habíamos demostrado es igual a:

$$R_{00} \approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

Reemplazando en la ecuación de campo obtenemos una nueva versión de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

Esta es una predicción nueva de la relatividad general: la presión también produce gravitación.

### 2.13.5. El término cosmológico

Como vimos desde el principio, la manera en la que se deduce heurísticamente la ecuación de campo métrico es buscando un tensor que tenga divergencia covariante cero. Demostramos que el tensor  $G_{\mu\nu}$  tiene esa condición. Pero hay otros tensores que pueden tener esa condición. Por ejemplo el tensor métrico mismo tiene divergencia covariante cero:

$$g_{\mu\nu ;\mu} = 0$$

Por qué íbamos entonces a suponer que el tensor general del lado izquierdo de la ecuación es solo el tensor de Einstein y no algo más general de la forma:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}$$

donde  $\lambda$  es una constante.

Una ecuación aún más general entonces sería:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

El único inconveniente con esta ecuación es que en el límite de campo débil y para la métrica newtoniana, la ecuación resultante no es la ecuación de Poisson ¿o sí?. Una manera de reconciliar la nueva ecuación sería agregar el término en el lado derecho de la ecuación:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

y agrupar el nuevo término con el tensor momentum energía:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} + \rho_\Lambda c^2 g_{\mu\nu} \right)$$

donde

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

Si  $\rho_\Lambda \ll \rho$  para la mayoría de las situaciones gravitacionales que vemos en astronomía, entonces la ecuación seguiría siendo válida.

Pero ¿qué es  $\rho_\Lambda$ ?

A primera vista vemos que se trata de una densidad de materia que existiría incluso en la ausencia de otras formas de materia, es decir, podría interpretarse como una densidad de masa del vacío con tensor de momentum energía asociado:

$$T_{\mu\nu}^{\text{vacío}} = \rho_\Lambda c^2 g_{\mu\nu}$$

Es decir, el vacío se comporta como un fluído perfecto con densidad y presión:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{vacío}} &= -\rho_\Lambda \\ p_{\text{vacío}} &= -\rho_\Lambda c^2 \end{aligned}$$

En una situación en la que no hay materia y asumiendo que  $\rho_\Lambda$  es muy pequeña (campo débil) la ecuación de Poisson para el vacío será:

$$\nabla^2 \Phi = -8\pi G \rho_\Lambda = -\Lambda c^2$$

Es decir el vacío producirá un efecto *repulsivo*.

### Un poco de historia

**Einstein y el mayor error de su vida.** Einstein introdujo el término cosmológico en su ecuación porque pensaba que si no lo hacía el Universo podría colapsar por su propio peso. Esto es que si aplicamos la ecuación de campo a un fluido homogéneo encontramos un potencial atractivo que tendería a hacer que la materia se atrayese y el universo habría terminado hace mucho. En la época de Einstein todo parecía indicar que el Universo era eterno y estático. Es por eso que el término  $\Lambda g_{\mu\nu}$  que introdujimos en el lado derecho se conoce como el término cosmológico.

Después que se descubrió que el Universo en efecto se expandía Einstein reconoció que la introducción del término cosmológico había sido un gran error (“*my biggest blunder*”).

En 1998 astrónomos descubrieron que la expansión del Universo se estaba acelerando lo que implicaba que efectivamente el término cosmológico estaba presente en la ecuación. Si bien durante todo el siglo XX la mayoría de los cosmólogos dejaron el término cosmológico en su lugar y lo estudiaron como una curiosidad, lo cierto es que para los 2000 ya habíamos incluso medido esta cantidad.

Hoy se sabe que la densidad de masa debida al término cosmológico es del orden de 0.74 veces la densidad crítica,  $\rho_{\text{crit}} = 8.5 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$ , es decir  $\rho_\Lambda = 6.29 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$ . Teniendo en cuenta que:

### Un poco de historia (Cont.)

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

hoy sabemos que la constante cosmológica debe ser muy cercana a:

$$\Lambda \approx 1,2 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

Curiosamente el valor de la constante cosmológicamente coincide en orden de magnitud, con el inverso del cuadrado del Universo observable,  $1/R_U^2 = 1/(10 \text{ Gal}) \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ .

### 2.13.6. La ecuación de Hilbert-Einstein

La deducción que hicimos de la ecuación de campo métrico es de naturaleza heurística. Una deducción más rigurosa fue hecha de forma simultánea por el matemático alemán David Hilbert.

Esta deducción puede [encontrarse aquí](#)<sup>7</sup> y parte de suponer que en el espacio-tiempo con materia se extremiza la denominada **acción de Hilbert-Einstein**:

$$S = \int \sqrt{g} \left[ \frac{c^4}{16\pi G} (R + 2\Lambda) - \mathcal{L}_M \right] d^4x$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica  $R$  es el escalar de curvatura y  $\mathcal{L}_M$  sería el equivalente a un *lagrangiano* correspondiente a la materia-energía presente en el espacio-tiempo.

Si se aplica la condición convencional de que:

$$\delta S = 0$$

entonces la ecuación resultante es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

que se conoce por la misma razón como la **ecuación de Hilbert-Einstein** (HEE) o la **ecuación de campo métrico de einstein** (EFE).

#### Nota

**Sobre los signos en la ecuación de Einstein.** Es posible encontrar distintas versiones diferentes de la ecuación de Einstein y de la acción de Hilbert-Einstein, que dependen de la firma que hayamos usado para la métrica y del signo que hayamos escogido para el tensor de Einstein o el tensor de Riemann.

1. **Propiedades de la derivada covariante.** Demostrar las propiedades de la derivada covariante:

<sup>7</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein%20%93Hilbert\\_action](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein%20%93Hilbert_action)

- a. **Derivada covariante de una suma:**  $(A^\mu + B^\mu)_{;\nu} = A^\mu_{;\nu} + B^\mu_{;\nu}$
- b. **Derivada covariante de un producto o regla de Leibniz:**  

$$(A^\mu B^\nu)_{;\alpha} = A^\mu_{;\alpha} B^\nu + A^\mu B^\nu_{;\alpha}$$
- c. **Derivada covariante de un campo escalar (1):**  $\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$
- d. **Derivada covariante de un campo escalar (2):**  $(A^\mu B_\mu)_{;\alpha} = (A^\mu B_\mu)_{,\alpha}$
- e. **Derivada covariante de un tensor covariante:**  $B_{\mu;\nu} = B_{\mu,\nu} - C_{\mu\nu}^\gamma B_\gamma$
- f. **Derivada covariante de un tensor contravariante de segundo rango:**  

$$A^{\mu\nu}_{;\alpha} = A^{\mu\nu}_{,\alpha} + C_{\gamma\alpha}^\mu A^{\gamma\nu} + C_{\alpha\gamma}^\nu A^{\mu\gamma}$$
- g. **Derivada covariante de un tensor covariante de segundo rango:**  

$$A_{\mu\nu;\alpha} = A_{\mu\nu,\alpha} - C_{\mu\alpha}^\gamma A_{\gamma\nu} - C_{\alpha\nu}^\gamma A_{\mu\gamma}$$

2. **Conexión.** Demostrar que si la derivada coariante definida por:

$$D_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + C_{\gamma\alpha}^\mu A^\gamma$$

es un tensor bajo una transformación general  $\mathcal{G}^{\nu'}_\nu$ , entonces la conexión afín  $C_{\gamma\alpha}^\mu$  transforma de acuerdo con:

\$\$

$C^{\nu'}_{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\nu'}_\nu \mathcal{G}^{\mu\alpha} C_{\alpha\beta}^\nu \mathcal{G}^{\beta\mu}$

\$\$

3. **Primeras derivadas de la métrica.** Probar que:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}_{,\gamma} &= -g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\gamma}^\beta - g^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \end{aligned}$$

4. **Conexión.** En el caso de métricas diagonales, los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}_{,\gamma} &= -g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\gamma}^\beta - g^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \end{aligned}$$

Probar que en un espacio de  $N$  dimensiones el número de términos es  $N(2N - 1)$

5. **Tensor de torsión.** Partiendo de la forma general en la que transforman los coeficientes de conexión afín  $C_{\nu\mu}^\sigma$ , demostrar que la torsión  $T_{\mu\nu}^\sigma \equiv C_{\mu\nu}^\sigma - C_{\nu\mu}^\sigma$  es un tensor.

6. **Tensor de torsión.** Usando la definición de los símbolos de Christoffel, demostrar que la derivada covariante:

$$A^\mu_{;\alpha} = A^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} A^\gamma$$

Es un tensor de segundo rango.

7. **Tensor de torsión.** Calcular los símbolos de Christoffel para el espacio tiempo plano en coordenadas esféricas para el cual:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$$

8. **Tensor de Riemann.** Probar que el coeficiente de Riemann es un tensor.
9. **Forma explícita del tensor de Riemann.** Contrayendo índices probar que el tensor de Riemann se puede escribir de forma explícita como:
10. **Segunda derivada total covariante.** Probar que:

$$\frac{D^2 A^\mu}{D\lambda^2} = \frac{d^2 A^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta\nu} A^\alpha \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dA^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (2.12)$$

$$- \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\kappa\lambda} A^\alpha \frac{dx^\kappa}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad (2.13)$$

BORRADOR

## Capítulo 3

# Aplicaciones de la relatividad general

### Resumen

Después de deducir el formalismo básico de la relatividad general, procederemos en este capítulo a usarlo para estudiar problemas concretos y hacer las predicciones más importantes de la teoría general de la relatividad.

Nos concentraremos aquí en tres aplicaciones importantes:

- **Ondas gravitacionales.** La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y la descripción de algunas de sus propiedades básicas es una de las más interesantes y poco triviales predicciones de la teoría general de la relatividad. Aquí estudiaremos algunos aspectos básicos de la teoría (un tratamiento riguroso y en detalle está más allá del nivel de este curso), concentrándonos en ofrecer las bases para un estudio más detallado y para predecir las propiedades específicas de sistemas que emiten ondas gravitacionales en el universo.
- **Solución de Schwarzschild y agujeros negros.** La métrica de Schwarzschild es una de las únicas soluciones analíticas que se conocen de la ecuación de campo métrico. Describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior de un objeto con simetría esférica. Deduciremos aquí la métrica y estudiaremos el movimiento de partículas de prueba en este espacio-tiempo. En particular con estos datos predeciremos las propiedades de los agujeros negros.
- **La métrica de Friedmann-Robertson-Walker.** Otra de las soluciones analíticas a la ecuación de campo métrico es la que describe un universo homogéneo e isotrópico. Esta solución fue también obtenida muy poco tiempo después del surgimiento de la relatividad. Aquí deduciremos esta solución y un conjunto muy importante de ecuaciones relacionadas que se conocen como las ecuaciones de Friedmann y que describen la dinámica del universo en expansión y su relación con el contenido (y tipo) de masa energía. Estudiaremos las propiedades de la métrica y sus predicciones respecto al Universo.

El orden que seguiremos no es el orden convencional. Hemos decidido concentrarnos en los temas de mayor actualidad en el momento.

## 3.1. Ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales son una de las más increíbles predicciones de la relatividad general.

### 3.1.1. Historia de las ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales fueron predichas por primera vez por Einstein en 1916. En 1922, sin embargo Eddington mostró que las ondas originalmente predichas por Einstein eran en realidad un artefacto matemático debido al cambio de coordenadas, las llamo *ondas de coordenadas* y que se podían mover a cualquier velocidad. Sin embargo el mismo Eddington predijo que había un tercer tipo de ondas que se propagaban a la velocidad de la luz.

En 1936 Einstein y Nathan Rosen sometieron un artículo demostrando que las ondas gravitacionales no existían porque aparecían singularidades en la solución ondulatoria de la ecuación de campo. Afortunadamente el artículo no fue aceptado por un referee inicialmente anónimo (después resultó ser Howard Robertson, el mismo de la métrica cosmológica) quien demostró que las singularidades en realidad eran producto de las coordenadas.

La predicción de las ondas gravitacionales y de sus propiedades se concretó en las décadas por venir entre finales de 1930 y mediados de los 1950.

En 1974 se descubrió un pulsar binario cuya órbita decaía obedeciendo las predicciones de la relatividad general y de la emisión de ondas gravitacionales. El decaimiento del pulsar binario fue confirmado a lo largo de dos décadas y le valió a sus descubridores, Russell Hulse y Joseph Taylor el premio Nobel de física de 1993.

Entre mediados de 1970 y principios de 1990 se consolidó un proyecto de detector usando interferometría, una idea que había sido concebida por varios en los 1960. Este proyecto fue el *Laser Interferometer Gravitational Observatory* LIGO, que finalmente inició observaciones en 2002. Durante 13 años el detector no vio nada. El 18 de septiembre de 2015 se inauguró una nueva fase conocida como *LIGO mejorado*.

El 14 de septiembre de 2015 una señal fue detectada por los observatorios aún en prueba. El paper sobre la detección fue publicado el 11 de febrero de 2016. La detección correspondía a la fusión de dos agujeros negros de cerca de 30 masas solares a la increíble distancia de 1300 millones de años luz. En 2017 se otorgó el premio Nobel de física a 3 de los más destacados personajes asociados con el detector.

El 25 de agosto de 2017 se detectó simultáneamente en rayos gama, luz visible, ondas de radio y ondas gravitacionales la primera fuente astrofísica dando nacimiento a la que hoy se conoce como la *astronomía multimensajero*, una de las más importantes revoluciones en la astronomía desde la invención del telescopio.

Es muy importante para cualquier profesional de la astronomía o de la física conocer algunos detalles sobre la predicción de la existencia de las ondas gravitacionales y de sus propiedades específicas.

### 3.1.2. Un programa de estudio

En estas notas nos concentraremos en algunos de los aspectos básicos de la física de estas ondas sin profundizar en todos sus detalles (que escapan al nivel del curso). Nos concentraremos en los siguientes aspectos:

- La teoría linearizada de la gravedad y sus ecuaciones correspondientes.
- La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y las ecuaciones correspondientes.
- La solución a la ecuación de onda en el vacío y las propiedades básicas de las ondas gravitacionales.
- La ecuación de onda con fuentes y la predicción de la intensidad de este tipo de ondas.
- La física de la emisión de ondas gravitacionales y las ecuaciones básicas resultantes.
- El estudio de algunos sistemas de interés en astrofísica.
- La física básica de la detección de las ondas.

### 3.1.3. Gravedad linearizada

La teoría general de la relatividad que desarrollamos en el capítulo precedente tiene una gran generalidad. Excepto por los casos en los que estudiamos situaciones donde los campos gravitacionales eran muy pequeños, especialmente con el propósito de utilizar el principio de consistencia, los resultados obtenidos aplican para cualquier campo.

Para estudiar las ondas gravitacionales vamos a asumir que el espacio-tiempo es plano, excepto en la onda, y que la onda misma tiene una amplitud muy pequeña. La teoría resultante se conoce como gravedad linearizada.

La métrica de un espacio-tiempo así tiene la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\alpha)$$

donde  $|h_{\mu\nu}(x^\alpha)| \ll 1$  es una perturbación a la métrica del espacio-tiempo plano.

Otra manera de expresar la condición anterior es suponiendo que podemos escribir  $h_{\mu\nu}$  en términos de funciones convencionales  $H_{\mu\nu}$  tal que:

$$h_{\mu\nu} = \epsilon H_{\mu\nu}$$

con  $\epsilon \ll 1$ .

Asumiremos también que las derivadas de  $h_{\mu\nu}$ ,  $h_{\mu\nu,\alpha}$  son del mismo orden que  $\epsilon$  y por lo tanto son muy pequeña.

La gravedad linearizada se obtiene cuando partiendo de estas suposiciones se deducen las ecuaciones de la relatividad general eliminando todos los términos proporcionales a  $\epsilon^2$ .

#### Inversa de la métrica linearizada

El primer cálculo interesante en gravedad linearizada se hace para obtener la inversa de la métrica. Suponemos que se puede escribir de la forma.

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + b^{\mu\nu}$$

tal que  $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$ .

Reemplazando queda:

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} &= \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} + \eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta} \\ &\approx \delta_\nu^\mu + \eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

de modo que  $b$  debe cumplir la condición:

$$b^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = -\eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\nu}$$

Si multiplicamos por  $\eta^{\lambda\nu}$  a ambos lados obtenemos:

$$b^{\mu\lambda} = -h^{\mu\lambda}$$

Concluimos entonces que:

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

### Símbolo de Christoffel linearizado

Los símbolos de Christoffel se definen como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

Es claro que para espacio-tiempo plano  $\eta_{\mu\nu}$  los símbolos de Christoffel son cero. Sin embargo en una métrica linearizada los símbolos de Christoffel tienen un pequeño valor:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho})(h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu}) \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &\approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu}) \end{aligned}$$

Nótese que hemos usado la notación  $\delta\Gamma$  para dar a entender que estamos lidando con una perturbación (sobre 0) del símbolo de Christoffel. Aquí podemos ver que  $\delta\Gamma$  también es una cantidad proporcional a  $\epsilon$ .

El hecho que  $\eta$  sea diagonal nos permite también escribir:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \approx \frac{1}{2}\eta^{\lambda\lambda}(h_{\lambda\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda} + h_{\nu\lambda,\mu})$$

### El tensor de Riemann linearizado

El tensor de Riemann se define como:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\sigma\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu,\mu} + \Gamma^\delta_{\sigma\mu}\Gamma^\rho_{\nu\delta} - \Gamma^\delta_{\sigma\nu}\Gamma^\rho_{\mu\delta}$$

De nuevo, para el espacio tiempo plano todas las componentes de este tensor son cero. En espacio tiempo linearizado nos quedan también una versión perturbada que a primer orden y en término de las perturbaciones en los símbolos de Christoffel se escriben:

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} \approx \delta\Gamma^\rho_{\sigma\mu,\nu} - \delta\Gamma^\rho_{\sigma\nu,\mu}$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + g_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - g_{\kappa\mu,\nu,\lambda}) + \\ &\quad + g_{\sigma\xi}(\Gamma^\sigma_{\mu\kappa}\Gamma^\xi_{\lambda\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\xi_{\lambda\kappa}) \end{aligned}$$

Eliminando los términos cuadráticos en  $\epsilon$ , el tensor de Riemann queda:

$$\delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx -\frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + h_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - h_{\kappa\mu,\nu,\lambda})$$

### El tensor de Ricci linearizado

Por definición el tensor de Ricci es:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\mu\nu\alpha}$$

De modo que la versión linearizada será

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &\approx -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha}(h_{\mu\nu,\lambda,\alpha} - h_{\nu\lambda,\alpha,\mu} + h_{\lambda\alpha,\mu,\nu} - h_{\alpha\mu,\nu,\lambda}) \\ &\approx -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\lambda}(h_{\mu\nu,\lambda,\lambda} - h_{\nu\lambda,\lambda,\mu} + h_{\lambda\lambda,\mu,\nu} - h_{\lambda\mu,\nu,\lambda}) \end{aligned}$$

Aquí podemos reconocer algunas propiedades y simetrías interesantes. En primer lugar la operación  $\eta^{\lambda\lambda}h_{\mu\nu,\lambda,\lambda}$  se puede escribir como:

$$\eta^{\lambda\lambda}h_{\mu\nu,\lambda,\lambda} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 h_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu}$$

que es lo que nosotros llamamos el *D'Alambertiano de  $h_{\mu\nu}$* .

De otro lado los términos restantes de la asuma se pueden escribir como:

$$-h^{\lambda\lambda}(-h_{\nu\lambda,\lambda,\mu} + h_{\lambda\lambda,\mu,\nu} - h_{\lambda\mu,\nu,\lambda}) = h^\lambda_{\nu,\lambda,\mu} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu,\nu} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu,\nu} + h^\lambda_{\mu,\nu,\lambda}$$

nótese que dividimos el término  $h_{\lambda\lambda,\mu,\nu}$  en dos para poder escribir dos términos muy parecidos uno de otro.

Si definimos:

$$V_\mu = h^\lambda_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu}$$

El tensor de Ricci se escribirá:

$$\delta R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu})$$

### El tensor de Einstein linearizado

El tensor de Einstein se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Este tipo de tensores se conocen también en relatividad como tensores de *traza invertida* (*trace-reversed* en inglés) porque:

$$G = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = -R$$

de modo que en lo sucesivo diremos que  $G_{\mu\nu}$  es la *traza invertida* del tensor de Ricci.

Aplicando la definición obtenemos:

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha)$$

Donde  $h = h^\alpha_\beta$  es la traza de la perturbación.

### El tensor momentum-energía

¿Qué podremos decir sobre el tensor momentum-energía en esta situación? Aplazaremos esta discusión para después.

#### 3.1.4. Ecuación de campo linearizada en el vacío

Tenemos hasta ahora todos los elementos para proceder a escribir la ecuación de campo métrico linearizada:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

Donde ahora podemos usar el lenguaje para decir que la ecuación de campo dice que el tensor de Ricci es proporcional a la *traza invertida* del tensor momentum-energía.

Por ahora procederemos a estudiar el caso en el que la onda se propaga en una región vacía  $T^{\mu\nu} = 0$ :

En esta situación la ecuación de campo métrico queda:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

que es una importante ecuación en relatividad general que vamos a seguir viendo en lo sucesivo.

#### Nota

**Tensor de Ricci cero no significa curvatura cero.** Es interesante anotar que la ecuación de campo evaluada en el vacío:

**Nota (Cont.)**

$$R_{\mu\nu} = 0$$

implica solamente que localmente en los puntos donde no haya materia todas las componentes del tensor de Ricci son 0. Eso no significa sin embargo que la curvatura allí sea cero, en tanto el espacio-tiempo puede haber sido curvado por la presencia de materia que está cerca de allí. Esto conduce a una serie de implicaciones que son interesantes:

1. Si  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$  entonces el espacio-tiempo es plano.
2. Si  $R_{\mu\nu} = 0$  no necesariamente el espacio-tiempo es plano.
3. Si  $R = 0$  no necesariamente el espacio-tiempo es plano.
4. Si el espacio-tiempo es curvo entonces al menos una  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \neq 0$
5. Si  $R \neq 0$  entonces el espacio-tiempo es curvo.
6. Si al menos una componente de  $R_{\mu\nu} \neq 0$  entonces el espacio-tiempo es curvo.
7. Si al menos una componente de  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \neq 0$  entonces el espacio-tiempo es curvo.

En términos de la perturbación la ecuación de campo métrico queda:

$$\frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\square h_{\mu\nu} - (V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}) = 0$$

o bien,

$$\square h_{\mu\nu} = V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}$$

donde recordemos que:

$$V_\mu = h_{\mu,\lambda}^\lambda - \frac{1}{2}h_{,\mu}$$

### 3.1.5. Libertad gauge

Antes de proceder a resolver hay un asunto que debemos discutir. ¿Por qué la métrica no es plana? Es posible tener una métrica que no es plana por muy diversas razones: 1) porque tenemos una perturbación real (con curvatura) del campo gravitacional o 2) por la particular elección del sistema de coordenadas.

Veamos como cambia  $h$  y todo lo que hemos visto cuando se modifican sutilmente las coordenadas

$$x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$$

donde  $|\xi| = \mathcal{O}(\epsilon)$ . Dada esta última convención, siempre será posible reemplazar  $x'$  por  $x$  donde sea necesario.

La inversa de esta transformación será simplemente:

$$x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu(x')$$

donde a primer orden  $\xi^\mu(x') \approx \xi^\mu(x)$ .

La transformación de la métrica será:

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}(x)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \approx \delta_\alpha^\mu - \xi_\alpha^\mu$$

donde  $\xi_\alpha^\mu = \partial \xi^\mu / \partial x^\alpha$ .

la métrica transforma como

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(x') &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\beta} g_{\mu\nu}(x) \\ &= (\delta_\alpha^\mu - \xi_\alpha^\mu) (\delta_\beta^\nu - \xi_\beta^\nu) [g_{\mu\nu}(x') - g_{\mu\nu,\sigma}(x') \xi^\sigma] \\ &\approx g_{\alpha\beta}(x') - \xi_\alpha^\mu g_{\mu\beta} - \xi_\beta^\nu g_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

La diferencia entonces en la métrica debido al pequeño desplazamiento es:

$$g'_{\alpha\beta}(x') - g_{\alpha\beta}(x') \equiv h'_{\alpha\beta}(x') - h_{\alpha\beta}(x') = -\xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$$

o lo que es lo mismo:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$$

Entonces, un simple cambio de coordenadas me cambia el  $h$ . A esto es a lo que se conoce como *libertad gauge* en las perturbaciones.

### 3.1.6. El gauge armónico

La libertad gauge es interesante porque nos permite identificar cuál podría ser el mejor sistema de coordenadas en el que se puede trabajar para que la ecuación de campo linearizada sea sencilla.

Si se escoge un conjunto  $e \xi^\alpha$  tal que :

$$V'_\mu = h'_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2} h'_{,\mu} = 0$$

entonces la ecuación de campo queda reducida a:

$$\square h'_{\mu\nu} = 0$$

y llamamos a este el **gauge armónico** por las evidentes implicaciones de la última ecuación.

Otra manera de escribir el gauge armónico es:

$$V^{\mu\nu} = h'^{\mu\nu}_{,\mu} - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} h'_{,\mu} = 0$$

Definiendo la traza-invertida de  $h$  como:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} \equiv h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h'$$

el gauge armónico queda:

$$\bar{h}'_{,\mu}^{\mu\nu} = 0$$

### Nota

**El gauge armónico para  $\xi$ .** Con la definición  $\bar{h}$  podemos escribir la transformación de coordenadas como:

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \xi_{,\lambda}^{\lambda} \eta_{\alpha\beta}$$

Sacando las componentes contravariantes y tomando la derivada tenemos:

$$\bar{h}'^{\mu\nu}_{,\mu} = \bar{h}^{\mu\nu}_{,\mu} - \xi^{\mu,\nu}_{,\mu} - \xi^{\nu,\mu}_{,\mu} + \xi^{\lambda}_{,\lambda\mu} \eta^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}_{,\mu} - \square \xi^{\nu}$$

de modo que en términos de la perturbación original el gauge armónico se puede escribir:

$$\square \xi^{\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}_{,\mu}$$

El problema es que para cualquier función escalar  $f$  siempre se puede encontrar una función escalar  $F$  tal que  $\square F = f$ , de modo que el gauge armónico lo satisfacen infinitas funciones  $\xi$ . Si imponemos la condición adicional de que:

$$\square \xi^{\nu} = 0$$

esto completa nuestra condición para el gauge armónico.

### 3.1.7. La ecuación de campo en el gauge armónico

En lo sucesivo asumiremos que estamos trabajando en el *gauge armónico* y ya no haremos la distinción entre las componentes primadas y no primadas.

En este gauge la ecuación de campo se escribe:

$$\square h_{\mu\nu} = 0$$

Una ecuación equivalente se obtiene si se reconoce que una vez definido:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$$

entonces,

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h$$

pero

$$\square h = \square(\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}) = \eta_{\mu\nu}\square h_{\mu\nu} = 0$$

de modo que:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu}$$

Así que una manera más conveniente de escribir la ecuación de campo métrico en el vacío será:

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

con el gauge armónico

$$\bar{h}_{,\mu}^{\mu\nu} = 0$$

Una vez obtenida la solución siempre es posible regresar a la parametrización original usando:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

### 3.1.8. La ecuación de campo con fuentes

¿Qué pasa ahora si tenemos en el espacio fuentes?

La ecuación de campo será ahora:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Reemplazando el tensor de Einstein:

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha)$$

la ecuación queda:

$$-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Si aplicamos una transformación de coorenadas para quedar en el gauge armónico, i.e.  $V_\mu = 0$ , obtenemos:

$$-\frac{1}{2}(\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

En términos de la traza invertida de la variable de perturbación  $\bar{h}_{\mu\nu}$  la ecuación queda finalmente:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

que es la ecuación de campo con fuentes.

### 3.1.9. La métrica postnewtoniana

La versión linearizada de la ecuación de campo puede usarse para resolver el problema de la gravedad newtoniana.

Supongamos que tenemos una distribución de polvo con simetría radial  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho_0 c^2, 0, 0, 0)$ .

La única componente de la ecuación de campo nos queda:

$$\square \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_0 c^2$$

En campo estático,  $\square \bar{h}_{00} = -\nabla^2 \bar{h}_{00}$  así la ecuación queda:

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = \frac{16\pi G}{c^4} \rho_0 c^2$$

Para que la ecuación coincida con la ecuación de Poisson se necesita que:

$$\bar{h}_{00} = \frac{4\Phi}{c^2}$$

donde  $\Phi$  es el potencial gravitacional.

La traza será naturalmente igual a  $\bar{h} = 4\Phi/c^2$

La perturbación original será por tanto:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}$$

Por componentes:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2\Phi/c^2 \\ h_{ii} &= -2\Phi/c^2 \end{aligned}$$

De donde la métrica resultante es:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\vec{r}_L^2$$

que llamaremos la **métrica postnewtoniana**.

Nótese que esta métrica difiere e la métrica de newton:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - d\vec{r}_L^2$$

### 3.1.10. Analogía electromagnética

Existe una interesantísima analogía entre esta ecuación y la electrodinámica. Recordemos que  $h_{\mu\nu}$  en campo débil por ejemplo alrededor de un cuerpo con masa estaba asociado al potencial. En electromagnetismo el cuadripotencial es  $A_\mu$ . La ecuación inhomogénea de Maxwell se escribe:

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

que en un lugar donde no hay cargas se puede escribir como

$$\square A^\nu = 0$$

Pero debemos recordar que pudimos escribir esta expresión gracias al Gauge de Lorentz:

$$A^\mu_{,\mu} = 0$$

una condición arbitraria sobre los potenciales que permitía escribir las ecuaciones inhomogéneas de forma simple como una función de onda.

Como vemos hay una analogía profunda entre las ecuaciones de Maxwell en espacio-tiempo plano y las ecuaciones de campo métrico donde el papel del cuadripotencial  $A^\mu$  lo juega ahora el potencial tensorial  $\bar{h}^{\mu\nu}$ .

Paralelos:

Aspecto	Electromagnetismo	Gravitación linearizada
Potenciales	$\phi, \vec{A}$	$h_{\mu\nu}$
Cuadripotencial	$A^\mu$	$\bar{h}_{\mu\nu}$
Transformación Gauge	$\phi' = \phi - \partial\psi/\partial t,$ $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$	$h_{\mu'\nu'} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$
Gauge	$A^\mu_{,\mu} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial\phi/\partial t = 0$	$\bar{h}_{,\mu}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu}_{,\mu} - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} h_{,\mu} = 0$
Ecuaciones en el vacío	$\square \vec{A} = 0, \square \phi = 0$	$\square h_{\mu\nu} = 0$
Fuentes	$\square A^\mu = 0$	$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$
Ecuación con fuentes	$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$	$\partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

### 3.1.11. Ecuación de onda en el vacío

Estudiaremos otro caso particular de la ecuación de campo.

Partamos de la ecuación de campo en el vacío:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

que se puede escribir en términos explícitos de la derivada como:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Esta ecuación es idéntica a una ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2}$$

Es decir si se perturba una región de un espacio-tiempo, la perturbación se propagará a otros lugares con la velocidad de la luz  $c$ . Podemos decir también que **la gravedad se propaga a la velocidad de la luz** y con esto resolvemos el problema de Newton de la acción a distancia.

Esta es la esencia de la predicción que se hace de la existencia de ondas gravitacionales.

#### Nota

**¿Son ondas reales u ondas de coordenadas?** En nuestras notas históricas habíamos dicho que en el primer intento de Einstein de predecir las ondas gravitacionales, en realidad las ondas que predijo eran solo ondas de coordenadas, es decir ondas que se producían gracias a la elección de un sistema de coordenadas particular. Dado que la ecuación que obtuvimos antes imponiendo el gauge armónico es una ecuación que se deriva justamente de usar un conjunto particular de coordenadas, ¿cómo sabemos que las ondas predichas aquí son efectivamente ondas físicas, ondas reales?

Una manera de saberlo es ver si el único tensor que es distinto de cero independientemente de la elección del sistema de coordenadas, a saber el tensor de Riemann  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ :

$$\delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx -\frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + h_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - h_{\kappa\mu,\nu,\lambda})$$

también satisface una ecuación armónica. Es claro que en el gauge armónico  $\square h_{\mu\nu} = 0$  de modo que es trivial demostrar que en ese mismo gauge:

$$\square \delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$$

Dado que lo que le pasa a este tensor en un sistema de coordenadas realmente repercute sobre la naturaleza del tensor en todos los sistemas de coordenadas, podemos decir que efectivamente las componentes de



### Nota (Cont.)

este tensor oscilan siguiendo una ecuación de ondas. ¡Son ondas reales! (independientes del sistema de coordenadas).

### 3.1.12. Solución general a la ecuación de onda

Una cosa es escribir la ecuación de onda y otra encontrar una solución. Si bien ya estamos acostumbrados a la ecuación de onda en otras áreas, existen ciertos aspectos de nuestro problema que hacen estas ondas muy especiales. En particular la ecuación de onda escrita anteriormente sólo es válida en el gauge armónico. ¿Qué implicaciones físicas tiene esto?

Sabemos que una solución particular para la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2}$$

es

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(i\omega t) = A_{\mu\nu} \exp(ik^\alpha x_\alpha)$$

siempre que se cumpla la condición:

$$k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = 0$$

o bien:

$$k^0 = k$$

Llamamos a  $k^\mu$  el cuadrvector de onda (del que ya habíamos hablado antes en el curso) que como vemos tiene magnitud nula.

Para los propósitos que tenemos nos interesa la parte real esta cantidad que se puede escribir de la forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = |A_{\mu\nu}| \cos(k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \equiv a_{\mu\nu} \cos(k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

De aquí podemos identificar  $k^0 = \omega_k/c$  y  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ , con  $\omega_k$  la frecuencia angular asociada con el modo  $k$ ,  $\lambda$  la longitud de onda del modo  $k$ . En términos de  $\lambda$  el cuadrvector de onda se puede escribir como:

$$k^\mu : \frac{2\pi}{\lambda} (c, \hat{k})$$

que era la manera en la que lo habíamos escrito antes.

Una solución general se puede escribir superponiendo las soluciones particulares así:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} \left( \int A_{\mu\nu}(\vec{k}) \exp(ik^\mu x_\mu) d^3k \right)$$

### 3.1.13. El gauge transversal de traza cero

Tomemos una onda armónica que se propaga en una dirección definida de  $\vec{k}$  (onda plana). En este caso el tenso  $a_{\mu\nu}$  indica la amplitud que tienen cada una de las componentes espacio temporales de la onda. En general habrán 10 amplitudes, que contrastan con la amplitud única que tiene una onda en una dimensión. ¿Qué son esas 10 amplitudes?

Las amplitudes  $a_{\alpha\beta}$  de la onda determinaran su *polarización* a la manera como lo hacen por ejemplo en el caso de una onda electromagnética. Es por eso que es conveniente llamar a  $a_{\mu\nu}$  el **tensor de polarización**.

Sabemos que por el gauge armónico se debe cumplir la condición:

$$\bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} = a^{\mu\alpha}k_\alpha = 0$$

Estas son 4 ecuaciones que relacionan las componentes de la polarización. Esta condición nos deja entonces con solo 6 componentes independientes del tensor de polarización.

Veamos cómo se relacionan esas componentes. Para ello escribamos mejor el gauge armónico en su forma original:

$$V_\mu = \eta^{\alpha\alpha} \left( h_{\alpha\mu,\alpha} - \frac{1}{2} h_{\alpha\alpha,\mu} \right) = 0$$

y la solución general:

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

Si escogemos el sistema de coordenadas de modo que la dirección del eje  $z$  apunte hacia  $\vec{k}$ , la perturbación general queda:

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos(\Phi)$$

donde  $\Phi \equiv \omega t - kz + \varphi$

Nótese que la perturbación no depende de  $x, y$  y por eso llamamos a esta una *onda plana*. Las únicas derivadas distintas de cero serán entonces:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu,0} &= -a_{\mu\nu} \frac{\omega}{c} \sin(\Phi) \\ h_{\mu\nu,3} &= a_{\mu\nu} k \sin(\Phi) \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde hemos hecho  $\partial_0 = \partial_t/c$ .

Esto implica que para una solución armónica:

$$h_{\mu\nu,0} = -h_{\mu\nu,3}$$

Reemplazando en la condición gauge para  $\mu = 0$  queda:

$$\begin{aligned}\eta^{00} \left( h_{00,0} - \frac{1}{2} h_{00,0} \right) + \eta^{ii} \left( h_{i0,i} - \frac{1}{2} h_{ii,0} \right) &= 0 \\ -\frac{1}{2} k a_{tt} - \frac{1}{2} k a_{xx} - \frac{1}{2} k a_{yy} - \frac{1}{2} k a_{zz} + k a_{zt} &= 0 \\ a_{tt} + a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} + 2a_{zt} &= 0\end{aligned}\tag{3.2}$$

Reemplazando en la condición gauge para  $\mu = 3$  queda:

$$\begin{aligned}\eta^{00} \left( h_{03,0} - \frac{1}{2} h_{00,3} \right) + \eta^{ii} \left( h_{i3,i} - \frac{1}{2} h_{ii,3} \right) &= 0 \\ -k a_{zt} - \frac{1}{2} k a_{tt} + \frac{1}{2} k a_{xx} + \frac{1}{2} k a_{yy} - \frac{1}{2} k a_{zz} &= 0 \\ a_{tt} - a_{xx} - a_{yy} + a_{zz} + 2a_{zt} &= 0\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores queda:

$$a_{tz} = -\frac{1}{2}(a_{tt} + a_{zz})$$

y restando:

$$a_{xx} = -a_{yy}$$

Para las otras componentes obtenemos:

$$\begin{aligned}a_{tx} + a_{zx} &= 0 \\ a_{ty} + a_{zy} &= 0\end{aligned}$$

De modo que la matriz de polarización queda:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_{tt} & a_{tx} & a_{ty} & -(a_{tt} + a_{zz})/2 \\ a_{tx} & a_{xx} & a_{xy} & -a_{tx} \\ a_{ty} & a_{xy} & -a_{xx} & -a_{ty} \\ -(a_{tt} + a_{zz})/2 & -a_{tx} & -a_{ty} & a_{zz} \end{pmatrix}$$

donde las componentes independientes son:  $a_{tt}, a_{tx}, a_{ty}, a_{tz}, a_{xx}, a_{zz}$ .

¿Podemos precisar mejor esas componentes? Recordemos que la libertad gauge implica que:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

Dado que  $\xi^\mu$  también cumple una ecuación del tipo:

$$\square \xi^\mu = 0$$

debe tener también forma armónica:

$$\xi^\mu = b_\mu \cos(\omega t - kz + \varphi_\xi)$$

con una fase  $\varphi_\xi$  que no necesariamente coincide con la fase de la onda.

La transformación de coordenadas implica, para la componentes temporales de la perturbación, la condición:

$$\begin{aligned} h'_{00} &= h_{00} - \dot{\xi}_0 \\ h'_{03} &= h_{03} - \dot{\xi}_3 + \dot{\xi}_0 \\ h'_{0i} &= h_{0i} - \dot{\xi}_i \end{aligned}$$

y por otro lado

$$h'_{33} = h_{33} + 2\dot{\xi}_3$$

Se pueden escoger las funciones  $\xi_\mu$  tal que:

$$\begin{aligned} h'_{0\mu} &= 0 \\ h'_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Con este gauge las componentes de la polarización se simplifican significativamente para ser igual a:

$$a'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{xx} & a'_{xy} & 0 \\ 0 & a'_{xy} & -a'_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una propiedad de este gauge particular es que tiene traza 0:

$$h' = h'_\mu^\mu = h'_{00} - h'_{11} - h'_{22} - h'_{33} = 0$$

Usando esta condición y escribiendo de nuevo la componente  $i$  del gauge:

$$V_i = \eta^{\alpha\alpha} h'_{i\alpha,\alpha} = k^0 a'_{i0} + k^z a'_{iz} = 0$$

Esta última condición significa esencialmente que la onda resultante es transversal.

Es por eso que a este gauge lo llamamos el **gauge transversal de traza cero**.

En síntesis en el gauge transversal de traza cero la perturbación métrica correspondiente a una onda plana que se propaga en una dirección arbitraria  $z$  y que tiene longitud de onda  $\lambda$ , número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  y frecuencia angular  $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$  es:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

donde  $a_+$  y  $a_\times$  son las componentes de *polarización más (plus polarization)* y *polarización cruz (cross polarization)* respectivamente.

La métrica en este gauge tendrá la forma general:

$$ds_{TT}^2 = c^2 dt^2 - [1 + h(u)] dx^2 - [1 - h(u)] dy^2 + 2[1 + g(u)] dxdy - dz^2$$

donde:

$$\begin{aligned} h(u) &= a_+ \cos(ku + \varphi) \\ g(u) &= a_\times \cos(ku + \varphi) \end{aligned}$$

y  $u \equiv ct - z$ .

### 3.1.14. Geodésicas en una onda gravitacional

Cuando una onda gravitacional pasa por un punto del espacio en el que se encuentra una partícula de prueba, la ecuación de movimiento de la partícula es:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

¿Qué trayectoria describirá?

Consideremos un ejemplo numérico. Para ello definamos la geodésica de una onda gravitacional plana solo con polarización más, ie.  $a_\times = 0$ :

```
from numpy import array
def g_gw_plan(xmu,mu,omega=1,aplus=0,fi=0):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_munu=diag(1,
                 -[1+f(u)],
                 -[1-f(u)],
                 -1
                 )+cross_xy([1+r(u)],[1+r(u)])
    """
    from numpy import cos
    t,x,y,z=xmu
    u=t-z #Unidades luz
    k=omega #En unidades luz k = omega
    fu=aplus*cos(k*u+fi)
    if mu==0:
        g=1
    elif mu==1:
        g=-(1+fu)
    elif mu==2:
        g=-(1-fu)
    elif mu==3:
        g=-1
    return g
```

Ahora definamos las condiciones iniciales para una partícula que se encuentra sobre el eje x en  $t = 0$ :

```
#Condiciones iniciales
Y0s=array([0.0,1.0,1.0,0.0,
           1.0,0.0,0.0,0.0])
```

```
#Tiempo de integración
from numpy import linspace
ss=linspace(0,10,100)
```

Asumimos que la onda se propaga en dirección del eje x y que tiene las siguientes propiedades:

```
#Frecuencia en rad/s
omega=1

#Fase inicial
fi=0

#Amplitud (polarizacion)
aplus=1e-3
```

Podemos calcular las componentes de los símbolos de Christoffel para verificar que (en las coordenadas que estamos utilizando) son distintos de cero:

```
from export import Gamma
xmu=[1,1,0,0]
G=Gamma(xmu,g_gw_plana,gargs=(omega,aplus,fi),N=4)

Símbolos de Christoffel:
[[[-0.          0.          0.          0.          ],
 [ 0.          -0.00042074  0.          0.          ],
 [ 0.          0.          0.00042074  0.          ],
 [ 0.          0.          0.          -0.          ],
 [ 0.          -0.00042051  0.          0.          ],
 [-0.00042051  0.          -0.          0.00042051],
 [ 0.          -0.          0.          0.          ],
 [ 0.          0.00042051  0.          0.          ],
 [ 0.          0.          0.00042096  0.          ],
 [ 0.          0.          -0.          0.          ],
 [ 0.00042096 -0.          0.          -0.00042096],
 [ 0.          0.          -0.00042096  0.          ],
 [ 0.          0.          0.          -0.          ],
 [ 0.          -0.00042074  0.          -0.          ],
 [ 0.          0.          0.00042074 -0.          ],
 [-0.          -0.          -0.          0.          ]]]
```

Resolvemos ahora la ecuación de la geodésica:

```
#Integra la ecuación de la geodésica
from scipy.integrate import odeint
from export import ecuacion_geodesica
N=4
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_gw_plana,(1,0,0.1),N))
```

#Convierte solución en coordenadas esféricas

```
ts=Ys[:,0]
xs=Ys[:,1]
ys=Ys[:,2]
zs=Ys[:,3]
```

Coordenadas x: [1. 1. 1. ... 1. 1. 1.]

Coordenadas y: [1. 1. 1. ... 1. 1. 1.]

Curiosamente descubrimos que aunque hay una onda gravitacional atravesando el espacio-tiempo donde se encuentra la partícula, la onda no modifica la posición de la misma. ¿Cómo es posible esto?

Volvamos nuevamente a la ecuación geodésica y consideremos solamente la componente espacial de la ecuación perturbada:

$$\frac{d^2\delta x^i}{d\tau^2} = -\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

Como la partícula se encuentra en reposo entonces  $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$  y por lo tanto:

$$\frac{d^2\delta x^i}{d\tau^2} = -\delta\Gamma_{tt}^i$$

Pero sabemos que:

$$\delta\Gamma_{tt}^i = -\frac{1}{2}\eta^{ii}h_{tt,i} = 0$$

De modo que la partícula no va a ningún lugar:

$$\frac{d^2\delta x^i}{d\tau^2} = 0$$

### 3.1.15. Distancias en una onda gravitacional

Aunque las coordenadas de partículas de prueba puestas en reposo espacial en el camino de una onda gravitacional no se ven perturbadas, la distancia entre ellas cuenta otra historia.

Supongamos que tenemos una partícula de referencia puesta en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano. Vamos a colocar partículas en el espacio alrededor de esa partícula.

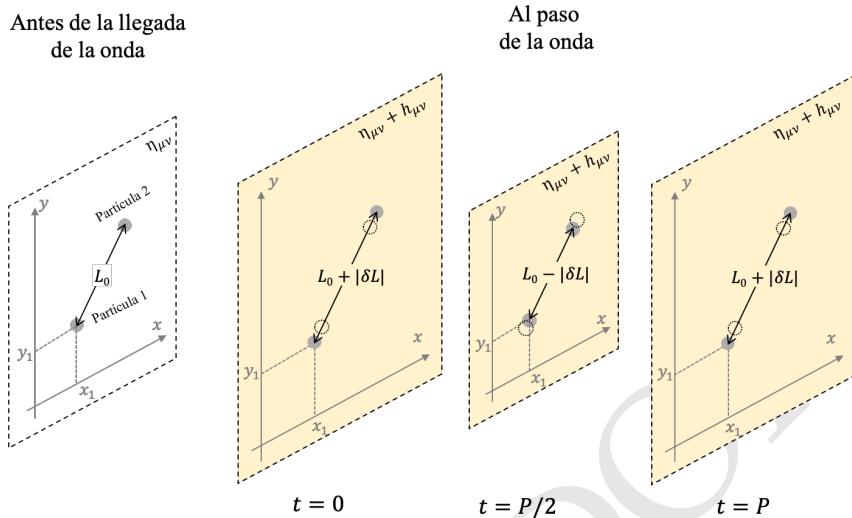
La distancia entre el origen y la partícula ubicada en la posición  $(x, y, z)$  será:

$$L = \int_{L_0} dl = \int_{L_0} \sqrt{g^{xx} dx^2 + g^{yy} dy^2 + g^{xy} dxdy + g^{zz} dz^2}$$

Consideremos algunos casos sencillos. Calculemos por ejemplo la distancia a un punto sobre el eje  $x$ , para una onda con polarización  $a_+$ :

$$L = \int_{L_0} dx \sqrt{g^{xx}} = L_0 \sqrt{1 + h(u)} \approx L_0 \left(1 + \frac{1}{2}h(u)\right)$$

cond  $u = ct - z$ .



**Figura 3.1:** Ilustración gráfica de cómo al paso de una onda gravitacional las coordenadas de las partículas de prueba se mantienen constantes pero su distancia mutua cambia con el tiempo.

Como vemos aunque la posición de las partículas no se modifica, su distancia si cambia sutilmente.

El cambio relativo en la distancia entre ellas (nótese que  $L_0$  sería la distancia si el espacio-tiempo fuera plano), que llamaremos la **deformación** o en inglés **strain** producido por el paso de la onda será:

$$\frac{\delta L(u)}{L_0} = \frac{1}{2}h(u) = \frac{1}{2}a_+ \cos(ku + \varphi)$$

Podemos definir la rutina para  $h$  así:

```
from numpy import cos
h=lambda t,z,omega,aplus,fi:aplus*cos(omega*(t-z)+fi)
```

Y hacer un gráfico de la distancia:

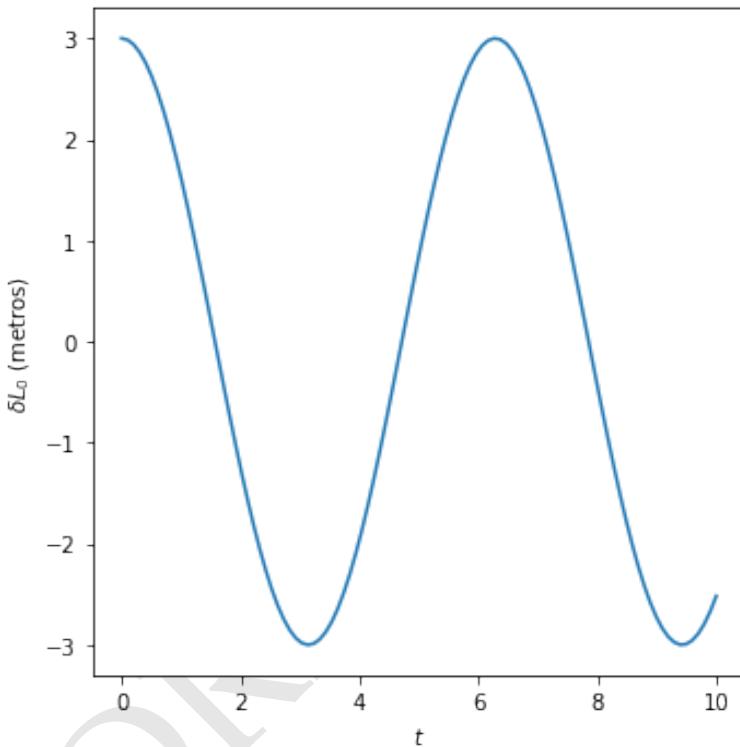
(Algoritmo 3.1)

```
# Distancia "propia"
L0=6000 # metros= 6 km

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(ss,0.5*h(ss,0,omega,aplus,fi)*L0)
```

```
#Decoración
ax.set_xlabel("$t$");
ax.set_ylabel("$\delta L_0$ (metros)");
fig.tight_layout()
```

*ver Figura 3.2*



**Figura 3.2:** Figura correspondiente al código 3.1.

Esta situación puede generalizarse de forma sencilla a un punto ubicado en cualquier lugar sobre un plano perpendicular a la onda:

$$\frac{\delta L(u)}{L_0} = \frac{1}{2} h_{ij}(u) n^i n^j$$

donde  $\hat{n} : (n_x, n_y)$  es un vector unitario en dirección al punto.

Definamos una rutina para la onda:

```
def hij(i,j,t,z,omega=1,aplus=0,across=0,fi=0):
    k=omega
    cosu=cos(k*(t-z)+fi)
    if i==3 or j==3: return 0
    if i!=j:h=across*cosu
```

```

    elif i==1:h=aplus*cosu
    elif i==2:h=-aplus*cosu
    return h

```

Si construyo entonces un grid de puntos situados en coordenadas tal que su distancia convencional a la partícula central sea  $R$ , entonces al paso de la onda su distancia real será:

$$R(u) = R \left( 1 + \frac{\delta L(u)}{L_0} \right) = R \left[ 1 + \frac{1}{2} h_{ij}(u) n^i n^j \right]$$

Y sus coordenadas serán:

$$\begin{aligned} X(u) &= R(u) n^x \\ Y(u) &= R(u) n^y \end{aligned}$$

Veamos lo que pasa con un conjunto de puntos situados a una distancia constante del origen con el siguiente algoritmo:

```

#Distancia en espacio plano al origen
R=1e-4

#Tiempo y z
t=0
z=0

#Posición de los puntos
from numpy import linspace,pi,cos,sin
Np=40
qs=linspace(0,2*pi,Np)

#Vectores unitarios de posición
nxs=cos(qs)
nys=sin(qs)

#Posiciones sin modificar
xs=R*nxs
ys=R*nys

#Propiedades de la onda
omega=1.0
aplus=0.3
across=0.0
fi=0
hargs=omega,aplus,across,fi

#Distancias modificadas por el paso de la onda
Rs=R*(1+0.5*(hij(1,1,t,z,*hargs)*nxs*nxs+
               hij(2,2,t,z,*hargs)*nys*nys+
               2*hij(1,2,t,z,*hargs)*nxs*nys))

#Posiciones modificadas

```

```
Xs=Rs*nxs
Ys=Rs*nys
```

Ahora grafiquemos:

(Algoritmo 3.2)

```
#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
#ax.plot(Xs-xs,Ys-ys,'ko')
ax.plot(xs/R,ys/R,'k-',label="Posiciones")
ax.plot(Xs/R,Ys/R,'ro',label="Distancias")
ax.quiver(xs/R,ys/R,(Xs-xs)/R,(Ys-ys)/R,
           color='b',angles='xy',scale_units='xy',
           label="Desplazamiento")

#Decoración
ax.legend()
rango=1.2
ax.set_xlim(-rango,rango)
ax.set_ylim(-rango,rango)
ax.set_xlabel("$x$");
ax.set_ylabel("$y$");
ax.text(0.05,0.95,f"t={t}",
        ha="left",va="center",
        transform=ax.transAxes);
ax.set_title(f"$\omega$={omega}, $a_+=$={aplus}, $a_x$={across}",
            fontsize=12);
```

*ver Figura 3.3*

Para gráficos animados de esta figura vea la versión electrónica del libro<sup>8</sup>.

### 3.1.16. Detectores de ondas gravitacionales

Pueden encontrar buenos artículos de la historia de la detección de ondas gravitacionales, por ejemplo este<sup>9</sup>.

Los primeros detectores que se intentaron construir usaban el hecho que la distancia entre las partículas de prueba al paso de una onda oscilaban periódicamente. Si se lograba que una onda resonara con alguna frecuencia fundamental en un material se podía detectar la onda. Este fue por ejemplo el caso del diseño de Joseph Weber que construyó su detector a finales de 1970. Según él detectó las ondas procedentes del centro de la galaxia en 1970, pero la frecuencia de esas mismas ondas no coincidían con lo esperado.

<sup>8</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

<sup>9</sup><https://arxiv.org/pdf/1609.09400.pdf>

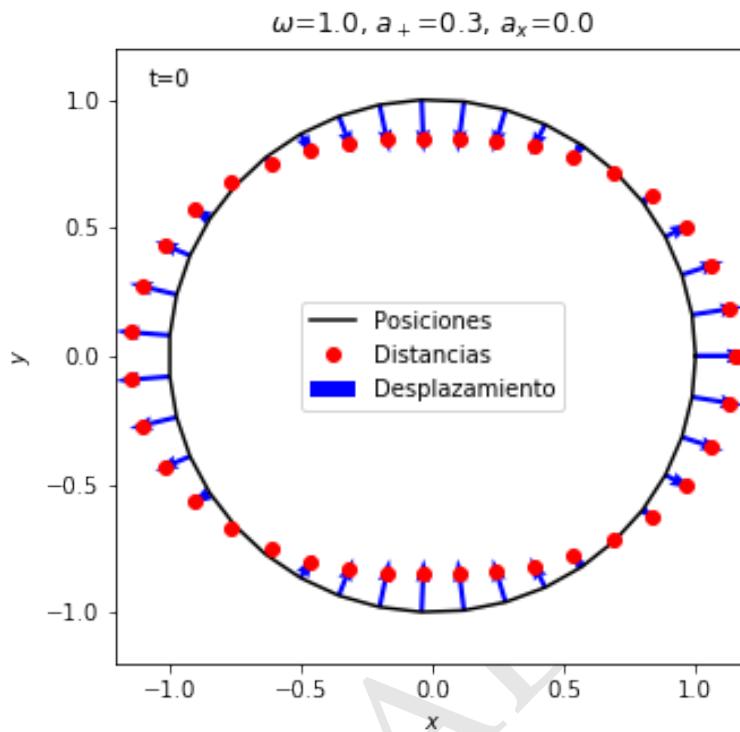


Figura 3.3: Figura correspondiente al código 3.2.

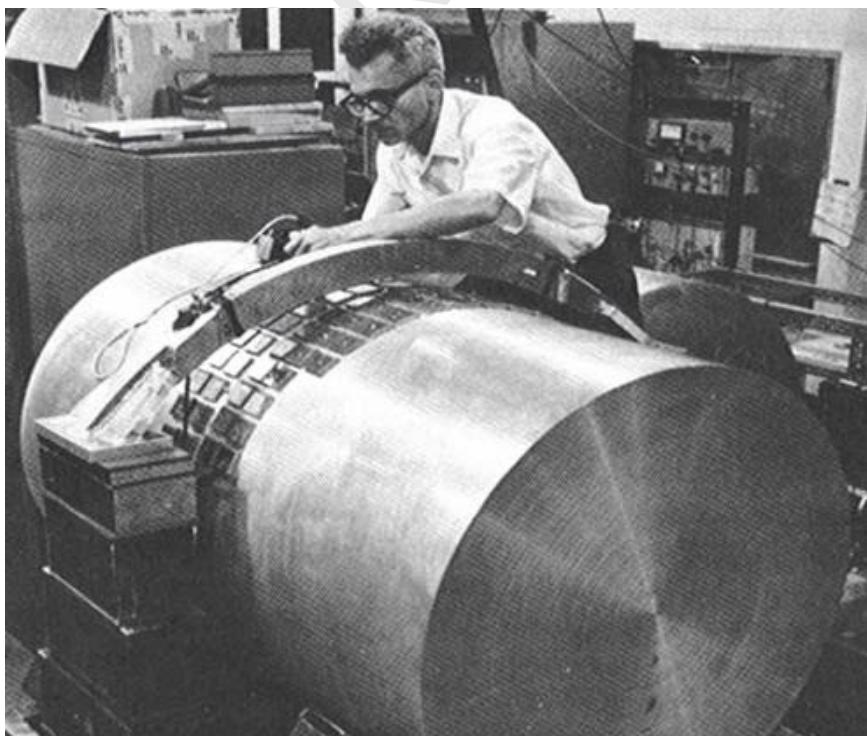
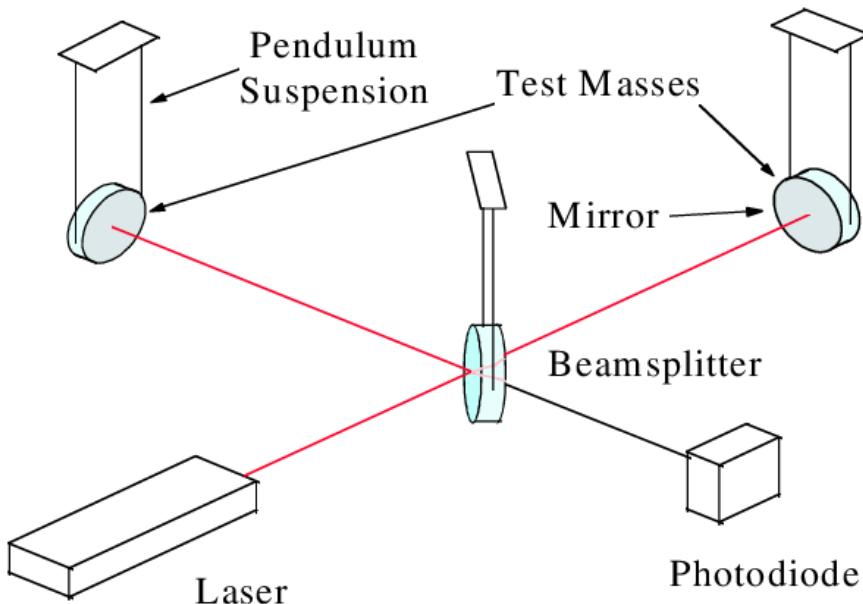


Figura 3.4: Detector de ondas gravitacionales de Joseph Weber

En los años 60 se introdujo la idea de usar un arreglo interferométrico para detectar las ondas usando un sencillo principio (ver Figura abajo).



**Figura 3.5:** Diseño básico para un interferómetro de ondas gravitacionales como el que usa hoy el LIGO

En este caso los espejos juegan el papel de las masas de prueba y el *beam splitter* representa el origen de coordenadas.

La idea del interferómetro es medir usando interferencia la diferencia entre la distancia, medida a lo largo de una geodésica nula en ambas direcciones, entre el origen de coordenadas (el beam splitter) y los espejos puestos en dirección perpendicular uno de otro.

Para ondas gravitacionales que se propaguen en dirección perpendicular al interferómetro, las ondas electromagnéticas en cada brazo podemos suponer que tienen una componente horizontal del campo eléctrico, después de recorrer la totalidad del brazo igual a:

$$\begin{aligned} E_x^{(L_y)} &= E_0 \sin[k_L(ct - L_y)] \\ E_x^{(L_x)} &= E_0 \sin[k_L(ct - L_x)] \end{aligned}$$

donde  $k_L = 2\pi/\lambda$ .

Cuando los haces interfieren en el origen su campo será:

$$E_x = E_0 \{ \sin[k_L(ct - L_x)] + \sin[k_L(ct - L_y)] \}$$

Usando la identidad:

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta - \phi}{2} \right)$$

el campo total queda:

$$E_x = 2E_0 \sin \left[ k_L \left( ct - \frac{L_x + L_y}{2} \right) \right] \cos \left[ \frac{1}{2} k_L (L_y - L_x) \right]$$

La intensidad promedio de la onda en el vacío será:

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} \langle |E|^2 \rangle$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío y debemos promediar sobre un período de la onda electromagnética.

El resultado será:

$$I = I_0 \cos^2 \left[ \frac{1}{2} k_L (L_y - L_x) \right]$$

donde  $I_0$  es la máxima intensidad de la interferencia entre las señales, que se produce cuando  $L_y = L_x$  y las dos ondas llegan en fase.

Sabiendo que:

$$L_i = L_0 + \delta L_i$$

entonces

$$L_y - L_x \equiv \Delta L = \delta L_y - \delta L_x$$

y la intensidad se puede finalmente escribir como:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \right) \right]$$

Definiendo  $\delta I / I_0 \equiv 1 - I / I_0$  entonces:

$$\frac{\delta I}{I_0} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \right) \right]$$

### Sensibilidad de los detectores

En el caso de una onda realista  $\Delta L \ll \lambda$  y podemos usar una expansión en series de potencias del coseno para escribir:

$$\frac{\delta I}{I_0} = \pi^2 \left( \frac{\Delta L}{\lambda} \right)^2$$

Si asumimos las mejores condiciones para la detección, es decir que la incidencia es normal y la polarización de la onda está alineada con los brazos del detector, podemos escribir:

$$\Delta L = \Delta L_{\max} \cos(ku + \phi)$$

de donde:

$$\frac{\delta I}{I_0} = \pi^2 \left( \frac{\Delta L_{\max}}{\lambda} \right)^2 \cos^2(ku + \phi)$$

De modo que de lo que se trata es de detectar cambios en la intensidad increíblemente pequeño que se repiten con el tiempo (factor oscilatorio) con una frecuencia el doble que la frecuencia de la onda.

El LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Observatory*) es actualmente sensible a cambios relativos  $\Delta L_{\max}$  similares e incluso menores a 1 mil millonesima de la luz visible ( $\lambda \approx 600$  nm), esto permite detectar cambios en la longitud de sus brazos tan pequeños como:

$$\Delta L_{\max} \lesssim 10^{-9} \times 6 \times 10^{-7} \text{ m} = 6 \times 10^{-16} \text{ m}$$

Un gráfico de la señal de interferencia, para esta situación óptima, se muestra en la figura:

(Algoritmo 3.3)

```
#Constantes
c=3e8

# Propiedad del detector
lamb=6e-7 # Longitud de onda

#Propiedades de la onda
f=100 # Hertz
DLmax=6e-16 # Máxima amplitud de la señal
z=0
fi=0

#Propiedades derivadas de la onda
from numpy import pi
k=2*pi*f/c # Número de onda
P=1/f # Período en segundos

#Gráfico de la señal
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

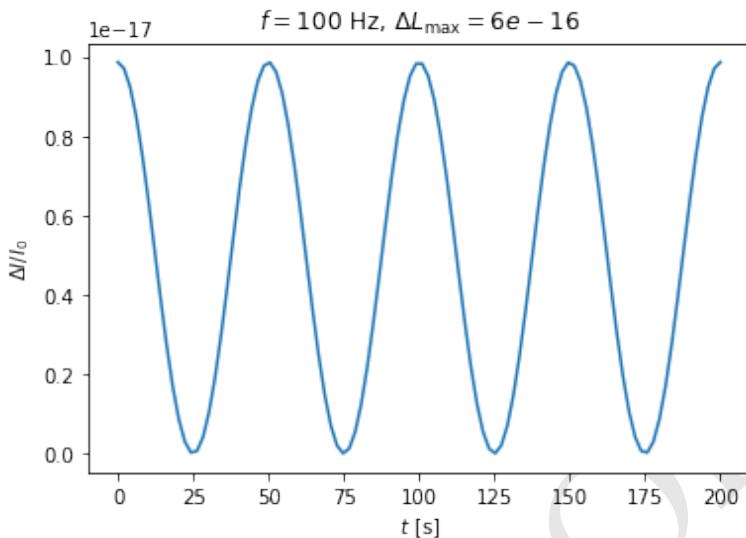
from numpy import linspace,cos
ts=linspace(0,2*f,100)
ax.plot(ts,pi**2*(DLmax/lamb)**2*cos(k*(c*ts-z+fi))**2)

#Decoración
ax.set_title(f"$f={f}$ Hz, $\Delta L_{\max}={DLmax}$")
ax.set_xlabel("$t$ [s]");
ax.set_ylabel("$\Delta I/I_0$");
```

*ver Figura 3.6*

La sensibilidad a la amplitud de la onda que llamaremos  $|h_{\min}|$ , es decir, la amplitud de la onda gravitacional más pequeña que puede percibir el detector, dependerá finalmente de la longitud de los brazos del interferómetro:

$$|h_{\min}| \sim \frac{\delta L}{L} \approx \frac{\Delta L_{\max}}{L}$$

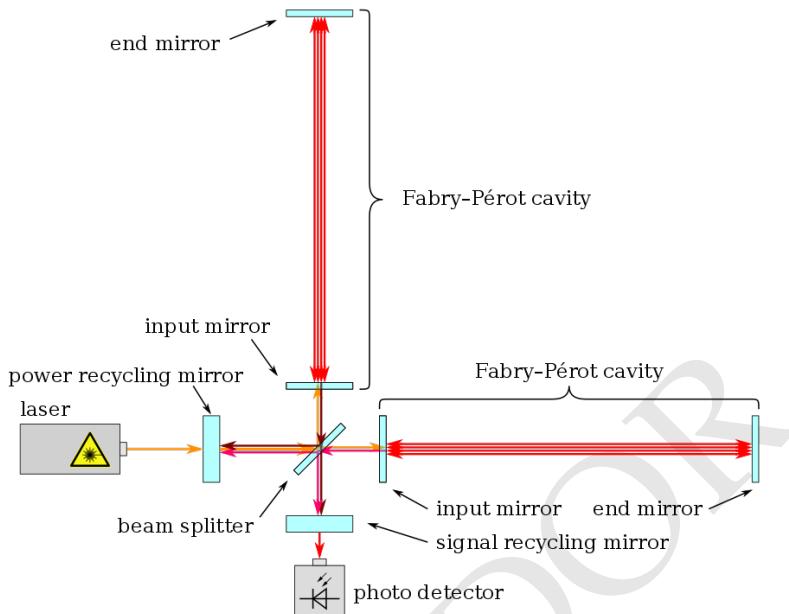


**Figura 3.6:** Figura correspondiente al código 3.3.

entre más largo los brazos, mayor será la sensibilidad.

LIGO usa brazos de 4 km de longitud pero usa un artificio óptico conocido como cavidades resonantes de Fabri-Perot (ver figura abajo) que aumenta la longitud efectiva del brazo hasta  $L = 1200$  km, de modo que la sensibilidad de LIGO avanzado es del orden de:

$$|h_{\min}| \approx \frac{\Delta L_{\max}}{L} \sim 10^{-21}$$



**Figura 3.7:** Diseño real de un interferómetro de ondas gravitacionales como el que usa hoy el LIGO

Las ondas detectables en LIGO serán aquellas que produzcan un *strain* mínimo mayor que el strain correspondiente al ruido del detector. Pero dado que la detección no se hace en una única frecuencia como hemos explicado hasta aquí, la sensibilidad a la amplitud de una onda no se puede representar simplemente como un *strain* mínimo. En lugar de ello se usa la que se conoce como la *densidad espectral* del ruido  $S_n(f)$  (cantidad de ruido por unidad de frecuencia), en función de la cuál, el strain correspondiente al ruido será (ver [esta referencia<sup>10</sup>](#)):

$$h_n(f) = f^{1/2} \sqrt{S_n(f)}$$

donde  $f$  es la frecuencia de la onda gravitacional.

Para la detección de una onda es necesario que:

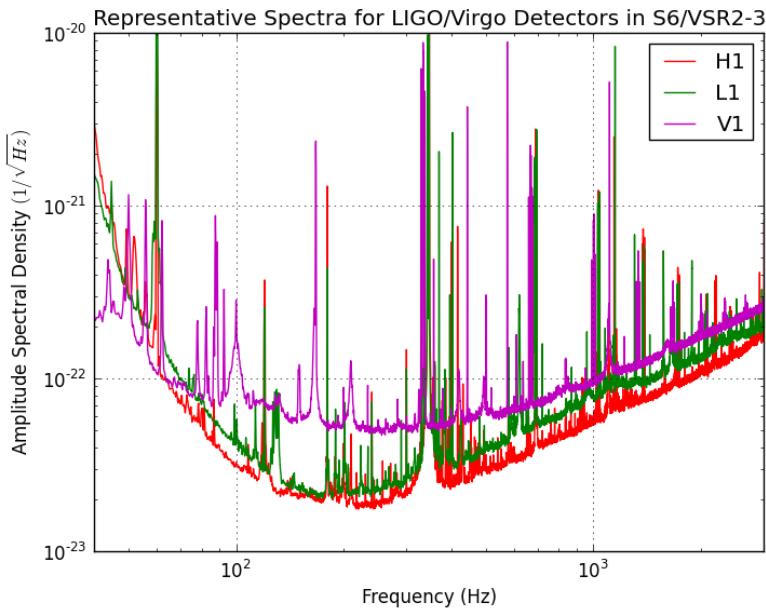
$$|h_{\min}(f)| > h_n(f)$$

Normalmente lo que se representa para caracterizar la sensibilidad de los instrumentos es  $\sqrt{S_n(f)}$  que se conoce como la *amplitud de densidad espectral* y que tiene unidades de inverso de  $\text{Hz}^{-1/2}$ .

Por eso cuando se trata de entender la sensibilidad usando gráficos como los que se muestran abajo, es necesario multiplicar la sensibilidad provista por el gráfico por la raíz cuadrada de la frecuencia:

$$|h_{\min}| = f^{1/2} \sqrt{S_n(f)}$$

<sup>10</sup><https://arxiv.org/pdf/1408.0740.pdf>



**Figura 3.8:** Sensibilidad de LIGO avanzado como función de la frecuencia de las ondas gravitacionales detectadas. La sensibilidad esta expresada en términos de lo que se conoce como la amplitud de densidad espectral que tiene unidades del inverso de la raíz cuadrada de la frecuencia.

Así por ejemplo, para una frecuencia  $f \sim 100$  Hz la densidad de amplitud espectral de LIGO es (según el gráfico)  $\sim 5 \times 10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$ , de modo que a esa frecuencia el strain mínimo detectable será:

$$|h_{\min}| \sim \sqrt{100} \times 5 \times 10^{-23} = 0,5 \times 10^{-21}$$

que coincide con el estimativo que habíamos hecho antes.

### 3.1.17. Simulación de una señal

Usando lo visto hasta aquí podemos intentar simular la señal de una o varias ondas gravitacionales llegando a uno o varios detectores interferométricos como LIGO.

Para ello usaremos la ecuación deducida en la sección anterior:

$$\frac{\delta I}{I_0} = \pi^2 \left( \frac{\Delta L}{\lambda} \right)^2$$

donde  $\Delta L = \delta L_y - \delta L_x$  y  $\delta L_i$  es el cambio en la distancia medida a lo largo del eje  $i$  del detector.

La primera condición que debemos entender en un caso completamente general es que la plano y orientación del detector no necesariamente es: 1) perpendicular a la dirección de proveniencia de la onda y 2) los brazos del detector no

necesariamente coinciden con la dirección de la polarización de la onda (el eje  $x$  sobre el que definimos la amplitud  $a_+$ .

### Detector con orientación arbitraria

Podemos resolver el primer problema mostrando que la distancia entre el origen de coordenadas y un punto situado en cualquier lugar  $(x, y, z) = L_0(n^x, n^y, n^z)$  en el detector, cambia de acuerdo con la expresión (ver Problemas al final del capítulo):

$$\delta L(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} h_{ij}(ct - n^z s) n^i n^j ds$$

Las coordenadas del punto y dirección del vector unitario  $\hat{n}$  están en el sistema de referencia de la onda gravitacional. Más interesante aún sería expresar el mismo resultado pero en el sistema de referencia del detector que indicaremos aquí con coordenadas primadas.

Si suponemos que la onda gravitacional se propaga en dirección  $\hat{k}'$  en el sistema de referencia del detector (que coincide con la dirección del eje  $z$  del sistema de referencia de la onda gravitacional), dirección que podemos cuantificar con su distancia cenital  $z$  y su azimut  $A$ , la relación entre las componentes de un vector cualquiera  $\vec{A}'$  en el sistema de referencia del detector y las mismas componentes pero en el sistema de referencia de la onda  $\vec{V}$  serán:

$$\vec{V} = R_x(z) R_z(A) \vec{V}'$$

donde  $R_z(A)$  es una matriz de rotación alrededor del eje  $z$  en un ángulo  $A$ , en sentido contrario de las manecillas del reloj:

$$R_z(A) = \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

análogamente:

$$R_x(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos z & \sin z \\ 0 & -\sin z & \cos z \end{pmatrix}$$

La matriz de rotación resultante será:

$$\begin{aligned} R_x(z) R_z(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos z & \sin z \\ 0 & -\sin z & \cos z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A \cos z & \cos A \cos z & \sin z \\ \sin A \sin z & -\cos A \sin z & \cos z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como solamente me interesa saber las direcciones de los brazos del detector, que en su sistema de referencia corresponden a  $\hat{n}'_{(x)} : (1, 0, 0)$  y  $\hat{n}'_{(y)} : (0, 1, 0)$ , los

únicos dos puntos de interés para calcular el cambio en la longitud de los brazos serán:

$$\begin{aligned}\hat{n}_{(x)} &: (\cos A, -\sin A \cos z, \sin A \cos z) \\ \hat{n}_{(y)} &: (\sin A, \cos A \cos z, -\cos A \sin z)\end{aligned}$$

Nótese que si la onda gravitacional se dirige hacia arriba  $z = 0$  de modo que su eje  $x$  coincide con el eje  $x$  del detector,  $A = 0$  las componentes de los vectores unitarios en el sistema de la onda coincidirán con las del detector. Si por el contrario la onda se dirige directamente hacia abajo ( $z = \pi, A = 0$ ), el eje  $y$  del detector corresponderá al negativo del eje  $y$  de la onda, lo que coincide con nuestras expectativas.

### Suma de ondas gravitacionales

Dado que estamos bajo la aproximación de gravedad linearizada, sabemos que si  $N$  ondas inciden sobre el detector producirán una perturbación total  $H_{ij}$  que será simplemente la suma de todas las ondas individuales:

$$H_{ij}(u) = \sum_{n=1}^N h_{ij}^{(n)}(u; k^{(n)}, a_+^{(n)}, a_\times^{(n)}, \phi^{(n)})$$

donde asumimos que todas las ondas vienen de la misma dirección y están polarizadas en la misma dirección y  $u = ct - z$ .

Donde la perturbación métrica es:

$$h_{ij}(u; k, a_+, a_\times, \phi) = \begin{cases} 0 & \text{Si } i = 3 \ j = 3 \\ a_\times \cos(ku + \phi) & \text{Si } i \neq j \\ a_+ \cos(ku + \phi) & \text{Si } i = j = 1 \\ -a_+ \cos(ku + \phi) & \text{Si } i = j = 2 \end{cases}$$

### Implementación numérica

Vamos ahora a ensamblar las componentes que hemos desarrollado anteriormente.

Para ello comenzamos definiendo la perturbación de la onda debida a la superposición de muchas ondas planas:

```
from numpy import cos
CLIGHT=3e8 # m/s
def Hij(i,j,u,ondas):
    ks=2*pi*ondas["f"]/CLIGHT
    coskus=cos(ks*u+ondas["fi"])
    if i==3 or j==3: return 0
    if i!=j:h=(ondas["ac"]*coskus).sum()
    elif i==1:h=(ondas["ap"]*coskus).sum()
    elif i==2:h=(-ondas["ap"]*coskus).sum()
    return h
```

Las propiedades de las ondas son:

```
#Propiedades de la onda plana
from numpy import array
ondas=dict(
    f=array([100,100]), # Hertz
    ap=array([1e-21,1e-21]),
    ac=array([0.0,0.0]),
    fi=array([0,0]), # Rad
)
#Periodo de la primera onda
P=1/ondas["f"][0] #Segundos

#Dirección de proveniencia
from numpy import pi
A=0*pi/180 # Rad
z=0*pi/180 # Rad

#Vectores unitarios
from numpy import cos,sin
nx=array([cos(A),-sin(A)*cos(z),sin(A)*cos(z)])
ny=array([sin(A),cos(A)*cos(z),-cos(A)*sin(z)])
```

Período onda 1 = 0.01 segundos  
 $n(x) = [1. -0. \ 0.]$   
 $n(y) = [0. \ 1. \ -0.]$

Con estas propiedades, valores típicos de la perturbación métrica serán:  
 $H_{11}(u=0) = 2e-21$   
 $H_{22}(u=0) = -2e-21$   
 $H_{12}(u=0) = 0.0$

Las propiedades del detector serán:

```
detector=dict(
    #Tamaño de los brazos
    L=1.2e6, # metros
    #Longitud de onda
    lamb=6.0e-7, #metros
)
```

El cambio en la distancia en dirección al vector  $\hat{n}$  se puede calcular con esta rutina:

```
from scipy.integrate import quad as integral
def deltal(t,n,ondas,detector):
    def integrando(s):
        u=CLIGHT*t-n[2]*s
        return Hij(1,1,u,ondas)*n[0]*n[0]+\n            Hij(2,2,u,ondas)*n[1]*n[1]+\n            2*Hij(1,2,u,ondas)*n[0]*n[1]
    dL=integral(integrando,0,detector["L"])[0]
    return dL
```

Valores típicos de la deformación de los brazos del detector serán:

```
delta L (0,nx) = 2.4e-15
delta L (0,ny) = -2.4e-15
```

Ahora necesitamos implementar una rutina que nos dé la señal:

```
def Iinterf(t,n_x,n_y,ondas,detector):
    dL_x=deltaL(t,n_x,ondas,detector)
    dL_y=deltaL(t,n_y,ondas,detector)
    DL=dL_y-dL_x
    deltaI=pi**2*(DL/detector["lamb"])**2
    return deltaI
```

Un valor típico de la señal de interferencia será:

```
print(f"dI/I (t=0) = {Iinterf(0,nx,ny,ondas,detector)}")
```

dI/I (t=0) = 6.316546816697189e-16

(Algoritmo 3.4)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

from numpy import linspace
ts=linspace(0,2*P,100)
deltaIs=[]
for t in ts:
    deltaIs+=[Iinterf(t,nx,ny,ondas,detector)]
ax.plot(ts,deltaIs)

ax.set_xlabel("$t$ [s]")
ax.set_ylabel("$\Delta I/I_0$");
```

*ver Figura 3.9*

### 3.1.18. Emisión de ondas gravitacionales

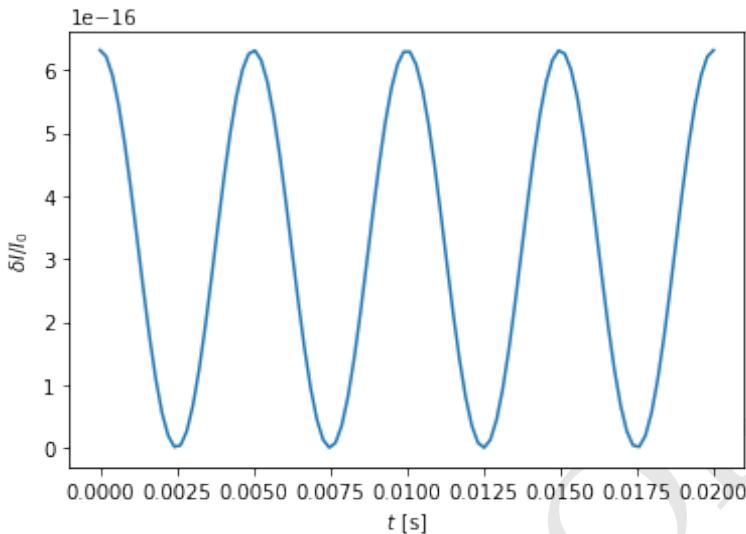
Para estudiar la emisión de ondas gravitacionales debemos partir de la ecuación de campo en gravedad linealizada pero con fuentes:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Lo que esta ecuación indica es que cada componente de la perturbación métrica satisface una ecuación de ondas del tipo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} - \nabla^2 f(x) = j(x)$$

donde  $x = x^\mu$  es un evento arbitrario en el espacio-tiempo.



**Figura 3.9:** Figura correspondiente al código 3.4.

### Fuente puntual

Supongamos que tenemos una fuente puntual en  $x_0$  y queremos resolver la ecuación arriba. En este caso podemos usar el delta de Dirac para representar la densidad de energía:

$$j(x) = j_0 \delta^4(x - x_0)$$

donde  $\delta^4(x - x_0) = \delta(t - t_0) \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$ .

Tratemos primero de resolver la ecuación:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial t^2} - \nabla^2 f(x) = \delta^4(x)$$

Dada la simetría esférica de una fuente puntual, la solución a la ecuación solo dependerá del tiempo y de la distancia a  $x_0$  así  $g(x) = g(t, r)$ .

Lejos de la fuente la solución a la ecuación de onda será:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g(t, r)}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial g(t, r)}{\partial r} \right] = 0$$

Los textos de física matemática proveen una solución para esta ecuación:

$$g(t, r) = \frac{1}{r} [O(ct - r) + I(ct + r)]$$

vemos que la onda se divide en una onda entrante  $I(ct + r)/r$  y en una saliente  $O(ct - r)/r$ . Naturalmente para nosotros la onda entrante no será incluida en tanto asumimos que la onda.

Cerca a la fuente podemos intentar no resolver la ecuación, sino escribir una versión integrada de la ecuación en una esfera pequeña de radio  $\varepsilon$  alrededor de ella:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial t^2} - \nabla^2 g(x) \right) dV = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon} j(x) dV$$

Dado que  $g(x) \sim 1/r$  y  $dV \rightarrow r^2$  el primer término de la integral tiende a cero cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Esto nos deja solo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon} \nabla^2 g(x) dV = \delta(t)$$

Usando el teorema de la divergencia en la integral del lado derecho:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon} \vec{\nabla} g(x) \cdot d\vec{S} = \delta(t)$$

Como ahora la integral se realiza sobre la superficie  $f(x) = f(t, r)$  que habíamos encontrado antes:

$$O(t) = -\frac{\delta(t)}{4\pi}$$

o bien:

$$O(ct - r) = -\frac{\delta(ct - r)}{4\pi}$$

La solución general a la ecuación de ondas con una fuente puntual es entonces:

$$g(t, r) = -\frac{\delta(ct - r)}{4\pi r}$$

donde el delta de Dirac indica que la onda esta restringida al frente que se mueve con velocidad  $c$ .

Para una fuente general ubicada en  $x' : (t', \vec{r}')$  la solución será:

$$f(t, \vec{r}) = j(t', x') g(t - t', \vec{r} - \vec{r}') = -\frac{j(t_r, \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

donde  $t_r = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$

### Fuente extendida y sus aproximaciones

La onda producida por una fuente extendida se puede calcular de la superposición de muchas fuentes puntuales, cada una emitiendo desde un lugar y tiempo en general diferente. En este caso la solución será:

$$f(t, \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{j(t_r, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Una aproximación interesante se puede obtener considerando dos aproximaciones: 1) una fuente de ondas armónica (un sistema binario en rotación por ejemplo) y 2) una longitud de onda mucho mayor que la fuente,  $\lambda \gg R_{\text{fuente}}$ , siendo  $R_{\text{fuente}}$  el tamaño característico de la misma. En este caso:

$$j(t, \vec{r}) = j_\omega(\vec{r}) \cos(\omega t)$$

¿Qué significa una longitud de onda muy grande?. Si escribimos la aproximación  $\lambda \gg R_{\text{fuente}}$  como:

$$cP \gg R_{\text{fuente}}$$

donde  $P$  es el período de la onda electromagnética, entonces la aproximación de onda larga implica:

$$\frac{R_{\text{fuente}}}{P} \ll c$$

Podemos pensar en  $R_{\text{fuente}}/P$  como una velocidad característica de la fuente, la velocidad que le toma a la materia en la fuente moverse. Es decir la aproximación de grandes longitudes de onda sería válida en sistemas en los que los cuerpos se mueven a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz.

Reemplazando queda:

$$f(t, \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{j_\omega(\vec{r}') \cos[\omega(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Si consideramos ahora una distancia muy grande desde la fuente, i.e.  $\vec{r} \gg R_{\text{fuente}}$  entonces  $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx \vec{r}$  y por lo tanto la solución será:

$$f^{\text{far}}(t, \vec{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \int j(ct - r, \vec{r}') dV'$$

Llamamos a esta solución la *solución de campo lejano y gran longitud de onda*.

### Solución a la ecuación de campo con fuentes

Podemos finalmente postular que la solución a la ecuación de campo métrico linearizada es:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi r} \int -\frac{16\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}(ct - r, \vec{r}') dV'$$

que simplificando queda finalmente:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4 r} \int T^{\mu\nu}(ct - r, \vec{r}') dV'$$

Es posible mostrar que esta solución satisface además las condiciones gauge que hemos asumido a lo largo de las últimas secciones (ver Problemas al final del capítulo).

Si estamos a una gran distancia observando la llegada de la onda gravitacional en un detector de un tamaño mucho menor que la distancia a la misma, la onda que nos llegará será esencialmente una onda plana como las que estudiamos en secciones anteriores. Como hemos visto para entender esta onda es necesario estudiar las componentes espaciales de la misma. Así que nos interesa calcular:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij} = \frac{4G}{c^4 r} \int T^{ij}(t - r, \vec{r}') dV'$$

¿Cómo escribir las componentes del tensor  $T^{ij}$  en términos de la masa y su distribución en la fuente?. Sabemos que la masa está directamente relacionada con  $T^{00}$ , de modo que si queremos encontrar una relación de  $T^{ij}$  con la masa debemos encontrarla es con  $T^{00}$ .

Por el principio de continuidad aplicada al flujo de momentum sabemos que:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

En gravedad linearizada y a primer orden la componente 0 de esta ecuación es:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} \approx T^{\mu\nu}_{,\mu} = T^{00}_{,0} + T^{0i}_{,i} = 0$$

de donde:

$$T^{00}_{,0} = -T^{0i}_{,i}$$

La componente espacial por otro lado

$$T^{i0}_{,0} = -T^{ij}_{,j}$$

Derivando respecto al tiempo la primera identidad

$$T^{00}_{,0,0} = -T^{0i}_{,i,0} = -T^{0i}_{,0,i}$$

y usando en esta última la segunda identidad queda:

$$T^{00}_{,0,0} = T^{ij}_{,i,j}$$

Consideremos ahora la siguiente integral:

$$\int (T^{0k}x^i x^j)_{,k} dV = \int T^{0k}_{,k} x^i x^j dV + \int T^{0i} x^j dV + \int T^{0j} x^i dV$$

Por el teorema de la divergencia, el término en el lado derecho de la ecuación es una integral sobre la superficie del tensor  $T^{0k}x^i x^j$ , pero si consideramos para esta integral una superficie ligeramente por encima de la distribución de materia esta cantidad da cero. De ese modo la igualdad anterior queda:

$$\int T^{0i} x^j dV = -\frac{1}{2c} \int T^{00}_{,0} x^i x^j dV$$

dado que las variables son independientes:

$$\int T^{0i} x^j dV = -\frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \left( \int T^{00} x^i x^j dV \right)$$

Hemos usado el hecho de que una derivada total sobre una integral es lo mismo que la integral de su derivada parcial respecto al tiempo (regla e Leibniz):

$$\frac{d}{dt} \int f(\vec{r}, t) dV = \int \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, t) dV$$

Derivando esta última expresión respecto al tiempo queda:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int T^{0i} x^j dV = -\frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \int T^{00} x^i x^j dV \right)$$

Para encontrar a que corresponde el lado izquierdo de la ecuación escribámosla como:

$$\int T^{0i}{}_{,0} x^j \, dV = - \int T^{ik}{}_{,k} x^j \, dV = \int [(T^{ik} x^j)_{,k} - T^{ij}] \, dV$$

Por el mismo argumento del teorema de la divergencia, el primer término del lado derecho de la anterior ecuación es 0 y por lo tanto la identidad que obtenemos finalmente es:

$$\int T^{ij} \, dV = \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left( \int T^{00} x^i x^j \, dV \right)$$

A bajas velocidades el tensor de momentum energía es  $T^{00} \approx \rho_0(t, \vec{r}) c^2$ .

Si definimos el *segundo momento de la distribución de masa* del sistema  $I^{ij}$  como:

$$I^{ij}(t) = \int \rho_0(t, \vec{r}') x'^i x'^j \, dV'$$

la solución a la ecuación de onda en el campo lejano y asumiendo gran longitud de onda será:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij}(t, \vec{r}) = \frac{2G}{c^4 r} I^{ij}(ct - r)$$

Si bien este resultado fue deducido bajo aproximaciones muy particulares, en realidad su forma general es válida en otras condiciones.

Una primera característica interesante de este resultado es que la perturbación inducida por la radiación gravitacional decae como  $1/r$ . Así, por ejemplo, para dos detectores localizados sobre el cono de luz de una onda a distancias  $r$  y  $r_0$ :

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij}(r) = \bar{h}_{\text{far}}^{ij}(r_0) \left( \frac{r_0}{r} \right)$$

### 3.1.19. Energía transportada por ondas gravitacionales

Calcular la energía transportada por ondas gravitacionales no es fácil. Para empezar y como discutiremos más adelante no es posible asignar una energía local a un espacio-tiempo curvado. El concepto de energía gravitacional es por tanto imposible de definir rigurosamente en relatividad general (lo que era de esperarse en tanto no hay *fuerzas* gravitacionales).

En el caso de gravedad linearizada, es posible calcular la energía transferida a una partícula de prueba (mejor, a un sistema formado por varias partículas) cuando pasa la onda gravitacional. El argumento que se conoce históricamente como el *sticky bead argument* (cuenca pegajosa) fue ideado por Richard Feynmann en los años 50.

Imaginemos que sobre un alambre se ubican dos cuencas que pueden moverse libremente. Cuando pasa una onda gravitacional las cuencas se separan y acercan periódicamente sobre el alambre. Es cierto que también lo harían los átomos del alambre, pero dado que sobre ellos actúan fuerzas electromagnéticas muy poderosas, el efecto sobre las cuencas será mayor. Si hay fricción en el alambre, es claro que con el tiempo la onda gravitacional terminará transfiriendo energía al alambre en la forma de calor.

Si la distancia entre las cuencas esta dada por (asumimos que el alambre está en la dirección de la polarización de la onda):

$$\Delta L = a_+ \cos(ku + \phi)$$

la velocidad de las cuencas será:

$$v = \frac{d}{dt} \Delta L = \omega a_+ \sin(ku + \phi)$$

Su energía cinética será por otro lado proporcional a  $\omega^2 a_+^2$ . Este argumento nos permite entender una parte de la expresión rigurosa que se calcula usando la ecuación de campo.

El flujo de energía (energía por unidad de área, por unidad de tiempo) transportado por la polarización de magnitud  $a$  en dirección perpendicular a una onda plana será:

$$J_{\text{GW}} = \left( \frac{c^2}{16\pi G} \right) \times \left( \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \right) \times c$$

En esta expresión reconocemos el primer término que es el inverso de la constante de la ecuación de campo en gravedad linearizada multiplicada por  $c^2$ . El segundo término que viene del promedio de la energía cinética transferida a las partículas. Estos dos términos producen una densidad de energía:

$$\epsilon_{\text{GW}} = \frac{c^2}{32\pi G} (a\omega)^2$$

El último término  $c$  viene cuando queremos calcular la densidad de flujo de energía de una onda que se propaga con la velocidad de la luz,  $J = \epsilon c$ . Todos los términos juntos producen finalmente:

$$J_{\text{GW}} = \frac{c^3}{32\pi G} (a\omega)^2$$

Si hay varias ondas y varias polarizaciones el flujo de energía total será la suma del término anterior calculada para cada una de ellas.

### 3.1.20. La fórmula del cuadrupolo

Una de las más importantes deducciones realizadas por Einstein en su temprana teoría de la gravitación fue la de la potencia total radiada por una fuente. El resultado se conoce como la **fórmula del cuadrupolo** y aunque no la deduciremos rigurosamente aquí bastará con decir que no es difícil hacerlo (solo muy laborioso).

La fórmula establece que si definimos el **tensor de momento cuadrupolar**  $Q^{ij}$  como:

$$Q^{ij}(t) \equiv I^{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta^{ij} I^k_k(t)$$

entonces la potencial total radiada por una fuente es:

$$L_{\text{GW}} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle$$

donde el promedio se debe realizar sobre un período de la onda. Esta es justamente la que llamamos la **formula del cuadrupolo** y fue deducida por primera vez por Einstein en 1916.



### Nota

**Solo hay radiación gravitacional si hay momento cuadrupolar.** A diferencia de lo que pasa con la radiación electromagnética que puede ser producida siempre que la distribución de carga tenga un momento dipolar variable (ver tabla al final de esta sección), la radiación gravitacional solo puede producirse si hay un momento cuadrupolar de masa y este cambia en el tiempo. Esto explicará por qué solo ciertas distribuciones de materia pueden producir ondas gravitacionales (objetos en sistemas binarios, explosiones asimétricas, etc.) y otros no (estrellas en rotación, explosiones simétricas, etc.)

### 3.1.21. Analogía con el electromagnetismo

Como hicimos en una sección anterior, es posible hacer una analogía entre la emisión de ondas gravitacionales y la emisión de ondas electromagnéticas. En la tabla a continuación se hace la analogía:

Aspecto	Electromagnetismo	Gravitación linearizada
Cuadripotencial	$A^\mu$	$\bar{h}_{\mu\nu}$
Fuentes	$J^\nu$	$T_{\mu\nu}$
Ecuación con fuentes	$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$	$\partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

Solución general

$$\bar{h}^{ij}(t, \vec{r}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{ij}(t_r, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'(t_r, \vec{r}') = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J^i(t_r, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Campo lejano

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij}(t, \vec{r}) = \frac{2G}{c^4} \frac{\ddot{Q}^{ij}}{r} \quad A_{\text{far}}^i(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{P}^i}{r}$$

Aspecto	Electromagnetismo	Gravitación linearizada
Momentos	Segundo momento: $I^{ij}(t) = \int \rho_0(t, \vec{r}') x'^i x'^j dV'$ , Momento cuadrupolar: $Q^{ij}(t) \equiv I^{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta^{ij} I^k_k(t)$	Dipolar: $P^i(t) = \int \rho_0(t, \vec{r}') x'^i dV'$
Potencia radiada		
	$L_{\text{GW}} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle$	$L_{\text{EM}} = \frac{\mu_0}{6\pi} \langle \ddot{p}^k \ddot{p}_k \rangle$

### 3.1.22. Síntesis de emisión de ondas gravitacionales

Una vez entendidos los elementos físicos básicos de la descripción, detección y emisión de ondas gravitacionales podemos ahora tratar de predecir las señales que esperaríamos de distintas fuentes astrofísicas.

Habíamos deducido que en la aproximación de longitud de onda larga y observación lejana, la perturbación métrica producida por una fuente con segundo momento de masa  $I^{ij}(t)$  es:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij}(t, \vec{r}) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}^{ij}(ct - r)$$

donde:

$$I^{ij}(t) = \int \rho_0(t, \vec{r}') x'^i x'^j dV'$$

Este resultado implica que en el caso de una fuente de ondas gravitacionales, la perturbación métrica varía predeciblemente como:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij}(r) = \bar{h}_{\text{far}}^{ij}(r_0) \left( \frac{r_0}{r} \right)$$

Por otro lado, la potencia total raiada por un sistema que tiene tensor de momento cuadrupolar  $Q^{ij}$  esta dado por:

$$L_{\text{GW}} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle$$

donde:

$$Q^{ij}(t) \equiv I^{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta^{ij} I^k_k(t)$$

Finalmente puede sernos de utilidad el estimativo que presentamos de la densidad de energía en una de los modos de polarización de una onda gravitacional plana:

$$\varepsilon_{\text{GW}} = \frac{c^2}{32\pi G} (a\omega)^2$$

que corresponde a un flujo:

$$J_{\text{GW}} = \frac{c^3}{32\pi G} (a\omega)^2$$

Con estas cantidades a la mano nos proponemos predecir algunas propiedades básicas de la radiación producida por distintas fuentes astrofísicas.

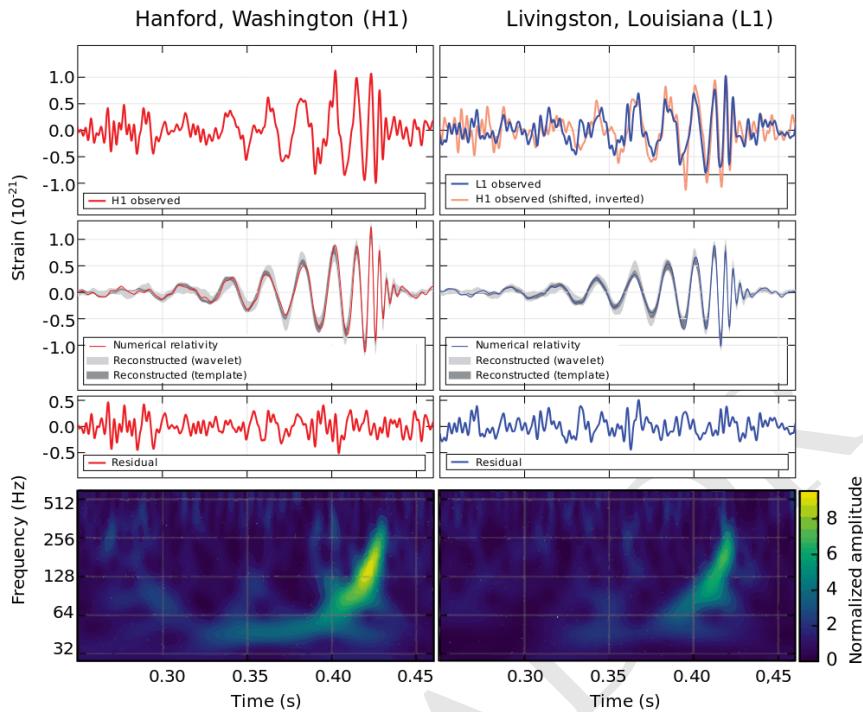
### 3.1.23. Estimaciones de la intensidad y la frecuencia

Uno de los problemas más interesantes para resolver en la astrofísica de las ondas gravitacionales es la estimación de la intensidad y la frecuencia que tendrán las ondas emitidas por distintas fuentes astrofísicas.

Después de la detección de las primeras ondas gravitacionales entre los años 2015 y 2016 pudimos hacernos a una idea de si nuestras estimaciones previas habían sido correctas o no.

#### Primera fuente de radiación gravitacional detectada

Consideremos por ejemplo el caso de la primera fuente de radiación gravitacional que detectamos, GW150914. Los análisis de la señal permitieron establecer que fue producida por la coalescencia de dos agujeros negros con una masa de alrededor de 30 masas solares y que la colisión tuvo lugar a 440 megaparsecs de nosotros. La señal se detectó con una frecuencia inicial de cerca de 35 Hz hasta la colisión final que alcanzó una frecuencia del orden de 250 Hz.



**Figura 3.10:** Primera señal de ondas electromagnéticas detectada GW150914.

Usando estos datos es posible derivar algunas propiedades interesantes. A continuación recogemos algunos de los datos recabados de la señal:

```
#Constantes
G=6.67e-11 # m^3/kg s^2
c=3e8 # m/s
pc=3.26*3e8*365.25*86400 # 1 pc en metros
Msol=1.98e30 # kg

#Distancia
r=440 #Mepgapssecs

#Amplitud promedio de la señal
hprom=0.5e-21 #Strain

#Frecuencia de la señal
f1=35 # Hz
f2=250 # Hz

#Duración
tdur=0.2 # segundos

#Masa de los agujeros negros
```

```
M=30*Msol # kg
```

Podemos calcular la escala de longitud de los agujeros negros y de su órbita usando la masa y la frecuencia de los mismos y la tercera ley de Kepler  $n^2a^3 = GM$ :

```
# Escala de longitud de los agujeros negros
R=2*G*M/c**2

# Tamaño característico de la órbita
from numpy import pi
a1=(G*M/(2*pi*f1)**2)**(1./3)
a2=(G*M/(2*pi*f2)**2)**(1./3)

# Velocidad orbital típica
v1=2*pi*a1*f1
v2=2*pi*a2*f2

# Longitud de onda característica
lamb1=c/f1
lamb2=c/f2
```

Escala de longitud agujeros negros:  $R = 88.044$  km

Escala orbital:  $a = [117.10016534072592, 434.3156555612506]$  km

Velocidad orbital:  $v = [0.31837000370263285, 0.6131350319476245]$  c

Longitud de onda:  $a = [1200.0, 8571.42857142857]$  km

Como vemos la escala de longitud de las fuentes era del orden de unos cientos de kilómetros. Sus velocidades en todo el proceso estuvieron entre 0.3 y 0.6c lo que impediría que usáramos la aproximación de bajas velocidades para calcular la intensidad. Sin embargo al calcular la longitud de onda nos damos cuenta que esta es entre 3 y 10 veces mayor que la escala de la fuente por lo que la aproximación no es tan mala.

Por ejemplo podemos estimar la intensidad que tenía la onda al abandonar la fuente. Para ello podemos usar la aproximación de campo lejano y gran longitud de onda.

```
# Distancia a la fuente
ro=10000 # km

# Intensidad
ho=hprom*((r*1e6*pc)/(ro*1e3))
```

$ho$  ( $ro = 10000$  km) = 0.0006789933215999998

Es decir, incluso a la increíblemente cercana distancia de 10000 km la perturbación métrica era muy pequeña. Esto pone de relieve la magnitud real de las ondas gravitacionales y la rigidez del espacio-tiempo.

Podemos también hacer un *burdo* estimativo de la energía total producida por la fuente, usando para ello la expresión presentada para la densidad de flujo de la onda, que en términos astronómicos sería el brillo de la misma:

```
#Densidad de flujo
fprom=(f1+f2)/2
J=c**3/(32*pi*G)*(hprom*(2*pi*fpm))**2
```

Flujo J promedio = 0.0008069888854914068 W/m<sup>2</sup> s

Es importante entender que para el cálculo de este brillo asumimos que la intensidad medida hprom es la intensidad de la onda, como si incidiera normalmente en el detector. Sin embargo por la configuración del detector en relación con la fuente ese día, sabemos que la intensidad era ciertamente mayor. Es decir, este valor subestima el brillo de la fuente hasta por un factor de 10.

Este número contrasta con el brillo observado de algunas estrellas. Por ejemplo, la estrella Vega, que es el referente de la escala de brillos usada en astronomía (magnitudes estelares), tiene un brillo de  $3 \times 10^{-8}$  W m<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>. Podemos usar el brillo medido y el de Vega y la ley de Pogson para estimar la magnitud estelar que hubiera tenido la explosión si la hubieramos percibido con nuestros ojos:

```
from numpy import log10
m=-2.5*log10(J/3e-8)
```

Magnitud equivalente = -11.074365746465153^m

Es decir de haber sido visible habríamos visto la explosión con el brillo de la Luna llena.

Con este valor y la distancia podemos estimar (por debajo) la luminosidad total de la fuente:

```
L=4*pi*(r*1e6*pc)**2*j
```

L = 1.8701154322511363e+48 j

De nuevo podemos usar la ley de Pogson para estimar la magnitud absoluta de la explosión. Para ello usamos como referencia el Sol que tiene una magnitud absoluta bolométrica de +4,75<sup>m</sup> y una luminosidad de  $3,828 \times 10^{26}$  J:

```
from numpy import log10
M=4.75-2.5*log10(L/3.85e26)
```

Magnitud equivalente = -49.46601921134339^m

En contraste con las magnitudes típicas de las explosiones de supernova que tienen magnitudes absolutas del orden de -19<sup>m</sup> a -21<sup>m</sup>.

Si comparamos la luminosidad de la explosión con la del Sol y calculamos la energía total emitida en *foe*<sup>11</sup>, el resultado es impresionante:

<sup>11</sup>El *foe* es una unidad diseñada para medir la energía producida en explosiones de supernova. Equivale a  $10^{51}$  ergs, de donde viene su nombre en inglés [*ten to the power of fifty-one ergs*. En unidades del SI, 1 *foe* =  $10^{44}$  J]

```
# Luminosidades solares
```

```
Nstar = L/3.828e26
```

```
# Energía total:
```

```
E=L*tdur
```

Equivalentes solares = 4.885359018419896e+21

Energía total = 3.740230864502273e+47 J

Energía total = 3740.2308645022727 foes

Masa equivalente = 2.098894985691511 Msol

Es decir por un centenar de milisegundos la explosión tuvo la potencia de todas las estrellas del universo juntas y emision 3000 veces más energía gravitacional que la supernova más potente registrada (1 foe)

### Estimativos ondas gravitacionales de sistemas binarios

En los resultados presentados en el apartado precedente hay un detalle que no precisamos. ¿Cómo se determina la distancia a una fuente de ondas gravitacionales?. En realidad la distancia se estima partiendo de el brillo medido de la onda y el brillo esperado de acuerdo con los modelos astrofísicos que ajustan los datos de la señal. De modo que la distancia que usamos anteriormente para estimar todas las propiedades venía con una trampa: esta había sido determinada primero usando justamente la potencia estimada de la señal.

¿Podemos hacer un estimativo a orden de magnitud de la potencia de la señal producida por un sistema binario? La respuesta es un sí contundente. Los detalles los estudiaremos en la siguiente sección:

Para determinar la intensidad de la onda producida a una gran distancia de la fuente es necesario usar la fórmula de campo lejano y longitud de onda larga:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij}(t, \vec{r}) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}^{ij}(ct - r)$$

Aquí nos interesa estimar la cantidad más relevante, la segunda derivada del segundo momento de masa. Sabemos por definición que:

$$I^{ij}(t) = \int \rho_0(t, \vec{r}') x'^i x'^j dV'$$

Si las partículas del sistema están siempre a una distancia del origen del orden de  $R$  (la distancia entre ellas), el segundo momento es del mismo orden que el momento de inercia  $\int \rho_0 r'^2 dV'$ . Un estimativo del momento de inercia es  $I \sim MR^2$ . En realidad  $I^{ij}$  no es el momento de inercia del sistema que se mantiene constante. En realidad esta cantidad cambia periódicamente con período  $P$ . Podemos estimar la aceleración del cambio como:

$$\ddot{I}^{ij} \sim \frac{MR^2}{P^2}$$

Por la tercera ley de Kepler podemos relacionar la distancia orbital con el período y la masa:

$$\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 R^3 = GM$$

de donde:

$$R^2 = \left(\frac{GMP^2}{2\pi}\right)^{2/3}$$

Reemplazando en la fórmula para el segundo momento obtenemos:

$$\ddot{I}^{ij} \sim \frac{G^{2/3} M^{5/3}}{P^{2/3}}$$

Reemplazando en la intensidad:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij}(t, \vec{r}) \sim \frac{2G^{5/3}}{c^4 r} \frac{M^{5/3}}{P^{2/3}}$$

Usando esta expresión podemos encontrar por ejemplo la intensidad de la radiación producida por un sistema formado por dos agujeros negros con una masa total de 100 masas solares a 100 Mpc, mientras se mueven en una órbita de 1 segundo de período:

```
r=100*1e6*pc # m
M=100*Msol # kg
P=0.5 # segundos
hfar=(2*G**5/3/c**4)*M**5/3/(P**(2/3)*r)
```

`h estimado = 9.370739370992108e-22`

Que coincide orden de magnitud con la amplitud estimada para la primera fuente de ondas gravitacionales. Podemos escribir este resultado en una forma útil usando:

$$h \sim 10^{-21} \left(\frac{M}{100 M_{\odot}}\right)^{5/3} \left(\frac{0,5 \text{ s}}{P}\right)^{2/3} \left(\frac{100 \text{ Mpc}}{r}\right)$$

Usando esta fórmula podemos ver que en el caso de la primera fuente de ondas gravitacionales para la cuál  $r = 440 \text{ Mpc}$ ,  $M \approx 60 M_{\odot}$ ,  $P = 1/30 \text{ s}$ , entonces la amplitud sería  $0,6^{5/3} 15^{2/3} / 4,4 \approx 0,6$  que coincide esquisitamente con la intensidad promedio detectada de  $h \approx 0,5 \times 10^{-21}$ .

Para sistemas gravitacionales más cercanos:

$$h \sim 10^{-21} \left(\frac{M}{1 M_{\odot}}\right)^{5/3} \left(\frac{1 \text{ h}}{P}\right)^{2/3} \left(\frac{100 \text{ pc}}{r}\right)$$

### 3.1.24. Radiación gravitacional de sistemas binarios

El cálculo anterior apenas si permite estimar la amplitud de la onda gravitacional producida por un sistema binario. Pero ¿cuáles son las características específicas de las ondas producidas por el sistema? ¿que polarización tienen?

Consideremos un sistema formado por dos masas puntuales  $M/2$  a una distancia relativa  $R = a$  que se mueven en una órbita circular de radio  $a$ .

Por la tercera ley de Kepler la frecuencia angular  $n$  de las partículas es:

$$n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

o el cuadrado del semieje mayor:

$$a^2 = \left( \frac{GM}{n^2} \right)^{2/3}$$

Las coordenadas de ambas partículas serán:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -x_2(t) &= (a/2) \cos(nt) \\ y_1(t) &= -y_2(t) &= (a/2) \sin(nt) \\ z_1 &= z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Como el sistema esta formado por partículas puntuales podemos escribir las coordenadas de las partículas como:

$$\rho_0 = \frac{M}{2} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{M}{2} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_2)$$

El segundo momento de masa será:

$$\begin{aligned} I^{ij} &= \int \left[ \frac{M}{2} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_1) + \frac{M}{2} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_2) \right] x'^i x'^j dV' \\ &= \frac{M}{2} (x'_1 x'_1 + x'_2 x'_2) \end{aligned}$$

Como vemos las componentes  $j = 3$  (componentes  $z$ ) del segundo momento de masa son 0,  $I^{i3} = 0$  y las únicas componentes distintas de cero son aquellas que corresponden a  $x, y$ :

$$\begin{aligned} I^{xx} &= \frac{1}{4} Ma^2 \cos^2(nt) = \frac{1}{8} Ma^2 [1 + \cos(2nt)] \\ I^{yy} &= \frac{1}{4} Ma^2 \sin^2(nt) = \frac{1}{8} Ma^2 [1 - \cos(2nt)] \\ I^{xy} &= \frac{1}{4} Ma^2 \cos(nt) \sin(nt) = \frac{1}{8} Ma^2 \sin(2nt) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Las segundas derivadas serán por otro lado:

$$\begin{aligned} \ddot{I}^{xx} &= -\frac{1}{2} n^2 Ma^2 \cos(2nt) \\ \ddot{I}^{yy} &= +\frac{1}{2} n^2 Ma^2 \cos(2nt) \\ \ddot{I}^{xy} &= -\frac{1}{2} n^2 Ma^2 \sin(2nt) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Usando la fórmula para la perturbación métrica podemos escribir finalmente:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{ij}(t) = \frac{G}{c^4 r} n^2 Ma^2 \begin{pmatrix} -\cos(2nt_r) & -\sin(2nt_r) & 0 \\ -\sin(2nt_r) & \cos(2nt_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde como es regular  $t_r = t - r/c$ .

La perturbación métrica detectada a gran distancia será:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{\mu\nu}(t) = \frac{G}{c^4 r} n^2 Ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(2nt_r) & -\sin(2nt_r) & 0 \\ 0 & -\sin(2nt_r) & \cos(2nt_r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que esta onda plana no tiene una estructura exactamente del tipo:

$$h_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

Pero es fácil ver que siempre es posible expresar una onda arbitraria:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{yx} & h_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

como la suma de ondas en el gauge TT:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+^{(1)} & h_\times^{(1)} & 0 \\ 0 & h_\times^{(1)} & -h_+^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+^{(2)} & h_\times^{(2)} & 0 \\ 0 & h_\times^{(2)} & -h_+^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$h_+^{(1)} = \frac{1}{2}(h_{xx} - h_{yy})$$

$$h_+^{(2)} = \frac{1}{2}(h_{xx} + h_{yy}) \quad (3.5)$$

$$h_\times^{(1)} + h_\times^{(2)} = h_{xy} \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

La onda procedente de la binaria se puede considerar precisamente como la superposición de dos ondas planas con polarizaciones diferentes si se escribe:

$$\bar{h}_{\text{far}}^{\mu\nu}(t) = \frac{G}{c^4 r} n^2 Ma^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2nt_r + \pi) & \cos(2nt_r + \pi/2) & 0 \\ 0 & \cos(2nt_r + \pi/2) & -\cos(2nt_r + \pi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{h}_{\text{far}}^{\mu\nu}(t) = a_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(2nt_r + \pi) + a_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(2nt_r + \pi/2)$$

con:

$$a_0 = \frac{G}{c^4 r} n^2 Ma^2$$

Es decir la onda producida por una binaria es la superposición de una onda con polarización  $a_+ = a_0$  con frecuencia igual al doble de la frecuencia orbital y en desfase  $\pi$  respecto a la órbita y otra onda con polarización  $a_\times = a_0$  con un desfase de  $\pi/2$ . Se dice que la onda tiene polarización circular.

Analicemos ahora la magnitud de la onda:

$$a_0 = \frac{G}{c^4 r} n^2 Ma^2$$

si reemplazamos  $a^2 = (GM/n^2)^{2/3}$  y  $n = 2\pi/P$ , obtenemos:

$$a_0 = \left(\frac{\pi^2}{2}\right)^{1/3} \frac{2G^{5/3}}{c^4 r} \frac{M^{5/3}}{P^{2/3}}$$

Vemos que increíblemente nuestro estimativo preciso de la amplitud de la onda difiere del estimativo **exacto** en un factor de  $(\pi^2/2)^{1/3} \approx 1,7$  que no es muy grande para el nivel de aproximación tan grueso que habíamos utilizado en primer lugar.

Para calcular la potencia total radiada podemos usar la fórmula del cuadrupolo:

$$L_{\text{GW}} = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}^{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle$$

donde:

$$Q^{ij}(t) \equiv I^{ij}(t) - \frac{1}{3} \delta^{ij} I^k_k(t)$$

Para ello primero debemos calcular la traza del segundo momento de masa:

$$I^{ij} = \frac{1}{8} Ma^2 \begin{pmatrix} [1 + \cos(2nt)] & -\sin(2nt) & 0 \\ -\sin(2nt) & [1 - \cos(2nt)] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La traza es:

$$I^k_k = \frac{1}{4} Ma^2$$

que no depende del tiempo. Por lo tanto las derivadas del tensor de cuadrimomento de masa serán iguales a las del segundo momento de masa.

Derivando 3 veces queda:

$$\ddot{Q}^{ij} = n^3 Ma^2 \begin{pmatrix} -\sin(2nt) & \cos(2nt) & 0 \\ \cos(2nt) & \sin(2nt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con índices contravariantes  $\ddot{Q}_{ij} = \eta_{ik}\eta_{jl}\ddot{Q}^{kl} = \ddot{Q}^{ij}$ , de modo que

$$\ddot{Q}_{ij}\ddot{Q}^{ij} = \sum_{i,j}(\ddot{Q}_{ij})^2 = 2n^6M^2a^4[\sin^2(2nt) + \cos^2(2nt)] = 2n^6M^2a^4$$

El producto:

$$\langle\ddot{Q}^{ij}\ddot{Q}_{ij}\rangle = 2n^6M^2a^4$$

La luminosidad queda finalmente como

$$L_{\text{GW}} = \frac{2G}{5c^5}n^6M^2a^4$$

Reemplazando nuevamente  $a^4 = (GM/n^2)^{4/3}$  y  $n = 2\pi/P$  queda:

$$L_{\text{GW}} = \frac{2^{13/3}\pi^{10/3}G^{7/3}}{5c^5} \left(\frac{M}{P}\right)^{10/3}$$

Si ponemos los datos de la primera fuente detectada obtenemos:

```
M=60*Msol # kg
P=1/f1 # segundos
L=(2**((13/3)*pi**((10/3)*G**(7/3))/(5*c**5)*(M/P)**(10/3))
```

```
L estimado = 1.571430487596547e+48
```

Que es increíblemente cercano al valor que habíamos calculado.

## 3.2. Agujeros negros

Los agujeros negros son una de las más sorprendentes predicciones de la Relatividad General. Su existencia fue primero predicha usando la teoría Newtoniana y solo hasta 1915 cuando fue publicada la primera solución analítica de la ecuación de campo la predicción no fue definitivamente confirmada por la teoría y se empezó a especular con su existencia.

### 3.2.1. Historia de los agujeros negros

El primero en predecir la existencia de los agujeros negros o *estrellas negras* como se llamaron originalmente fue John Mitchel en 1784 [1] y luego por Pierre Simon de Laplace en 1796. El argumento tanto de Mitchell como de Laplace se basaba en la velocidad de escape que según la teoría de Newton es:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Lo que calcularon Mitchell y Laplace fue el tamaño que debería tener un objeto para que su velocidad de escape fuera la velocidad de la luz. El resultado es trivial:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

Esta teoría era correcta en el contexto de la teoría corpuscular de la luz pero no en el modelo donde la luz era una onda.

En Noviembre de 1915 Einstein presenta su teoría de la Relatividad General (para una historia del proceso ver [esta entrada de blog](#)<sup>12</sup>). Unos meses después, ya en enero de 1916 Karl Schwarzschild le envía a Einstein unas notas de una solución analítica a la ecuación de campo. Einstein se sorprende por la simplicidad de la solución [2].



Figura 3.11: Karl Schwarzschild

En mayo de 1916 Johannes Droste un estudiante de Hendrik Lorentz presenta un artículo en donde redescubre la solución de Schwarzschild y deduce las propiedades y la fenomenología del espacio-tiempo alrededor de un agujero negro. En particular Droste señala allí la existencia de una singularidad matemática que es la que conocemos como el radio de Schwarzschild.

En 1924 Arthur Eddington estudia en detalle la solución y encuentra que la singularidad desaparece con un cambio adecuado de coordenadas (coordenadas de Eddington-Finkelstein) y estudia las primeras posibilidades de que existieran objetos astrofísicos con estas propiedades.

En 1939 Robert Oppenheimer estudia el colapso extremo de objetos muy densos e identifica el radio de Schwarzschild como una superficie de la que no escaparía la luz. Llama a objetos hipotéticos de ese tipo *estrellas congeladas*.

En 1958 David Finkelstein introduce el concepto de *horizonte de eventos* mostrando que se trata de una frontera imaginaria que podría ser atravesada por un observador en caída libre si se escoge como sistema de coordenadas el de ese observador.

En 1963 Roy Kerr encuentra la solución exacta a las ecuaciones de campo para un agujero negro rotante. Más tarde Ezra Newman descubre la solución axisimétrica de un agujero negro rotante y con carga eléctrica que hoy se conoce como la métrica de Kerr-Newman.

<sup>12</sup><https://trinoceronte.wordpress.com/cronologia-de-un-milagro/>

El término *Agujero Negro* fue acuñado en 1963 para un artículo divulgativo en la revista Life. Otra historia indica que su origen se debe a John Wheeler después de una pregunta que le hizo un estudiante. Oficialmente se considera a Wheeler el inventor del término.

El primer candidato a un agujero negro fue descubierto en 1972 por Charles Thomas Boltón en una binaria e rayos X conocida como Cygnus X-1.

Hoy las evidencias de la existencia de agujeros negros astrofísicos son abundantes:

- Binarias de rayos X.
- Agujero negro supermasivos en el centro de la galaxia.
- Agujeros negros supermasivos en galaxias activas.
- Agujeros negros binarios descubiertos por su emisión de ondas gravitacionales.

En años recientes el área se ha visto enriquecida por varios descubrimientos muy relevantes.

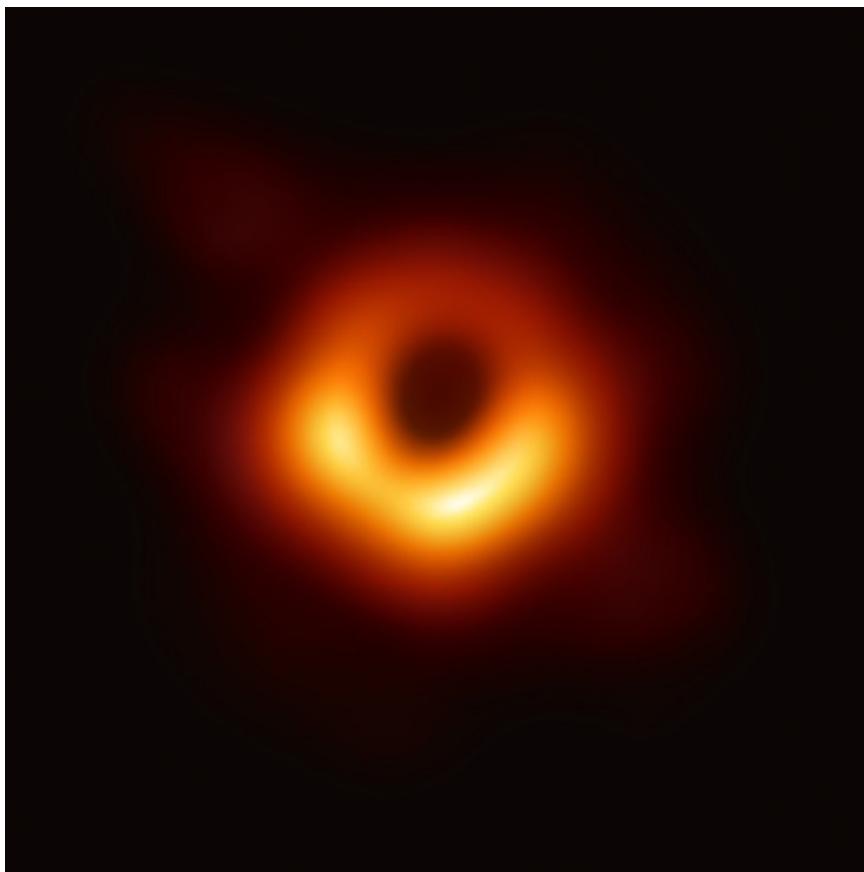
La observación directa del movimiento de estrellas alrededor del agujero negro central de la vía Láctea.

La observación de los efectos de la relatividad general sobre la luz de estrellas que orbitan el agujero negro central .

La observación de la precesión de la órbita de una estrella.

La observación de más de 5 colisiones de agujeros negros binarios por su emisión de ondas gravitacionales por el consorcio LIGO.

La más espectacular que es la observación de alta resolución del disco de acreción alrededor del agujero negro supermasivo de M87 que fue realizada por el *Event Horizon Telescope* en 2019.



**Figura 3.12:** Imagen del agujero negro supermasivo en el centro de la galaxia M87 obtenida por el Event Horizon Telescope el 10 de abril de 2019

### 3.2.2. Un temario

Estos son los temas que desarrollaremos en esta sección:

- La solución de Schwarzschild.
- Propiedades de la métrica de Schwarzschild.
- Movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild.
- Movimiento de la luz cerca al horizonte.
- Las coordenadas de Kruskal-Szekeres.
- Agujeros negros rotantes de Kerr.
- Horizontes y la ergósfera.

### 3.2.3. Métrica de Schwarzschild

Queremos encontrar la métrica en el exterior de una distribución de masa con un total de masa  $M$ , con simetría esférica.

Por razones de simetría usaremos coordenadas esféricas  $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$  que en este contexto se conocen como **coordenadas de Schwarzschild**.

Por estar en el exterior de la masa, la ecuación de campo se reduce a la ecuación en el vacío:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Infinitas métricas  $g_{\mu\nu}$  son compatibles con esta condiciones. ¿Qué es entonces lo que determina la métrica? Las simetrías y condiciones de frontera:

- La métrica debe tener **simetría esférica**. Esta simetría implica:
  - Que una forma simple de la métrica se obtiene usando coordenadas esféricas o coordenadas de Schwarzschild.
  - Que los coeficientes métricos deberían solo depender de la coordenada radial  $r$ .
  - Que la métrica es simétrica,  $g_{\mu\nu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$ .
- Suponemos que la **métrica es estática**. Esto significa que no depende del tiempo (estacionaria) pero además no cambia si se invierte el tiempo  $t \rightarrow -t$ .
- La métrica es asintóticamente plana. Esto implica que a gran distancia  $t \rightarrow \infty$  la métrica se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = dT^2 - dr^2 - d\ell^2$$

donde  $T = ct$ :

$$d\ell = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

es el elemento de línea sobre la superficie de una esfera.

La métrica más general que cumple esas condiciones es:

$$ds^2 = e^{2A(r)} dT^2 - e^{2B(r)} dr^2 - d\ell^2$$

El uso de la función exponencial tiene como propósito:

1. Garantizar que los coeficientes de la métrica son positivos y la signatura se mantiene (métrica de un espacio Lorentziano).
2. Facilitar las derivadas.

Nótese también que la parte tangencial de la métrica no depende de  $r$  para garantizar la simetría esférica.

La condición de que la métrica debe ser asintóticamente plana implica que:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$$

### 3.2.4. Tensores asociados a la métrica {tensores\_schw}

Para proceder a obtener información sobre las funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  debemos calcular todas las cantidades tensoriales asociadas a la métrica y reemplazar en la ecuación de campo.

Las componentes de la métrica son:

$$\begin{aligned} g_{TT} &= e^{2A(r)} \\ g_{rr} &= -e^{2B(r)} \\ g_{\theta\theta} &= -r^2 \\ g_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Y las de la inversa:

$$\begin{aligned} g^{TT} &= e^{-2A(r)} \\ g^{rr} &= -e^{-2B(r)} \\ g^{\theta\theta} &= -\frac{1}{r^2} \\ g^{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \tag{3.8}$$

El procedimiento es bastante laborioso y para hacerlo se puede utilizar una herramienta de cálculo simbólico como [Wolfram Lab Cloud](#)<sup>13</sup>. En el [sitio electrónico del libro](#)<sup>14</sup> se deja al estudiante las rutinas y una guía para los comandos para realizar este cálculo.

### Símbolos de Christoffel {christoffel\_schw}

Dado que la métrica es simétrica, los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero serán:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda &= +\frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}g_{\lambda\lambda,\nu} \\ \Gamma_{\mu\mu}^\lambda &= -\frac{1}{2}g^{\lambda\lambda}g_{\mu\mu,\lambda} \end{aligned}$$

Los símbolos de Christoffel diferentes de cero serán:

<sup>13</sup><http://lab.wolframcloud.com>

<sup>14</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

$$\begin{aligned}
\Gamma_{Tr}^T &= A' \\
\Gamma_{rr}^r &= B' \\
\Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r} \\
\Gamma_{\varphi \theta}^\varphi &= \cot \theta \\
\Gamma_{TT}^r &= A' e^{2(A-B)} \\
\Gamma_{\theta \theta}^r &= -r e^{-2B} \\
\Gamma_{\varphi \varphi}^r &= -e^{-2B} r \sin^2 \theta \\
\Gamma_{\varphi \varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta
\end{aligned} \tag{3.9}$$

### Tensor de Riemann {riemann\_schw}

El tensor de Riemann es:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \{\Gamma^\lambda_{\mu\nu,\kappa} + \Gamma^\delta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\delta}\} - \{\nu \leftrightarrow \kappa\}$$

que se puede expandir como:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\kappa} - \Gamma^\lambda_{\mu\kappa,\nu} + \Gamma^\delta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\delta} - \Gamma^\delta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\delta}$$

Por la simetría del tensor de Riemann y el hecho que la métrica sea diagonal las únicas componentes distintas de cero son:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa}, R^\lambda_{\mu\nu\lambda}$$

es decir:

$$R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^\delta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\delta} - \Gamma^\delta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\delta}$$

En particular los términos distintos de cero serán:

$$R^\lambda_{\mu\mu\lambda} = \Gamma^\lambda_{\mu\mu,\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\mu} + \Gamma^\delta_{\mu\mu}\Gamma^\lambda_{\lambda\delta} - \Gamma^\delta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\delta}$$

Un laborioso cálculo permite encontrar las componentes diferentes de cero no repetidas:

$$\begin{aligned}
R^T_{rrT} &= A'B' - A'' - (A')^2 \\
R^T_{\theta\theta T} &= -r e^{-2B} A' \\
R^T_{\varphi\varphi T} &= -r e^{-2B} A' \sin^2 \theta \\
R^r_{\theta\theta r} &= r e^{-2B} B' \\
R^r_{\varphi\varphi r} &= r e^{-2B} B' \sin^2 \theta \\
R^\theta_{\varphi\varphi\theta} &= (1 - e^{-2B}) \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

### Tensor de Ricci {ricci\_schw}

El tensor de Ricci se define como:

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}$$

Dado que los únicos términos distintos de cero del tensor de Riemann son aquellos para los cuales  $\mu = \nu$ , descubrimos que el tensor de Ricci es diagonal:

$$R_{\mu\mu} = \sum_{\lambda} R^{\lambda}_{\mu\mu\lambda}$$

Para el cálculo por ejemplo de  $R_{TT}$ , por ejemplo:

$$R_{TT} = R^r_{TTr} + R^\theta_{TT\theta} + R^\varphi_{TT\varphi}$$

Para obtener el término  $R^r_{TTr}$  se debe usar la propiedad:

$$R^r_{TTr} = g^{rr} R_{rTTr} = g^{rr} R_{TrT} = g^{rr} g_{TT} R^T_{rrT}$$

Después de un álgebra laboriosa obtenemos:

$$\begin{aligned} R_{TT} &= -e^{2(A-B)} \left[ A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2A'}{r} \right] \\ R_{rr} &= A'' + (A')^2 - A'B' - \frac{2B'}{r} \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta \left\{ e^{2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \right\} \end{aligned}$$

### Escalar de curvatura {escalar\_curvatura\_schw}

El escalar de curvatura se calcula usando:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}$$

Al reemplazar queda:

$$R = -2e^{-2B} \left[ A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2}{r} (A' - B') + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2}$$

### Tensor de Einstein {tensor\_einstein\_schw}

Por último el tensor de Einstein es la traza inversa del tensor de Ricci:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

Dado que ambos  $g_{\mu\nu}$  y  $R_{\mu\nu}$  son simétricos el tensor de Einstein también lo es:

$$G_{\mu\mu} = R_{\mu\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\mu} R$$

El álgebra en este caso produce:

$$\begin{aligned} G_{TT} &= -\frac{2e^{2(A-B)}}{r}B' + \frac{e^{2(A-B)}}{r^2} - \frac{e^{2A}}{r^2} \\ G_{rr} &= -\frac{2A'}{r} + \frac{e^{2B}}{r^2} - \frac{1}{r^2} \\ G_{\theta\theta} &= -r^2 e^{-2B} \left[ A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] \\ G_{\varphi\varphi} &= -r^2 e^{-2B} \sin^2 \theta \left[ A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] \end{aligned}$$

### 3.2.5. Ecuación de campo y solución {ecuacion\_campo\_schw}

Con todos los elementos a la mano, podemos ahora preguntarnos por cuál es la condición que debe cumplir  $A(r)$  y  $B(r)$  para que se cumpla la ecuación de campo:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

o bien:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right)$$

Como estamos en un punto por fuera del cuerpo, eso implica que ambos:

$$G_{\mu\nu} = 0$$

y

$$R_{\mu\nu} = 0$$

Adicionalmente esta última condición implica también que:

$$R = 0$$

Tenemos un total de 9 condiciones posibles:

$$\begin{aligned}
& -e^{2(A-B)} \left[ A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2A'}{r} \right] = 0 \quad (R_{TT}) \\
& A'' + (A')^2 - A'B' - \frac{2B'}{r} = 0 \quad (R_{rr}) \\
& e^{-2B} [1 + r(A' - B')] - 1 = 0 \quad (R_{\theta\theta}) \\
& \sin^2 \theta \left\{ e^{2B} [1 + r(A' - B')] - 1 \right\} = 0 \quad (R_{\varphi\varphi}) \\
& -2e^{-2B} \left[ A'' + (A')^2 - A'B' + \frac{2}{r}(A' - B') + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2} = 0 \quad (R) \\
& -\frac{2e^{2(A-B)}}{r} B' + \frac{e^{2(A-B)}}{r^2} - \frac{e^{2A}}{r^2} = 0 \quad (G_{TT}) \\
& -\frac{2A'}{r} + \frac{e^{2B}}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (G_{rr}) \\
& -r^2 e^{-2B} \left[ A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] = 0 \quad (G_{\theta\theta}) \\
& -r^2 e^{-2B} \sin^2 \theta \left[ A'' + (A')^2 + \frac{A' - B'}{r} - A'B' \right] = 0 \quad (G_{\varphi\varphi})
\end{aligned}$$

Hay muchas posibilidades pero una de las más sencillas es combinar  $e^{-2A}G_{TT} + e^{-2B}G_{rr}$  para producir:

$$\frac{2e^{-2B}}{r} (A' + B') = 0$$

que implica obviamente:

$$A' = -B'$$

Está última ecuación se puede integrar para producir:

$$B(r) = -A(r) + C$$

¿Qué papel tiene la constante  $C$ ? Lo único que hace  $C$  es hacer el coeficiente de la componente  $r$  de la métrica  $\exp[2B(r)] = \exp[-2A(r) + 2C] = \exp[-2A(r)] \exp(2C)$  un poco mayor o un poco menor en una constante, sin afectar en nada su dependencia de  $r$ . Ese factor adicional se puede eliminar con un cambio en las unidades de  $r$ , tal que en esas unidades  $\exp(2C) = 1$  y por tanto  $C = 0$ . La relación resultante es entonces:

$$B(r) = -A(r)$$

De modo que la métrica será:

$$ds^2 = e^{2A(r)} dT^2 - e^{-2A(r)} dr^2 - d\ell^2$$

Con esta identidad la ecuación para  $G_{TT}$  se convierte en:

$$\begin{aligned}
 -\frac{2e^{-4B}}{r}B' + \frac{e^{-4B}}{r^2} - \frac{e^{-2B}}{r^2} &= 0 \\
 -2e^{-2B}rB' + e^{-2B} - 1 &= 0 \\
 \frac{d}{dr}[r(e^{-2B} - 1)] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Esta ecuación se integra trivialmente como:

$$e^{-2B} = 1 + \frac{K}{r}$$

donde  $K$  es una constante.

De aquí y por  $A(r) = -B(r)$  obtenemos:

$$e^{2A} = 1 + \frac{K}{r}$$

De modo que arribamos a la métrica más general compatible con las condiciones del problema:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{K}{r}\right) dT^2 - \left(1 + \frac{K}{r}\right)^{-1} dr^2 - d\ell^2$$

Es posible probar con los programas provistos con la [versión electrónica del libro](#)<sup>15</sup> que esta métrica tiene tensor de Ricci, tensor de Einstein y escalar de curvatura cero como era de esperarse. Adicionalmente vemos que la métrica es asintóticamente plana, cumpliendo con todas las condiciones impuestas inicialmente.

Ahora bien: ¿cuánto vale la constante  $K$ ? Para esto nos podemos valer del principio de consistencia.

Sabemos que esta métrica en el límite de campo débil debe ser igual a la métrica de Newton:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - dr^2 - d\ell^2$$

donde  $R_S = 2GM/c^2$  es la escala de longitud asociada a la masa  $M$ .

Una comparación entre estas dos métricas nos muestra que:

$$K = -R_S$$

y la solución queda finalmente:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - d\ell^2$$

---

<sup>15</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

### 3.2.6. Cantidades asociadas a la métrica

Con la forma final de la métrica obtenida podemos escribir finalmente los símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{Tr}^T &= \frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 \Gamma_{rr}^r &= -\frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{\varphi \theta}^\varphi &= \cot \theta \\
 \Gamma_{TT}^r &= \frac{R_S}{2r^2} \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) \\
 \Gamma_{\theta \theta}^r &= -r \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) \\
 \Gamma_{\varphi \varphi}^r &= -r \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) \sin^2 \theta \\
 \Gamma_{\varphi \varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Las componentes del tensor de Riemann son:

$$\begin{aligned}
 R^T_{rrT} &= \frac{R_S}{r^3} \frac{1}{1 - R_S/r} \\
 R^T_{\theta \theta T} = R^r_{\theta \theta r} &= -\frac{R_S}{2r} \\
 R^T_{\varphi \varphi T} = R^r_{\varphi \varphi r} &= -R^\theta_{\varphi \varphi \theta} = -\frac{R_S}{2r} \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Las ecuaciones geodésicas serán:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_T &= -\frac{R_S}{r^2} \frac{1}{1-R_S/r} U_T U_r \\
 \dot{U}_r &= -\frac{R_S}{2r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) U_T^2 + \\
 &\quad + \frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1-R_S/r} U_r^2 + \\
 &\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r U_\theta^2 + \\
 &\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r \sin^2 \theta U_\varphi^2 \\
 \dot{U}_\theta &= -\frac{2}{r} U_r U_\theta + \cos \theta \sin \theta U_\varphi^2 \\
 \dot{U}_\varphi &= -\frac{2}{r} U_r U_\varphi - 2 \cot \theta U_\theta U_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde  $U_\mu \equiv dx^\mu / d\sigma$ .

### 3.2.7. Integración numérica

Para conocer las propiedades de la métrica, podemos programar las ecuaciones de la geodésica e integrarlas numéricamente.

Lo primero es escribir las ecuaciones diferenciales:

```

def geodesica_schwarzschild(Y,s,Rs):
    #Coordenadas y sus velocidades
    T,r,q,f,dTds,drds,dqds,dfds=Y
    #Factores
    A=1-Rs/r
    v=Rs/(2*r**2)
    #ecuaciones
    from numpy import zeros_like,sin,cos
    dYds=zeros_like(Y)
    #Ecuaciones de velocidades
    dYds[4:]=Y[4:]
    #Aceleraciones
    dYds[4]=-2*v/A*dTds*drds
    dYds[5]=-v*A*(dTds)**2+\
              v/A*(drds)**2+\
              A*r*(dqds)**2+\
              A*r*sin(q)**2*(dfds)**2
    dYds[6]=-(2/r)*drds*dqds+cos(q)*sin(q)*(dfds)**2
    dYds[7]=-(2/r)*drds*dfds-2*cos(q)/sin(q)*(dqds)*(dfds)
    return dYds

```

Definamos las propiedades

```

# Constantes
c=3e8 # m/s
G=6.67e-11 # m^3 kg^-1 s^-2
M=1.98e30 # kg

# Radio de Schwarzschild
Rs=2*G*M/c**2

# Velocidad característica
from numpy import pi,sqrt
r0=10*Rs
v0=sqrt(G*M/r0)
df0ds=(v0/r0/c) # r df/d(ct) = v/c
P=2*pi*c*r0/v0 # Período típico

```

$R_S = 2934.8 \text{ m}$   
 $v/c = 0.22360679774997896 \text{ c}$   
 $d(f_i)/ds = 7.619149439484087e-06$   
 $P = 824657.0509063328 \text{ m}$

Las condiciones iniciales:

```

from numpy import pi,array
Y0s=array([
    0,r0,pi/2,0.0,
    1.0,0.0,0.0,0.9*df0ds
])

from numpy import linspace
ss=linspace(0,3*P,300)

```

La solución es:

```

from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(geodesica_schwarzschild,Y0s,ss,args=(Rs,))

Ts=Ys[:,0]
rs=Ys[:,1]
qs=Ys[:,2]
fs=Ys[:,3]

```

En coordenadas cartesianas:

```

from numpy import sin,cos
xs=rs*sin(qs)*cos(fs)
ys=rs*sin(qs)*sin(fs)
zs=rs*cos(qs)

```

Un gráfico de la solución

(Algoritmo 3.5)

```

import matplotlib.pyplot as plt
plt.close("all")
from matplotlib.patches import Circle
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

ax.plot(xs/Rs,ys/Rs,'k-')
cRs=Circle((0,0),1,fill=None,ls='--')
ax.add_patch(cRs)

#Decoración
rang=1.2*max(abs(xs).max(),abs(ys).max())/Rs
ax.set_xlim((-rang,rang))
ax.set_ylim((-rang,rang))
ax.set_xlabel("$x/R_S$")
ax.set_ylabel("$y/R_S$")
ax.xaxis.set_label_coords(0.5,0.05)
ax.yaxis.set_label_coords(0.05,0.5)
ax.grid()
fig.tight_layout()

```

ver Figura 3.13

Para ver una versión animada de esta gráfica vea la [versión electrónica<sup>16</sup>](#) de este libro.

### 3.2.8. Coordenadas y medidas

La métrica de Schwarzschild,

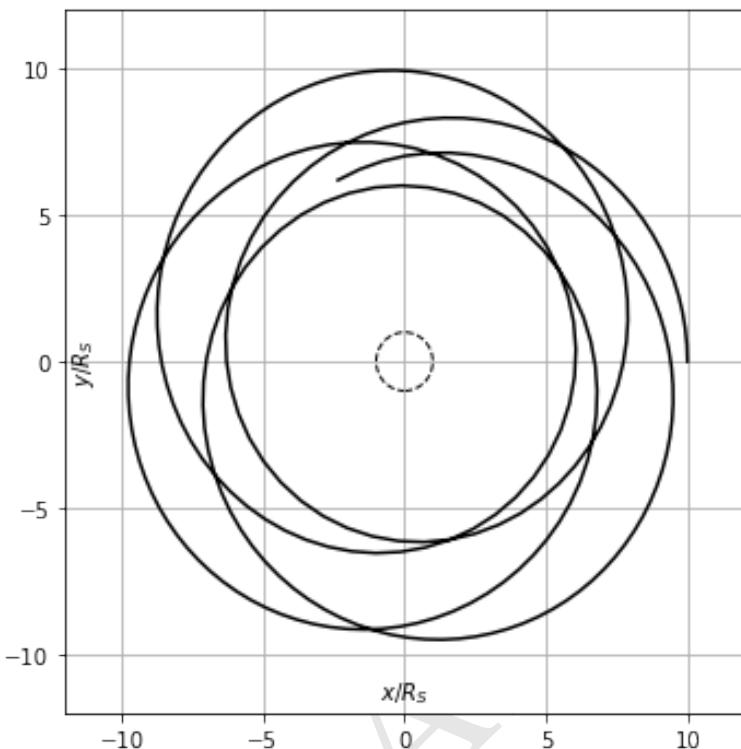
$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - d\ell^2$$

como cualquier otra métrica, nos permite calcular directamente la distancia entre eventos cercanos en el espacio-tiempo alrededor de un objeto esféricamente simétrico. Pero ¿qué significa esa distancia y como se relaciona con las *medidas* que pueden realizar distintos observadores que estudian la gravedad cerca al cuerpo?

Podemos reconocer 3 tipos básicos de observadores en un campo gravitacional:

1. **Observador en reposo.** Este observador no cambia sus coordenadas y esta en reposo respecto al centro del cuerpo. Naturalmente su reposo no es compatible con la estructura del espacio-tiempo que dicta que debería moverse en una geodésica que sabemos esta asociada con la caída libre. Para mantener su condición este observador debe usar un mecanismo externo, un cohete, una cuerda que le llega de mucho más arriba. Podemos considerar que *localmente* este observador percibe un espacio-tiempo plano, pero para hacer consistentes sus observaciones del mundo debemos agregar a sus sistema de referencia

<sup>16</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>



**Figura 3.13:** Figura correspondiente al código 3.5.

una *fuerza* gravitacional que obliga a las cosas localmente a su alrededor a acelerarse hacia el centro. Usaremos el subíndice **st** (*static*) para representar las cantidades medidas por este observador.

2. **Observador en caída libre.** Otra posibilidad es estudiar los fenómenos mientras se describe una geodésica en el espacio-tiempo. Llamamos a este tipo de observador un *observador en caída libre*. De acuerdo con el principio de equivalencia, este observador es localmente inercial y no percibe los efectos del campo gravitacional. La métrica que percibe localmente es también la del espacio-tiempo plano. Una observación importante es que el observador en caída libre no está en reposo respecto al centro del cuerpo que ve acercarse (o alejarse) a medida que se mueve en su geodésica. Usaremos el subíndice **ff** (*free-fall*) para representar las cantidades medidas por este observador.
3. **Observador remoto.** Un tipo de observador en caída libre muy útil es uno que se encuentra a una distancia muy grande del cuerpo. Este observador está prácticamente en reposo respecto al cuerpo masivo. Dado que se encuentra muy lejos, pero también que está en caída libre la métrica que percibe es la métrica de Minkowski. Usaremos el subíndice “∞” para representar las cantidades medidas por este observador.

La pregunta que nos hacemos es: ¿a qué observación de cuál observador co-

rresponden los valores de las coordenadas de Schwarzschild,  $(t, r, \theta, \phi)$ ?

Este es uno de los aspectos más extraños (o nuevos respecto a nuestra visión clásica del mundo y de la física): la libertad que tenemos en relatividad general de elegir las coordenadas hace que sea físicamente irrelevante lo que significan las coordenadas anteriores. Estrictamente hablando  $t$ , por ejemplo, no corresponde necesariamente a un tiempo o  $r$  a una distancia. Son solo etiquetas para nombrar los eventos alrededor del cuerpo que produce el campo gravitacional. Es posible que después de un cambio de coordenadas los tiempos medidos por un observador correspondan a una mezcla de valores de  $t$  y  $r$ .

La coordenada temporal deja de ser tiempo, es solo una de 4 coordenadas.

Para definir rigurosamente las medidas de tiempo y distancia en cualquier métrica en un campo gravitacional debemos realizar experimentos. Solo los experimentos nos proveerán de la intuición básica de lo que pasa en un campo gravitacional.

### 3.2.9. Dilatación gravitacional del tiempo

Consideremos por ejemplo una situación en la que tenemos una fuente de luz situada en reposo en un punto del espacio con coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ . Imaginemos que la fuente emite pulsos muy cortos de luz periódicamente (con una periodicidad tan pequeña como queramos).

Tomemos dos pulsos caracterizados por coordenadas de Schwarzschild  $E_1 : (t, r, \theta, \phi)$  y el fin de la emisión  $E_2 : (t + dt_{\text{em}}, r, \theta, \phi)$ , siendo aquí  $dt$  la diferencia (arbitrariamente pequeña) entre las coordenadas  $t$  de los dos pulsos.

De acuerdo con la métrica de Schwarzschild la distancia espacio-temporal entre estos eventos será:

$$ds = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} c dt_{\text{em}}$$

De acuerdo con la relatividad general este intervalo debe ser el mismo para cualquier sistema de coordenadas construido alrededor del evento. En particular podemos usar el sistema de coordenadas de un observador en reposo al lado de la fuente de luz. Recordemos que para este observador la métrica local es Minkowskiana y dado que estamos considerando dos eventos que ocurren en el mismo lugar del espacio, entonces la separación espacio-temporal entre los eventos será igual (en unidades luz) al tiempo propio entre ellos medidos por el observado  $d\tau_{\text{st}}^2$ . De este modo:

$$d\tau_{\text{st}} = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} dt_{\text{em}}$$

Aquí esta la primera evidencia de que las coordenadas de Schwarzschild en realidad no *necesariamente* corresponden a una medida hecha por un observador concreto. Ni siquiera un observador parado al lado de una fuente de luz mide el “tiempo”  $dt$ .

Permitamos que la luz de la fuente se propague en todas direcciones. Nos interesa en particular un rayo de luz que se propaga en dirección radial hacia afuera ( $d\ell = 0$ ). Al tratarse de un rayo de luz, los eventos que va visitando el rayo se encuentran separados entre sí por una distancia espacio-temporal nula:

$$0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dT^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2$$

De aquí podemos deducir la ecuación de movimiento del rayo de luz que sale hacia fuera, que podemos escribir, convenientemente, como:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c} \frac{1}{1 - R_S/r}$$

Si integramos entre el tiempo de emisión  $t$  y un tiempo de detección  $t_{\text{obs}}$ , en algún punto lejos del cuerpo,  $r = r_{\text{obs}}$ , obtenemos:

$$t_{\text{obs}} - t = \frac{r_{\text{obs}} - r}{c} + \frac{c}{R_S} \ln \left( \frac{r_{\text{obs}} - R_S}{r - R_S} \right)$$

una expresión bastante complicada para algo tan sencillo como un rayo de luz saliendo del cuerpo.

La ecuación anterior representa la ecuación de una geodésica nula alrededor del cuerpo. En el código a continuación dibujamos geodésicas nulas alrededor de un cuerpo:

```
%matplotlib inline

#Condiciones iniciales
c=3e5 # km/s
RS=3e5 # km
r=1.1*RS

from numpy import linspace
robs=linspace(r,10*RS,100)

from numpy import log
tobs=(robs-r)/c+c/RS*log((robs-RS)/(r-RS))
tpla=(robs-r)/c

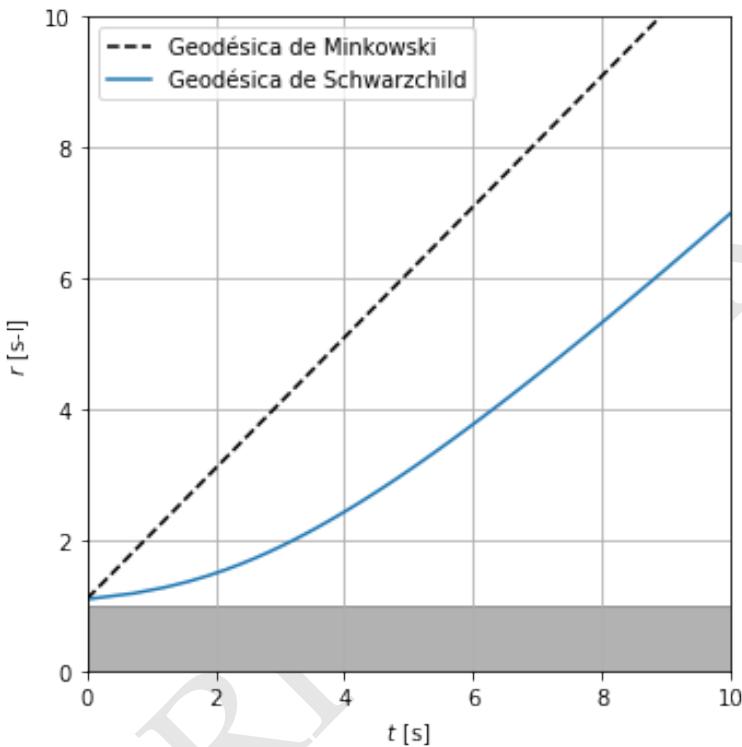
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.axhspan(0,1,color='k',alpha=0.3)
ax.plot(tpla,robs/c,'k--',label='Geodésica de Minkowski')
ax.plot(tobs,robs/c,label='Geodésica de Schwarzschild')

#Decoración
ax.set_xlabel("$t$ [s]")
ax.set_ylabel("$r$ [s-1]")
ax.legend()
rang=max(robs/c)
ax.set_xlim((0,rang))
ax.set_ylim((0,rang))
```

(Algoritmo 3.6)

```
ax.grid()
fig.tight_layout()
```

*ver Figura 3.14*



**Figura 3.14:** Figura correspondiente al código 3.6.

Si tomamos dos pulsos de luz consecutivos separados por una diferencia coordenada de tiempo  $dt_{\text{em}}$ , emitidos desde la misma coordenada radial  $r$ , los tiempos de detección de estos pulsos en el lugar lejano, que podemos llamar  $t_{\text{obs}}$  y  $t'_{\text{obs}}$ , serán:

$$\begin{aligned} t_{\text{obs}} - t &= \frac{r_{\text{obs}} - r}{c} + \frac{c}{R_S} \ln \left( \frac{r_{\text{obs}} - R_S}{r - R_S} \right) \\ t'_{\text{obs}} - (t + dt_{\text{em}}) &= \frac{r_{\text{obs}} - r}{c} + \frac{c}{R_S} \ln \left( \frac{r_{\text{obs}} - R_S}{r - R_S} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

De modo que la diferencia entre las coordenadas temporales en el lugar lejano  $dt_{\text{obs}} = t'_{\text{obs}} - t_{\text{obs}}$  será:

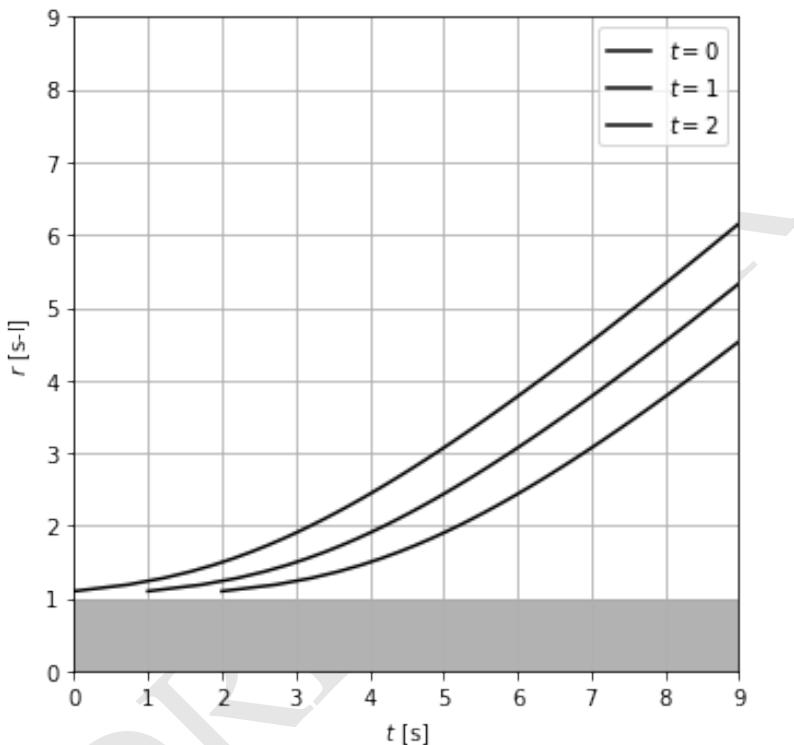
$$dt_{\text{obs}} = dt_{\text{em}}$$

esto, sin importar la distancia a la que se encuentre el observador.

Este resultado aplica incluso si los eventos tienen una separación macroscópica:

$$\Delta t_{\text{obs}} = \Delta t_{\text{em}}$$

Esta igualdad se puede ilustrar graficando múltiples rayos de luz:



**Figura 3.15:** Geodésica nula de rayos de luz que viajan radialmente hacia afuera desde el mismo punto.

Puede verse que independientemente de la trayectoria que sigan los rayos de luz, la separación entre ellos al llegar a un observador lejano será siempre la misma (1 segundo).

En particular para el observador remoto, que definíamos al principio, el tiempo medido y el tiempo coordenado entre los dos eventos de llegada de los pulsos será igual, de modo que concluimos que:

$$\Delta\tau_\infty = \Delta t_{\text{em}}$$

Es decir, podemos relacionar los intervalos de tiempo coordinado (en coordenadas de Schwarzschild) entre eventos en el mismo lugar del espacio, con el tiempo medido por relojes de un observador remoto.

Esto finalmente implica la relación:

$$\Delta\tau_{st} = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} \Delta\tau_\infty$$

Que se escribe más convenientemente como:

$$\Delta\tau_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 - R_S/r}} \Delta\tau_{st}$$

Si definimos  $\rho = r/R_S$  y:

$$\Gamma(\rho) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - 1/\rho}}$$

en clara analogía con el factor de Lorentz-Einstein de la relatividad especial  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , entonces la anterior expresión se escribe como:

$$\Delta\tau_\infty = \Gamma(\rho) \Delta\tau_{st}$$

Como vemos el tiempo *observado* entre dos eventos que ocurren en la misma coordenada  $r$  alrededor del cuerpo es siempre mayor que el tiempo *propio* registrado entre estos dos eventos por un observador en reposo al lado del fenómeno. Llamamos a este fenómeno **dilatación gravitacional del tiempo**.

Hagamos un cálculo típico. Por ejemplo supongamos que tenemos un fenómeno magnético (una región de actividad) que se desarrolla en la superficie del Sol (que suponemos aproximadamente quieto y simétricamente esférica) durante 1 mes o  $2,6 \times 10^6$  segundos. Cuánto dura el mismo fenómeno *visto* desde la Tierra:

```
#Radio de Schwarzschild del Sol
RS=3 # km

#Radio del Sol
r=7e5 # km

rho=r/RS

#Duración "propia" del fenómeno
dtst=2.6e6 # s

#Factor de dilatación
from numpy import sqrt
G=1/sqrt(1-1/rho)

#Duración del fenómeno para un observador remoto
dtin=G*dtst

#Diferencia de tiempo
Dt=dtin-dtst
```

El fenómeno visto desde la Tierra dura 5.571446479763836 segundos más

Como vemos, más interesante que la dilatación misma es la diferencia entre el tiempo medido remotamente y el tiempo propio del fenómeno:

$$\Delta\tau_\infty - \Delta\tau_{\text{st}} = [\Gamma(\rho) - 1] \Delta\tau_{\text{st}}$$



### Nota

**Expresión aproximada para  $\Gamma$ .** Una forma muy conveniente para escribir  $\Gamma(\rho)$  se obtiene cuando el lugar en el que se produce la luz está a una distancia  $r \gg R_S$ , es decir  $\rho \gg 1$ . En este caso:

$$\Gamma(\rho) \approx 1 + \frac{1}{2\rho}$$

o bien,

$$\Gamma(\rho) - 1 \approx \frac{1}{2\rho}$$

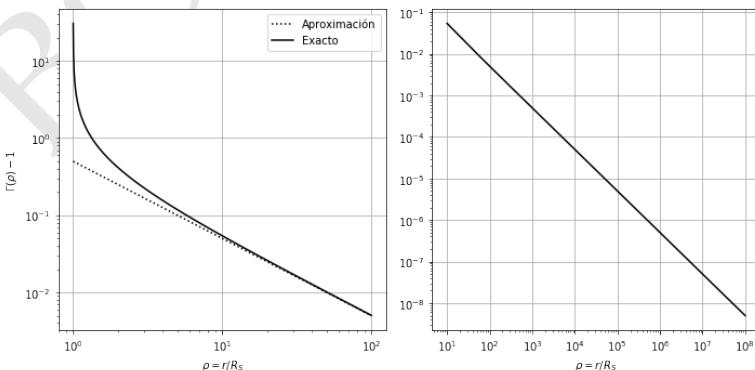
Usando el hecho que  $R_S = 2GM/c^2$  y definiendo  $\Phi(r, M) \equiv -GM/r$  o bien  $\Phi(\rho) = -c^2/(2\rho)$  (potencial gravitacional clásico), entonces:

$$\Gamma(\rho) \approx 1 - \frac{\Phi(\rho)}{c^2}$$

o lo que es lo mismo:

$$\Gamma(\rho) - 1 \approx -\frac{\Phi(\rho)}{c^2}$$

En la figura a continuación se muestra el valor de  $\Gamma(\rho)$  para distintos valores de la razón  $\rho = r/R_S$ .



**Figura 3.16:** Valores del factor de dilatación de Schwarzschild para distintos valores de .

### 3.2.10. Corrimiento al rojo gravitacional

No es difícil convertir el resultado anterior en los cambios que sufre un rayo de luz monocromático que se propaga radialmente en la métrica de Schwarzschild.

Si tomamos  $\Delta\tau_{st} = P_{em}$ , donde  $P_{em}$  es el período de una onda monocromática, entonces:

$$P_\infty = \Gamma(\rho) P_{em}$$

La frecuencia  $f$  de la onda será:

$$f_\infty = \frac{1}{\Gamma(\rho)} f_{em}$$

Es decir lejos del cuerpo la frecuencia percibida será menor que la frecuencia emitida. La longitud de onda, por otro lado, será:

$$\lambda_\infty = \Gamma(\rho) \lambda_{em}$$

En términos de  $\Gamma$  el corrimiento al rojo  $z \equiv (\lambda_{obs} - \lambda_{em}) / \lambda_{em}$ , se puede escribir como:

$$z_\infty = \Gamma(\rho) - 1$$

que es justamente la cantidad graficada más arriba.

Como vemos el corrimiento al rojo para cuerpos astrofísicos relativamente normales para los cuales  $\rho \gg 1$ , es muy pequeño y difícil de detectar.

El primer intento por medir el corrimiento al rojo gravitacional se realizó en los 1925 con la enana blanca Sirio B. Podemos calcular la magnitud del corrimiento esperado para esta estrella. Para ello lo podemos parametrizar, como se acostumbra en astronomía, en términos de una velocidad usando  $v_z = cz$ :

```
# Radio de Schwarzschild
RS=3 # km

# Radio de la estrella
r=1e4 # km

# Velocidad de la luz
c=3e5

# Factor Gamma
from numpy import sqrt
rho=r/RS
G=1/sqrt(1-1/rho)

# Corrimiento al rojo
z=(G-1)
vz=z*c
```

Corrimiento esperado para Sirius B: 45.01 km/s

Lamentablemente por problemas de contaminación la medida no fue posible en aquella época y solo hasta 1954 logró medirse el corrimiento en la enana blanca Epsilon Eridani B.

En situaciones realistas las observaciones se hacen con observadores situados a distancias finitas. En este caso:

$$\begin{aligned}\Delta\tau_\infty &= \Gamma(\rho_1) \Delta\tau_{\text{st}}^{(1)} \\ \Delta\tau_\infty &= \Gamma(\rho_2) \Delta\tau_{\text{st}}^{(2)}\end{aligned}$$

De aquí que:

$$\Delta\tau_{\text{st}}^{(2)} = \frac{\Gamma(\rho_1)}{\Gamma(\rho_2)} \Delta\tau_{\text{st}}^{(1)}$$

Y por lo tanto la fórmula del corrimiento al rojo gravitacional será:

$$\lambda_{\text{obs}} = \frac{\Gamma(\rho_1)}{\Gamma(\rho_2)} \lambda_{\text{em}}$$

En términos explícitos:

$$\lambda_{\text{obs}} = \sqrt{\frac{1 + 2\Phi(\rho_2)/c^2}{1 + 2\Phi(\rho_1)/c^2}} \lambda_{\text{em}}$$

Para valores  $\Phi \ll c$ , se puede usar la expansión:

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{em}}} \approx 1 + \frac{[\Phi(\rho_2) - \Phi(\rho_1)]}{c^2}$$

o en términos del corrimiento al rojo  $z \equiv (\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{em}})/\lambda_{\text{em}}$ :

$$z \approx \frac{\Phi(\rho_2) - \Phi(\rho_1)}{c^2}$$

### 3.2.11. Contracción de longitudes

Otro interesante pero muy sutil efecto geométrico en un espacio con la métrica de Schwarzschild es el que es conocido como la contracción gravitacional de longitudes.

Para introducir este efecto tomemos eventos en las vecindades del cuerpo que comparten la misma coordenada temporal. Así por ejemplo podemos tomar dos eventos con coordenadas  $E_1 : (t, r, \theta, \phi)$  y  $E_2 : (t, r, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$ . La distancia entre estos eventos será:

$$ds^2 = -d\ell^2$$

donde:

$$d\ell^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Es decir los puntos se encuentran ubicados sobre una triesfera. La distancia entre esos puntos obedecerá las reglas habituales de la trigonometría esférica. Es decir en superficies de  $t$  y  $r$  constantes en el espacio de Schwarzschild la geometría es convencional.

En particular podemos calcular la longitud  $C$  de una circunferencia máxima y obtenemos el resultado habitual:

$$C = 2\pi r$$

Todo parece muy normal para ser cierto. ¿Dónde está la sutileza? La sutileza está en pensar que  $r_0$  es la distancia al centro de la distribución de materia. Recordemos que  $r_0$  es solo una de las partes de la etiqueta que usamos para indicar la posición de eventos alrededor del cuerpo y no corresponde con una cantidad medida realmente. Sin embargo  $C$  sí que es una cantidad real, medible: podemos usar reglas en el sistema de referencia en reposo, orientadas en dirección perpendicular a la “fuerza” de gravedad para medir  $C$ . Aquí aparece un resultado interesante y es que midiendo  $C$  podemos determinar  $r$ :

$$r = \frac{C}{2\pi}$$

Imaginemos ahora dos eventos  $E_1 : (t, r, \theta, \phi)$ ,  $E_2 : (t, r + dr, \theta, \phi)$  situados en una misma dirección radial. La distancia espacio temporal entre los eventos es ahora:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2$$

El observador en reposo al lado de los dos eventos y situado en  $r$  la *distan-*  
cia entre los eventos será,  $ds^2 = -dr_{st}^2$  donde  $r_{st}$  es una coordenada radial usada localmente por el observador a lo largo de la dirección radial:

$$dr_{st} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}$$

es decir:

$$dr = \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}} dr_{st}$$

Es decir, si muchos observadores se ponen de acuerdo para poner una barra de longitud igual  $dr_{st}$  en dirección radial entre ellos, la separación en la coordenada radial entre los observadores no será uniforme. Cerca  $R_S$  será menor y muy lejos de él será mayor.

El observador remoto puede realizar una tarea similar. Conociendo donde está la fuente de materia, construye un sistema de coordenadas cuyo origen coincide con la distribución de materia y usa también coordenadas esféricas. Ese observador aplica sobre el espacio tiempo de todo el universo (incorrectamente) la métrica de Minkowski (el juzga que todo puede medirse con sus estándares). De nuevo, la distancia entre esos dos eventos las juzga igual a  $ds^2 = -dr_\infty^2$ . Dado que la distancia espacio-temporal debe coincidir:

$$dr_{\infty} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}$$

La distancia finita  $\Delta r_{\infty}$ , medida por el observador remoto, entre dos circunferencias concéntricas con coordenadas de Schwarzschild  $r_1$  y  $r_2$  se obtiene integrando:

$$\Delta\rho_{\infty} = \left\{ \rho \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} + \frac{1}{2} \log \left[ 2\rho \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} + 1 \right) - 1 \right] \right\}_{\rho_1}^{\rho_2}$$

donde hemos usado aquí la variable radial normalizada  $\rho = r/R_S$

De aquí vemos que la distancia medida desde  $\rho_1 = 1$  a cualquier coordenada  $\rho_2 = \rho$  es:

$$\Delta\rho_{\infty} = \rho \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} + \frac{1}{2} \log \left[ 2\rho \left( \sqrt{1 - \frac{1}{\rho}} + 1 \right) - 1 \right]$$

Ciertamente esta es una expresión mucho más complicada que  $\Delta\rho_{\infty}$ . Para entenderla mejor hagamos un gráfico:

(Algoritmo 3.7)

```
from numpy import linspace,sqrt,log
rho=linspace(1,10,1000)
drho_inf=rho*sqrt(1-1/rho)+0.5*log(2*rho*(sqrt(1-1/rho)+1)-1)

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

ax.plot(rho,drho_inf)

#Decoración
ax.grid()

ax.set_xlabel(r"$r/R_S$")
ax.set_ylabel(r"$\Delta r_{\infty}/R_S$")

rang=max(drho_inf)
ax.set_xlim((1,rang+1))
ax.set_ylim((0,rang))
fig.tight_layout()
```

ver Figura 3.17

### 3.2.12. Movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild

La verdadera experiencia extrema en un agujero negro la siente un observador que cae libremente.

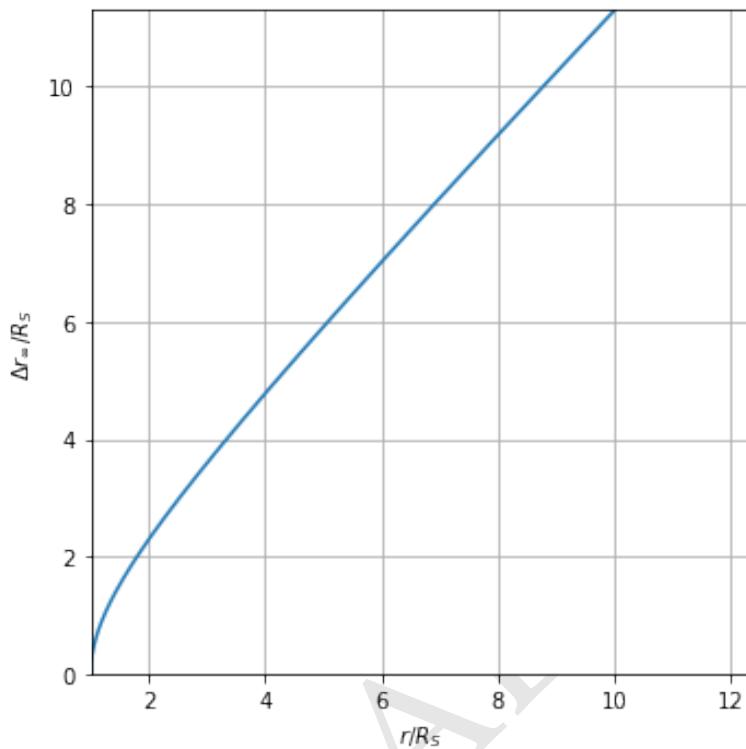


Figura 3.17: Figura correspondiente al código 3.7.

Para describir esta experiencia necesitamos estudiar el movimiento geodésico en la métrica. Antes habíamos escrito las ecuaciones geodésicas:

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_T &= -\frac{R_S}{r^2} \frac{1}{1-R_S/r} U_T U_r \\
 \dot{U}_r &= -\frac{R_S}{2r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) U_T^2 + \\
 &\quad + \frac{R_S}{2r^2} \frac{1}{1-R_S/r} U_r^2 + \\
 &\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r U_\theta^2 + \\
 &\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) r \sin^2 \theta U_\varphi^2 \\
 \dot{U}_\theta &= -\frac{2}{r} U_r U_\theta + \cos \theta \sin \theta U_\varphi^2 \\
 \dot{U}_\varphi &= -\frac{2}{r} U_r U_\varphi - 2 \cot \theta U_\theta U_\varphi
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde  $U_\mu \equiv dx^\mu / d\sigma$  y  $\sigma$  es un parámetro conforme (tiempo propio  $\tau$  en el caso de una partícula con masa y  $\lambda$  en el caso de una partícula sin masa).

Es claro que una solución analítica a estas ecuaciones en toda su generalidad no es posible. Sin embargo es posible estudiar el comportamiento de estas ecuaciones encontrando las constantes de movimiento.

### 3.2.13. Constantes de movimiento

En el caso por ejemplo de una partícula con masa  $m$  sabemos que una constante de movimiento está dada por el módulo de la cuadrvivelocidad:

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = c^2$$

Que se puede escribir explícitamente como:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\ell}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

donde  $d\ell^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$ .

La métrica tiene dos vectores de Killing: el correspondiente al tiempo  $\xi_t$ :  $(1, 0, 0, 0)$  y el que corresponde a la coordenada angular  $\phi$ ,  $\xi_\phi$ :  $(0, 0, 0, 1)$ . Habíamos visto que esto implica que las cantidades:

$$g_{\mu\nu} \xi^\mu U^\nu$$

son también constantes.

Asociada con la simetría temporal (que viene del hecho que la métrica es estática) tenemos la constante:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \mathcal{E}$$

¿Qué es la cantidad  $\mathcal{E}$ ? Clásicamente sabemos que la simetría temporal está asociada con la energía. Es por eso que hemos llamado a esta cantidad con este nombre. Pero ¿es realmente  $\mathcal{E}$  una energía. Para entender lo que esta cantidad representa, consideremos el caso en el que tenemos la partícula moviéndose con una velocidad  $v$  a una distancia  $r \gg R_S$ . En este caso la cuadratura queda:

$$\mathcal{E} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{dt}{d\tau}$$

Dado que el espacio es plano a una gran distancia  $dt/d\tau = \gamma_v$ , es decir la constante se aproxima al valor del factor de Lorentz-Einstein de la partícula en el infinito. ¿Qué significa esto y qué relación guarda con la energía?. En el espacio tiempo plano:

$$E = \gamma_v mc^2$$

donde  $E$  es la energía total de la partícula. Pero esta definición solo es válida en el espacio plano en el infinito. Si llamamos  $E_\infty = \gamma_\infty mc^2$  a la energía que tendría la partícula cuando esté muy lejos ( $\gamma_\infty$  es el factor gamma asociado a la velocidad de

la partícula cuando esta muy lejos de la fuente), podemos escribir la constante  $\mathcal{E}$  como:

$$\mathcal{E} = \frac{E_\infty}{mc^2}$$

De este modo la cuadratura asociada con la simetría temporal será:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{E_\infty}{mc^2}$$

Por su lado la cuadratura asociada con el vector de Killing de la coordenada angular  $\phi$  será:

$$r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) = J_z$$

¿Que implica esta constante de movimiento?. Imaginemos una situación en la que el movimiento se realiza tal que  $J_z = 0$ . Esto implicara que  $d\phi/d\tau = 0$ . Es decir, la partícula se mueve sin cambiar su coordenada angular  $\phi$ , que es lo mismo que moverse sobre el plano con  $\phi = \text{cte}$ . Es decir, la ecuación anterior implica que escogida adecuadamente la dirección del sistema de coordenadas el movimiento se realizará sobre un plano. Un cambio del sistema de coordenadas no modifica esta condición. De modo que podemos decir que este resultado muestra que el movimiento de caída libre en la métrica de Schwarzschild se realiza siempre sobre un plano, como sucede también en el caso newtoniano.

Si fijamos la dirección de los ejes coordenados de modo que el plano  $x - y$  coincide con el plano de la geodésica, la constante anterior se simplifica y se convierte en:

$$r^2 \dot{\phi} = J_z$$

donde, muy lejos de la fuente, reconocemos claramente la magnitud del momento angular  $L_\infty = mr^2 \dot{\phi}$ .

La cuadratura anterior se puede escribir entonces como:

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) = \frac{L_\infty}{m}$$

### 3.2.14. Caída libre en un agujero negro

Una encontradas las 3 cuadraturas básicas del movimiento geodésico:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\ell}{d\tau}\right)^2 = c^2 \quad (3.16)$$

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \frac{E_\infty}{mc^2} \quad (3.17)$$

$$r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) = \frac{L_\infty}{m} \quad (3.18)$$

podemos intentar analizar (incluso resolver en situaciones particulares) el movimiento geodésico en la métrica de Schwarzschild usando estas cuadraturas.

Podemos reemplazar las dos últimas constantes de movimiento en la primera ecuación para obtener una ecuación diferencial solo para la coordenada radial  $r$ :

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L_\infty^2}{m^2 r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) = c^2 \left[ \left(\frac{E_\infty}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{R_S}{r} \right]$$

La caída libre corresponde a la condición inicial  $L_\infty = 0$ . En este caso la ecuación de movimiento se escribe como:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 \left[ \left(\frac{E_\infty}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{R_S}{r} \right]$$

### Nota

**Límite Newtoniano.** Si derivamos respecto al tiempo, obtenemos:

$$2 \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{2GM}{r^2} \frac{dr}{d\tau}$$

que se puede escribir de forma simplificada como:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = -\frac{GM}{r^2}$$

Supongamos que dejamos caer una partícula en reposo  $dr/d\tau = 0$  desde un punto  $r_0$ . En este caso:

$$\left(\frac{E_\infty}{mc^2}\right)^2 = 1 - \frac{R_S}{r_0}$$

y la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 R_S \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Sacando la raíz cuadrada y escogiendo el signo correspondiente al movimiento hacia el agujero negro, la ecuación de movimiento se puede escribir como:

$$\frac{d\tau}{dr} = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}$$

Integrando entre  $r_0$  y un  $r$  arbitrario se obtiene:

$$\tau(r) - \tau(r_0) = \frac{r_0}{c} \sqrt{\frac{r_0}{R_S}} \left[ \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{r}{r_0}} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right) + \arctan \left(-\sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\right) \right]$$

Realicemos un gráfico.

(Algoritmo 3.8)

```

# Propiedades
c=3e5 #km/s
RS=3e5 #km

#Punto de lanzamiento
r0=4*RS

#Valores de la coordenada radial
from numpy import linspace
rs=linspace(0,0.99*r0,1000)

#Valores del tiempo propio
from numpy import pi,sqrt,arctan
taus=(r0/RS)*sqrt(r0/RS)*(pi/2+sqrt((rs/r0)*(1-rs/r0))+arctan(-sqrt(rs/(r0-rs)))) 

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.axhspan(0,1,color='k',alpha=0.2)
ax.plot(taus,rs/c,'k-')

#Decoracion
ax.set_xlim((0,r0/c))
ax.grid()
ax.set_xlabel(r"\tau [s]")
ax.set_ylabel(r"r [s-1]")

fig.tight_layout()

```

ver Figura 3.18

Como podemos ver el tiempo para un observador en caída libre (el que registra el tiempo propio es finito.

¿Pero qué ve un observador remoto?. Habíamos demostrado que  $dt_\infty = dt$ . Una de las ecuaciones de movimiento nos da la manera como evoluciona el tiempo coordenado o el tiempo del observador remoto:

$$\frac{E_\infty}{mc^2} = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt_\infty}{d\tau}\right)$$

Usando el valor obtenido para  $E_\infty$  obtenemos la ecuación:

$$\frac{dt_\infty}{d\tau} = \frac{(1 - R_S/r_0)^{1/2}}{1 - R_S/r}$$

Usando la ecuación para  $\tau$  podemos escribir la ecuación diferencial para  $t_\infty$ :

$$\frac{dt_\infty}{dr} = -\frac{1}{cR_S^{1/2}} \frac{(1 - R_S/r_0)^{1/2}}{1 - R_S/r} \sqrt{\frac{rr_0}{r_0 - r}}$$

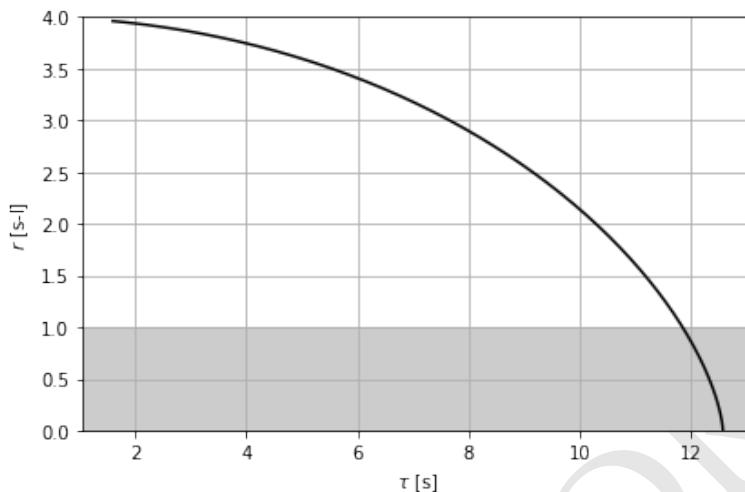


Figura 3.18: Figura correspondiente al código 3.8.

Esta ecuación diferencial es suficientemente complicada para ameritar una integración numérica. En el código a continuación la realizamos la integración y hacemos un gráfico comparativo del tiempo de caída (medido por un observador externo) y el tiempo propio:

(Algoritmo 3.9)

```
integrando=lambda r:-(1/(c*RS**0.5))*(1-RS/r)**0.5/(1-RS/r)*sqrt(r*r0/(r0-r))
from scipy.integrate import quad

#La integral la hacemos
rinf=linspace(1.0001*RS,0.99*r0,100)
tinf=[quad(integrando,r0,r)[0] for r in rinf]

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.axhspan(0,1,color='k',alpha=0.2)
ax.plot(taus,rs/c,'k--',label='Observador en caída libre')
ax.plot(tinf,rinf/c,'k-',label='Observador remoto')

#Decoracion
ax.set_ylim((0,r0/c))
ax.grid()
ax.legend()
ax.set_xlabel(r"\tau [s]")
ax.set_ylabel(r"r [s-1]")

fig.tight_layout()
```

ver Figura 3.19

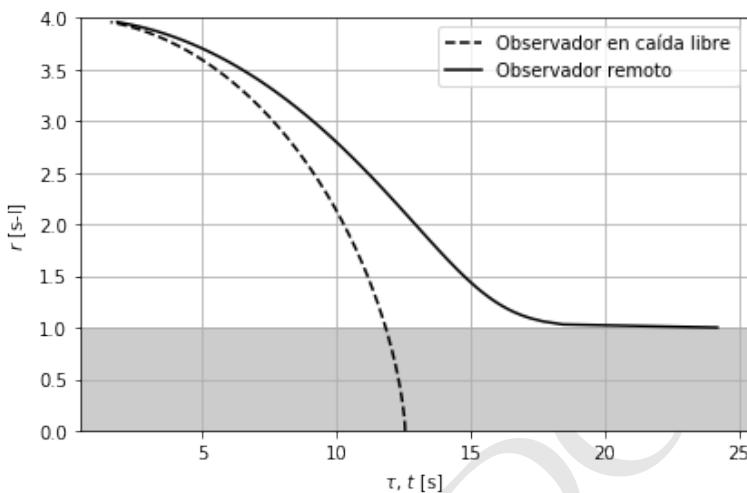


Figura 3.19: Figura correspondiente al código 3.9.

Es en este resultado (y no en otro) que estriba la verdadera naturaleza peculiar de los agujeros negros.

### Definición

**Agujero negro.** Un **agujero negro** es un cuerpo que tiene un tamaño inferior a la escala natural de longitud gravitacional  $R_S$  y para el cuál una partícula con masa en caída libre radial tarda un tiempo finito en alcanzar la superficie del cuerpo, medido en el sistema de referencia del observador en caída libre, y un tiempo infinito para un observador remoto en reposo respecto al cuerpo, que además percibe que la partícula nunca atraviesa la superficie imaginaria  $r = R_S$  que llamaremos el **horizonte de eventos**.

La pregunta importante aquí es: ¿cae o no cae la partícula en el agujero negro? La respuesta sin duda alguna es que depende del observador. No hay manera de decir algo que sea objetivamente cierto para todos los observadores. El destino de una partícula que cae en un agujero negro es relativa.

Ahora bien ¿qué pasa para puntos  $r < R_S$ . Ciertamente la métrica de Schwarzschild se hace inconveniente para responder esta pregunta porque el signo de los coeficientes métricos de la coordenada radial y temporal se invierten. Pero no hay que olvidar que estas son solo coordenadas, no cantidades observables.

Es en este punto en el que es necesario pensar en un cambio de coordenadas.

### 3.2.15. Coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein

En los 1950 David Finkelstein estudiando las simetrías (en realidad asimetrías) de la superficie especial  $r = R_S$  utilizó una idea debida originalmente a Eddington para describir mejor los eventos alrededor de un agujero negro. La idea fue desarrollada posteriormente por Roger Penrose y hoy se conoce como las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein.

La idea consiste en hacer un cambio en la coordenada temporal haciendo:

$$ct' = ct \pm R_S \ln \left| \frac{r}{R_S} - 1 \right|$$

donde el signo + aplica para geodésicas que se alejan del agujero negro y el signo – aplica para aquellas que se acercan a él.

Con este cambio de coordenadas la métrica nos queda:

$$(ds)^2 = c^2 \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) (dt')^2 \mp 2 \frac{R_S}{r} c dt' dr - r^2 \left( 1 + \frac{R_S}{r} \right) (dr)^2 - d\ell^2$$

Si consideramos movimiento de la luz en dirección radial, la ecuación de las geodésicas nulas (rayos de luz) que caen hacia el agujero negro serán:

$$c^2 \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) (dt')^2 \mp 2 \frac{R_S}{r} c dt' dr - \left( 1 + \frac{R_S}{r} \right) (dr)^2 = 0 \quad (3.19)$$

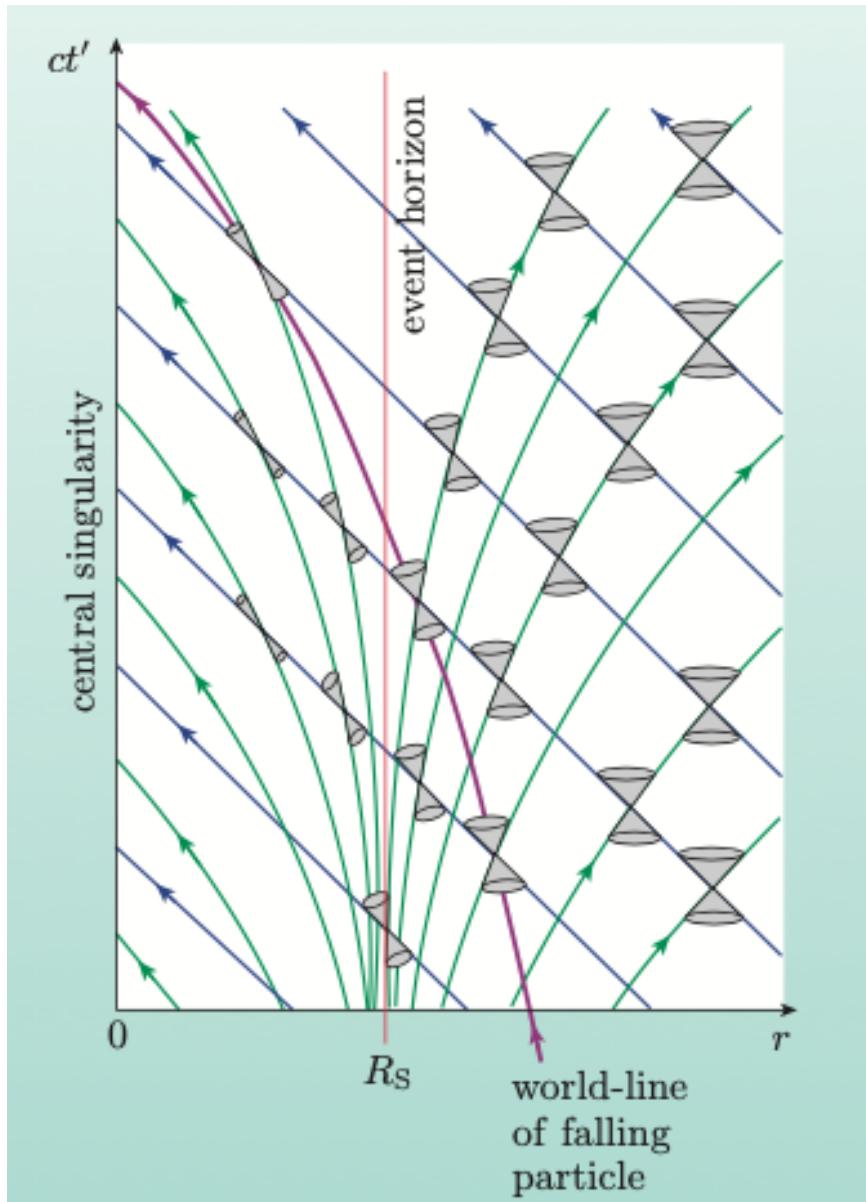
Las ecuaciones de la geodésicas nulas se pueden escribir ahora como:

$$\left( 1 + \frac{R_S}{r} \right) \left( \frac{dr}{dt'} \right)^2 \pm 2c \frac{R_S}{r} \frac{dr}{dt'} = c^2 \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) \quad (3.20)$$

donde el signo “+” es para geodésicas que entran y el “-” para las que salen.  
Con el siguiente código podemos resolver esta ecuación diferencial:

```
from sympy import Function, dsolve, Derivative, init_printing
from sympy.abc import t, R, c
init_printing()
r=Function("r")

resultado=dsolve((1+R/r(t))*Derivative(r(t),t)**2+2*c*R/r(t)*Derivative(r(t),t)-c**2*(1-R/r(t))**2)
Out[66]:
r(t) = C1 - ct
```



**Figura 3.20:** Geodésica nula en las coordenadas de Finkelstein-Eddington

### 3.2.16. Coordenadas de Painlevé-Gullstrand

Otro conjunto de coordenadas conveniente para describir la geometría del espacio-tiempo alrededor de un agujero negro son las coordenadas de Painlevé-Gullstrand.

Consideremos una partícula que se suelta desde el reposo en  $r = r_0$ . Para esta partícula sabemos que a lo largo de su línea de universo:

$$\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right) = \mathcal{E}$$

donde

$$\left(\frac{E_\infty}{mc^2}\right)^2 = 1 - \frac{R_S}{r_0}$$

y también:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = c^2 R_S \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Si lanzo la partícula desde una distancia inicial  $r_0$  muy grande del agujero negro entonces:

$$\begin{aligned} cd\tau &= -\sqrt{r/R_S} dr \\ d\tau &= (1 - R_S/r) dt \end{aligned}$$

Queremos ahora expresar  $dt$  en función de  $d\tau$  y  $dr$ . Combinando las ecuaciones obtenemos:

$$c^2 dt^2 = \left(cd\tau - \frac{\sqrt{R_S/r} dr}{1 - R_S/r}\right)^2$$

Si reemplazamos en la métrica de Schwarzschild obtenemos:

$$ds^2 = (1 - R_S/r) \left(cd\tau - \frac{\sqrt{R_S/r} dr}{1 - R_S/r}\right)^2 - (1 - R_S/r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

que se simplifica como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 d\tau^2 - 2\sqrt{\frac{R_S}{r}} cd\tau dr - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Esta métrica no tiene ninguna singularidad en  $r = R_S$  y de nuevo demuestra que esa singularidad es solo consecuencia de nuestra elección de las coordenadas.

Llamamos a  $(\tau, r, \theta, \phi)$  las **coordenadas de Painlevé-Gullstrand**.

De manera interesante es que una superficie de igual valor de  $\tau$  tiene métrica:

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

que es la métrica de un espacio plano. No es ese el caso cuando se toma igual valor de  $t$  en el que se obtiene un espacio curvo.

Veamos ahora las geodésicas nulas radiales en este espacio:

$$0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 d\tau^2 - 2\sqrt{\frac{R_S}{r}} cd\tau dr - dr^2$$

Esta geodésica se puede escribir como la ecuación diferencial:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{R_S}{r}} \left(\frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau}\right) = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)$$

Las dos soluciones a esta ecuación de segundo grado son:

$$\frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau} = \pm 1 - \sqrt{\frac{R_S}{r}}$$

donde el signo + corresponde a la geodésica que sale y el signo - a la geodésica que entra.

En la región exterior,  $r > R_S$  donde  $R_S/r < 1$ , la geodésica que sale tiene  $dr/d\tau > 0$  mientras que la geodésica que entra es  $dr/d\tau < 0$ . En la superficie del agujero negro la geodésica nula es tal que  $dr/d\tau = 0$ , es decir  $r = R_S$ .

Sin embargo, en la región interior al agujero negro, en la que  $r < R_S$  y por tanto  $R_S/r > 1$ , ambas geodésicas, la que entra y la que sale apuntan hacia  $r = 0$ . Este es otra vez un indicio de la asimetría en el espacio-tiempo afuera y adentro del agujero negro.

### 3.2.17. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Uno de los más poderosos sistemas de coordenadas para describir las propiedades del espacio-tiempo de Schwarzschild es el de Kruskal-Szekeres. En este sistema de coordenadas cambiamos las variables radial y temporal por dos variables nuevas  $u$  y  $v$  que satisfacen las transformaciones:

$$v = e^{r/2R_S} \sqrt{1 - r/R_S} \cosh \frac{ct}{2R_S}$$

$$u = e^{r/2R_S} \sqrt{1 - r/R_S} \sinh \frac{ct}{2R_S}$$

para  $r > s$  y:

$$v = e^{r/2R_S} \sqrt{1 - r/R_S} \sinh \frac{ct}{2R_S}$$

$$u = e^{r/2R_S} \sqrt{1 - r/R_S} \cosh \frac{ct}{2R_S}$$

Nótese que:

$$\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) e^{r/R_S} = u^2 - v^2$$

Para cualquier valor de  $r$  se cumple:

$$dv = \frac{c}{2R_S} u dt + \frac{1}{2R_S} (1 - R_S/r)^{-1} v dr \quad (3.21)$$

$$du = \frac{c}{2R_S} v dt + \frac{1}{2R_S} (1 - R_S/r)^{-1} u dr \quad (3.22)$$

y la diferencia de los cuadrados es:

$$(dv)^2 - (du)^2 = \frac{1}{4R_S^2} \frac{u^2 - v^2}{1 - R_S/r} \left[ c^2(1 - R_S/r)dt^2 - (1 - R_S/r)^{-1}dr^2 \right]$$

Al lado derecho reconocemos la métrica de Schwarzschild de modo que en estas coordenadas podemos escribir la métrica como:

$$ds^2 = \frac{4R_S^3}{r} e^{-r/R_S} (dv^2 - du^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

En la métrica vemos que la variable  $v$  corresponde a lo que podríamos entender aquí como el tiempo. En cambio  $u$  es como el espacio.

Como analizar la geometría en estas coordenadas. Podemos invertir las transformaciones para encontrar el tiempo como función de  $u$  y de  $v$ :

Para  $r > R_S$ :

$$ct = 2R_S \tanh^{-1}(u/v)$$

y para  $r < R_S$ :

$$ct = 2R_S \tanh^{-1}(v/u)$$

De aquí vemos que para  $v = ku$ ,  $t$  es constante. Cuando  $u = v$ ,  $t = \infty$ .

Vemos también que valores de  $r$  constantes corresponden a hipérbolas. En el exterior:

$$v^2 - u^2 = \text{cte}$$

y en el interior:

$$u^2 - v^2 = \text{cte}$$

También vemos que cuando  $r = 0$  tenemos una hipérbola de valor máximo de  $u$ .

Las geodésicas nulas en este caso son:

$$du = \pm dv$$

que corresponden a líneas a  $45^\circ$ .

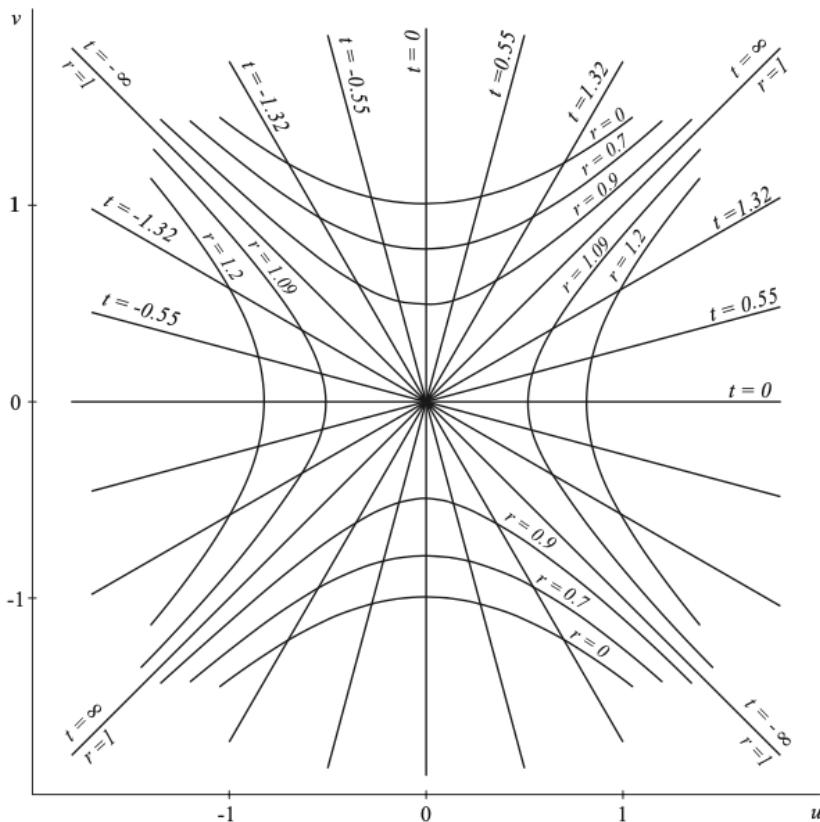


Figura 3.21: Mapa del espacio tiempo en las coordenadas de Kruskal-Szekeres

### 3.3. Cosmología relativista

Una de las más tempranas y más fértils aplicaciones de la teoría general de la relatividad es fue la descripción de la geometría del espacio-tiempo del Universo como un todo.

La descripción del espacio-tiempo de cuatro dimensiones que contiene toda la materia y la energía (el universo), su evolución y dinámica, sumado a la fenomenología resultante (el comportamiento de la materia y la energía en ese espacio-tiempo), así como la relación entre la geometría y las observaciones realizadas desde algún lugar del universo es lo que llamamos actualmente la **cosmología relativista**.

#### 3.3.1. Plan de temas

- Propiedades del Universo.
- La métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).
- Observaciones en un universo con la métrica FRW.
- Las ecuaciones FRW.

- Modelos de universo

### 3.3.2. Propiedades del universo

Antes de describir con la relatividad el universo es necesario entender algunas propiedades globales básicas que conocemos.

Desde tiempos históricos se sabe que el espacio entre las estrellas es mucho mayor que su tamaño y por lo tanto que la mayor parte del universo está vacío. En los años 1930 descubrimos el medio interestelar (gases y polvo) pero sabemos que su densidad es muchos ordenes de magnitud menor que el de cualquier cuerpo astronómico.

En los 1700 Newton especulaba que el universo no podía tener ningún límite porque de lo contrario habría también un centro y por lo tanto la materia habría colapsado en él. Esta idea de entrada ya implicaba la intuición de que el universo era a gran escala homogéneo.

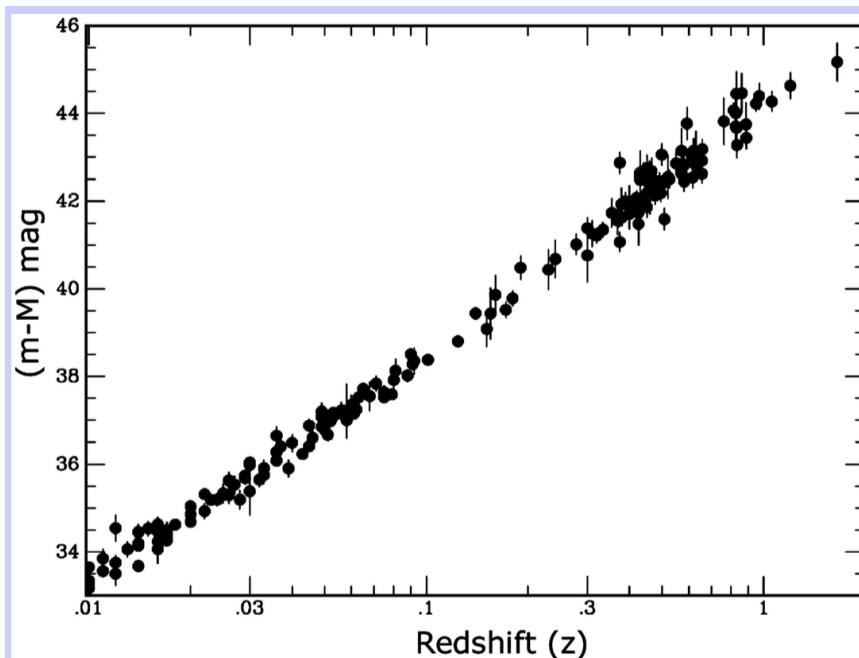
En los 1700 y 1800 se escubrió que las estrellas en el cielo hacían parte de la Vía Láctea, una estructura en forma de disco que hoy sabemos tiene un diámetro de unos 30 kpc (1 pc = 3,26 al =  $3,08 \times 10^{13}$  km).

En los años 1920 escubrimos que algunas “nebulosas” que habían descubierto los astrónomos a lo largo de 200 años de observaciones telescopicas eran realmente estructuras externas de estrellas a la Vía Láctea. Eso demostraba que la materia en el Universo se reunía en la forma de “islas de estrellas” o galaxias repartidas sin un patrón definido por el espacio de tres dimensiones. Hoy sabemos que hay miles de millones de galaxias (las últimas estimaciones las cifran en 2 billones incluyendo las más pequeñas) distribuidas de forma más o menos homogénea.

Aunque las galaxias se mueven por efecto de su interacción local (la velocidad relativa entre las galaxias es del orden de 100-1000 km/s) la observación más importante hecha en los 1920 es que todas las galaxias parecen exhibir un corrimiento al rojo espectral  $z$  que varía en proporción directa a la distancia luminosa  $d_L$  a la que las galaxias se encuentran:

$$z \approx \frac{H_0}{c} d_L$$

donde el símbolo  $\approx$  se debe a que la ley fue establecida únicamente para Galaxias a una distancia relativamente pequeña de la Vía Láctea. A este resultado se lo conoce como la **ley de Hubble-Lemaître**.



**Figura 3.22:** Ley de Hubble Lemaître. En el eje vertical se muestra el módulo de distancia  $\mu = m - M = 5 \log_{10}(d) - 5$  donde la distancia está en pc. Una distancia de 1 Gpc corresponde a un módulo de distancias de 40. Fuente: <https://physics.stackexchange.com/questions/361438/interpretation-of-hubble-diagram>.

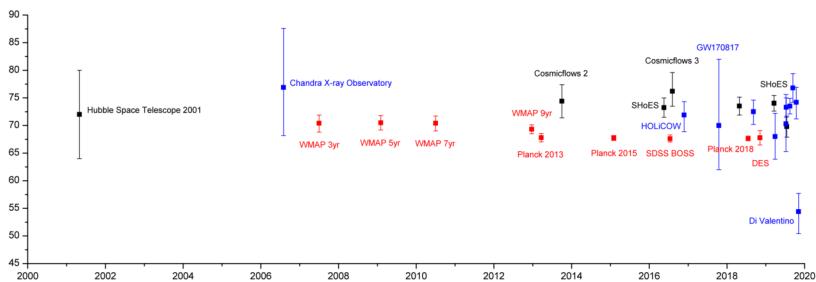
Aquí la cantidad  $H_0$  se conoce como el parámetro de Hubble y su valor se parametriza normalmente como:

$$H_0 = 70h_{70} \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} = 2,27 \times 10^{-18}h_{70} \text{ s}^{-1}$$

donde  $h$  es un parámetro adimensional. Según las últimas estimaciones astrofísicas  $h = 70,5 \text{ km/s}$ .

El valor de  $H_0$  todavía no se conoce con precisión. Según la [última estimación de 2020<sup>17</sup>](#) es  $h_{70} = 1,056 \pm 0,04$ .

<sup>17</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s\\_law#Measured\\_values\\_of\\_the\\_Hubble\\_constant](https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble%27s_law#Measured_values_of_the_Hubble_constant)



**Figura 3.23:** Parámetro de Hubble

El espacio entre las galaxias no está completamente vacío. Esta lleno de lo que se conoce como gas intracúmulos. Usando la emisión de radiación del gas entre cúmulos y otros métodos astrofísicos, se ha estimado que la densidad promedio de materia bariónica (protónes, neutrones y electrones) es igual a<sup>18</sup>:

$$\rho_B = 4,46 \times 10^{-28} h_{70}^2 \text{ kg m}^{-3}$$

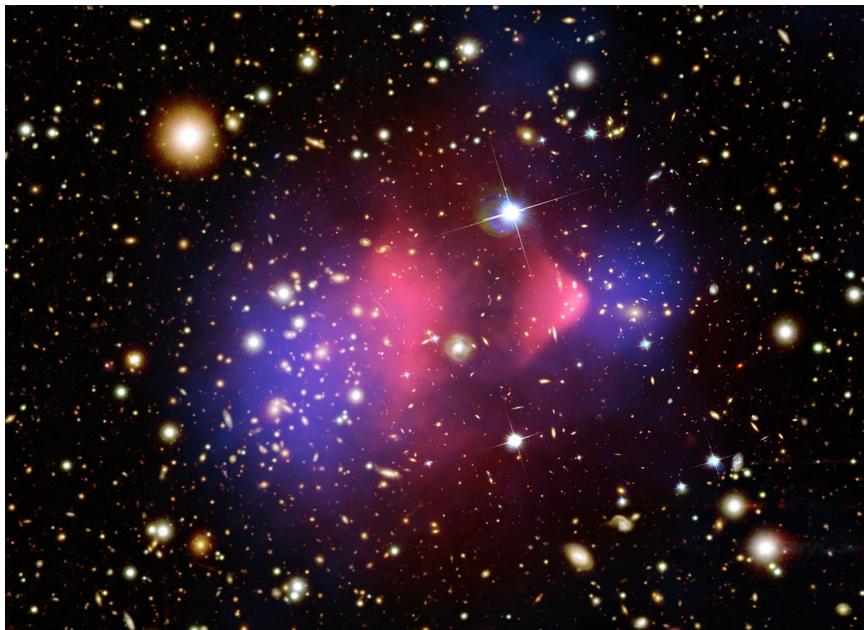
De esta densidad, tan solo el 6 % es la materia que forma estrellas, planetas y nubes de gas visibles.

Distintas líneas de evidencia incluyendo la dispersión de velocidades de las galaxias en cúmulos ricos, la curva de rotación de las galaxias de disco y medidas de lentes y microlentes gravitacionales han permitido establecer la existencia de una forma de materia de composición todavía desconocida y de la cual existe una densidad promedio igual a<sup>19</sup>:

$$\rho_{DM} = 2,38 \times 10^{-27} h_{70}^2 \text{ kg m}^{-3}$$

<sup>18</sup>Para ello se asume que el parámetro cosmológico  $\Omega_B = 0,0484$ .

<sup>19</sup>Para ello se asume que el parámetro cosmológico  $\Omega_{DM} = 0,258$ .



**Figura 3.24:** Imagen del cúmulo de la bala mostrando la distribución reconstruida de materia oscura

En los años 1960 se descubrió que todos los sitios del universo son bañados por una radiación que tiene el espectro de cuerpo negro con una temperatura característica de 2.731 K. Esta radiación es isotrópica dentro de una precisión de 1 parte en 100.000.

### 3.3.3. Principios básicos

Para responder a todas las preguntas relevantes en cosmología es necesario encontrar la métrica del Universo.

Con base en las evidencias recogidas anteriormente podemos decir que actualmente el Universo está formado por una distribución de materia homogénea, isotrópica y de muy baja densidad, en la que las partículas se mueven muy lentamente comparada con la velocidad de la luz (con velocidades propias del orden de 100 km/s la velocidad de las galaxias es menor que 0.1 % de la velocidad de la luz).

#### Principio 3.1

**Principio cosmológico.** En cualquier momento y a una escala suficientemente grande, el universo es **homogéneo**. (es el mismo en todas partes, tiene la misma densidad y curvatura) e isotrópico (la elección de ejes coordinados no afecta la descripción de la geometría).

Aquí es importante entender que esta suposición implica que todo lo que digamos en lo sucesivo aplicará únicamente bajo el supuesto de homogeneidad e

isotropía. Sin embargo el universo es más complejo que eso y puede a escalar de planetas, estrellas, galaxias incluso cúmulos y supercúmulos tener una estructura granulosa.

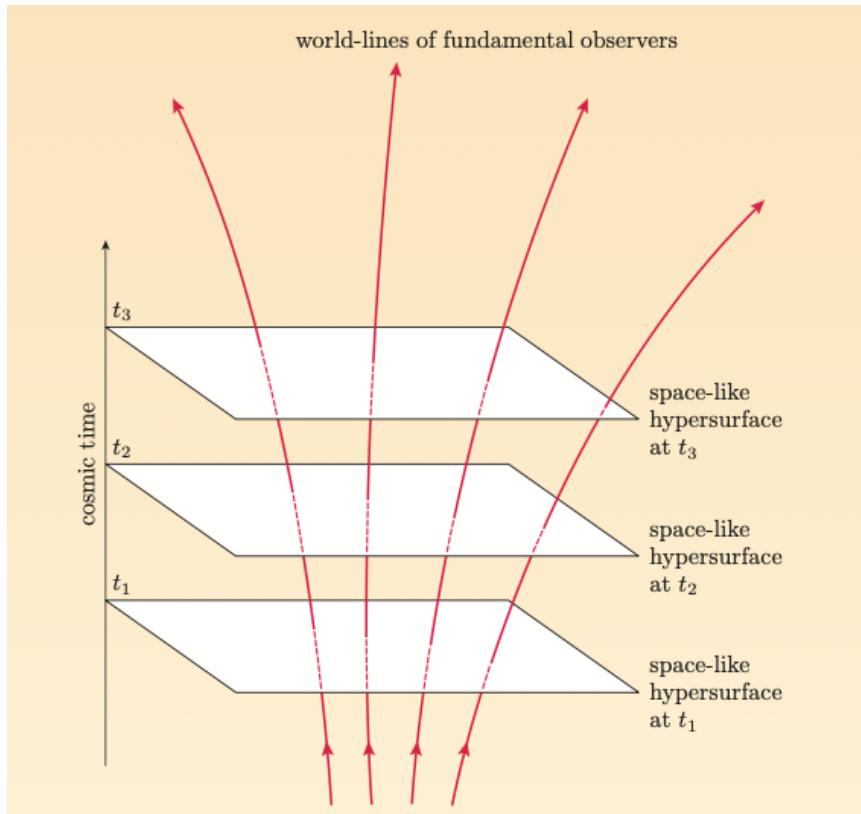
Otro “inconveniente” con el principio cosmológico es que no es necesariamente válido para todos los observadores del Universo. Por ejemplo, un observador que se mueva no percibirá el universo isotrópico.

Para esto se introduce un nuevo principio:

### Principio 3.2

**Principio de Weyl.** Existe un conjunto de observadores privilegiados en el universo que llamaremos **observadores fundamentales**, que lo perciben como homogéneo e isotrópico y que tienen las siguientes características:

- Las líneas de universo de estos observadores nunca se cruzan (excepto en un singularidad inicial).
- El tiempo propio de estos observadores es el mismo de modo que se puede definir para cada evento del universo un **tiempo cósmico** referido a cualquier evento presente o pasado.
- Todos los eventos del universo que tienen el mismo valor del tiempo cósmico forman una hipersuperficie espaciotípica que satisface el principio cosmológico (es homogénea e isotrópica).



**Figura 3.25:** Observadores fundamentales de acuerdo con el principio de Weyl

Sobre cada hipersuperficie se pueden definir las coordenadas que ocupan los observadores fundamentales de modo que no cambien con el tiempo (dado que la relación entre los observadores fundamentales tampoco cambian). A estas coordenadas las llamamos **coordenadas comóviles**.

### 3.3.4. La métrica del Universo

Con las condiciones anteriores la métrica más general que podemos escribir que satisface estas condiciones es:

$$ds^2 = cdt^2 - S(t)^2 d\ell^2$$

donde  $t$  es el tiempo cósmico,  $S(t)$  es una función arbitraria que depende del tiempo cósmico y  $d\ell^2$  es el elemento de línea en las hipersuperficies de tiempo cósmico constante.

Llamamos a ésta la **métrica de Robertson-Walker**.

¿Cuál es la métrica de la hipersuperficie espacial en este universo?. Existen tres posibilidades:

### Espacio plano

En este caso la métrica espacial es sencillamente la métrica euclíadiana:

$$d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

o en coordenadas esféricas:

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Es importante aclarar que en esta métrica las coordenadas  $(x, y, z)$  o  $(r, \theta, \phi)$  son **coordenadas coomoviles**, es decir son aquellas en las cuales si se expresa la posición de los observadores fundamentales entonces esta posición no cambia.

La distancia espacial entre dos puntos con coordenadas coomoviles es usando la métrica RW será:

$$d\sigma^2 = -ds^2 = S(t)^2 d\ell^2 = S(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

o integrando en el espacio ( $S$  no depende de las coordenadas):

$$D = S(t)d$$

donde  $D$  es la distancia efectiva, instantánea, medida entre los observadores y  $d$  su distancia comovil.

De aquí vemos que en general en un universo homogéneo e isotrópico la distancia entre dos observadores fundamentales  $D$  puede cambiar en general de acuerdo con el factor  $S(t)$ . Es por esa razón que a la cantidad  $S(t)$  la llamamos **factor de escala**.

### Espacio curvo cerrado

Un segundo tipo de geometría de curvatura constante es la que corresponde a una **hiperesfera**, es decir el equivalente tetradiimensional a una esfera.

En 3 dimensiones los puntos sobre la superficie de una esfera  $(x, y)$  obedecen la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

donde  $R$  es el radio y  $z$  es una dimensión auxiliar usada para describir la superficie.

Esta ecuación puede usarse para escribir la métrica de la superficie de la esfera si se introducen por ejemplo coordenadas esféricas para describir la posición de cada punto:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned}$$

las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$  especifican cada punto sobre la superficie de la esfera.

El cambio en las coordenadas cartesianas entre dos puntos infinitesimalmente vecinos en la superficie de la esfera será:

$$\begin{aligned} dx &= R(\cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi) \\ dy &= R(\cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi) \\ dz &= -R \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

donde  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

De donde la distancia (métrica) en la esfera se puede escribir como:

$$d\ell^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Hay cosas interesantes escritas en esta métrica. La primera es que dado que las coordenadas de la superficie tienen unos rangos definidos, la distancia máxima entre dos puntos se producirá por ejemplo si se hace  $\phi = \text{cte}$ :

$$d_{\max} = \pi R$$

decimos que este espacio es *cerrado* en el sentido de que dos observadores no pueden estar separados por una distancia mayor que esa.

Si  $\theta = \text{cte}$  la distancia máxima entre dos puntos será:

$$d_{\max}(\theta) = \pi R \sin \theta$$

Otra propiedad es el área. Por definición:

$$dS = \sqrt{g_{11}g_{22}}dx^1dx^2$$

Integrando obtenemos:

$$S = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi R^2$$

¿Qué pasa ahora si consideramos una hiperesfera de radio unitario?. En este caso la ecuación será:

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$$

donde hemos introducido la dimensión auxiliar  $w$ .

Cada punto en la superficie de la hiperesfera puede ser descrito ahora con 3 coordenadas angulares ( $\chi, \theta, \phi$ ) tal que:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \chi \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sin \chi \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \sin \chi \cos \theta \\ w &= R \cos \chi \end{aligned}$$

donde  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

Realizando un procedimiento similar al que hicimos con la esfera se puede probar que la métrica de esta superficie es:

$$d\ell^2 = R^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

De nuevo dado que las coordenadas están acotadas, el espacio es cerrado. La máxima distancia que pueden alejarse dos observadores, asumiendo que tienen  $\theta = \text{cte}$  y  $\phi = \text{cte}$  será:

$$d_{\max} = \pi R$$

El volumen de esta hipersuperficie, por otro lado será:

$$dV = \sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}} dx^1 dx^2 dx^3$$

Integrando:

$$V = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin \theta \sin^2 \chi d\chi d\theta d\phi = 2\pi R^3$$

Pero ¿qué demonios es la variable  $\chi$  en la realidad?. Una manera de entender el significado de esta variable es construir un **diagrama embebido** de esta geometría. Por un diagrama embebido entendemos la representación en un espacio tridimensional plano de la superficie obtenida al hacer constantes una de las coordenadas del espacio. Si hacemos  $\theta = \pi/2$  la métrica queda:

$$d\Sigma^2 = R^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\phi^2)$$

En el espacio plano y en coordenadas cilíndricas la métrica es:

$$d\Sigma^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

La superficie embebida estará dada por los puntos

$$\rho = \rho(\chi, \phi), \quad \varphi = \varphi(\chi, \phi), \quad z = z(\chi, \phi)$$

La superficie embebida descrita por la métrica tiene una simetría en  $\phi$ , en el sentido en que la elección del origen para  $\phi$  es irrelevante en la métrica.

Si hacemos  $\varphi = \phi$  y suponemos que las coordenadas  $\rho$  y  $z$  de puntos sobre la superficie embebida son independiente de la variable  $\phi$ , entonces:

$$\rho = \rho(\chi), \quad \varphi = \phi, \quad z = z(\chi)$$

La métrica en el espacio plano quedará:

$$d\Sigma^2 = \left[ \left( \frac{d\rho}{d\chi} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\chi} \right)^2 \right] d\chi^2 + \rho^2 d\phi^2$$

Para que estas métricas coincidan debe darse que:

$$\rho = R \sin \chi$$

Es decir la hipersuperficie con  $\theta = \pi/2$  tendrá una métrica:

$$d\Sigma^2 = \frac{1}{1 - (\rho/R)^2} d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2$$

que es la métrica de una esfera de radio  $R$  en coordenadas cilíndricas.

Nótese que en este caso la coordenada radial  $\rho$  esta restringida entre  $0 \leq \rho \leq R$ .

Podemos expresar la métrica de la hipersuperficie del Universo cerrado, introduciendo la variable  $\rho \equiv R \sin \chi$  finalmente como:

$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2}{1 - (\rho/R)^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

### Nota

**¿El radio del Universo?**. ¿Qué es exactamente el parámetro  $R$ ? Como hemos visto anteriormente el radio de la superficie embebida del universo cerrado es  $\rho = R \sin \chi$ . De aquí se ve que cuando  $\xi = \pi/2$  se alcanza el radio máximo  $R$ . Esto quiere decir que en un Universo cerrado la máxima esfera que se puede construir tiene un radio  $R$ . No es posible tener puntos que estén más lejos que esto. ¿Este es el radio del universo?. No necesariamente en tanto por radio entendemos nosotros el tamaño de algo que esta limitado. Este universo no esta limitado.

### Espacio curvo abierto

Un razonamiento similar puede hacerse para el caso de un hiperespacio de curvatura constante pero con una diferencia crucial:

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = R^2$$

En este caso los puntos en la hipersuperficie pueden parametrizarse como:

$$\begin{aligned} x &= R \sinh \chi \sin \theta \cos \phi \\ y &= R \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \\ z &= R \sinh \chi \cos \theta \\ w &= R \cosh \chi \end{aligned}$$

donde  $0 \leq \chi \leq \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

La métrica será ahora:

$$d\ell^2 = R^2[d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

En este caso dado que la variable  $\chi$  no esta acotada, la distancia entre los puntos en este espacio puede ser arbitrariamente grande. Esta es la razón por la que llamamos a esta una **hipersuperficie abierta**.

Siguiendo un procedimiento similar al que se uso en el caso de una hipersuperficie cerrada podemos escribir la métrica de este espacio tiempo como:

$$d\ell^2 = \frac{d\rho^2}{1 + (\rho/R)^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

donde  $\rho \equiv R \sinh \chi$ .

### 3.3.5. La métrica de Robertson-Walker

Recogiendo los resultados de la sección anterior podemos decir en muy pocas líneas que la métrica de un universo homogéneo e isotrópico se puede escribir como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Los parámetros de esta métrica son:

- **Factor de escala.** Hemos reemplazado el factor adimensional  $S(t)$  por un factor que tiene unidades de longitud:

$$a(t) = S(t)R$$

En lo sucesivo nos referiremos a  $a(t)$  como el factor de escala.

- **Parámetro de curvatura.** En la métrica aparece un parámetro adimensional  $k$  que distingue los tres casos:

$$k = \begin{cases} 0 & \text{Plano} \\ +1 & \text{Cerrado} \\ -1 & \text{Abierto} \end{cases}$$

- **Coordenada radial adimensional.** Para simplificar la escritura de la métrica hemos introducido la *coordenada radial adimensional*  $r$  definida como:

$$r = \frac{\rho}{R}$$

Esta coordenada a su vez depende de la coordenada angular  $\chi$  original como:

$$r = \begin{cases} \chi & k = 0, 0 \leq \chi \leq \infty \\ \sin \chi & k = +1, 0 \leq \chi \leq \pi \\ \sinh \chi & k = -1, 0 \leq \chi \leq \infty \end{cases}$$

#### Nota

**Singularidad en la métrica RW.** Como sucede con la métrica de Schwarzschild, la métrica de Robertson-Walker tiene una singularidad en  $r = 1$  cuando  $k = +1$ . Esta singularidad sin embargo es artificial y puede eliminarse si se escribe la métrica en términos de la coordenada  $\chi$ :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

### 3.3.6. Las ecuaciones de Friedmann

Nótese que hasta ahora no hemos usado en ningún momento las ecuaciones de campo. ¿Por qué? Básicamente hemos construido la métrica sobre argumentos y principios de simetría. Sin embargo los parámetros libres de la métrica, a saber la función  $a(t)$  y el parámetro  $k$  solo podrán determinarse si usamos las ecuaciones de campo.

Primero necesitamos asumir un tensor de momentum-energía para el Universo. Vamos a asumir un fluído perfecto, para el cuál el tensor de momentum energía es el que habíamos escrito en la sección correspondiente:

$$T_{\text{perfecto}}^{\mu\nu} = \left( \rho_0 + \frac{p_0}{c^2} \right) U^\mu U^\nu - p_0 g^{\mu\nu}$$

donde  $\rho_0$  y  $p_0$  son la densidad y presiones propias del fluido.

Si nos paramos en el sistema de referencia del observador fundamental donde el fluido está en reposo ( $U^t = c, U^i = 0$ ), pero su densidad propia  $\rho_0(t)$  puede cambiar en el tiempo, lo mismo que su presión  $p(t)$ , las componentes no nulas del tensor momentum-energía serán entonces:

$$T_{00} = \rho_0(t)c^2g_{00}, T_{ii} = -p_0g_{ii}$$

Ahora necesitamos calcular las componentes de los tensores relevantes. Para ello usamos el programa en Wolfram Lab poniendo como coeficientes métricos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(t)^2(1-kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

El tensor que nos interesa es el tensor de Riemann y el escalar de Ricci. Las únicas componentes distintas de cero del tensor de Ricci son:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ c^2R_{rr} &= \frac{2c^2k}{1-kr^2} + \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} \\ c^2R_{\theta\theta} &= r^2a\ddot{a} + 2r^2\dot{a}^2 + 2c^2kr^2 \\ c^2R_{\phi\phi} &= r^2\sin^2\theta a\ddot{a} + 2r^2\sin^2\theta\dot{a}^2 + 2c^2kr^2\sin^2\theta \end{aligned} \tag{3.23}$$

Este último resultado se puede escribir como:

$$c^2R_{ii} = -\frac{g_{ii}}{a^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k)$$

Mientras que el escalar de curvatura es:

$$c^2R = -6c^2\frac{k}{a^2} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 6\frac{\ddot{a}}{a}$$

La ecuación de campo es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Dado que solo las componentes a lo largo de la diagonal del tensor de momentum energía son distintas de cero:

$$R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R - \Lambda g_{tt} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{tt} \quad (3.24)$$

$$R_{ii} - \frac{1}{2}g_{ii}R - \Lambda g_{ii} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ii} \quad (3.25)$$

La componente temporal se puede escribir como:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}\left(-6c^2\frac{k}{a^2} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 6\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \Lambda c^2 = \frac{8\pi G}{c^4}\rho_0 c^2 c^2$$

Que se puede escribir como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0(t) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Por otro lado la componente espacial es:

$$-\frac{g_{ii}}{a^2 c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k) - \frac{1}{2c^2}Rg_{ii} - \Lambda g_{ii} = \frac{8\pi G}{c^4}(-p_0 g_{ii})$$

Vemos que el resultado es la misma ecuación independientemente de la componente espacial considerada.

La ecuación resultante es:

$$-\frac{\ddot{a}}{a} - 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 2\frac{kc^2}{a^2} - \frac{1}{2}\left(-6c^2\frac{k}{a^2} - 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 6\frac{\ddot{a}}{a}\right) - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p_0$$

Que se puede simplificar como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\frac{4\pi G}{c^2}p_0 + \frac{\Lambda c^2}{2} - \frac{kc^2}{2a^2}$$

Nótese que es posible combinar la ecuación inicial con esta ecuación para obtener una ecuación más simple:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left[\rho_0(t) + \frac{3p_0(t)}{c^2}\right] + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

### 3.3.7. El parámetro $\Omega$

Definamos la **tasa relativa de expansión** como:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

Esta cantidad indica en qué proporción crece que el factor de escala  $a(t) = S(t)R$  por unidad de tiempo.  $H$  tiene unidades de velocidad sobre tiempo o del inverso del tiempo.

Además introducimos las definiciones que habíamos hecho cuando consideramos la posibilidad que el término cosmológico funcionara como la densidad de un fluido perfecto con densidad:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

y presión:

$$p_\Lambda = -c^2 \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Las ecuación de Friedmann se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{kc^2}{a^2} \\ \dot{H} + H^2 &= -\frac{4\pi G}{3} \left[ \rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right] \end{aligned}$$

donde  $\rho(t) = \rho_0(t) + \rho_\Lambda$  y  $p(t) = p_0(t) + p_\Lambda$  son la densidad total y la presión total, incluyendo todas las formas de masa-energía del universo y la *energía oscura*.

Una forma particularmente útil de la primera ecuación de Friedmann se puede obtener si se escribe de la forma:

$$\frac{kc^2}{H^2 a^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho(t) - 1$$

Como vemos todos los términos de esta ecuación son adimensionales y por lo tanto el coeficiente que acompaña la densidad debe tener unidades de inverso de densidad. Esto nos permite introducir un importante parámetro cosmológico conocido como la **densidad crítica**:

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Nótese que la densidad crítica dependerá del parámetro de expansión que a su vez depende del tiempo en general.

Si definimos ahora el parámetro  $\Omega$  como:

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$$

entonces la primera ecuación de Friedmann se puede escribir como:

$$\frac{kc^2}{H^2 a^2} = \Omega(t) - 1$$

Dado que todas las cantidades que acompañan a  $k$  en el lado izquierdo de la ecuación son definidas positivas, esta ecuación permite determinar el tipo de geometría que tendrán las hipersuperficies del universo, dependiendo de su contenido de materia, así:

$$k = \begin{cases} +1 & \text{sii } \Omega(t) > 1 \\ -1 & \text{sii } \Omega(t) < 1 \\ 0 & \text{sii } \Omega(t) = 1 \end{cases}$$

Esto implica que la geometría del Universo depende de su contenido de materia-energía comparado con la densidad crítica. ¿Pero cuánto vale la densidad crítica?.

### 3.3.8. Evolución de la densidad cósmica

Para resolver las ecuaciones de Friedmann:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{kc^2}{a^2} \\ \dot{H} + H^2 &= -\frac{4\pi G}{3} \left[ \rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right] \end{aligned}$$

Es necesario saber como ha cambiado la densidad cósmica con el tiempo.

Existen cuatro tipos de componentes cuya densidad varía de manera diversa.

#### Densidad de materia

Si asumimos que el número de partículas de materia (masivas) se conservan, entonces la densidad de masa de la materia será:

$$\rho_M(t) = \frac{Nm}{V(t)}$$

La comparación entre la densidad en un tiempo cósmico arbitrario  $t$  y el tiempo presente será:

$$\frac{\rho_M(t)}{\rho_M(t_0)} = \frac{V(t_0)}{V(t)}$$

Asumiendo volúmenes arbitrariamente pequeños podemos aproximar  $V(t) = a^3 L^3$  donde  $L$  es la longitud característica comovil del volumen, y por lo tanto:

$$\rho_M = \rho_{M0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^3$$

Que se escribe también en términos del corrimiento al rojo como:

$$\rho_M = \rho_{M0}(1+z)^3$$

#### Densidad de radiación

Llamamos radiación a cualquier partícula que se mueva muy cerca de la velocidad de la luz o a la velocidad de la luz. En ese caso la densidad de masa contenida en un volumen muy pequeño será:

$$\rho_R(t) = \frac{Nhf/c^2}{V(t)}$$

donde  $f$  es la frecuencia de Broglie de las partículas.

Teniendo en cuenta la dilatación de tiempo cosmológica la densidad de radiación evoluciona como:

$$\rho_R = \rho_{R0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4$$

o bien:

$$\rho_R = \rho_{R0}(1+z)^4$$

### Densidad de energía oscura

La densidad de energía oscura como hemos visto es constante e igual a:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

### Densidad de curvatura

Una manera de unificar todos los términos de la ecuación de Friedmann en una sola densidad es introducir un término de densidad asociado con la curvatura. La densidad de curvatura sería:

$$\rho_k = -\frac{3kc^2}{8\pi Ga^2}$$

Esta se puede escribir en términos similares a como escribimos las otras densidades como:

$$\rho_k = -\frac{3kc^2}{8\pi Ga_0^2} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2$$

o bien:

$$\rho_k = \rho_{k0}(1+z)^2$$

### 3.3.9. Ecuación de Friedmann y densidad cósmica

Con estas definiciones la ecuación de Friedmann se escribe finalmente como:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho(t) + \rho_k(t)}{\rho_{c0}}$$

Usando los parámetros  $\Omega$  medidos en el presente la ecuación de Friedmann se escribe:

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{M0}\alpha^{-3} + \Omega_{R0}\alpha^{-4} + \Omega_{k0}\alpha^{-2} + \Omega_\Lambda}$$

donde  $\alpha = a/a_0$

En términos de  $z$  se escribe:

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_\Lambda}$$

### 3.3.10. Tiempo de expansión

La ecuación de Friedmann escrita en términos de  $a$  puede ser separada para encontrar el tiempo de expansión desde cualquier valor de  $\alpha$  hasta el presente:

$$t_{LB} = t_{H0} \int_{\alpha}^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{\Omega_{M0}\alpha^{-1} + \Omega_{R0}\alpha^{-2} + \Omega_{k0} + \Omega_{\Lambda}\alpha^2}}$$

donde

$$t_{H0} = \frac{1}{H_0} = 13960 h_{70}^{-1} \text{ Myr}$$

es el denominado **tiempo de Hubble**.

A  $t_{LB} = t_0 - t$  lo llamamos el **tiempo de expansión** o en inglés *loopback-time* (LB) y corresponde al tiempo cósmico que ha pasado desde el momento en el que el universo tenía un valor de  $a$  hasta el presente.

Como sabemos que  $\alpha = 1/(1+z)$  entonces  $d\alpha = -dz/(1+z)^2$  y la integral se puede escribir también como:

$$t_{LB} = t_{H0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_{M0}(1+z)^3 + \Omega_{R0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda}}}$$

### 3.3.11. Distancias cosmológicas

Existen distintos tipos de distancias en Cosmología.

#### Distancia comovil

Por distancia propia entendemos la distancia espacial medida en una misma hipersuperficie de universo  $t_0$ .

$$\sigma = \int \sqrt{-ds^2} = a_0 \chi$$

Antes habíamos encontrado una relación entre el valor e la coordenada  $\chi$  de una fuente y el tiempo en el que esa fuente emitió la luz que vemos en la Tierra:

$$\chi = c \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}$$

donde hemos usado la variable auxiliar  $t'$  para no confundirla con los límites de integración.

Ahora podemos cambiar a las variables  $\alpha$  y  $z$  que usamos antes para obtener:

$$\chi = \frac{c}{a_0} \int_{\alpha}^1 \frac{d\alpha'}{\alpha'^2 H(\alpha')} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

Ahora bien. Por otro lado tenemos la coordenada radial adimensional  $r$  que se relaciona con la coordenada hiperesférica  $\chi$  como:

$$r = \begin{cases} \sin \chi & \text{Si } k = +1 \\ \chi & \text{Si } k = 0 \\ \sin \chi & \text{Si } k = -1 \end{cases}$$

El radio de un frente de onda esférico que aranca en  $t$  y llega a  $t_0$  es  $a_0 r$ . En este caso hablaremos de **distancia comovil** y es igual a:

$$D_C = a_0 \times \begin{cases} \sin \chi & \text{Si } k = +1 \\ \chi & \text{Si } k = 0 \\ \sin \chi & \text{Si } k = -1 \end{cases}$$

donde:

$$\chi = \frac{c}{a_0} \int_{\alpha}^1 \frac{d\alpha'}{\alpha'^2 H(\alpha')} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}$$

### Distancia luminosa

La distancia luminosa es la más usada en astrofísica. Surge de comparar la luminosidad producida por una fuente y su brillo observado.

$$b = \frac{L_e}{4\pi D_L^2}$$

donde  $b$  es el brillo observado,  $L_e$  es la luminosidad de la fuente en el sistema propio y  $D_L$  es la que llamaremos la distancia luminosa.

Despejando obtenemos:

$$D_L = \sqrt{\frac{L_e}{4\pi b}}$$

La luminosidad de una fuente es la energía que emite por unidad de tiempo. Si asumimos que se emiten  $N$  fotones de frecuencia  $f_e$  en un tiempo  $\Delta t_e$ , la luminosidad emitida será:

$$L_e = \frac{Nh f_e}{\Delta t_e}$$

Desde la distancia sin embargo la luminosidad será diferente debido al cambio en la frecuencia y la dilatación cosmológica del tiempo:

$$L_0 = \frac{Nh f_0}{\Delta t_0}$$

de donde:

$$L_0 = L_e \left( \frac{a}{a_0} \right)^2$$

es decir, la luminosidad observada en realidad es menor que la luminosidad emitida.

De este modo después de viajar una distancia comovil  $D_C$  el brillo de la fuente será:

$$b = \frac{L_0}{4\pi D_C^2} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \frac{L_e}{4\pi D_C^2}$$

Reemplazando el brillo en la distancia luminosa obtenemos:

$$D_L = \left(\frac{a_0}{a}\right) D_C$$

o en términos del corrimiento al rojo:

$$D_L = (1+z)D_C$$

### 3.3.12. Corrimiento cosmológico

¿Cómo puede el modelo de universo que hemos descrito hasta ahora explicar la ley de Hubble-Lemaître del corrimiento al rojo?

Para explicar esta ley asumamos que tenemos una fuente remota de luz, que emite un pulso  $t = t_e$ . El pulso es recibido por el observador remoto en  $t = t_0$ . Los pulsos viajan a lo largo de una geodésica nula en dirección radial hacia el observador (que está en el origen). La distancia espacio temporal entre los dos eventos será de acuerdo a la métrica de Robertson-Walker:

$$0 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\chi^2$$

De aquí podemos expresar la coordenada  $\chi$  del observador integrando como:

$$\chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

Supongamos ahora que la fuente emite un segundo pulso un tiempo muy pequeño  $\Delta t_e$  después que emitirá el primero (de modo que podamos asumir que el factor de escala no cambia significativamente en ese mismo tiempo). El observador remoto recibe el pulso un tiempo  $\Delta t_0$  después de recibir el primero. Como los observadores no se mueven (son comoviles o fundamentales), su coordenada  $\chi$  no habrá cambiado:

$$\chi = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

Esta última integral se puede escribir como:

$$\chi = - \int_{t_e - \Delta t_e}^{t_e} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)}$$

Pero dado que también  $\chi = \int_{t_e}^{t_0} dt/a$ , concluimos que:

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_e - \Delta t_e}^{t_e} \frac{cdt}{a(t)} = 0$$

Esta ecuación integral permite encontrar la relación entre el  $\Delta t_0$  observador y el  $\Delta t_e$  en la fuente.

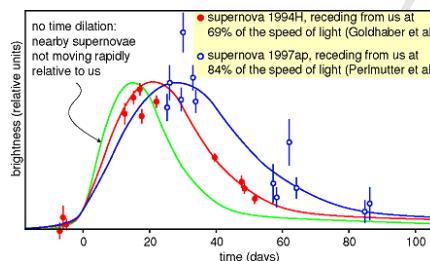
Si asumimos que ambos  $\Delta t$  son mucho menores que la escala de tiempo en la que cambia el factor de escala  $a(t)$  (escalas de tiempo de la evolución cosmológica que son del orden de los miles de millones de años) entonces podemos asumir que  $a(t)$  es constante en las integrales, de donde resulta la relación:

$$\frac{c\Delta t_0}{a(t_0)} \approx \frac{c\Delta t_e}{a(t_e)}$$

o bien:

$$\Delta t_0 \approx \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \Delta t_e$$

En un universo en expansión  $a(t_0) > a(t_e)$  de modo que  $\Delta t_0 > \Delta t_e$  y por lo tanto el tiempo parece dilatarse cuando miramos a lo lejos. Llamamos a este fenómeno **dilatación del tiempo cosmológica**.



**Figura 3.26: Dilatación del tiempo cosmológica**

Si asumimos que  $\Delta t$  es el período de una onda entonces podemos escribir su longitud de onda como:

$$\lambda = c\Delta t$$

y la ecuación de dilatación del tiempo se convierte en una ecuación de alargamiento de las longitudes de onda:

$$\lambda_0 \approx \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \lambda_e$$

Que se puede escribir en términos del corrimiento al rojo como:

$$z \approx \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1$$

Dado que para todos los propósitos las observaciones que realizamos involucran radiación con períodos extremadamente cortos se acostumbra cambiar el aproximado por un igual (pero no debe olvidarse que es una aproximación) y a ecuación se extresa normalmente como:

$$z = \frac{a_0}{a} - 1$$

o bien:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}$$

### 3.3.13. La ley de Hubble-Lemaître y la densidad crítica

En el apartado anterior expresamos el corrimiento cosmológico como función del factor de escala pero ¿cuál es su relación con la distancia?

A distancias cortas el factor de escala se puede escribir como:

$$a(t) = a(t_0) - \dot{a}(t_0)\Delta t + \frac{1}{2!}\ddot{a}(t_0)\Delta t^2 + \mathcal{O}(\ddot{a}\Delta t^3)$$

o bien:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 - \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}\Delta t^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\ddot{a}\Delta t^3}{a}\right)$$

La inversa de esta serie se puede escribir como:

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\Delta t + \mathcal{O}\left(\frac{\ddot{a}\Delta t^2}{a}\right)$$

De allí que el corrimiento al rojo se puede escribir como:

$$z \approx \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\Delta t_e$$

A distancias pequeñas se cumple que  $D \approx c\Delta t$  (distancia de viaje de la luz) y por lo tanto a primer orden en  $\Delta t$  la relación se puede escribir como:

$$z \approx \frac{1}{c} \left( \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \right) D$$

Aquí vemos entonces que lo que llamamos el parámetro de Hubble  $H_0$  no es otra cosa que:

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$$

#### Densidad crítica

Una vez hechos estos razonamientos podemos concluir que el valor presente de la densidad crítica es entonces:

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 9,22 \times 10^{-27} h_{70}^2 \text{ kg m}^{-3}$$

Con este valor de la densidad crítica podemos calcular el valor del parámetro  $\Omega$  para los bariones y la materia oscura:

$$\begin{aligned} \Omega_B &= 0,0484 \\ \Omega_{DM} &= 0,258 \end{aligned}$$

Por lo que el parámetro  $\Omega$  para la materia en el universo resulta ser:

$$\Omega_M = 0,3064$$

### Nota

**El problema de la planitud..** El valor del parametro  $\Omega$  para la materia está suficientemente cerca a 1 como para producir problemas. Una sencilla manipulación algebraica de la ecuación conduce a la expresión:

$$(\Omega^{-1} - 1)\rho a^2 = -\frac{3kc^2}{8\pi G}$$

Si asumimos  $\rho = \rho_0(a_0/a)^n$  entonces:

$$(\Omega^{-1} - 1) = -\frac{3kc^2}{8\pi G\rho_0 a_0^n} a^{n-2}$$

Si  $n > 2$  (como sucede con todas las formas de materia-energía convencionales - excepto la energía oscura) entonces en el límite:

$$\lim_{a \rightarrow 0} (\Omega^{-1} - 1) = 0^\pm$$

donde el  $\pm$  significa que la expresión se aproxima a cero por encima o por debajo dependiendo del signo inicial de  $k$ .  
O bien:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Omega = 1^\pm$$

Si el universo empieza con un valor ligeramente diferente de 1 con la expansión el valor diferira de esa cantidad muy rápidamente (como  $a^{n-2}$ ). Esto implica que de tener el universo una geometría abierta o cerrada al principio, hoy el valor del parámetro  $\Omega$  sería significativamente diferente de 1.

Pero el valor de  $\Omega$  es muy cercana a 1 (si asumimos que solo hay materia en el universo). Esto lleva a pensar que en realidad el universo comenzó con valor de  $\Omega$  tan cercano a 1 que no tendría sentido asumir que pudo formarse al azar con un valor así. Por eso algunos asumen que en realidad  $\Omega = 1$  y ha sido así desde el principio.

Si este es el caso la única posibilidad es que:

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M = 0,6936$$

BORRADOR

# Capítulo 4

# Apéndices

## 4.1. Códigos útiles

A continuación encontrarán algunos códigos útiles usados en el curso.

### 4.1.1. Cálculo analítico de tensores en relatividad general

El código a continuación fue adaptado de Hartle y sirve para el cálculo de las cantidades geométricas y tensoriales útiles en relatividad general.

```
(*  
Instrucciones:  
1) Abra una cuenta en https://lab.wolframcloud.com.  
2) Cree un nuevo Notebook.  
3) Copie el contenido de este archivo dentro del Notebook.  
4) Ejecute el código de ejemplo  
*)  
  
(*Variables básicas*)  
Clear[n,  
Inversa,Matriz,Tabla,  
Gama,Geodesica,Riemann,  
GeodesicaTabla ,ListaDos,ListaTres,ListaCuatro];  
n = 4;  
(*Genericos*)  
Inversa[g_]:=Simplify[Inverse[g]]  
(*Muestra*)  
Matriz[g_]:= g//MatrixForm  
Tabla[Lista_]:=TableForm[Partition[DeleteCases[Flatten[Lista], Null], 2],TableSpaci  
GeodesicaTabla[geodesica_]:=TableForm[  
Table[{ "d/d\[Tau]" ToString[u[i-1]], "=" ,geodesica[[i]]},  
{i, 1, n}], TableSpacing -> {2}]  
ListaDos[Tensor_,simbolo_,coords_]:=Table[
```

```

If [UnsameQ[Tensor[[j, 1]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[j]], coords[[1]]]]<>" = ",Tensor[[j, 1]]}] ,
{j, 1, n}, {1, 1, j}];

ListaTres[Tensor_,simbolo_,coords_] := Table[
If [UnsameQ[Tensor[[i, j, k]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[i]], coords[[j]],coords[[ k]]]]<>" = ", Tensor[[i, j, k]]}] ,
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, j}];

ListaCuatro[Tensor_,simbolo_,coords_]:=Table[
If [UnsameQ[Tensor[[i, j, k, l]], 0],
{ToString[simbolo[coords[[i]], coords[[j]],coords[[ k]],coords[[ l]]]]<>" = ",Tensor[[i, j, k, l]]}] ,
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n}];

(*Relatividad General*)

Gama[g_,gi_,coord_] := Simplify[
Table[(1/2)*Sum[(gi[[i, s]])*
(D[g[[s, j]], coord[[k]] ] +
D[g[[s, k]], coord[[j]] ] -
D[g[[j, k]], coord[[s]] ]), {s, 1, n}],
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}] ];

Riemann[G_,coord_] := -Simplify[Table[D[G[[i, j, k]],coord[[l]] ] - D[G[[i, j, l]],coord[[k]] ] -
Sum[G[[s, j, k]]G[[i, l, s]] - G[[s, j, l]]G[[i, k, s]], {s, 1, n}],
{i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {l, 1, n}] ];

Ricci[Rm_]:=Simplify[Table[
Sum[Rm[[i, j, i, l]], {i, 1, n}], {j, 1, n}, {l, 1, n}] ];

Scalar[gi_,Ri_]:= Simplify[ Sum[gi[[i, j]] Ri[[i, j]], {i, 1, n}, {j, 1, n}] ];

Einstein[Ri_,R_,g_]:=Simplify[Ri - (1/2) R*g];

Geodesica[G_]:= Simplify[Table[-Sum[G[[i, j, k]] u[j-1] u[k-1], {j, 1, n}, {k, 1, n}]];
(*

-----  

Ejemplo agujero de gusano:  

coords = {T,r, \[Theta], \[Phi]};  

gij = {{1,0,0,0},-{0, 1, 0, 0}, -{0,0, r^2 + b^2, 0}, -{0,0,
0, (r^2 + b^2) Sin[\[Theta]]^2}};  

nij = Inversa[gij];  

Gijk=Gama[gij,nij,coords];  

Rijkl=Riemann[Gijk,coords];  

Rij=Ricci[Rijkl];  

Rs=Scalar[nij,Rij];  

Gij=Einstein[Rij,Rs,gij];  

dxidt=Geodesica[Gijk];  

Matriz[gij]  

Matriz[nij]  

Tabla[ListaTres[Gijk,\[CapitalGamma],coords]]  

Tabla[ListaCuatro[Rijkl,Riemann,coords]]  

Tabla[ListaDos[Rij,Ricci,coords]]  

Rs  

Tabla[ListaDos[Gij,G,coords]]  

GeodesicaTabla[dxidt]
-----
```

Ejemplo métrica simétrica:

```
coords = {T,r, \[Theta], \[Phi]};  
gij = {{Exp[2A[r]],0,0,0},-{0, Exp[2B[r]], 0, 0}, -{0,0, r^2 , 0}, -{0,0,  
0, r^2 Sin[\[Theta]]^2}};  
nij = Inversa[gij];  
Gijk=Gama[gij,nij,coords];  
Rijkl=Riemann[Gijk,coords];  
Rij=Ricci[Rijkl];  
Rs=Scalar[nij,Rij];  
Gij=Einstein[Rij,Rs,gij];  
dxidt=Geodesica[Gijk];  
Matriz[gij]  
Matriz[nij]  
Tabla[ListaTres[Gijk,\[CapitalGamma],coords]]  
Tabla[ListaCuatro[Rijkl,Riemann,coords]]  
Tabla[ListaDos[Rij,Ricci,coords]]  
Rs  
Tabla[ListaDos[Gij,G,coords]]  
GeodesicaTabla[dxidt]  
*)
```

BORRADOR

# Bibliografía

- [1] C. MONTGOMERY, W. ORCHISTON, AND I. WHITTINGHAM, *Michell, Laplace and the origin of the black hole concept*, Journal of Astronomical History and Heritage, 12 (2009), pp. 90–96.
- [2] K. SCHWARZSCHILD, *On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory*, arXiv preprint physics/9905030, (1999).