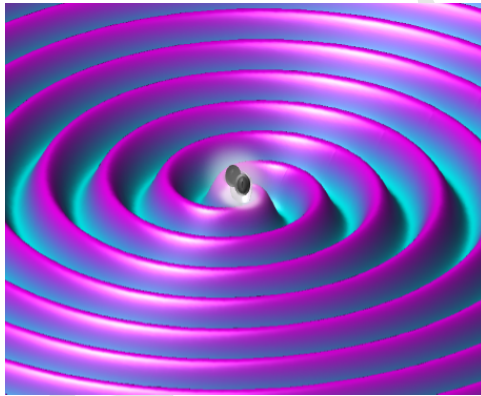


# Relatividad y Gravitación

## Teoría, algoritmos y problemas



**Jorge I. Zuluaga**

Profesor titular de Astronomía y Física

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Antioquia

10 de junio de 2020

BORRADOR

# Índice general

<b>1. Relatividad General</b>	<b>7</b>
1.1. Motivación	7
1.2. Principios y postulados básicos	8
1.2.1. Principio de Equivalencia	8
1.2.2. Principio de covarianza general	13
1.2.3. Tensores generales	14
1.3. Transporte paralelo y derivada covariante	15
1.3.1. El gradiente no es un tensor general	15
1.3.2. Transporte paralelo	16
1.3.3. Derivada direccional general	17
1.3.4. Los símbolos de Christoffel	19
1.3.5. Cálculo de los símbolos de Christoffel	21
1.4. Derivada total general y geodésicas	29
1.4.1. Derivada total general	29
1.4.2. Derivada total y transporte paralelo	30
1.4.3. Transporte paralelo y bases vectoriales	30
1.4.4. Bases y componentes vectoriales en espacio curvo	31
1.4.5. Ejemplos numéricos de transporte paralelo	33
1.4.6. Ecuación geodésica	39
1.4.7. Ejemplos numéricos de geodésicas	40
1.5. La geodésica y un principio variacional	44
1.6. Geodésicas y movimiento inercial	46
1.7. Geodésicas en campo débil	47
1.7.1. Un ejemplo numérico	50
1.8. Simetrías y cantidades conservadas	52
1.8.1. La métrica como constante	54
1.8.2. Coordenadas cíclicas y vectores de Killing	54
1.8.3. Ejemplo: geodésicas en coordenadas cilíndricas	55
1.8.4. Ejemplo: geodésicas sobre una esfera	56
1.8.5. Ejemplo: geodésicas en la métrica de Newton	57
1.9. Transporte paralelo y curvatura	58
1.9.1. Propiedades del tensor de Riemann	63
1.9.2. Tensor de Riemann para métricas diagonales	64
1.9.3. Desviación geodésica	65
1.9.4. Tensor de Riemann numérico	66
1.9.5. Desviación geodésica numérica	78

1.10.	Principio de consistencia . . . . .	80
1.11.	Una ecuación de campo general . . . . .	81
1.12.	Tensor de momentum-energía . . . . .	83
1.12.1.	Tensor de momentum-energía para una nube de partículas . . . . .	84
1.12.2.	Tensor de momentum-energía para polvo . . . . .	85
1.12.3.	Tensor $T^{\mu\nu}$ y el tensor de esfuerzos $\sigma^{\mu\nu}$ . . . . .	86
1.12.4.	Tensor de momentum-energía para fluido perfecto . . . . .	86
1.12.5.	La conservación de $T^{\mu\nu}$ y la ecuación geodésica . . . . .	87
1.13.	La ecuación de campo métrico . . . . .	87
1.13.1.	El tensor de Einstein . . . . .	88
1.13.2.	Una ecuación de campo general . . . . .	90
1.13.3.	La ecuación de campo y el principio de consistencia . . . . .	91
1.13.4.	La ecuación de campo débil para fluido perfecto . . . . .	93
1.13.5.	El término cosmológico . . . . .	93
1.13.6.	La ecuación de Hilbert-Einstein . . . . .	95
<b>2.</b>	<b>Aplicaciones de la relatividad general</b> . . . . .	<b>99</b>
2.1.	Ondas gravitacionales . . . . .	100
2.1.1.	Historia de las ondas gravitacionales . . . . .	100
2.1.2.	Un programa de estudio . . . . .	101
2.1.3.	Gravedad linearizada . . . . .	101
2.1.4.	Ecuación de campo linearizada en el vacío . . . . .	104
2.1.5.	Libertad gauge . . . . .	105
2.1.6.	El gauge armónico . . . . .	106
2.1.7.	La ecuación de campo en el gauge armónico . . . . .	107
2.1.8.	La ecuación de campo con fuentes . . . . .	108
2.1.9.	La métrica postnewtoniana . . . . .	109
2.1.10.	Analogía electromagnética . . . . .	110
2.1.11.	Ecuación de onda en el vacío . . . . .	111
2.1.12.	Solución general a la ecuación de onda . . . . .	112
2.1.13.	El gauge transversal de traza cero . . . . .	113
2.1.14.	Geodésicas en una onda gravitacional . . . . .	116
2.1.15.	Distancias en una onda gravitacional . . . . .	118
2.1.16.	Detectores de ondas gravitacionales . . . . .	122
2.1.17.	Simulación de una señal . . . . .	129
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>135</b>

# Índice de figuras

1.1.	Transporte paralelo. . . . .	16
1.2.	Derivada direccional. . . . .	17
1.3.	Vector transportado de forma paralela en coordenadas cilíndricas .	37
1.4.	Vector transportado de forma paralela sobre la superficie de una esfera. Se usa proyección azimuthal para representar las coordenadas (malla punteada). . . . .	39
1.5.	Definición de geodésica en el espacio-tiempo plano y sobre la superficie de una esfera. . . . .	40
1.6.	Figura correspondiente al código 1.1. . . . .	42
1.7.	Figura correspondiente al código 1.2. . . . .	44
1.8.	Figura correspondiente al código 1.3. . . . .	45
1.9.	Figura correspondiente al código 1.4. . . . .	53
1.10.	Figura . . . . .	61
1.11.	Figura correspondiente al código 1.5. . . . .	80
2.1.	Ilustración gráfica de cómo al paso de una onda gravitacional las coordenadas de las partículas de prueba se mantienen constantes pero su distancia mutua cambia con el tiempo. . . . .	119
2.2.	Figura correspondiente al código 2.1. . . . .	120
2.3.	Figura correspondiente al código 2.2. . . . .	123
2.4.	Detector de ondas gravitacionales de Joseph Weber . . . . .	123
2.5.	Diseño básico para un interferometro de ondas gravitacionales como el que usa hoy el LIGO . . . . .	124
2.6.	Figura correspondiente al código 2.3. . . . .	127
2.7.	Diseño real de un interferometro de ondas gravitacionales como el que usa hoy el LIGO . . . . .	128
2.8.	Sensibilidad de <i>LIGO avanzado</i> como función de la frecuencia de las ondas gravitacionales detectadas. La <i>sensibilidad</i> esta expresada en términos de lo que se conoce como la <i>amplitud de densidad espectral</i> que tiene unidades del inverso de la raíz cuadrada de la frecuencia. . . . .	129
2.9.	Figura correspondiente al código 2.4. . . . .	134

BORRADOR

## Capítulo 1

# Relatividad General

**Resumen:** Este capítulo esta dedicado a la Relatividad general.

### 1.1. Motivación

Históricamente la relatividad general surgió como un esfuerzo del propio Albert Einstein (ahora en solitario) para construir una teoría mucho más general de la relatividad en la que pudiera extender su principio de covariancia para incluir otros observadores diferentes a los observadores inerciales. En el proceso formuló y desarrollo las consecuencias de lo que se conoce hoy como el **principio de covarianza general**.

Conseguir esto no sería sin embargo fácil para Einstein. De un lado las matemáticas necesarias para abordar el problema más general de la relatividad no serían tan sencillas como las que usa la relatividad especial (álgebra y cálculo diferencial e integral esencialmente). Del otro lado, Einstein nunca previó que en su búsqueda se toparía con una nueva teoría del fenómeno gravitacional, que fue finalmente por lo que termino conociéndose la teoría resultante.

En términos generales, entonces, la **teoría general de la relatividad** es:

- Una teoría sobre las **transformaciones generales de coordenadas** necesarias para relacionar las cantidades registradas por observadores inerciales y no inerciales. En este aspecto la teoría es realmente una *generalización* de la primera parte de la teoría, que por la misma razón tiene sentido llamar **teoría especial de la relatividad**. En este aspecto la teoría no es mucho más que simplemente matemáticas en tanto las transformaciones generales de coordenadas son un problema más de matemáticas que un problema físico.
- Una **teoría fundamental sobre el fenómeno gravitatorio** algo que los filósofos y físicos de toda la historia habían buscado incansablemente desde el tiempo de Aristóteles. Como hemos visto en secciones precedentes la fuerza gravitacional que esta en la base de la teoría gravitatoria de Newton no satisface los criterios de transformación de la teoría especial de la relatividad.

Es decir la fuerza gravitacional vista por un observador inercial no transforma con las reglas de Lorentz-Einstein y por lo tanto no puede ser un modelo fundamental del fenómeno. La teoría general de la relatividad explica el origen de esos fenómenos, la tendencia de toda la materia a acercarse como si se atrayera, el movimiento particular de las partículas cerca a grandes cuerpos astronómicos - caída libre, movimiento orbital, etc. e incluso los efectos que la materia tienen sobre la propagación de la luz. Según esta teoría la gravedad surge porque existe una relación íntima entre el contenido de energía del universo (masa, energía y momentum) y las propiedades geométricas del espacio-tiempo (curvatura). La dinámica de la materia en ese espacio-tiempo distorsionado es lo que vemos como gravedad.

En este capítulo, que podríamos considerar apenas introductorio (las ramificaciones posibles de la teoría general de la relatividad son bastas), introduciremos los postulados y principios básicos que uso Einstein en su momento y que hoy todavía se usan para formular y construir la teoría general de la relatividad. Partiendo de esos principios y de resultados matemáticos conocidos en el análisis tensorial y la geometría diferencial (de los que hemos ya tenido una introducción en el capítulo anterior) deduciremos las principales ecuaciones que describen el fenómeno gravitatorio, desde la ecuación fundamental conocida como la ecuación de campo métrico de Einstein-Hilbert, hasta la ecuación de la geodésica.

Dejaremos para capítulos posteriores la aplicación concreta de estas ecuaciones que forman en sí mismo un cuerpo teórico importante dentro de la física teórica y la astrofísica contemporánea.

## 1.2. Principios y postulados básicos

Hoy se acepta que la teoría general de la relatividad se construye, físicamente, sobre la base de tres principios o postulados básicos:

- El **principio de equivalencia** que tenía ya una historia de más de 350 años desde los experimentos de Galileo con planos inclinados.
- El **principio de covarianza general**, una inteligente generalización del postulado de realidad especial.
- El **principio de consistencia**, una inteligente idea que, en términos prácticos, permite reconstruir las ecuaciones de teorías nuevas y más fundamentales a partir de las ecuaciones *efectivas* de teorías anteriores.

### 1.2.1. Principio de Equivalencia

El principio de equivalencia fue llamado por Einstein *la idea más feliz de mi vida*.

Existen distintas versiones del principio de equivalencia y por razones históricas y de la motivación física de la teoría general bien vale revisar cada una de ellas.



### Principio de Galileo

Es bien conocida la historia apócrifa de Galileo lanzando desde lo alto de la Torre de Pisa bolas metálicas de distinta masa para demostrar, contra la creencia de los filósofos escolásticos que estudiaban la obra de Aristóteles, que sin importar la masa las bolas caían al mismo tiempo.

Este importante resultado no tiene una justificación teórica en el contexto de las ideas galileanas, fue solo una intuición, posiblemente en reacción a las ideas no contrastadas de Aristóteles que formuló Galileo. Por la misma razón se lo puede considerar un principio.

#### Postulado 1.1

**Principio de Galileo.** La trayectoria que sigue un objeto en caída libre y en ausencia del aire (o despreciando su efecto), es independientemente de la constitución y tamaño del objeto.

### Principio de igualdad de las masas

Aunque este principio hunde sus raíces en la teoría Newtoniana, nunca fue formulado explícitamente por Newton.

Existen dos cantidades que llamamos masa en la física Newtoniana: la **masa inercial** que esta relacionada con la *resistencia* o *inercia* que opone la partícula a cambiar su estado de movimiento y la **masa gravitacional** que es una medida de su capacidad para producir una atracción sobre otras partículas y para sentirla.

La masa inercial es la que aparece en la definición del momentum de la partícula  $\vec{p} = m^{(i)}\vec{v}$  y por lo tanto (suponiendo que no cambia en un instante dado) es la misma que aparece en el postulado de fuerzas:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m^{(i)}}$$

Por otro lado la masa gravitacional es la que aparece en la definición misma de la fuerza de atracción gravitacional:

$$\vec{F}_g = G \frac{m^{(g)} M^{(g)}}{r^3} \vec{r}$$

Si usamos esta fuerza para calcular la aceleración de caída libre obtenemos:

$$\vec{g} = G \frac{m^{(g)}}{m^{(i)}} \frac{M^{(g)}}{r^3} \vec{r}$$

En principio siempre será posible ajustar el valor de la constante de gravitación universal  $G$  para hacer que el valor numérico de la masa gravitacional de un cuerpo sea idéntico al valor numérico de su masa inercial. Sin embargo, y esta es la motivación del principio, experimentalmente se ha mostrado (ver experimento de Eötvös) que una vez ajustado para un cuerpo, la identidad numérica se mantiene para todos independientemente de su composición.

**Postulado: Principio de igualdad de las masas gravitacional e inercial.** Una vez fijado el valor de la constante gravitacional  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  La masa gravitacional e inercial de un cuerpo, en la teoría newtoniana, tienen el mismo valor numérico, independientemente del lugar y de la composición del cuerpo:

$$m^{(i)} = m^{(g)}$$

Este principio es equivalente a decir que la aceleración gravitacional que experimenta un objeto en presencia de otro es *explícitamente*<sup>1</sup> independiente de su masa:

$$\vec{g} = \frac{GM}{r^3} \vec{r}$$

Por este último hecho a este también se lo llama el **principio de universalidad de la caída libre**.

El principio de equivalencia de la masa gravitacional e inercial no implican que sean la misma cantidad, sino simplemente que tienen el mismo valor, pero parecen sugerir de fondo la existencia de un hecho más fundamental, que es precisamente lo que descubrió Einstein.

#### Principio de equivalencia de Einstein

Si la aceleración gravitacional de los cuerpos es explícitamente independiente de su masa, entonces cuerpos que caen libremente en presencia de un cuerpo mayor y que comienzan con condiciones iniciales idénticas, caerán conservando una relación espacial relativa simple.

En un campo gravitacional uniforme  $\vec{g}_0$  los cuerpos se mantendrán a una distancia relativa constante con el tiempo mientras caen. En un campo gravitacional más realista, como el producido por la Tierra, debido a que los cuerpos se mueven hacia el centro del planeta, los cuerpos tenderán a acercarse en dirección perpendicular a la dirección hacia el centro y a alejarse en esa misma dirección. A este efecto se lo llama aceleración de marea.

Sin embargo, si estamos cerca al cuerpo atractor y el sistema en caída libre es suficientemente pequeño, un observador en el interior del sistema podría no percibir que se encuentra en caída libre. Esta fue *la idea más feliz* de la vida de Einstein.

#### Postulado 1.2

**Principio de Equivalencia de Einstein.** Un observador en caída libre (acelerado) en un campo gravitacional arbitrario, es *localmente* indistinguible de un observador inercial.

<sup>1</sup>La independencia explícita no implica que en realidad haya una dependencia implícita en tanto un cuerpo modifica la posición y movimiento de los cuerpos que lo atraen gravitacionalmente, cambiando a su vez su propia aceleración. Este efecto será mayor en tanto mayor sea su masa. Es decir, la aceleración gravitacional de un cuerpo es implícitamente dependiente de su masa.

**Postulado 1.2 (Cont.)**

Otra manera de expresar este principio es decir que *localmente* los efectos cinemáticos de un campo gravitacional son *indistinguibles* de aquellos que se producen en un sistema de referencia acelerado.

Hay dos palabras claves en el principio de equivalencia de Einstein: *local* e *indistinguible*.

Por **local** entendemos que los fenómenos deben estudiarse en la vecindad infinitesimal de un punto, es decir no podemos afirmar que el observador en caída libre sea inercial en todos los puntos de su sistema de referencia. En términos de la fenomenología newtoniana esto es debido a los efectos de marea producidos por la variación del campo gravitacional.

Por **indistinguible** entendemos que no habría ningún experimento cinemático que le permitiera al observador demostrar que esta en un sistema en caída libre o en un sistema inercial, o bien que esta en un campo gravitacional o en un sistema de referencia acelerado.

Otra manera de decirlo sería que la gravedad, al menos sus efectos cinemáticos, son relativos. Este fue justamente el *pensamiento más feliz* de la vida de Einstein.

**Principio de equivalencia fuerte**

Puede decirse que lo postulado por Einstein en su principio de equivalencia no es más que una consecuencia del postulado de la universalidad de la caída libre, algo que podría perfectamente haber descubierto Newton. En este sentido más que un postulado sería un corolario.

Es por eso que muchos autores llaman al principio de equivalencia de Einstein el **principio de equivalencia débil**. Pero la teoría general de la relatividad va más lejos. De la misma manera que la teoría especial donde el principio de relatividad primero se reconoce en los fenómenos electromagnéticos y después se extiende a todos los fenómenos físicos, incluyendo los mecánicos, en relatividad general el principio de equivalencia se extiende también.

**Postulado 1.3**

**Principio de Equivalencia de Fuerte.** Localmente todos los efectos físicos de un campo gravitacional son *indistinguibles* de aquellos que se producen en un sistema de referencia acelerado.

Es decir, no es posible distinguir un campo gravitacional de un sistema de referencia inercial mediante ningún experimento, bien sea este cinemático, dinámico, electromagnético, óptico, nuclear, etc.

**Principio de equivalencia geométrico**

En su versión moderna el principio de equivalencia adopta una formulación mucho más general y poderosa que irá teniendo sentido a lo largo de este capítulo.

**Postulado 1.4**

**Principio de equivalencia.** En cualquier evento  $x^\nu$  de un espacio-tiempo arbitrario, donde la métrica sea  $g_{\mu\nu}(x^\nu)$  es posible encontrar un sistema de coordenadas  $x^{\mu'}$  ( $x^\nu$ ) (transformación general no lineal) tal que se cumplan simultáneamente:

$$g_{\mu'\nu'}|_{x^\nu} = \eta_{\mu'\nu'}$$

y

$$\partial_{\alpha'} g_{\mu'\nu'}|_{x^\nu} = 0$$

En este sistema de coordenadas las ecuaciones manifiestamente covariantes que describen todas las leyes de la física en el espacio-tiempo plano son válidas. Llamamos al sistema de coordenadas donde se cumple esto un **sistema de referencia inercial local** o un **sistema de coordenadas geodésico**.

Las implicaciones de este principio son fantásticas. De un lado implica que todo lo que hemos aprendido en la teoría especial de la relatividad seguirá siendo válido en el contexto de la relatividad general y por lo tanto no hay que construir nuevas leyes para el espacio-tiempo curvo, solo hay que aprender a hacer transformaciones generales (no lineales) de coordenadas en el espacio-tiempo.

**Nota**

**Gravedad no es lo mismo que aceleración.** El principio de equivalencia moderno formulado anteriormente tiene una importante y sutil diferencia con el principio de equivalencia de Einstein de 1907. Según ese principio un campo gravitacional es equivalente a un sistema de referencia acelerado. Si bien en su momento este principio fue de utilidad para Einstein para realizar sus primeras predicciones asombrosas sobre las implicaciones de la teoría de la relatividad, en realidad, como lo probó el mismo Einstein en su versión final de la teoría.

Lo explicaremos más adelante pero bastará con decir por ahora que el principio de equivalencia solo supone la anulación de las primeras derivadas de la métrica en el sistema geodésico, pero en un campo gravitacional las segundas derivadas de la métrica son realmente las más importantes y son diferentes de cero. Esto no se puede conseguir solo con aceleración.

Puesto en otros términos, con sistemas acelerados es imposible *imitar* los efectos de las mareas gravitacionales (que dependen de las segundas derivadas de la métrica).

Una manifestación concreta del hecho de que un sistema de referencia acelerado no es equivalente a un campo gravitacional tiene que ver con el fenómeno de dilatación temporal. Habíamos visto en el postu-

**Nota (Cont.)**

lado de los relojes que la aceleración **no produce atraso presente**, solo se produce atraso a lo largo del tiempo. En cambio, como veremos, la gravedad **produce atraso presente**.

### 1.2.2. Principio de covarianza general

Uno de los fundamentos de la relatividad es la idea que las leyes son las mismas para todos los observadores. Esto fue formulado en su **principio de relatividad especial** y es la base para la construcción de la teoría especial de la relatividad y sus construcciones geométricas incluyendo cuadvectores y tensores.

La teoría general de la relatividad no se podría levantar sobre un principio menos general y es por eso que ella parte del siguiente postulado:

#### Postulado 1.5

**Principio de covarianza general.** Las leyes de la física son covariantes bajo transformaciones de coordenadas generales  $x^{\mu'}$ , es decir cualquier regularidad física que pueda expresarse como relaciones entre *cantidades tensoriales generales* puede elevarse a la categoría de una ley física.

En el principio de covarianza general el adjetivo *general* para referirse a las transformaciones de coordenadas y a los tensores tiene una connotación matemática muy específica.

Considere por ejemplo el caso de un sistema de referencia que esta acelerado en dirección del eje  $x$  respecto a un sistema de referencia inercial. En el caso de la relatividad newtoniana caso las reglas de transformación entre los dos sistemas será:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - ut - gt^2/2 \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Estas transformaciones no son lineales, como lo eran las transformaciones de Galileo-Newton:

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -u - gt$$

Es justamente en ese sentido que hablamos de **transformaciones generales**.

Bajo transformaciones generales de coordenadas no es posible tampoco definir sistemas de referencia globales, que cubran todo el espacio tiempo. Esto es porque bajo estas transformaciones generales el cuadvector posición ya no transforma de la manera que lo hacía en el caso de las transformaciones lineales de Lorentz-Einstein.

$$x^{\mu'} \neq \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} x^{\mu}$$

Solo es posible construir sistemas de referencia locales, o en términos matemáticos, solo el intervalo sigue siendo estrictamente un tensor:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}$$

que podemos escribir también como:

$$dx^{\mu'} = \mathcal{G}_{\mu}^{\mu'} dx^{\mu}$$

donde la matriz  $\mathcal{G}_{\mu}^{\mu'}$  (que también podemos identificar como el Jacobiano de la transformación) jugará ahora el papel que en la relatividad especial jugó  $\Lambda_{\mu}^{\mu'}$ , con la diferencia que esta matriz es ahora distinta en cada punto del espacio.

Justamente en términos de la nueva matriz de transformación definimos lo que llamaremos un **tensor general**, que será cualquier cantidad que transforme como lo hace el intervalo:

$$A^{\mu'} = \mathcal{G}_{\mu}^{\mu'} A^{\mu}$$

Bajo transformaciones generales de coordenadas tenemos que admitir también que la métrica no será simplemente la métrica de Minkowski. En general, el espacio-tiempo en estas condiciones tendrá una métrica general definida por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$$

La cantidad  $g_{\mu\nu}$  es en sí misma un tensor general y transforma entonces de la forma:

$$g_{\mu'\nu'} = \mathcal{G}_{\mu'}^{\mu} \mathcal{G}_{\nu'}^{\nu} g_{\mu\nu}$$

de modo que  $ds^2$  sigue siendo una cantidad invariante bajo estas transformaciones.

Por definición el tensor métrico es simétrico:

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

La inversa del tensor métrico se escribe como  $g^{\mu\nu}$  y se define como:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

### 1.2.3. Tensores generales

Casi todo lo que dijimos en la relatividad especial sobre las cantidades tensoriales puede generalizarse cuando trabajamos con transformaciones generales de coordenadas. A continuación se sintetizan las propiedades de los tensores generales:

■ **Reglas de transformación:**

$$A^{\alpha'\beta'\dots}_{\mu'\nu'\dots} = \left( \mathcal{G}^{\mu'}_{\mu} \mathcal{G}^{\nu'}_{\nu} \dots \right) \left( \mathcal{G}^{\alpha}_{\alpha'} \mathcal{G}^{\beta}_{\beta'} \dots \right) A^{\alpha\beta\dots}_{\mu\nu\dots}$$

- **Operaciones tensoriales:** la multiplicación (interna y externa por escalares) y la suma de tensores produce también cantidades tensoriales con rango y posición de índices correspondientes. Ejemplo:

$$A^{\alpha}_{\mu\nu} = kB^{\alpha}C_{\mu}D_{\nu} + E^{\alpha}_{\mu\nu}$$

- **Subida y bajada de índices:** Las operaciones de un tensor con la métrica son de suma importancia. Las componentes covariantes del tensor se definen por:

$$A_{\nu} = g_{\mu\nu}A^{\mu}$$

A esta operación se la llama también "bajar un índice" y aplica para cualquier tensor:

$$A^{\mu}_{\nu} = g_{\alpha\nu}A^{\mu\alpha}$$

Usando esta propiedad podemos mostrar que:

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

- **Contracción de índices:** Cuando en un tensor se utilizan los mismos índices se realiza lo que se conoce como una contracción, que equivale a una multiplicación por el tensor métrico

$$A_{\nu} = B^{\mu}_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha}B_{\alpha\mu\nu}$$

## 1.3. Transporte paralelo y derivada covariante

### 1.3.1. El gradiente no es un tensor general

Al introducir las transformaciones generales de coordenadas hay una cantidad que bajo transformaciones de Lorentz-Einstein (lineales) transformaba como un tensor, pero que bajo transformaciones generales ya no lo hace: la derivada o el gradiente.

Considere la definición:

$$A^{\alpha}_{,\mu} = \partial_{\mu}A^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}A^{\alpha}$$

Bajo transformaciones generales, la derivada covariante  $\partial_{\mu'}A^{\alpha'}$  en el nuevo sistema será:

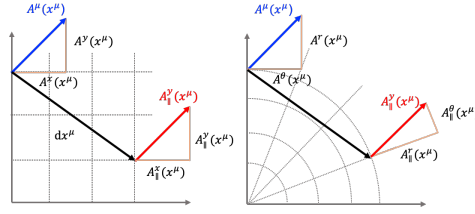


Figura 1.1: Transporte paralelo.

$$\partial_{\mu'} A^{\alpha'} = \left( \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\mu} \right) \left( \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \right) = \mathcal{G}^{\mu}_{\mu'} \partial_{\mu} \left( \mathcal{G}^{\alpha'}_{\alpha} A^{\alpha} \right)$$

donde para la expresión en el primer paréntesis hemos usado la regla de la cadena.

La diferencia respecto al caso que habíamos estudiado en el capítulo anterior es que ahora las componentes de la matriz de transformación general  $\mathcal{G}^{\alpha'}$  no son constantes y por lo tanto no es posible escribir esta expresión de la forma simple:

$$\partial_{\mu'} A^{\alpha'} \neq \mathcal{G}^{\mu}_{\mu'} \mathcal{G}^{\alpha'}_{\alpha} \partial_{\mu} A^{\alpha}$$

Siendo esta cantidad tan importante para los propósitos de formular teorías físicas manifiestamente covariantes es importante que estudiemos lo que debemos hacer en este caso.

### 1.3.2. Transporte paralelo

Derivar un tensor significa esencialmente calcular la tasa a la que cambian sus componentes al movernos de un evento a otro en el espacio-tiempo.

El problema es que en un sistema de coordenadas general las componentes pueden cambiar por dos razones:

1. Porque el tensor cambie (el campo tensorial) cambie. Este es el cambio que nos interesa.
2. Porque la base sobre la que se define el tensor cambie.

Un caso elemental es el de un vector en el espacio euclidiano de dos dimensiones. Si se utilizan coordenadas cartesianas y tenemos un campo vectorial constante, las componentes del campo vectorial serán las mismas no importa si te desplazas en el plano (ver panel izquierdo en la Figura 1.1). En este caso, si al contrario, el vector cambia intrínsecamente lo notarás comparando las componentes. Pero que pasa si usamos coordenadas cilíndricas. En este caso incluso si el campo vectorial es constante, las componentes del campo cambiarán punto a punto debido solamente a la manera en la que se define el sistema de coordenadas (ver panel derecho en la Figura 1.1).

La manera para determinar si el campo vectorial efectivamente cambia a lo largo de una trayectoria es la de *transportar* el vector del punto en el que se está midiendo al punto original y mirar si hay una discrepancia entre ambos.



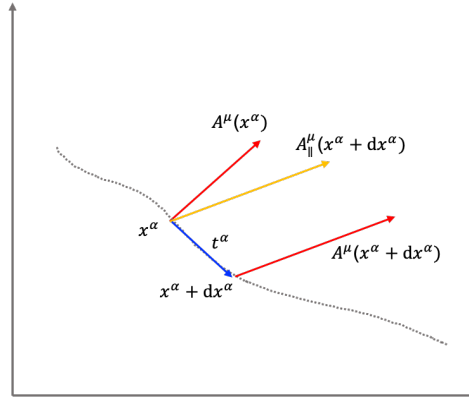


Figura 1.2: Derivada direccional.

El **transporte paralelo** es la operación de transformación de un vector de un punto del espacio a otro de modo que su *dirección intrínseca* no se modifique durante el transporte.

Si el vector lo llamamos  $A^\mu(x^\nu)$  en un evento  $x^\nu$ , el mismo vector transportado de forma paralela a un evento distinto  $y^\nu$  se llamara  $A^\mu_\parallel(y^\nu)$

### 1.3.3. Derivada direccional general

Definimos la **derivada direccional general** de un campo tensorial  $A^\mu$  a lo largo de una dirección arbitraria  $t^\alpha$ , y la denotamos como  $(D_t A)^\mu$  mediante la expresión:

$$(D_t A)^\mu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A^\mu_\parallel(x^\alpha + dx^\alpha) - A^\mu(x^\alpha)}{\epsilon}$$

donde  $dx^\alpha = \epsilon t^\alpha$  y  $A^\mu_\parallel(x^\alpha + dx^\alpha)$  son las componentes del campo  $A^\mu$  evaluado en el punto  $x^\alpha + dx^\alpha$  pero transportado de forma paralela a lo largo de  $t^\alpha$  hasta el punto inicial  $x^\alpha$  (ver Figura 1.2).

#### Nota

**¿Es la derivada direccional general una cantidad tensorial?** Nótese que esta definición es una definición geométrica rigurosa y en principio esperaríamos uno que al definirse de esta manera la cantidad resultante tuviera las propiedades de una cantidad geométrica, i.e. tensorial.

Las componentes del cuadrivector transportado de forma paralela *se pueden* escribir, en general, como:

$$A^\mu_\parallel(x^\alpha + dx^\alpha) = A^\mu(x^\alpha + dx^\alpha) + C^\mu_{\gamma\delta} A^\gamma(x^\alpha + dx^\alpha) dx^\delta$$

donde  $C_{\gamma\delta}^{\mu}$  son en general coeficientes que permiten expresar el cambio en las componentes del cuadrivector transportado en función de las componentes de ambos, el cuadrivector original y el cuadrivector de la dirección de transporte. Llamamos a estos coeficientes **los coeficientes de conexión**. En el caso más general habrán 64 coeficientes ( $4^3$ ) de conexión distintos de cero.

Reemplazando en la fórmula para la derivada covariante obtenemos:

$$(D_t A)^{\mu} = (\partial_t A)^{\mu} + C_{\gamma\delta}^{\mu} A^{\gamma} t^{\delta}$$

donde hemos usado la definición de la derivada direccional convencional:

$$(\partial_t A)^{\mu} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A^{\mu}(x^{\alpha} + dx^{\alpha}) - A^{\mu}(x^{\alpha})}{\epsilon}$$

En términos de sus componentes la derivada direccional queda:

$$D_{\alpha} A^{\mu} t^{\alpha} = \partial_{\alpha} A^{\mu} t^{\alpha} + C_{\gamma\alpha}^{\mu} A^{\gamma} t^{\alpha}$$

en la que hemos usado la idea bien conocida del cálculo vectorial de que la derivada direccional se puede escribir como  $\partial_t A = \vec{\nabla} A \cdot \vec{t} = \partial_{\alpha} A^{\mu} t^{\alpha}$

Finalmente, suponiendo que las componentes del cuadrivector que define la dirección son independientes, llegamos a una definición general de la derivada bajo una transformación general:

$$D_{\alpha} A^{\mu} = \partial_{\alpha} A^{\mu} + C_{\gamma\alpha}^{\mu} A^{\gamma}$$

A esta la llamaremos **derivada covariante general** o simplemente **derivada covariante** y para representarla en lo sucesivo usaremos el símbolo “;” en analogía a como usamos el símbolo “,” para representar la derivada covariante  $\partial_{\alpha} A^{\mu}$  que introducimos en las transformaciones lineales, Así:

$$A^{\mu}_{;\alpha} = A^{\mu}_{,\alpha} + C_{\gamma\alpha}^{\mu} A^{\gamma}$$

### Proposición 1.1

**Propiedades de la derivada covariante.** Las siguientes son propiedades de la derivada covariante:

1. **Derivada covariante de una suma:**  $(A^{\mu} + B^{\mu})_{;\nu} = A^{\mu}_{;\nu} + B^{\mu}_{;\nu}$
2. **Derivada covariante de un producto o regla de Leibniz:**  $(A^{\mu} B^{\nu})_{;\alpha} = A^{\mu}_{;\alpha} B^{\nu} + A^{\mu} B^{\nu}_{;\alpha}$
3. **Derivada covariante de un campo escalar:**  $\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$
4. **Derivada covariante de un tensor contraído:**  $(A^{\mu} B_{\mu})_{;\alpha} = (A^{\mu} B_{\mu})_{,\alpha}$
5. **Derivada covariante de un tensor covariante:**  $B_{\mu;\nu} = B_{\mu,\nu} - C_{\mu\nu}^{\gamma} B_{\gamma}$
6. **Derivada covariante de un tensor contravariante de segundo rango:**

$$A^{\mu\nu}_{;\alpha} = A^{\mu\nu}_{,\alpha} + C_{\gamma\alpha}^{\mu} A^{\gamma\nu} + C_{\alpha\gamma}^{\nu} A^{\mu\gamma}$$

**Proposición 1.1 (Cont.)****7. Derivada covariante de un tensor covariante de segundo rango:**

$$A_{\mu\nu;\alpha} = A_{\mu\nu,\alpha} - C_{\mu\alpha}^{\gamma} A_{\gamma\nu} - C_{\alpha\nu}^{\gamma} A_{\mu\gamma}$$

¿Es la cantidad  $D_{\alpha}$  un tensor bajo transformaciones generales? Hasta ahora la construcción geométrica que hemos realizado no hace explícita esta propiedad. En realidad la naturaleza tensorial de ella dependerá de la naturaleza misma de los coeficientes de conexión. Por ahora asumiremos que por el hecho de ser esta cantidad construida de forma geométrica rigurosa, entonces es una cantidad tensorial. Más adelante iremos encontrando evidencias matemáticas de que es así.

**1.3.4. Los símbolos de Christoffel**

¿Qué son y cómo se calculan los coeficientes de conexión?

La primera característica es que no se trata de una cantidad tensorial (ver Problemas al final del capítulo). Si asumimos por ahora que la derivada definida en la sección anterior  $D_{\alpha}$  es un tensor, es posible demostrar (ver Problemas al final del capítulo) que la conexión afín transforma en general como:

$$C_{\mu'\sigma'}^{\nu'} = \mathcal{G}^{\nu'}_{\nu} \mathcal{G}^{\mu}_{\mu'} \mathcal{G}^{\sigma}_{\sigma'} C_{\mu\sigma}^{\nu} - \mathcal{G}^{\mu}_{\mu'} \mathcal{G}^{\sigma}_{\sigma'} \partial_{\mu\sigma}^2 x^{\nu'}$$

En general se puede también demostrar que aunque las conexiones no son tensoriales, es posible definir con ellas un tensor que se conoce como el **tensor de torsión**:

$$T_{\mu\nu}^{\alpha} = C_{\mu\nu}^{\alpha} - C_{\nu\mu}^{\alpha}$$

En general se pueden definir muchas conexiones diferentes en variedades diferenciales generales. Sin embargo hay una familia específica de conexiones que son las de interés para la Relatividad General.

**Definición 1.1**

**Conexión de Levi-Civita y símbolos de Christoffel.** Una conexión afín  $C_{\mu\nu}^{\alpha}$  que además satisface las condiciones (axiomas):

- Es libre de torsión:  $T_{\mu\nu}^{\alpha} \equiv C_{\mu\nu}^{\alpha} - C_{\nu\mu}^{\alpha} = 0$ .
- Es compatible con la métrica:  $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$ .

Se llama una **conexión de Levi-Civita**. A los coeficientes de una conexión de Levi-Civita se los llama (históricamente) **Símbolos de Christoffel** y se los denota  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ .

Nótese que la propiedad de que el espacio sea libre de torsión implica que los

símbolos de Christoffel son simétricos frente al intercambio de los índices inferiores:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}$$

esto implica que no existen 64 símbolos independientes, sino tan solo  $4_{\alpha} \times [(4^2 - 4)/2 + 4]_{\mu\nu} = 40$  símbolos de Christoffel que deben ser especificados para determinar la derivada covariante general en un espacio de Riemanniano o pseudoriemanniano.

La condición de que la métrica no tenga derivada covariante es fundamental y permite derivar expresiones para los símbolos de Christoffel. Para ello podemos comenzar con escribir todas las posibles combinaciones cíclicas de la derivada covariante del tensor métrico así:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu;\rho} &= g_{\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda} = 0 \\ g_{\nu\rho;\mu} &= g_{\nu\rho,\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} g_{\nu\lambda} = 0 \\ g_{\rho\mu;\nu} &= g_{\rho\mu,\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} g_{\rho\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Nótese que entre ellas y por la simetría del tensor métrico y de los símbolos de Christoffel hay términos que se repiten. Así por ejemplo en la primera y la segunda ecuación los términos  $-\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu}$  y  $-\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda} g_{\nu\lambda}$  (respectivamente) son idénticos. Así, restando la primera de la segunda y tercera ecuación obtenemos:

$$g_{\mu\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\mu} - g_{\rho\mu,\nu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} g_{\lambda\rho} = 0$$

De esta última expresión se puede escribir la forma conocida de los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

Si introducimos la notación:

$$g_{\{\rho\mu,\nu\}} \equiv g_{\rho\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu}$$

donde las llaves  $\{\}$  indican que se debe sumar sobre todas las combinaciones cíclicas de los índices y usar como signo un análogo del símbolo de Levi-Civita, tal que por cada movimiento de la "banda transportadora" (permutación) se multiplica un signo "-". Es por eso que el segundo término, que corresponde a una permutación impar, es negativo.

entonces de forma abreviada:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

#### Nota

**Los términos de los símbolos de Christoffel.** Aunque la expresión:

**Nota (Cont.)**

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

es bastante compacta no hay que olvidar que encierra dos operaciones: la operación cíclica sobre el término  $g_{\{\rho\mu,\nu\}}$  que hace que este se convierta en realidad en una suma de 3 términos, y la suma sobre el índice  $\rho$  (4 términos). Eso hace que para calcular cada símbolo de Christoffel, en general, sean necesarios en realidad  $4 \times 3 = 12$  términos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = & \frac{1}{2} g^{\lambda 0} (g_{0\mu,\nu} - g_{\mu\nu,0} + g_{\nu 0,\mu}) + \\ & + \frac{1}{2} g^{\lambda 1} (g_{1\mu,\nu} - g_{\mu\nu,1} + g_{\nu 1,\mu}) + \\ & + \frac{1}{2} g^{\lambda 2} (g_{2\mu,\nu} - g_{\mu\nu,2} + g_{\nu 2,\mu}) + \\ & + \frac{1}{2} g^{\lambda 3} (g_{3\mu,\nu} - g_{\mu\nu,3} + g_{\nu 3,\mu}) \end{aligned}$$

Como vemos, los símbolos de Christoffel son proporcionales a las primeras derivadas del tensor métrico. Este hecho se puede escribir explícitamente si definimos:

$$\Gamma_{\alpha\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$$

En términos de los símbolos de Christoffel las derivadas del tensor métrico se puede probar (ver Problemas al final del capítulo) son:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}_{,\gamma} &= -g^{\mu\beta} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\beta} \end{aligned}$$

El hecho que las primeras derivadas del tensor métrico sean proporcionales a los símbolos de Christoffel, explica por que hay 40 valores independientes. Dado que el tensor métrico, por su simetría, tiene 10 componentes independientes (6 fuera de la diagonal y 4 en la diagonal) y cada una de ella tiene 4 componentes de la derivada, existiran en general  $4 \times 10 = 40$  primeras derivadas independientes.

En términos de los símbolos de Christoffel la derivada covariante en un espacio Riemanniano o pseudoriemanniano con conexión de Levi-Civita se escribirá:

$$\begin{aligned} A^{\mu}_{;\alpha} &= A^{\mu}_{,\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} A^{\gamma} \\ A_{\mu;\nu} &= A_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} A_{\gamma} \\ A^{\mu\nu}_{;\alpha} &= A^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} A^{\gamma\nu} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\nu} A^{\mu\gamma} \\ A_{\mu\nu;\alpha} &= A_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\gamma} A_{\gamma\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma} A_{\mu\gamma} \end{aligned}$$

### 1.3.5. Cálculo de los símbolos de Christoffel

El cálculo de los símbolos de Christoffel es una de las habilidades más importantes en la relatividad general. En esta sección veremos ejemplos específicos del cálculo de estas cantidades para métricas específicas.

Si bien calcular 40 coeficientes mediante la derivada de los coeficientes del tensor métrico no parece una tarea muy agradable, hay algunas propiedades útiles tanto del tensor métrico como de los coeficientes que simplifican la tarea.

### Los símbolos de Christoffel de una métrica diagonal

Como hemos visto en secciones anteriores el tensor métrico es una forma bilineal que nos da la regla para calcular el producto punto entre los cuadvectores. Si llamamos  $\hat{e}_\mu(x^\nu)$  a los vectores de una base del espacio tiempo definidos en el evento  $x^\nu$ , la métrica se define en términos de:

$$ds^2 = dx^\mu \cdot dx^\nu = (dx^\mu \hat{e}_\mu) \cdot (dx^\nu \hat{e}_\nu) = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu$$

es decir:

$$g_{\mu\nu} = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu)$$

Esto implica que siempre que definamos un sistema de ejes ortogonales la métrica será diagonal:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33})$$

con inversa:

$$g^{\mu\nu} : \text{diag}\left(\frac{1}{g_{00}}, \frac{1}{g_{11}}, \frac{1}{g_{22}}, \frac{1}{g_{33}}\right)$$

Si este es el caso los símbolos de Christoffel se simplifican. En lugar de los 4 términos diferentes que describíamos antes cada símbolo realmente es el resultado del cálculo de un solo término:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\{\lambda\mu,\nu\}} \\ &= \frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} (g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\nu\lambda,\mu}) \end{aligned}$$

Los dos hechos anteriores implican además una segunda propiedad muy interesante. Dado que solo los términos diagonales de la derivada son distintos de cero, entonces la última expresión tendrá potencialmente términos distintos de cero si y solo si al menos dos índices de entre  $\lambda, \mu, \nu$  son repetidos. Esto implica que solo los coeficientes de la forma:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda, \Gamma_{\mu\mu}^\lambda$$

serán distintos de cero e iguales a:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda = +\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\lambda\lambda,\nu}$$

con  $\nu \neq \lambda$  que llamaremos los *símbolos mixtos*, y

$$\Gamma_{\mu\mu}^\lambda = -\frac{1}{2} g^{\lambda\lambda} g_{\mu\mu,\lambda}$$

que llamaremos los *símbolos diagonales*.

En un espacio de 4 dimensiones por cada índice  $\lambda$  hay 3 símbolos mixtos y 4 diagonales, es decir 7 en total. Esta simetría reduce el número posible de símbolos

de Christoffel de 40 a  $4 \times 7 = 28$  componentes distintas de cero (ver Problemas al final del capítulo).

Una última propiedad interesante implica que si una de las variables  $x^\lambda$  tiene coeficiente métrico  $g_{\lambda\lambda}$  constante y ningún otro coeficiente métrico depende de  $x^\lambda$ , es decir  $g_{\mu\mu,\lambda} = 0$  entonces todos los símbolos de Christoffel que tengan  $\lambda$  serán cero:

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\mu}^\lambda = 0$$

Por cada componente con esta propiedad se reducen en 7 los símbolos de Christoffel diferentes de cero.

### Símbolos de Christoffel del espacio-tiempo plano

Calculemos los símbolos de Christoffel para el espacio-tiempo plano. En principio podría pensarse que en esta situación los símbolos son todos cero (en tanto dependen de derivadas de la métrica y en el espacio-tiempo plano la métrica es constante). Pero no es así. Todo depende del sistema de coordenadas que estamos utilizando.

En coordenadas cartesianas el elemento de línea del espacio-tiempo es:

$$ds^2 = dt^2 - dx_L^2 - dy_L^2 - dz_L^2$$

de donde la métrica es:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

Y de aquí los símbolos de Christoffel resultantes serán:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0$$

Esto implica que en el espacio-tiempo de Minkowski y en coordenadas cartesianas la derivada “;” es igual a la derivada “,”.

Si usamos sin embargo coordenadas cilíndricas, la métrica del mismo espacio-tiempo será:

$$ds^2 = dt^2 - dr_L^2 - r^2 d\theta^2 - dz_L^2$$

de donde la métrica es:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(1, -1, -r^2, -1)$$

con inversa:

$$g^{\mu\nu} : \text{diag}(1, -1, -1/r^2, -1)$$

Ahora hay al menos una componente de la métrica  $g_{22}(r) = g_{\theta\theta}(r)$  que depende de las coordenadas. Esto implica entonces que todos aquellos símbolos de Christoffel que incluyan las derivadas del tipo  $g_{\theta\theta,r}$  serán distintos de cero.

**Nota**

**Coordenadas en lugar de números.** Es corriente que se use por simplicidad el nombre de las coordenadas en lugar de números para indicar la componentes de la métrica o de los símbolos de Christoffel. Es así como hemos reemplazado  $g_{22}$  por  $g_{\theta\theta}$  o  $g_{\theta\theta,r}$  para denotar  $g_{22,1}$ . Así mismo nos referiremos por ejemplo a  $\Gamma_{r\theta}^t$  para representar el símbolo  $\Gamma_{12}^0$ .

Recordando la definición:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que dado que la matriz es diagonal los únicos símbolos de Christoffel que no serán cero son aquellos para los cuales  $\lambda = \rho$ :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

Podemos de entrada descartar todos los casos en los que uno de los índices sea 0 o 4 ( $t$  o  $z$  en nuestra notación) en tanto:

1.  $g_{tt} = 1$  y  $g_{zz} = 1$ , es decir son constantes y no tienen derivadas diferentes de 0.
2.  $g_{it} = 0$  y  $g_{\mu z} = 0$ .
3. Ninguna de las componentes de la métrica depende del tiempo o de  $z$ .

Esto nos permite descartar un número significativo de componentes (34 componentes nulas para ser exactos).

Para el caso en el que  $\rho = r$  tendremos los símbolos potencialmente no nulos  $\Gamma_{rr}^r, \Gamma_{r\theta}^r, \Gamma_{\theta\theta}^r$ . Escribamos explícitamente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^r &= g^{rr}(g_{rr,r} - g_{rr,r} + g_{rr,r}) = 0 \\ 2\Gamma_{r\theta}^r &= g^{rr}(g_{rr,\theta} - g_{r\theta,r} + g_{\theta r,r}) = 0 \\ 2\Gamma_{\theta\theta}^r &= g^{rr}(g_{r\theta,\theta} - g_{\theta\theta,r} + g_{\theta r,\theta}) = -2r\end{aligned}$$

Para el caso en el que  $\rho = \theta$  tendremos los símbolos potencialmente no nulos  $\Gamma_{rr}^\theta, \Gamma_{r\theta}^\theta, \Gamma_{\theta\theta}^\theta$ . Escribamos explícitamente:

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^\theta &= g^{\theta\theta}(g_{\theta r,r} - g_{rr,\theta} + g_{r\theta,r}) = 0 \\ 2\Gamma_{r\theta}^\theta &= g^{\theta\theta}(g_{\theta r,\theta} - g_{r\theta,\theta} + g_{\theta\theta,r}) = 2r/r^2 \\ 2\Gamma_{\theta\theta}^\theta &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta}) = 0\end{aligned}$$

Finalmente encontramos que las únicas componentes no nulas de los símbolos de Christoffel son:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= 1/r\end{aligned}$$



Pero ¿qué significa todo esto?. Por la definición de derivada covariante:

$$A^\mu{}_{;\alpha} = A^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} A^\gamma$$

y por lo que hemos encontrado:

$$\begin{aligned} A^t{}_{;\alpha} &= A^t{}_{,\alpha} \\ A^z{}_{;\alpha} &= A^z{}_{,\alpha} \\ A^\mu{}_{;t} &= A^\mu{}_{,t} \\ A^\mu{}_{;z} &= A^\mu{}_{,z} \end{aligned}$$

Es decir, en este espacio tiempo la derivada covariante y la derivada parcial convencional de las componentes temporal y  $z$  serán exactamente las mismas. Además la derivada covariante respecto a estas componentes será igual a su derivada convencional.

Por otro lado las únicas derivadas covariantes que no serán triviales son:

$$\begin{aligned} A^r{}_{;\theta} &= A^r{}_{,\theta} + \Gamma^r_{\theta\theta} A^\theta = A^r{}_{,\theta} - r A^\theta \\ A^\theta{}_{;r} &= A^\theta{}_{,r} + \Gamma^\theta_{r\theta} A^\theta = A^\theta{}_{,r} + A^\theta/r \\ A^\theta{}_{;\theta} &= A^\theta{}_{,\theta} + \Gamma^\theta_{\theta r} A^r = A^\theta{}_{,\theta} + A^r/r \end{aligned}$$

#### Símbolos de Christoffel de una superficie esférica

En el caso de una superficie de dos dimensiones embebida en un espacio de tres dimensiones la métrica es:

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

donde  $\theta$  es el ángulo polar (medido respecto al polo de la esfera) y  $\phi$  es el ángulo acimutal. La métrica será en este caso simplemente:

$$g_{ij} : \text{diag}(R^2, R^2 \sin^2 \theta)$$

con inversa:

$$g^{ij} : \text{diag}\left(\frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta}\right)$$

En este caso (dos dimensiones), el número de símbolos de Christoffel serán  $n^2(n+1)/2 = 2^2 \cdot 3/2 = 6$  y de nuevo por ser la métrica diagonal:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ii} g_{\{ij,k\}}$$

Los símbolos de Christoffel correspondientes a la variable  $\theta$  serán:

$$\begin{aligned} 2\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\theta}) = 0 \\ 2\Gamma^{\theta}_{\phi\theta} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\phi,\theta} - g_{\phi\theta,\theta} + g_{\theta\theta,\phi}) = 0 \\ 2\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= g^{\theta\theta}(g_{\theta\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\theta} + g_{\phi\theta,\phi}) = 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Por otro lado, los correspondientes a la variable  $\phi$  serán:

$$\begin{aligned}
2\Gamma_{\phi\phi}^{\phi} &= g^{\phi\phi}(g_{\phi\phi,\phi} - g_{\phi\phi,\phi} + g_{\phi\phi,\phi}) = 0 \\
2\Gamma_{\phi\theta}^{\phi} &= g^{\phi\phi}(g_{\phi\phi,\theta} - g_{\phi\theta,\phi} + g_{\theta\phi,\phi}) = 2 \cos \theta / \sin \theta \\
2\Gamma_{\theta\theta}^{\phi} &= g^{\phi\phi}(g_{\phi\theta,\theta} - g_{\theta\theta,\phi} + g_{\theta\phi,\theta}) = 0
\end{aligned}$$

Es decir solo dos de los 6 símbolos de Christoffel son diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{\theta} &= \frac{1}{2} \sin 2\theta \\
\Gamma_{\phi\theta}^{\theta} &= \cot \theta
\end{aligned}$$

### Símbolos de Christoffel de una métrica general

Supongamos una métrica general de la forma:

$$ds^2 = \exp(2A) dt_L^2 - \exp(2B) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

donde  $A = A(r)$  y  $B = B(r)$  son funciones solamente de la variable radial. La métrica tiene la forma:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(\exp(2A), -\exp(2B), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$$

con inversa:

$$g^{\mu\nu} : \text{diag}\left(\exp(-2A), -\exp(-2B), -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\right)$$

¿Cuáles son los símbolos de Christoffel en este caso? De nuevo por tratarse de una métrica diagonal todos los símbolos de Christoffel tienen la forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2} g^{\rho\rho} g_{\{\rho\mu,\nu\}}$$

En esta situación tenemos que las componentes de la métrica dependen de forma complicada de las coordenadas con la excepción del tiempo. Esto implica que en general todos los símbolos de Christoffel potencialmente pueden ser distintos de cero y debemos analizarlos uno a uno:

- **Componentes  $t$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}^t$ .** Como sabemos que solo las derivadas  $g_{tt,r}$  son distintas de cero, los únicos símbolos distintos de cero serán aquellos para los que  $\mu = 0$  y  $\nu = r$ :

$$2\Gamma_{tr}^t = g^{tt} g_{tt,r} = 2 \exp(-2A) \exp(2A) A' = A'$$

donde  $A' = dA/dr$ .

- **Componentes  $r$ ,  $\Gamma_{\mu\nu}^r$ .** En este caso de nuevo sabemos que solo las derivadas  $g_{tt,r}$ ,  $g_{ii,r}$  son distintas de cero, de modo que los símbolos de Christoffel que pueden ser distintos de cero serán aquellos en los que aparece repetidos los índices correspondientes, es decir:  $\Gamma_{tt}^r$ ,  $\Gamma_{rr}^r$ ,  $\Gamma_{\theta\theta}^r$ ,  $\Gamma_{\phi\phi}^r$ . El valor de estos símbolos será:

$$\begin{aligned}
2\Gamma_{00}^r &= -g^{rr}g_{00,r} = 2A' \exp[2(A-B)] \\
2\Gamma_{rr}^r &= -g^{rr}g_{rr,r} = 2B' \\
2\Gamma_{\theta\theta}^r &= -g^{rr}g_{\theta\theta,r} = -r \exp(-2B) \\
2\Gamma_{\phi\phi}^r &= -g^{rr}g_{\phi\phi,r} = -r \sin^2 \theta \exp(-2B)
\end{aligned}$$

- **Componentes  $\theta, \Gamma_{\mu\nu}^\theta$ .** En este caso sabemos que solo las derivada  $g_{\theta\theta,r}$  y  $g_{\phi\phi,\theta}$  serán distinta de cero. De modo que solo aquellos símbolos en los que se repita  $\theta$  y  $\phi$  lo serán también:

$$\begin{aligned}
2\Gamma_{r\theta}^\theta &= g^{\theta\theta}g_{\theta\theta,r} = 2/r \\
2\Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -g^{\theta\theta}g_{\phi\phi,\theta} = -2 \sin \theta \cos \theta
\end{aligned}$$

- **Componentes  $\phi, \Gamma_{\mu\nu}^\phi$ .** El caso es análogo a la componente anterior y los únicos coeficientes distintos de cero serán:

$$\begin{aligned}
2\Gamma_{r\phi}^\phi &= g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,r} = 2/r \\
2\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= g^{\phi\phi}g_{\phi\phi,\theta} = 2 \cot \theta
\end{aligned}$$

En total entonces, de las 40 componentes solo 9 de ellas son distintas de cero.

### Cálculo numérico

El cálculo numérico de los símbolos de Christoffel puede ser útil para futuros cálculos.

La rutina para calcular los símbolos de Christoffel será:

```
def Gamma(xmu,gfun,gargs=(),N=4,dxmax=1e-6,alpha=-1,mu=0,nu=0):
    """
    Calcula todos los símbolos de Christoffel
    gfun: función métrica
    xmu: evento
    """
    from scipy.misc import derivative
    from numpy import where,arange
    from numpy import zeros
    #Indices
    index=arange(N)

    #Gamma
    G=zeros((N,N,N))

    for pi in range(N):
        for nu in range(N):
            #Inversa
            gpipi=1/gfun(xmu,pi,*gargs) #g~pipi
            #Coeficientes diagonales
            xd=xmu[pi] #Punto en el que estoy derivando
            dx=max(dxmax,dxmax*abs(xd))
```

```

gnunu_pi=derivative(lambda x:gfun(where(index==pi,x,xmu),nu,*gargs),xd,dx)
G[pi,nu,nu]=-0.5*gpipi*gnunu_pi
#Coeficientes mixtos
if nu==pi:continue
xd=xmu[nu] #Punto en el que estoy derivando
dx=max(dxmax,dxmax*abs(xd))
gpipi_nu=derivative(lambda x:gfun(where(index==nu,x,xmu),pi,*gargs),xd,dx)
G[pi,pi,nu]=0.5*gpipi*gpipi_nu
G[pi,nu,pi]=G[pi,pi,nu]
return G if alpha<0 else G[alpha,mu,nu]

```

Para poner a prueba nuestra rutina, podemos usar algunas de las métricas que habíamos visto antes.

Por ejemplo la métrica en coordenadas cilíndricas:

```

from numpy import array
def g_cilindricas_4d(xmu,mu):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_mumu=diag(1,-1,-r^2,-1)
    """
    from numpy import sin
    t,r,teta,z=xmu
    if mu==0:
        g=1
    elif mu==1:
        g=-1
    elif mu==2:
        g=-r**2
    elif mu==3:
        g=-1
    return g

```

Escogemos ahora un punto en el cuál calcular los símbolos de Christoffel:

```
xmu=array([0,2,0,1])
```

E invocamos nuestra rutina:

```
G=Gamma(xmu,g_cilindricas_4d,N=4)
```

Símbolos de Christoffel:

```

[[[-0.  0.  0.  0.]
 [ 0. -0.  0.  0.]
 [ 0.  0. -0.  0.]
 [ 0.  0.  0. -0.]]

```

```

[[ 0. -0.  0.  0.]
 [-0.  0. -0. -0.]]

```

```
[ 0. -0. -2.  0. ]
[ 0. -0.  0.  0. ]]

[[ 0.  0. -0.  0. ]
 [ 0.  0.  0.5 0. ]
 [-0.  0.5  0. -0. ]
 [ 0.  0. -0.  0. ]]

[[ 0.  0.  0. -0. ]
 [ 0.  0.  0. -0. ]
 [ 0.  0.  0. -0. ]
 [-0. -0. -0.  0. ]]
```

Donde vemos que lo que habíamos determinado en nuestro primer ejercicio es correcto. Solo dos símbolos de Christoffel son diferentes de cero:

```
print(f"G^1_{22} = {G[1,2,2]}")
print(f"G^2_{21} = {G[2,2,1]}")
```

```
G^1_22 = -2.00000000000002
G^2_21 = 0.50000000000005
```

y su valor coincide con el valor teóricamente esperado de  $\Gamma_{22}^1 = -r$  y  $\Gamma_{21}^2 = 1/r$ .

## 1.4. Derivada total general y geodésicas

Una *aplicación* interesante de la derivada covariante es la deducción de una de las ecuaciones más importantes de la relatividad general: la ecuación geodésica.

### 1.4.1. Derivada total general

Hemos introducido ya una forma de la derivada que puede ser usada en las leyes de la física de modo que tengan una forma manifiestamente covariante bajo transformaciones generales. Es la derivada covariante:

$$A^\mu_{;\alpha} = A^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} A^\gamma$$

Esta derivada permite definir otra cantidad muy útil, a saber **la derivada total general**, es decir, la derivada total de una cantidad tensorial respecto a un escalar (por ejemplo, el tiempo propio). Como hemos visto en el capítulo anterior, las derivadas totales son muy importantes en la definición de las propiedades cinemáticas y dinámicas en física, de modo que es conveniente definir las.

Si nos movemos a lo largo de una curva en el espacio-tiempo tal que cada evento es función de una cantidad escalar o parámetro  $u$ , es decir  $x^\mu(u)$ , entonces definiremos la derivada total de un campo tensorial  $A^\mu(x^\mu)$  respecto al parámetro  $u$  como:

$$\frac{D}{Du} A^\mu \equiv A^\mu_{;\alpha} \frac{dx^\alpha}{du}$$

que es un análogo a la regla de la cadena en el cálculo vectorial convencional.

Nótese que esta definición es análoga a la que podemos hacer en el caso en el que tengamos transformaciones lineales de coordenadas (métrica de Minkowski), a saber  $dA^\mu/du = A^\mu_{,\alpha} dx^\alpha/du$  con la diferencia de que en lugar de usar la derivada “,” usamos la derivada covariante. De nuevo es sencillo probar que la derivada total general es en sí misma una cantidad tensorial (ver Problemas al final del capítulo).

### 1.4.2. Derivada total y transporte paralelo

En términos de la derivada total es posible reinterpretar el concepto de transporte paralelo.

Diremos que un vector es transportado de forma paralela a lo largo de una trayectoria si su derivada total general es proporcional a cero:

$$\frac{D}{Du} A^\mu = 0, \text{ transporte paralelo}$$

Usando la definición de derivada total general:

$$\partial_\alpha A^\mu \frac{dx^\alpha}{du} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} A^\gamma \frac{dx^\alpha}{du} = 0$$

El primer término es la derivada total convencional:

$$\frac{dA^\mu}{du} + \Gamma^\mu_{\alpha\gamma} A^\gamma \frac{dx^\alpha}{du} = 0$$

Esta ecuación en definitiva representa la condición matemática para que un vector sea transportado de forma paralela a lo largo de una trayectoria descrita por  $x^\mu(u)$ .

### 1.4.3. Transporte paralelo y bases vectoriales

Existe una manera alternativa de obtener la fórmula de la derivada covariante y de las conexiones que es interesante. Un cuadrivector puede escribirse en términos de los vectores de una base como:

$$\mathbf{A} = A^\mu \hat{e}_\mu$$

Si derivamos respecto de un parámetro  $u$  que define una trayectoria obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{dA^\mu}{du} \hat{e}_\mu + A^\mu \frac{d\hat{e}_\mu}{du}$$

Las derivadas de cada vector de la base respecto a las coordenadas se pueden expresar en términos de los mismos vectores de la base:

$$\partial_\alpha \hat{e}_\mu \equiv G^\gamma_{\alpha\mu} \hat{e}_\gamma \quad (1.1)$$

donde los coeficientes  $G^\gamma_{\alpha\mu}$  conectan las derivadas de cada componente de cada vector unitario con las componentes de los demás vectores unitarios de la base.

Reemplazando queda:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{dA^\mu}{du} \hat{e}_\mu + A^\mu G_{\alpha\mu}^\gamma \hat{e}_\gamma \frac{dx^\alpha}{du}$$

que se puede escribir como:

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \left( \frac{dA^\gamma}{du} + G_{\alpha\mu}^\gamma A^\mu \frac{dx^\alpha}{du} \right) \hat{e}_\gamma$$

Para que el vector no varíe a lo largo de la trayectoria es necesario que  $d\mathbf{A}/du = 0$  lo que implica que:

$$\frac{dA^\gamma}{du} + G_{\alpha\mu}^\gamma A^\mu \frac{dx^\alpha}{du} = 0$$

que es justamente la condición que habíamos obtenido antes.

Bastaría ahora con probar que  $G_{\alpha\mu}^\gamma$  son los símbolos de Christoffel. Para ello debemos primero reconocer que la métrica se define en términos del producto punto entre los vectores de la base:

$$g_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu \quad (1.2)$$

Podemos calcular la derivada convencional de los coeficientes métricos:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\mu\nu} &= G_{\alpha\mu}^\gamma \hat{e}_\gamma \cdot \hat{e}_\nu + G_{\nu\beta}^\gamma \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\gamma \\ &= G_{\alpha\mu}^\gamma g_{\gamma\nu} + G_{\nu\beta}^\gamma g_{\mu\gamma} \end{aligned}$$

Si se repite el mismo procedimiento cambiando cíclicamente los índices de  $\partial_\alpha g_{\mu\nu}$  se obtiene:

$$G_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

que es justamente la forma de los símbolos de Christoffel.

#### 1.4.4. Bases y componentes vectoriales en espacio curvo

Las Ecuaciones (1.1) y (1.2) ponen de relieve una importante propiedad que tienen los vectores en el espacio curvo.

Considere por ejemplo el caso en el que tenemos una métrica diagonal. En esta situación la Ec. (1.2) se puede escribir como:

$$|\hat{e}_\mu| = \sqrt{g_{\mu\mu}}$$

Es decir, cuando expresamos un vector en un espacio general los vectores de la base *no son necesariamente unitarios*: ¡esta sí que es una sorpresa! Pero la sorpresa va más allá: en realidad este resultado no solo es válido en espacio curvo sino también en el espacio plano.

Consideremos por ejemplo el caso de la descripción del espacio plano de 3 dimensiones en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ ,  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, r^2, 1)$ . En este caso la magnitud de los vectores unitarios será:

$$\begin{aligned} |\hat{e}_r| &= \sqrt{g_{rr}} = 1 \\ |\hat{e}_\theta| &= \sqrt{g_{\theta\theta}} = r \\ |\hat{e}_z| &= \sqrt{g_{zz}} = 1 \end{aligned}$$

Todo lo que hemos dicho sobre transporte paralelo y derivada covariante aplica para las componentes de vectores definidos sobre esta base, por ejemplo en el caso del espacio euclidiano de 3 dimensiones y en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{A} = A^r \hat{e}_r + A^\theta \hat{e}_\theta + A^z \hat{e}_z$$

En el cálculo (y por lo tanto en la física, incluyendo en la relatividad especial), por otro lado hemos estado usando bases ortonormales que llamaremos en lo sucesivo, para diferenciarlas de estas *bases curvas*, como  $\hat{u}_\mu$ . En estas bases las componentes del mismo vector mencionado anteriormente se escriben como:

$$\vec{A} = A^{\bar{r}} \hat{u}_r + A^{\bar{\theta}} \hat{u}_\theta + A^{\bar{z}} \hat{u}_z$$

donde nótese que para distinguirlas de las componentes en la *base curva* hemos escrito una *barra* sobre los índices respectivos.

¿Cómo se relacionan las componentes de un vector en la *base curva* con las componentes en la *base ortonormal*? En el caso estudiado aquí, en donde ambas bases son ortogonales y los vectores unitarios de cada una solo se diferencian por su longitud, las relaciones serán simplemente:

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \sqrt{g_{rr}} \hat{u}_r = \hat{u}_r \\ \hat{e}_\theta &= \sqrt{g_{\theta\theta}} \hat{u}_\theta = r \hat{u}_\theta \\ \hat{e}_z &= \sqrt{g_{zz}} \hat{u}_z = \hat{u}_z \end{aligned}$$

y las componentes del vector serán:

$$\begin{aligned} A^r &= A^{\bar{r}} \\ A^\theta &= r A^{\bar{\theta}} \\ A^z &= A^{\bar{z}} \end{aligned}$$

Es interesante anotar que físicamente estas componentes se diferencian de manera importante. Las componentes que medimos en los laboratorios para las cantidades físicas son las componentes en la base ortonormal. Por tanto es siempre importante cuando trabajamos con métricas arbitrarias tener siempre presente el tipo de transformaciones definidas anteriormente para pasar de las componentes calculadas (normalmente las componentes en la base curva) a las componentes observadas (componentes en la base ortonormal).

Para ponerle orden a todo esto y generalizarlo al espacio-tiempo introducimos las siguientes definición:

**Definición: base coordenada y base física.** En cualquier punto de un espacio-tiempo descrito por una métrica  $g_{\mu\nu}$  en un sistema de coordenadas dado siempre es posible construir dos bases vectoriales y respecto a ellas definir las componentes de los cuadvectores de interés:

- La **base física**, formada por un conjunto de vectores ortonormales  $\hat{u}_\mu$  que cumplen:

$$\hat{u}_\mu \cdot \hat{u}_\nu = \eta_{\mu\nu}$$



Las componentes de un cuadvivector arbitrario en la base física se denotan como  $A^{\bar{\mu}}$  y satisfacen:

$$\vec{A} = A^{\bar{\mu}} \hat{u}_{\mu}$$

Nuestros experimentos miden el valor de  $A^{\bar{\mu}}$ .

- La **base coordenada** o **base curva**, formada por un conjunto de vectores no necesariamente ortogonales y no necesariamente unitarios  $\hat{e}_{\mu}$  que cumplen:

$$\hat{e}_{\mu} \cdot \hat{e}_{\nu} = g_{\mu\nu}$$

Las componentes de un cuadvivector arbitrario en la base coordenada se denotan como  $A^{\mu}$  y satisfacen:

$$\vec{A} = A^{\mu} \hat{e}_{\mu}$$

Nuestros cálculos en relatividad general, permiten calcular el valor de  $A^{\mu}$ .

Cada uno de los vectores de la base coordenada se puede expresar en términos de la base física:

$$\hat{e}_{\mu} = e_{\mu}^{\alpha} \hat{u}_{\alpha}$$

y por lo tanto las componentes físicas de un vector se pueden escribir en términos de sus componentes coordenadas como:

$$A^{\bar{\alpha}} = A^{\mu} e_{\mu}^{\alpha}$$

Algunas situaciones prácticas del uso de la base coordenada y la base física se muestran en los ejemplos a continuación.

### 1.4.5. Ejemplos numéricos de transporte paralelo

Vimos entonces que las componentes coordenadas de un vector transportado de forma paralela a lo largo de una trayectoria  $x^{\mu}(u)$  esta dado por:

$$\frac{dA^{\mu}}{du} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} A^{\gamma} \frac{dx^{\alpha}}{du} = 0$$

Esta ecuación, en general, corresponde a un conjunto de 4 (o  $n$  en un espacio de  $n$  dimensiones) ecuaciones diferenciales de primer orden. Cada ecuación contienen en el lado izquierdo un total de (en general)  $1+16=17$  términos (o  $1+n^2$  términos):

$$\frac{dA^{\mu}}{du} + \Gamma_{00}^{\mu} A^0 \frac{dx^0}{du} + \Gamma_{01}^{\mu} A^0 \frac{dx^1}{du} + \dots + \Gamma_{10}^{\mu} A^1 \frac{dx^0}{du} + \Gamma_{11}^{\mu} A^1 \frac{dx^1}{du} + \dots = 0$$

Naturalmente las simetrías de la métrica y de los símbolos de Christoffel hacen que estas ecuaciones sean mucho más cortas.

Implementemos estas ecuaciones en una rutina que podamos integrar numéricamente:

```
def A_parallel(A,u,xfun,gfun,fargs=(),gargs=(),N=4):
    """
    Calcula la derivada de las componentes de un vector A
    respecto al parámetro u de una función xfun

    Parametros:
        A: Arreglo con componentes coordenadas del vector
        u: Valor del parámetro

    Opciones:
        xfun: función de la trayectoria (posición y derivada)
        gfun: función da la métrica
        fargs: argumentos de la función de la trayectoria
        gargs: argumentos de la función de la métrica
        N: Número de dimensiones
    """
    from export import Gamma
    from numpy import zeros
    dAdu=zeros(N)
    xmu,dxmudu=xfun(u,*fargs)
    G=Gamma(xmu,gfun,gargs,N)
    for pi in range(N):
        for mu in range(N):
            for nu in range(N):
                dAdu[pi]+=-G[pi,mu,nu]*A[mu]*dxmudu[nu]
    return dAdu
```

### Transporte paralelo en coordenadas cilíndrica

Para aplicar la anterior ecuación consideremos por ejemplo el transporte paralelo del siguiente vector en el espacio euclidiano de 2 dimensiones y en coordenadas cilíndricas.

```
N=2
from numpy import array
A0=array([1,0])
```

Podemos transportar el vector a través de una gran familia de trayectorias, pero debemos cuidar para hacerlo que los símbolos de Christoffel no sean singulares. Como vimos en la sección anterior  $\Gamma_{r\theta}^\theta = 1/r$  de modo que debemos evitar las trayectorias que pasan por el origen.

En la siguiente rutina construimos un conjunto de trayectorias que tienen esa propiedad.

```
def x_fun(u,tipo="circunferencia"):
    """
    Esta función define nuestro camino en el espacio
    """
    from numpy import zeros
    x=zeros(2)
```

```

dxdu=zeros(2)

if tipo=="circunferencia":
    x[0]=1;dxdu[0]=0;
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
if tipo=="cicloide":
    x[0]=2+cos(u);dxdu[0]=-sin(u);
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
if tipo=="espiral":
    x[0]=1+u;dxdu[0]=1;
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
if tipo=="ellipse":
    x[0]=1/(1+0.5*cos(u));dxdu[0]=0.5*sin(u)/(1+0.5*cos(u))**2;
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
return x,dxdu

```

Para realizar el transporte paralelo necesitamos por otro lado la función que define la métrica de este espacio que es simplemente:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, r^2)$$

```

def g_cilindricas_2d(xmu,mu):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_munu=diag(1,r^2)
    """
    r,teta=xmu
    if mu==0:
        g=1
    elif mu==1:
        g=r**2
    return g

```

Ahora podemos resolver la ecuación del transporte paralelo:

```

from numpy import pi,linspace
us=linspace(0,2*pi,20)

from scipy.integrate import odeint
tipo="circunferencia"
#tipo="cicloide"
#tipo="espiral"
#tipo="ellipse"
As=odeint(A_parallel,A0,us,args=(x_fun,g_cilindricas_2d,(tipo,),(),N))

```

```

A =
[[ 1.      0.   ]
 [ 0.946 -0.325]
 [ 0.789 -0.614]

```

```
...
[ 0.789  0.614]
[ 0.946  0.325]
[ 1.     0.    ]]
```

¿Qué son estos números? Estas son las componentes coordenadas del vector  $A$  a lo largo de la trayectoria. Recordemos que por componentes coordenadas entendemos las componentes en la base coordenada (que no es de vectores unitarios).

Si queremos representar graficamente el transporte paralelo podemos hacerlo en nuestro familiar sistema de coordenadas cartesianas (en el que funciona justamente el sistema de graficación de Python). Para ello recordemos que la base ortonormal se escribe en términos de los vectores cartesianos como:

$$\begin{aligned}\hat{u}_r &= \cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y \\ \hat{u}_\theta &= -\sin \theta \hat{u}_x + \cos \theta \hat{u}_y\end{aligned}$$

Por lo tanto la base coordenada será:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \cos \theta \hat{u}_x + \sin \theta \hat{u}_y \\ \hat{e}_\theta &= -r \sin \theta \hat{u}_x + r \cos \theta \hat{u}_y\end{aligned}$$

Es justamente respecto a esta última base que se calcularon las componentes del vector transportado de forma paralela.

Un gráfico del vector transportado se muestra en la ???. En la [versión electrónica del libro](#)<sup>2</sup> pueden encontrar el código usado para generar esta figura.

### Transporte paralelo sobre una esfera

Un caso menos trivial de transporte paralelo es el que se produce en la superficie de una esfera (superficie curva de dos dimensiones), en el que los puntos vienen dados en función de su latitud  $\phi$  y longitud  $\lambda$ . Esta superficie tiene métrica:

$$dl^2 = R^2 d\phi^2 + R^2 \cos^2 \phi d\lambda^2$$

con coeficientes métricos:

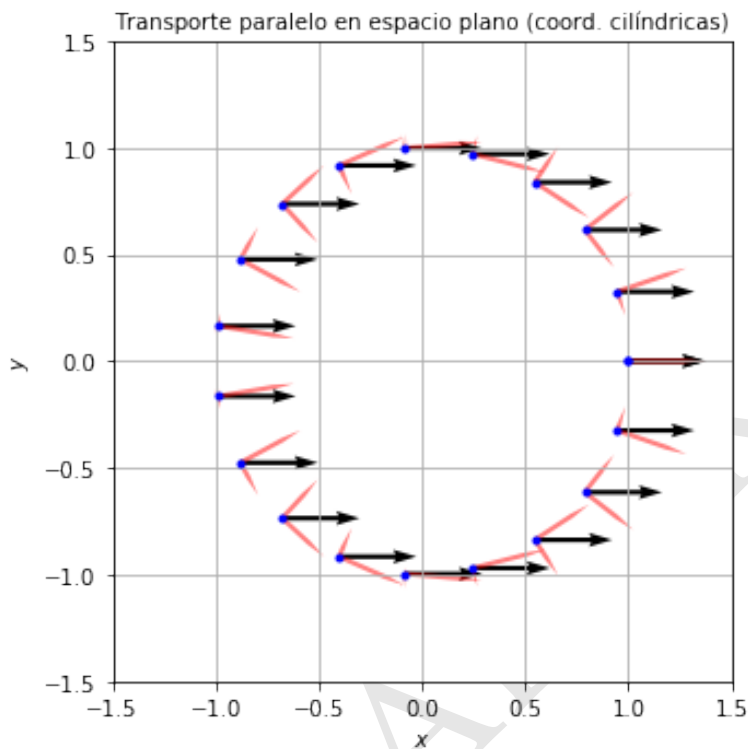
$$g_{ij} : \text{diag}(R^2, R^2 \cos^2 \phi)$$

Podemos implementar esta métrica con la rutina:

```
def g_esfera_2d(xmu, mu, R=1):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados sobre la
    superficie de una esfera de radio R.

    g_mumu=diag(1, r^2)
    """
    from numpy import cos
    fi, lamb=xmu
```

<sup>2</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>



**Figura 1.3:** Vector transportado de forma paralela en coordenadas cilíndricas .

```
if mu==0:
    g=R**2
elif mu==1:
    g=R**2*cos(fi)**2
return g
```

Supongamos que queremos transportar de forma paralela el vector que apunta directamente hacia el *norte*:

```
N=2
from numpy import array
A0=array([0,1])
```

Podemos seguir distintas trayectorias. Por ejemplo ir desde el ecuador hasta el polo siguiendo un meridiano ( $\lambda = \text{cte}$ ). O podríamos ir alrededor de la esfera sobre un paralelo ( $\phi = \text{cte}$ ). Podemos implementar estas trayectorias con esta rutina:

```
def x_fun_esfera(u,lat_0=0,lon_0=0,tipo="meridiano"):
    """
    Esta función define nuestro camino en el espacio
    """
```

```

from numpy import zeros
x=zeros(2)
dxdu=zeros(2)
if tipo=="meridiano":
    x[0]=u;dxdu[0]=1;
    x[1]=lon_0;dxdu[1]=0;
if tipo=="paralelo":
    x[0]=lat_0;dxdu[0]=0;
    x[1]=u;dxdu[1]=1;
return x,dxdu

```

Una integral de la ecuación de transporte paralelo se puede obtener usando:

```

from numpy import pi,linspace
us=linspace(0,360*pi/180,10)

from scipy.integrate import odeint
R=1
#tipo="meridiano"
tipo="paralelo"
lat_0=45*pi/180
lon_0=0
As=odeint(A_parallel,A0,us,args=(x_fun_esfera,g_esfera_2d,(lat_0,lon_0,tipo),(R,),N))

```

```

A =
[[ 0.      1.    ]
 [-0.335   0.881]
 [-0.59    0.551]
 ...
 [ 0.218  -0.951]
 [ 0.511  -0.691]
 [ 0.682  -0.266]]

```

Para representar este vector realizaremos una proyección ortográfica sobre el plano  $x - y$  usando la regla:

$$x = \theta \cos \lambda, y = \theta \sin \lambda$$

donde  $\theta = \pi/2 - \phi$  es la colatitud.

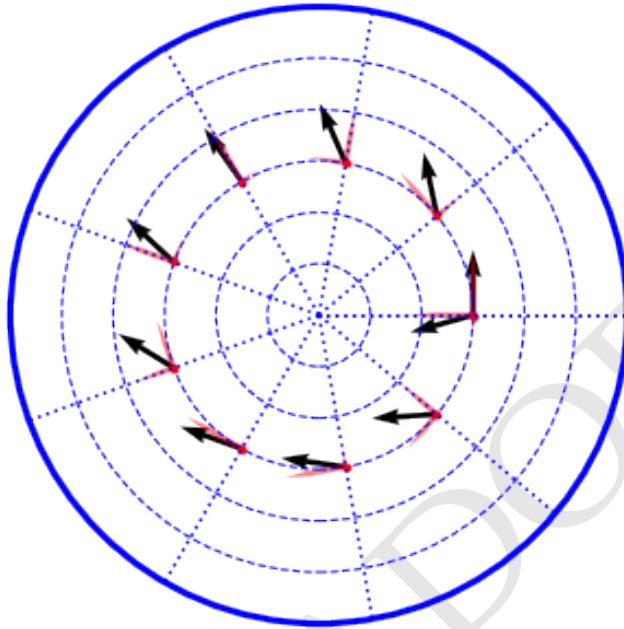
De nuevo el resultado obtenido está expresado en la base coordenada sobre la esfera. Podemos expresar esta base en coordenadas cartesianas si hacemos primero una proyección ortonormal en el sistema de coordenadas cartesianas así:

$$\begin{aligned}\hat{u}_\phi &= -\cos \lambda \hat{u}_x - \sin \lambda \hat{u}_y \\ \hat{u}_\lambda &= -\sin \lambda \hat{u}_x + \cos \lambda \hat{u}_y\end{aligned}$$

De allí los vectores coordenados en coordenadas esféricas serán:

$$\begin{aligned}\hat{e}_\phi &= -R \cos \lambda \hat{u}_x - R \sin \lambda \hat{u}_y \\ \hat{e}_\lambda &= -R \cos \theta \sin \lambda \hat{u}_x + R \cos \theta \cos \lambda \hat{u}_y\end{aligned}$$

Transporte paralelo sobre una esfera



**Figura 1.4:** Vector transportado de forma paralela sobre la superficie de una esfera. Se usa proyección azimutal para representar las coordenadas (malla punteada).

#### 1.4.6. Ecuación geodésica

De todos los campos vectoriales que pueden definirse a lo largo de una trayectoria el más importante es aquel que corresponde al vector tangente (o el vector cuadrivelocidad). El transporte paralelo de este vector permite definir un tipo de trayectoria muy especial.

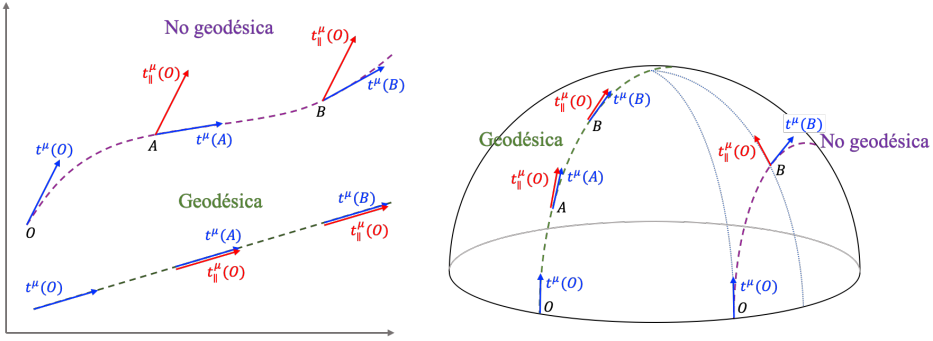
##### Definición 1.2

**Geodésica.** Una trayectoria en un espacio general se define como una geodésica si mantiene a todo lo largo la misma dirección, es decir si el vector tangente  $t^\alpha \equiv dx^\alpha/d\sigma$  en cada punto es *paralelo* (en el sentido de *transporte paralelo*) al vector tangente de cualquier otro punto. Matemáticamente:

$$\frac{D}{D\sigma} t^\alpha = 0$$

donde  $\sigma$  se conoce como el **parámetro afin** de la trayectoria.

Si usamos la definición dada en la sección anterior, la geodésica será la trayectoria que satisfaga la ecuación:



**Figura 1.5:** Definición de geodésica en el espacio-tiempo plano y sobre la superficie de una esfera.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0$$

### 1.4.7. Ejemplos numéricos de geodésicas

#### Geodésica en coordenadas cilíndricas

Nos proponemos ahora a calcular la geodésica que sigue un cuerpo en el espacio plano dada una condición inicial. La ecuación de la geodésica es:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0 \quad (1.3)$$

Para programar la ecuación de la geodésica es necesario linearizarla y expresarla de forma general como:

$$\left\{ \frac{dY^\mu}{d\sigma} = f^\mu(\{Y^\nu\}, u) \right\}$$

En este caso podemos hacer esta asignación:

$$\begin{aligned} Y^\mu &\equiv x^\mu \\ Y^{4+\mu} &\equiv dx^\mu/d\sigma \end{aligned}$$

Con esa identificación la ecuación de la geodésica se puede escribir como:

```
def ecuacion_geodesica(Y,s,gfun,gargs,N=4):
    """
    Opciones:
        gfun: función que da la métrica
        N: Número de dimensiones
    """
    from export import Gamma
    from numpy import zeros
    dYds=zeros(2*N)
```



```

x=Y[:N]
dxds=Y[N:]

dYds[:N]=dxds
G=Gamma(x,gfun,gargs,N)
for pi in range(N):
    for mu in range(N):
        for nu in range(N):
            dYds[N+pi]+=-G[pi,mu,nu]*dxds[mu]*dxds[nu]
return dYds

```

Definamos las condiciones iniciales y de integración:

```

N=2
from numpy import array
Y0s=array([1,0,0.1,+1])
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,10,100)

```

Y podemos integrar:

```

from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_cilindricas_2d,(),N))

```

Hagamos un gráfico de la trayectoria en el espacio:

(Algoritmo 1.1)

```

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

from numpy import sin,cos
for i,Y in enumerate(Ys):

    #Coordenadas
    r=Y[0]
    teta=Y[1]

    #Puntos
    #Vectores unitarios
    er=array([cos(teta),sin(teta)])
    et=array([-sin(teta),cos(teta)])

    #Posición en la trayectoria
    rpos=r*er

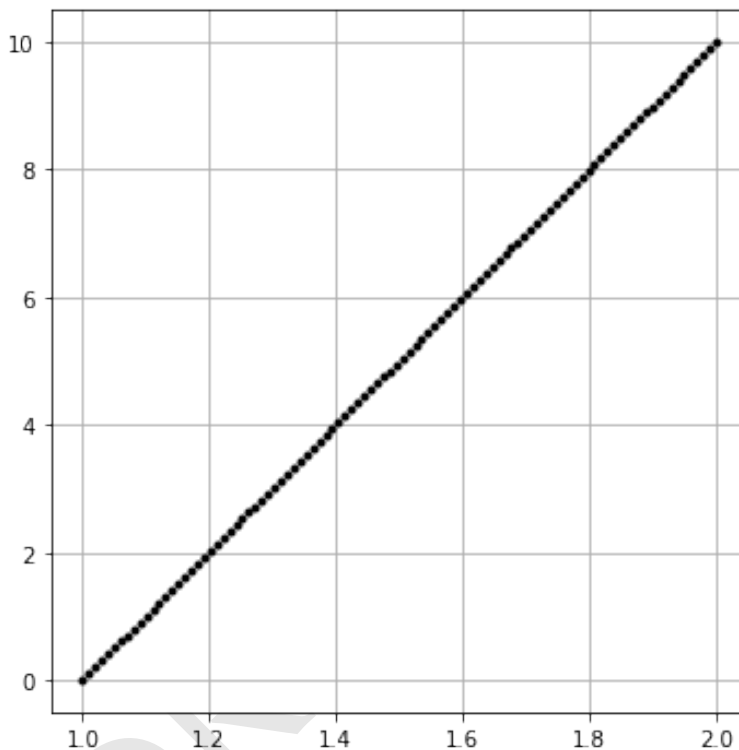
    #Grafica puntos
    ax.plot(rpos[0],rpos[1], 'k. ')

#ax.set_xlim((0,1.5))

```

```
#ax.set_ylim((0,1.5))
ax.grid()
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.6



**Figura 1.6:** Figura correspondiente al código 1.1.

Que coincide con lo que esperabamos: la trayectoria es una línea recta.

### Geodésica sobre la superficie de una esfera

Un problema más interesante es calcular la geodésica sobre una esfera. Para ello necesitamos la métrica:

Y podemos usar los algoritmos introducidos antes para integrar la geodésica:

(Algoritmo 1.2)

```
#Condiciones iniciales: arrancando en Medellín
N=2
from numpy import array,pi
Y0s=array([6*pi/180,-75*pi/180,0.6,0.2])
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,8,100)
```

```

#Integra la ecuación de la geodésica
from scipy.integrate import odeint
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_esfera_2d,(),N))

#Extrae las coordenadas y las convierte a geográficas
from numpy import mod
lons=mod(Ys[:,1]*180/pi,360)
lats=Ys[:,0]*180/pi

#Grafica
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(lons,lats,'r.')

#Decoracion
ax.set_xlim((0,360))
ax.set_ylim((-90,90))
ax.grid()
fig.tight_layout()

```

ver Figura 1.7

Para verificar que si es una circunferencia máxima usemos el paquete Basemap que permite representar puntos sobre un mapa realista de la Tierra.

(Algoritmo 1.3)

```

import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.basemap import Basemap
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

#Crea mapa
#m=Basemap(projection='moll',lon_0=0)
m=Basemap(projection='ortho',lon_0=0,lat_0=30)

#Dibuja continentes, lagos y oceanos
m.drawcoastlines()
m.fillcontinents(color='coral',lake_color='aqua')
m.drawmapboundary(fill_color='aqua')

#Calcula la posición de los puntos
x,y=m(lons,lats)
ax.plot(x,y,'ro',ms=1)

#Ajusta el tamaño de la figura
fig.tight_layout()

```

ver Figura 1.8

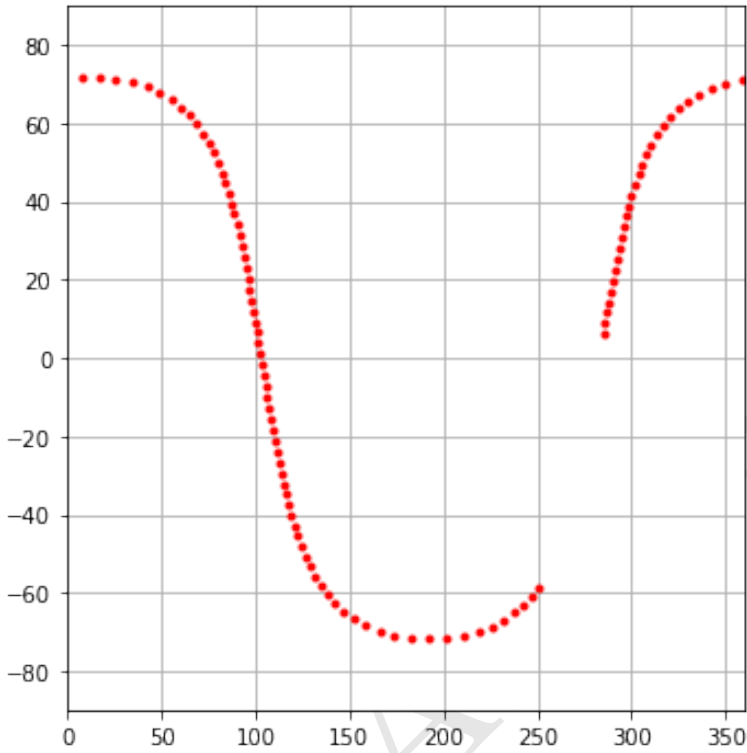


Figura 1.7: Figura correspondiente al código 1.2.

## 1.5. La geodésica y un principio variacional

Una deducción alternativa de la ecuación geodésica se puede obtener mediante un principio variacional.

Sabemos que la longitud de un intervalo en el espacio-tiempo es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

La longitud entonces de una curva hecha solo de intervalos temporales o luminoides, entre dos eventos  $A$  y  $B$  será:

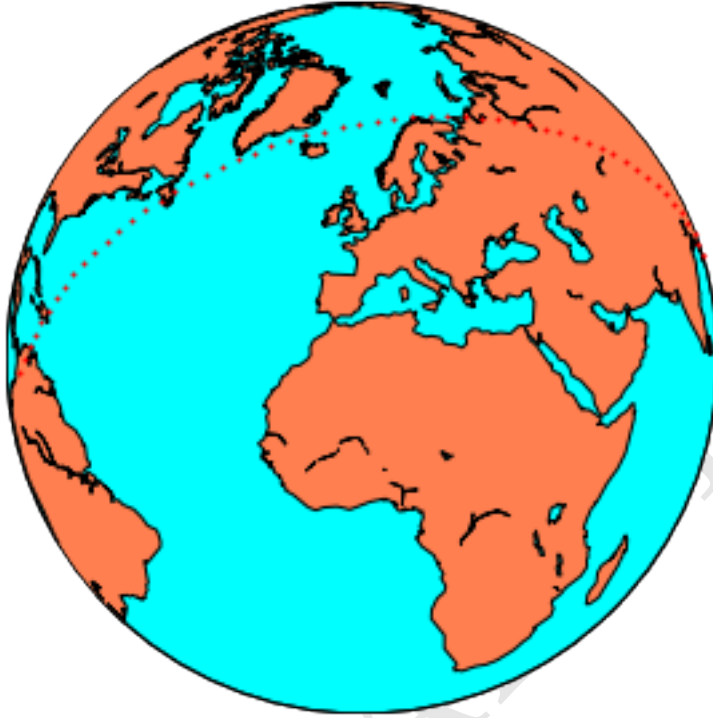
$$S = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\alpha) dx^\mu dx^\nu}$$

donde  $x^\alpha$  son los puntos a lo largo de la trayectoria.

Si suponemos que parametrizamos los eventos en la trayectoria con un parámetro  $\lambda$ , de modo que  $x^\alpha(\lambda)$  esta expresión se puede escribir como:

$$S = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x^\alpha) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

La geodésica entre los eventos  $A$  y  $B$  será aquella curva tal que la longitud total entre ellos es *extremal*:



**Figura 1.8:** *Figura correspondiente al código 1.3.*

$$\delta S = 0$$

El intervalo entre puntos de la geodésica lo llamaremos en lo sucesivo:

$$d\sigma^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

El problema de la determinación de la geodésica es similar al problema de la mecánica clásica de la determinación de la trayectoria real de un sistema en el espacio de configuración que tiene acción  $S$  y lagrangiano  $L$ .

Aquí vemos que el papel de la acción  $S$  de la mecánica clásica lo juega la longitud de arco y el papel del Lagrangiano lo juega la cantidad:

$$L \equiv \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$$

Sobre la curva extremal, en general

$$d\sigma^2 = D d\lambda^2$$

donde  $D$  es una constante.

Sabemos por el cálculo variacional que la condición variacional es equivalente a las ecuaciones de Euler:

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \Big|_{\lambda=\sigma} = 0$$

donde por brevedad hemos escrito  $\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$

Puede probarse que la ecuación de Euler en este caso resulta igual a:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0$$

que es justamente la ecuación de la geodésica.

Nótese que en realidad la ecuación de la geodésica puede escribirse en general como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$$

que es independiente de si la geodésica es temporal o nula.

Para el caso de partículas con masa:

$$d\sigma^2 = c^2 d\tau^2$$

por lo tanto es posible usar como parámetro afin  $\lambda = \tau$  de modo que para este caso:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

#### Nota

**La geodésica y el principio de máximo envejecimiento.** En el espacio Euclidiano o en otras variedades Riemannianas la geodésica representa la trayectoria de longitud mínima, el camino de menor distancia. En un espacio Lorentziano, sin embargo, y como vimos en el capítulo de Relatividad Espacial, el camino entre dos puntos a lo largo de la geodésica es realmente el camino más largo. A esto se lo conoce como el **principio de máximo envejecimiento**.

## 1.6. Geodésicas y movimiento inercial

La introducción en la sección anterior del concepto de geodésica conduce a la formulación de un principio físico nuevo en la relatividad general, a saber un principio de inercia generalizado:

#### Postulado 1.6

**Postulado de las geodésicas.** Una partícula de prueba completamente libre de fuerzas, en un espacio tiempo general caracterizado por una métrica  $g_{\mu\nu}$  y símbolos de Christoffel (coeficientes conexión) asociado  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , se mueve sobre una geodésica en el espacio-tiempo:

**Postulado 1.6 (Cont.)**

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0$$

Es interesante anotar que el resultado anterior vale tanto si la partícula es masiva como si no lo es, es decir, aplica en el caso de la luz o de otras partículas de prueba. La diferencia es que en el caso de una partícula masiva en la cual los intervalos son temporaloides, el parámetro aún puede identificarse con el tiempo propio y la ecuación geodésica adopta la forma general:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

que ahora es una ecuación completamente física (todas las cantidades involucradas son físicas).

Si despejamos  $d^2 x^\mu / d\tau^2$  obtenemos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

Clásicamente se puede interpretar como que un cuerpo en un espacio-tiempo con métrica general, experimenta una aceleración incluso en la ausencia de fuerzas.

**Nota: El principio que realmente es una proposición.** El principio de las geodésicas fue propuesto por Einstein como un elemento adicional físico a la relatividad general independiente de las ecuaciones de campo. Sin embargo, en años posteriores, Einstein y otros colegas demostraron que en realidad este resultado es producto de una propiedad intrínseca de la relatividad, a saber, el teorema de continuidad (conservación de la energía) que puede expresarse matemáticamente como:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$$

donde  $T^{\mu\nu}$  es el tensor de esfuerzo-energía que introduciremos en una sección posterior.

## 1.7. Geodésicas en campo débil

Una de las más interesantes aplicaciones de la ecuación de la geodésica se obtiene al aplicarla a una situación en la que el campo gravitacional es poco intenso.

Hay dos cosas que desde el punto de vista de la relatividad caracterizan a un campo gravitacional débil:

1. En movimiento geodésico en el campo, las velocidades espaciales conseguidas por las partículas son pequeñas, i.e.

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$$

recordemos que en unidades luz la primera cantidad nos da la velocidad en unidades de la velocidad de la luz. Por otro lado, en las mismas unidades la segunda cantidad nos da la diferencia entre el tiempo coordenado y el tiempo propio que en campo débil será casi idéntica.

2. En campo débil la métrica es aproximadamente igual a la métrica de Minkowski. Podemos escribirla de la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

donde  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ .

A esta forma de escribir la métrica se la llama *linearización* de la métrica y la usaremos más adelante para describir las ondas gravitacionales.

Nos interesa deducir la ecuación de movimiento de un cuerpo en caída libre en el campo gravitacional, es decir la ecuación  $d^2\vec{r}/dt^2 \approx d^2x^i/d\tau^2$ . En lo sucesivo y para simplificar usaremos la notación de Newton:

$$\ddot{x}^\mu \equiv \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}$$

entendiendo que el punto hace referencia a la derivada respecto del tiempo propio y no del tiempo coordenado.

En esta notación la ecuación geodésica nos queda:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\gamma$$

Teniendo en cuenta la primera condición podemos escribir una versión aproximada de la ecuación para la componente espacial como:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{00}^\mu (\dot{x}^0)^2$$

Si usamos coordenadas ortogonales para la métrica, sabemos que:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\mu}g_{00,\mu}$$

Suponemos un campo estático, de modo que  $\Gamma_{00}^0 = 0$  de donde se sigue que sobre la geodésica, en las condiciones propuestas

$$\ddot{x}^0 = 0$$

de donde integrando obtenemos:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = k$$

donde  $k$  es una constante de integración a lo largo de la geodésica. Es fácil ver que dado que:

$$d\sigma^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

entonces, bajo las aproximaciones podemos escribir, en unidades del sistema internacional:



$$c^2 \approx \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2$$

que es exactamente el mismo resultado:

$$\dot{x}^0 = c$$

Volviendo a la ecuación de la geodésica, la componente temporal queda:

$$\ddot{x}^i = -c^2 \Gamma_{00}^i$$

Usando la linearización de la métrica tenemos:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00,i} = \frac{1}{2} h_{00,i}$$

De donde finalmente la ecuación de movimiento en campo gravitacional débil se puede escribir como:

$$\ddot{x}^i = -\frac{c^2}{2} h_{00,i}$$

En la mecánica Newtoniana sabemos que:

$$\ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} \Phi$$

donde  $\phi$  es el potencial gravitacional local (energía potencial gravitacional por unidad de masa) que para la ley de gravitación universal de Newton esta dado por:

$$\Phi = -\frac{GM}{r}$$

La comparación de estas ecuaciones muestra que podemos hacer la identificación:

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2}$$

De allí que el coeficiente métrico temporal en campo débil sea:

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\Phi}{c^2}$$

De modo que el comportamiento de las partículas en un campo gravitacional Newtoniano se puede reproducir con una métrica del tipo:

$$ds^2 = \left( 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) dt_L^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

llamaremos a esta la **métrica de Newton**.

Una manera de parametrizar la métrica de Newton es haciendo:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{2GM_p}{c^2}$$

la métrica se puede escribir de forma simplificada como:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mathcal{R}}{r}\right) dt_L^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

### Nota

**El parámetro  $\mathcal{R}$ .** El parámetro  $\mathcal{R}$  es una cantidad de gran relevancia en la relatividad general. Más adelante la obtendremos después de estudiar la métrica de Schwarzschild. Por ahora podemos ver que es una cantidad que es proporcional a la masa de un cuerpo con una constante de proporcionalidad  $2G/c^2 = 1,4852 \times 10^{-27} m^3 kg^{-1}$  muy pequeña. Esta cantidad solo se hace macroscópica para valores de la masa del cuerpo realmente grandes (masas planetarias). Una manera de parametrizar este parámetro es:

$$\mathcal{R} = 2,954 \text{ km} \left( \frac{M_p}{M_\odot} \right)$$

#### 1.7.1. Un ejemplo numérico

Una implementación de la métrica de Newton es:

```
from numpy import array
def g_newtoniana_4d(xmu, mu, R=1):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_mumu=diag(A, -1, -r^2, -r^2 sin^2 teta)
    """
    from numpy import sin
    t, r, teta, fi = xmu
    A = (1 - R/r)
    if mu == 0:
        g = A
    elif mu == 1:
        g = -1
    elif mu == 2:
        g = -r**2
    elif mu == 3:
        g = -r**2 * sin(teta)**2
    return g

%load_ext autoreload
%autoreload 2
```

Vamos a estudiar el movimiento de un cuerpo que es lanzado horizontalmente con una velocidad  $v$  a una altura  $h$  ( $r = R_p + h$ ) sobre la superficie del planeta. Las

condiciones iniciales del problema son por tanto:

$$x_{0L}^\mu : \left( 0, \frac{R_p + h}{c}, \frac{\pi}{2}, 0 \right) \quad (1.4)$$

$$\frac{dx_{0L}^\mu}{d\sigma} : \left( 1, 0, 0, 0, -\frac{v}{R_p} \right) \quad (1.5)$$

Las propiedades del cuerpo son:

```
#Constantes
c=3e8 # m/s
G=6.67e-11 # m^3 kg^-1 s^-2

#Propiedades del planeta
Mp=5.98e24 # kg
Rp=6.371e6 # m
Phip=-G*Mp/Rp
gp=G*Mp/Rp**2
R=2*G*Mp/c**2
```

R = 0.008863688888888891 m

Potencial en la superficie, Phi(Rp) = -62606498.19494586 J/kg

Aceleración gravitacional, g(Rp) = 9.826792998735812 m/s^2

Las condiciones iniciales serán por otro lado:

```
#Altura y velocidad
h=100.0 # m
v=10000.0 # m/s
from numpy import sqrt
T=sqrt(2*h/gp)

#Condiciones iniciales
from numpy import array,pi
Y0s=array([0.0,(Rp+h)/c,pi/2,pi/2,
            1,0,0,-v/Rp])

#Tiempo de integración
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,T,30)
```

```
print(f"Condiciones iniciales = {Y0s}")
```

```
Condiciones iniciales = [ 0.      0.021  1.571 ...  0.      0.     -0.002]
```

```
%matplotlib inline
```

(Algoritmo 1.4)

```

#Integra la ecuación de la geodésica
from scipy.integrate import odeint
from export import ecuacion_geodesica
N=4
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_newtoniana_4d,(R/c,),N))

#Convierte solución en coordenadas esféricas
ts=Ys[:,0]
rs=Ys[:,1]
qs=Ys[:,2]
fs=Ys[:,3]

#Convierte coordenadas esféricas en coordenadas cartesianas
from numpy import sin,cos
xs=rs*sin(qs)*cos(fs)
ys=rs*sin(qs)*sin(fs)
zs=rs*cos(qs)

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(c*xs,c*ys-Rp,label="Geodésica")

#Comparación con el movimiento parabólico
xs_par=v*ss
ys_par=h-0.5*gp*ss**2
ax.plot(xs_par,ys_par,'k+',label="Galileo")

#Decoración
ax.legend()
ax.set_xlabel("$x$")
ax.set_ylabel("$y$")
fig.tight_layout()

```

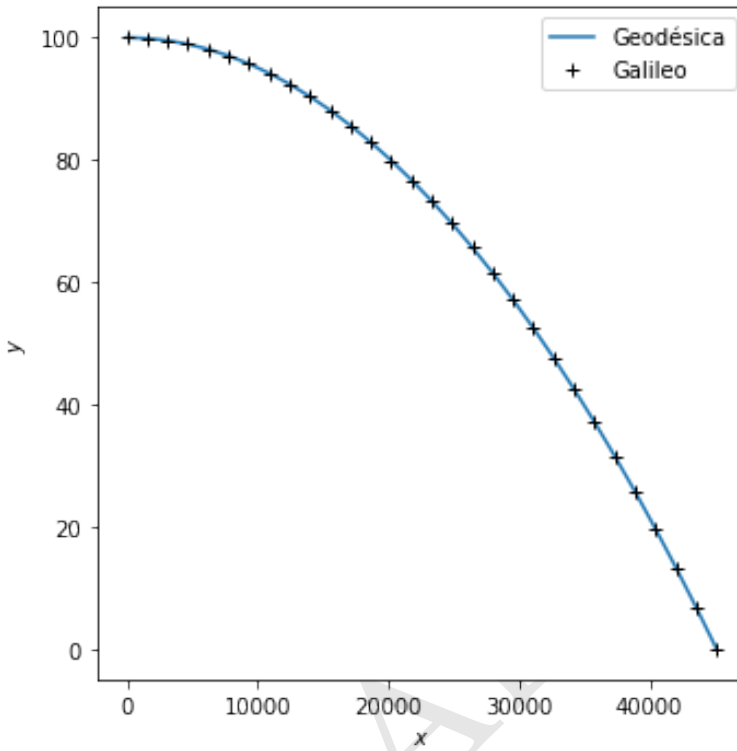
ver Figura 1.9

Que se corresponde con lo esperado: el cuerpo describe una trayectoria parabólica en el espacio.

## 1.8. Simetrías y cantidades conservadas

Las ecuaciones geodésicas son fundamentales en Relatividad general y como tal deben ser revisadas con sumo cuidado. Como sucede en la mecánica clásica con las ecuaciones de movimiento de Newton o las ecuaciones de Lagrange, ellas representan las ecuaciones diferenciales más importantes de la relatividad general.

Existen distintas maneras de escribir las ecuaciones de la geodésica:



**Figura 1.9:** Figura correspondiente al código 1.4.

1. Versión original:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

que en notación de Newton es:

$$\ddot{x}^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

2. Versión linearizada

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= U^\mu \\ \dot{U}^\mu &= -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta \end{aligned}$$

3. Versión variacional: si se define:

$$L = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

entonces la ecuación de la geodésica es:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

Esta última manera de expresar la ecuación permite encontrar constantes de movimiento usando principios similares a los que se usaron en la mecánica clásica.

### 1.8.1. La métrica como constante

Como hemos visto antes si se escoge de manera apropiada el parámetro afin entonces el valor de  $L$  resulta constante e igual a  $D$ . De aquí resulta nuestra primera constante de movimiento o cuadratura:

$$\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} = D$$

que se puede escribir como:

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = D^2$$

En el caso por ejemplo de una geodésica temporaloide,  $D = c$  y  $\sigma = \tau$  de modo que:

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = c^2$$

### 1.8.2. Coordenadas cíclicas y vectores de Killing

Si una métrica no depende de una de las coordenadas  $x^\kappa$ , entonces la ecuación de Euler (ecuación de la geodésica) se puede escribir como:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\kappa} \right) = 0$$

De aquí se obtiene que la cuadratura:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\kappa} = \text{cte}$$

Desarrollando esta ecuación obtenemos:

$$-g_{\kappa\nu} \frac{1}{L} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = -g_{\kappa\nu} U^\nu = \text{cte}$$

Si definimos el vector:

$$\tilde{\zeta}^\mu : (0_0, \dots, 1_\kappa, \dots, 0_4)$$

donde la única componente distinta de 0 es la componente  $\kappa$  entonces la constante encontrada se puede escribir como:

$$g_{\mu\nu} \tilde{\zeta}^\mu U^\nu = \text{cte}$$

Que no es otra cosa que el producto punto del cuadvivector  $\tilde{\zeta}^\mu$  y la cuadvivelocity  $U_\nu$ :

$$\tilde{\zeta}^\mu U_\mu = \text{cte}$$

Al cuadrivector  $\zeta^\mu$  se lo llama el vector de *Killing* asociado con la simetría correspondiente<sup>3</sup>.

### 1.8.3. Ejemplo: geodésicas en coordenadas cilíndricas

Un ejemplo clásico consiste en calcular las geodésicas en un espacio plano cuya métrica es expresada en coordenadas cilíndricas:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$$

Consideremos geodésicas sobre el plano  $z = 0$ . Podemos escribir la ecuación de la geodésica o escribir sus constantes:

1. **Constancia de la métrica:** En este caso podemos escoger un parámetro afin tal que  $D = 1$ :

$$\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 1$$

que se escribe explícitamente como:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 1$$

2. **Variables cíclicas:** En este caso  $\phi$  no aparece en la métrica y por lo tanto el vector de Killing es  $\zeta^\mu : (0, 1, 0)$ , de allí que la siguiente cantidad sea constante:

$$\zeta^\mu \dot{x}_\mu = h$$

aquí hemos escogido llamar  $h$  a la constante. Explícitamente:

$$g_{\mu\nu} \zeta^\mu \dot{x}^\nu = h$$

o lo que es lo mismo:

$$g_{\phi\phi} \dot{\phi} = r^2 \dot{\phi} = h$$

Dividiendo esta última ecuación por la primera obtenemos:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{h^2}{r^2}\right)^{-1/2}$$

Que puede integrarse para dar:

$$\phi = \phi_0 + \cos^{-1} \left(\frac{h}{r}\right)$$

Despejando  $r$  obtenemos la forma de las geodésicas:

<sup>3</sup>El nombre de vector de Killing viene del matemático alemán Wilhelm Killing (1847-1923) y no de que sea un vector con una acción *asesina*.

$$r \cos(\phi - \phi_0) = h$$

Desarrollando el coseno y teniendo en cuenta que  $r \cos \phi = x$  y  $r \sin \phi = y$ :

$$x \cos \phi_0 + y \sin \phi_0 = h$$

que es la ecuación general de una línea recta y que es lo que estábamos esperando.

#### 1.8.4. Ejemplo: geodésicas sobre una esfera

Un ejemplo clásico consiste en calcular las geodésicas sobre una esfera:

$$dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

Ya habíamos hecho este cálculo numéricamente. Hagámoslo ahora analíticamente.

1. **Constancia de la métrica:** En este caso podemos escoger un parámetro afin tal que  $D = 1$ :

$$\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = 1$$

que se escribe explícitamente como:

$$R^2 \left( \frac{d\theta}{d\lambda} \right)^2 + R^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 1$$

2. **Variables cíclicas:** En este caso  $\phi$  no aparece en la métrica y por lo tanto el vector de Killing es  $\zeta^\mu : (0, 1, 0)$ , de allí que la siguiente cantidad sea constante:

$$g_{\phi\phi} \dot{\phi} = R^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = h$$

Dividiendo término a término la primera por el cuadrado de la segunda y reorganizando se produce:

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{d\theta}{d\phi} \right)^2 + 1 = h^2 R^2 \sin^2 \theta$$

Llamando  $\kappa = h^2 R^2$ , la integral y separando variables obtenemos:

$$\pm \int d\phi = \int \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\kappa \sin^2 \theta - 1}}$$

Por tablas de integrales:

$$\tan(\phi + \phi_0) = \mp \frac{\cos \theta}{\sqrt{\kappa \sin^2 \theta - 1}}$$

Que puede escribirse como:



$$\sin(\phi + \phi_0) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\kappa - 1} \sin \theta}$$

Y que se puede desarrollar como:

$$\sin \phi_0 (R \sin \theta \cos \phi) + \cos \phi_0 (R \sin \theta \sin \phi) = \frac{1}{\sqrt{\kappa - 1}} (R \cos \theta)$$

Que se puede escribir en coordenadas cartesianas como:

$$x \sin \phi_0 + y \cos \phi_0 - z \frac{1}{\sqrt{\kappa - 1}} = 0$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el origen de coordenadas y cuyas coordenadas  $x, y, z$  están sobre la superficie de la esfera. Es decir, esta es la ecuación de una circunferencia máxima, que es lo que sabemos para una geodésica sobre una esfera.

### 1.8.5. Ejemplo: geodésicas en la métrica de Newton

Estudiemos ahora el caso físico de la métrica de Newton:

$$ds^2 = A dt_L^2 - d\vec{l}^2$$

donde

$$A \equiv \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

1. **Constancia de la métrica:** En este caso el parametro afin es  $D = c$ :

$$\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = c$$

que se escribe explícitamente como:

$$A \left(c \frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{d\vec{l}}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

2. **Variables cíclicas:** En este caso  $t$  no aparece en la métrica y por lo tanto el vector de Killing es  $\xi^\mu : (1, 0, 0, 0)$ , de allí que la siguiente cantidad sea constante:

$$A \frac{d(ct)}{d\tau} = \kappa$$

Elevando al cuadrado la última ecuación y dividiendo la primera por el resultado obtenemos:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{c^2 A^2} \left(\frac{d\vec{l}}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{\kappa^2}$$

Si identificamos  $v = d\vec{l}/dt$  y expandimos:

$$\frac{1}{A} = 1 - \frac{2\Phi}{c^2}$$

y

$$\frac{1}{A^2} = 1 - \frac{4\Phi}{c^2}$$

La siguiente relación resulta:

$$1 - \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{4\Phi}{c^2}\right) = \frac{c^2}{\kappa^2}$$

Si multiplicamos a ambos lados por  $c^2$  y dividimos por 2 y despreciamos el término  $\Phi/c^2$ :

$$\frac{v^2}{2} + \Phi = \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{c^2}{\kappa^2}\right)$$

Multiplicando a ambos lados por la masa de la partícula obtenemos:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E$$

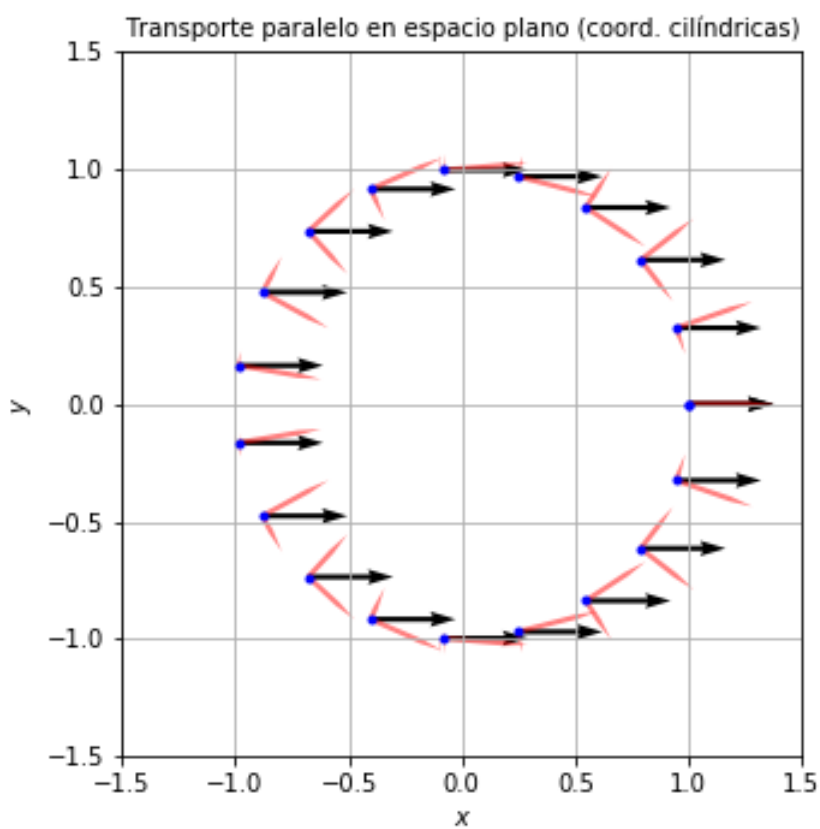
donde

$$E \equiv \frac{mc^2}{2} \left(1 - \frac{c^2}{\kappa^2}\right)$$

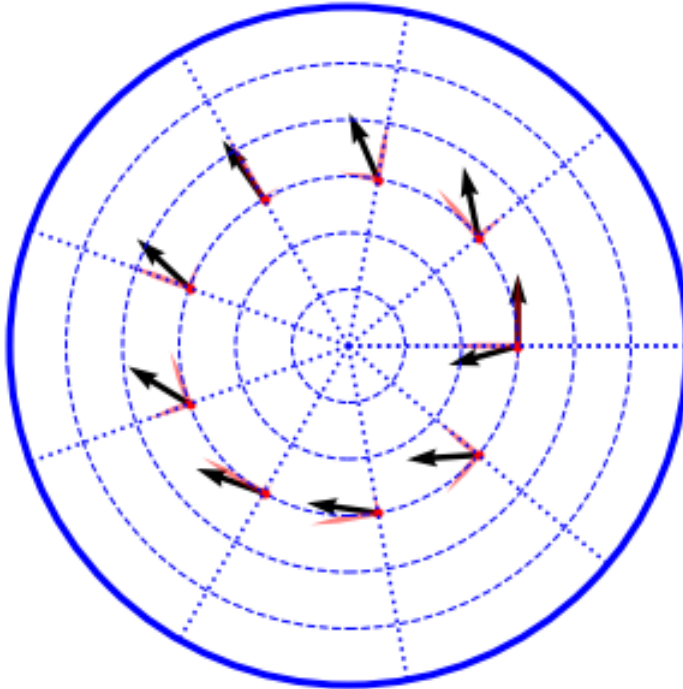
Ya sabíamos en la física Newtoniana de esta cuadratura.

## 1.9. Transporte paralelo y curvatura

En una sección anterior vimos dos situaciones diferentes en el transporte paralelo: en espacio plano y en espacio curvo (ver figuras abajo) y un hecho es notable: al recorrer una trayectoria cerrada en el espacio plano un vector transportado de forma paralela no se modifica. Sin embargo en otro tipo de espacio (sobre la superficie de una esfera), sobre una trayectoria circular un vector transportado de forma paralela no vuelve a ser lo mismo.



### Transporte paralelo sobre una esfera



¿Por qué ocurre esto? ¿de qué depende?

Otra manera de expresar la diferencia es decir que el vector transportado de forma paralela depende del camino que se siga. En la figura se muestra el transporte paralelo de un vector  $A^\mu$  desde un punto  $P$  hasta un punto  $Q$  por dos caminos diferentes  $dx^\alpha \rightarrow dx^\beta$  y  $dx^\beta \rightarrow dx^\alpha$

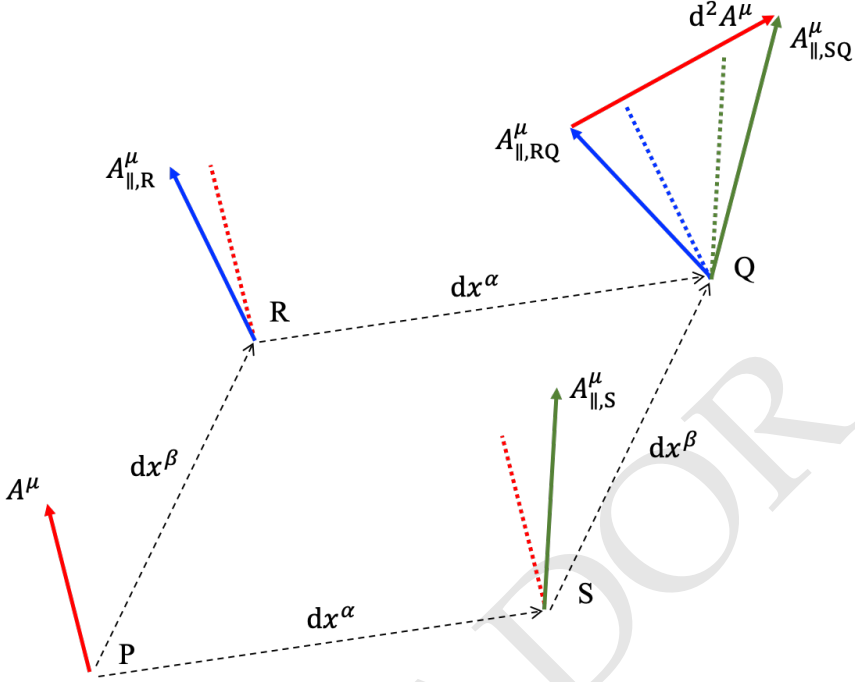


Figura 1.10: Figura

La diferencia a través de los dos recorridos la hemos llamado  $d^2 A^\mu$ .

Usemos la derivada covariante para el transporte paralelo hasta los puntos intermedios R y S:

$$A^\mu_{||,R} = A^\mu + D_\beta A^\mu dx^\beta$$

Por otro lado es transporte de S a Q es:

$$A^\mu_{||,RQ} = A^\mu_{||,R} + D_\alpha A^\mu_{||,R} dx^\alpha$$

reemplazando lo obtenido antes obtenemos:

$$A^\mu_{||,RQ} = A^\mu + D_\beta A^\mu dx^\beta + D_\alpha A^\mu dx^\alpha + D_{\alpha\beta} A^\mu dx^\alpha dx^\beta$$

El recorrido por el otro recorrido es:

$$A^\mu_{||,SQ} = A^\mu + D_\alpha A^\mu dx^\alpha + D_\beta A^\mu dx^\beta + D_{\beta\alpha} A^\mu dx^\alpha dx^\beta$$

Tomando la diferencia obtenemos:

$$d^2 A^\mu = A^\mu_{||,SQ} - A^\mu_{||,RQ} = -(D_{\alpha\beta} - D_{\beta\alpha}) A^\mu dx^\alpha dx^\beta$$

Por otro lado podemos suponer que la diferencia entre el vector transportado por los dos caminos se puede expresar como:

$$d^2 A^\mu \equiv R^\mu_{\delta\alpha\beta} A^\delta dx^\alpha dx^\beta$$

donde los nuevos coeficientes  $R^\mu_{\delta\alpha\beta}$  juegan el papel que en el transporte paralelo convencional jugaban los coeficientes de conexión.

Comparando encontramos que la manera de calcular los coeficientes es:

$$R^\mu_{\delta\alpha\beta} A^\delta = -(D_{\alpha\beta} - D_{\beta\alpha}) A^\mu$$

O en la notación punto y coma de la derivada covariante:

$$R^\mu_{\delta\alpha\beta} A^\delta = -(A^\mu_{;\alpha;\beta} - A^\mu_{;\beta;\alpha})$$

Veamos cómo es la segunda derivada covariante:

$$\begin{aligned} A^\rho_{;\mu;\nu} &= (A^\rho_{;\nu;\mu}) + [\Gamma^\rho_{\mu\sigma} A^\sigma_{;\nu}] - \{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\rho_{;\lambda}\} \\ &= (A^\rho_{;\nu;\mu} + \Gamma^\rho_{\nu\sigma;\mu} A^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} A^\sigma_{;\mu}) + \\ &\quad + [\Gamma^\rho_{\mu\sigma} A^\sigma_{;\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A^\lambda] + \\ &\quad - \{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} A^\rho_{;\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} A^\sigma\} \end{aligned}$$

La derivada contraria  $A^\rho_{;\nu;\mu}$  se obtiene intercambiando en la expresión anterior  $\mu \leftrightarrow \nu$ . Es claro que los términos proporcionales a  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  serán idénticos en ambas derivadas y se eliminarán. Lo mismo pasa con los términos  $A^\rho_{;\nu;\mu}$  y  $\Gamma^\rho_{\nu\sigma} A^\sigma_{;\mu}$  y  $\Gamma^\rho_{\mu\sigma} A^\sigma_{;\nu}$  que serán idénticos a los correspondientes en la derivada con los índices cambiados.

De modo que nos queda:

$$A^\sigma_{;\mu;\nu} - A^\sigma_{;\nu;\mu} = (\{\Gamma^\rho_{\nu\sigma;\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\delta} \Gamma^\delta_{\nu\sigma}\} - \{\mu \leftrightarrow \nu\}) A^\sigma$$

donde la notación  $\{\mu \leftrightarrow \nu\}$  indica que lo que hay antes entre llaves se pone igual pero intercambiando los índices  $\mu$  por  $\nu$  y viceversa.

Volviendo a la definición de los coeficientes  $R$  obtenemos entonces que ellos están dados como función de los símbolos de Christoffel y de sus derivadas en la forma más conveniente:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \{\Gamma^\rho_{\sigma\mu;\nu} + \Gamma^\delta_{\sigma\mu} \Gamma^\rho_{\nu\delta}\} - \{\mu \leftrightarrow \nu\}$$

Esta cantidad transforma como un tensor (ver Problemas al final del capítulo) y se conoce como el **tensor de Riemann**.

#### Nota

**El tensor de Riemann y la curvatura.** De acuerdo a lo que habíamos dicho antes, el tensor de Riemann establece si un espacio es curvo o no. Esta condición puede expresarse de dos maneras:

- Si **al menos una** de las componentes del tensor de Riemann es distinta de cero, **el espacio es curvo**.

**Nota (Cont.)**

- Si **todas** las componentes del tensor de Riemann son cero, **el espacio es plano**.

**1.9.1. Propiedades del tensor de Riemann**

El tensor de Riemann juega un papel fundamental en la relatividad general de modo que sus propiedades son cruciales para las matemáticas del área.

La primera propiedad y la más obvia es su antisimetría:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = -R^{\rho}{}_{\sigma\nu\mu}R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} + R^{\rho}{}_{\sigma\nu\mu} = 0$$

que podemos escribir también como:

$$R^{\rho}{}_{\sigma[\mu\nu]} = 0$$

¿Cuántas componentes tiene el tensor de Riemann?

De la misma manera que los símbolos de Christoffel pueden ser pensados como una “pila de matrices”, el tensor de Riemann es como una matriz de matrices:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = (R^{\rho}{}_{\sigma})_{\mu\nu}$$

de donde sabemos que en total el número de componentes totales será  $N^4$  y para el espacio-tiempo 256 componentes.

Ahora bien, por la antisimetría de  $\mu\nu$  sabemos que la diagonal:

$$(R^{\rho}{}_{\sigma})_{\mu\mu} = 0$$

y por lo tanto cada matriz de matrices tiene por lo menos  $N(N-1)/2$  componentes independientes, para un total de  $N^3(N-1)/2$  que en el caso de  $N = 4$  corresponde a 96 componentes independientes.

El número de términos encontrados es todavía muy grande, pero puede mostrarse que es menos si se baja el índice superior:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\rho}R^{\rho}{}_{\mu\nu\kappa}$$

Desarrollando en detalle se puede mostrar (ver Problemas al final del capítulo) que esta versión totalmente covariante del tensor de Riemann es:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda\kappa} - g_{\nu\lambda,\kappa\mu} + g_{\lambda\kappa,\mu\nu} - g_{\kappa\mu,\nu\lambda}) + g_{\sigma\zeta}(\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}\Gamma_{\lambda\nu}^{\zeta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\zeta})$$

O en notación más compacta:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}g_{\{\mu\nu,\lambda\kappa\}} - g_{\alpha\beta}(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\beta} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta})$$

Es decir el tensor de Riemann es proporcional a las **segundas derivadas de la métrica**.

Con esta expresión se identifica dos propiedades:

1. Antisimetría frente al intercambio de los primeros índices:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

2. Simetría frente al intercambio de los pares de índices inicial y final:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\beta\alpha}$$

De modo que tenemos una matriz antisimétrica de matrices antisimétricas. Eso implica que hay  $M = N(N-1)/2$  matrices antisimétricas de  $M = N(N-1)/2$  términos, es decir  $N^2(N-1)^2/4$ , para  $N = 4$  el número de términos es  $4^2(4-1)^2/4 = 36$  términos independientes. Esos términos son:

$R_{0101}$	$R_{0102}$	$R_{0103}$	$R_{0112}$	$R_{0113}$	$R_{0123}$
$R_{0201}$	$R_{0202}$	$R_{0203}$	$R_{0212}$	$R_{0213}$	$R_{0223}$
$R_{0301}$	$R_{0302}$	$R_{0303}$	$R_{0312}$	$R_{0313}$	$R_{0323}$
$R_{1201}$	$R_{1202}$	$R_{1203}$	$R_{1212}$	$R_{1213}$	$R_{1223}$
$R_{1301}$	$R_{1302}$	$R_{1303}$	$R_{1312}$	$R_{1313}$	$R_{1323}$
$R_{2301}$	$R_{2302}$	$R_{2303}$	$R_{2312}$	$R_{2313}$	$R_{2323}$

Pero por la propiedad 2 de más arriba, este arreglo cuadrado de términos es simétrico y por lo tanto de todos estos términos hay  $6(6+1)/2 = 21$  términos independientes.

La conclusión hasta ahora es que para que las componentes del tensor de Riemann que sean independientes y potencialmente distintas de 0 **los primeros índices y los últimos deben ser diferentes entre sí**. Las componentes  $R_{\alpha\alpha\mu\nu}$  o  $R_{\alpha\beta\mu\mu}$  son siempre iguales a cero.

### Proposición 1.2

**Identidades de Bianchi.** Hay dos propiedades adicionales del tensor de Riemann que pueden llegar a ser de alguna utilidad:

1. **Primera identidad de Bianchi:**  $R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0$
2. **Segunda identidad de Bianchi:**  $R^\alpha_{\beta[\mu\nu;\sigma]} = 0$

### 1.9.2. Tensor de Riemann para métricas diagonales

Pensemos ahora nuevamente en el caso en el que la métrica es simétrica. En este caso el tensor de Riemann se simplifica de un general:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}g_{\{\mu\nu,\lambda,\kappa\}} - g_{\alpha\beta}(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\lambda\kappa} - \Gamma^\alpha_{\mu\kappa}\Gamma^\beta_{\lambda\nu})$$

a uno más particular:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}g_{\{\mu\nu,\lambda,\kappa\}} - g_{\alpha\alpha}(\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\lambda\kappa} - \Gamma^\alpha_{\mu\kappa}\Gamma^\alpha_{\lambda\nu})$$

De estos aquellos con  $\mu = \nu$  y  $\lambda \neq \kappa \neq \mu$  serán:



$$R_{\lambda\mu\mu\kappa} = -\frac{1}{2}g_{\mu\mu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\lambda}\Gamma_{\mu\mu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\lambda} - g_{\kappa\kappa}\Gamma_{\mu\mu}^{\kappa}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\kappa} + g_{\mu\mu}\Gamma_{\mu\kappa}^{\mu}\Gamma_{\lambda\mu}^{\mu}$$

Y aquellos con  $\mu = \nu$  y  $\lambda = \kappa$  serán:

$$R_{\lambda\mu\mu\lambda} = -\frac{1}{2}(g_{\mu\mu,\lambda,\lambda} + g_{\lambda\lambda,\mu,\mu}) - g_{\alpha\alpha}\Gamma_{\mu\mu}^{\alpha}\Gamma_{\lambda\lambda}^{\alpha} + g_{\lambda\lambda}(\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})^2 + g_{\mu\mu}(\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu})^2$$

Y si todos son diferentes  $\mu \neq \nu \neq \lambda \neq \kappa$  entonces  $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$ .

Esta condición nos deja un potencial de  $21 - 6 = 15$  componentes del tensor.

### 1.9.3. Desviación geodésica

Aparte de servir para darnos una idea de si un espacio es curvo o plano ¿qué otra función física tiene el tensor de Riemann per se?

El tensor de Riemann esta relacionado con la **marea gravitacional**. El fenómeno de marea gravitacional se produce cuando en un sistema de referencia en caída libre (que se mueve sobre una geodésica) se observa que partículas dejadas en reposo en el sistema con el tiempo empiezan a separarse unas de otras. La razón de esto es que las geodésicas tienden a diverger.

Imaginemos dos geodésicas vecinas  $x^{\mu}(\lambda)$  y  $y^{\mu}(\lambda)$  y calculemos el intervalo entre ellas:

$$\zeta^{\mu}(\lambda) = y^{\mu}(\lambda) - x^{\mu}(\lambda)$$

¿Cómo evoluciona  $\zeta^{\mu}$ ? Para encontrarlo partimos del hecho de que ambas cumplen con la ecuación geodésica:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2 y^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dy^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dy^{\beta}}{d\lambda} &= 0\end{aligned}$$

Si reemplazamos  $y^{\mu}(\lambda) = x^{\mu}(\lambda) + \zeta^{\mu}(\lambda)$  en su respectiva ecuación geodésica obtenemos:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \frac{d^2 \zeta^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x + \zeta) \left( \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} + \frac{d\zeta^{\alpha}}{d\lambda} \right) \left( \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} + \frac{d\zeta^{\beta}}{d\lambda} \right) = 0$$

Podemos expandir  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x + \zeta)$  usando una serie de Taylor y conservando solo los términos lineales en  $\zeta$ :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x + \zeta) \simeq \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x) + \Gamma_{\alpha\beta,\sigma}^{\mu}(x) \zeta^{\sigma}$$

Reemplazando obtenemos:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \frac{d^2 \zeta^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta,\sigma}^{\mu} \zeta^{\sigma} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{d\zeta^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = 0$$

Restando término a término esta ecuación de la ecuación de la geodésica para  $x^\mu$  obtenemos:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\alpha\beta,\sigma}^\mu \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

Por otro lado tenemos la segunda derivada total covariante de un campo tenso-  
rial (ver Problemas propuestos al final del capítulo):

$$\frac{D^2 A^\mu}{D\lambda^2} = \frac{d^2 A^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta,\nu}^\mu A^\alpha \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dA^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (1.6)$$

$$-\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\kappa\lambda}^\beta A^\alpha \frac{dx^\kappa}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma A^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad (1.7)$$

Si se reemplaza la segunda derivada convencional de la desviación geodésica se obtiene:

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\lambda^2} = -\left(\Gamma_{\beta\alpha,\sigma}^\mu - \Gamma_{\beta\sigma,\alpha}^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\omega \Gamma_{\omega\sigma}^\mu - \Gamma_{\beta\sigma}^\omega \Gamma_{\omega\alpha}^\mu\right) \xi^\sigma \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

donde reconocemos precisamente el tensor de Riemann:

$$\frac{D^2 \xi^\mu}{D\lambda^2} = R_{\alpha\sigma\beta}^\mu \xi^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

A esta última se la llama, la **ecuación de desviación geodésica**.

#### Nota

**Solo hay desviación geodésica en espacio curvo.** La consecuencia más significativa de la ecuación geodésica es probar justamente lo que habíamos intuido. En un espacio plano en el que todas las entradas de  $R_{\alpha\sigma\beta}^\mu$  son cero, no hay desviación geodésica. Es decir dos geodésicas se separaran entre sí a ritmo constante:

$$\frac{D\xi^\mu}{D\lambda} = \text{cte}$$

#### 1.9.4. Tensor de Riemann numérico

Con las reglas simplificadas de más arriba podemos diseñar una rutina para calcular el tensor de Riemann numérico.

```
def GammaRiemann(xmu,gfun,gargs,N=4,dxmax=1e-6,verbose=1):
    from scipy.misc import derivative
    from numpy import zeros,where,arange
    R=zeros((N,N,N,N))
    #Indices
    index=arange(N)
```

[illegible]

```

dx1=max(dxmax,dxmax*abs(x1d))
g=lambda x:gfun(where(index==pi,x,xmu_local),
                  mu,*gargs)
g_pi=derivative(g,x1d,dx1,n=1)
return g_pi
#g_mumu,pi,xi
x2d=xmu[xi] #Punto de derivación
dx2=max(dxmax,dxmax*abs(x2d))
gmumu_pi=lambda x:dgdgpi(where(index==xi,x,xmu))
gmumu_pi_xi=derivative(gmumu_pi,x2d,dx2,n=1)
if verbose:print(f"\t\t\tg_{mu}{mu},{pi},{xi} = {gmumu_pi_xi}")
#Terminos
termino1=-0.5*gmumu_pi_xi
termino2=-gfun(xmu,pi,*gargs)*G[pi,mu,mu]*G[pi,pi,xi]
termino3=-gfun(xmu,xi,*gargs)*G[xi,mu,mu]*G[xi,xi,pi]
termino4=-gfun(xmu,mu,*gargs)*G[mu,mu,pi]*G[mu,mu,xi]
R[pi,mu,mu,xi]=termino1+termino2+termino3+termino4
#print(f"Fillling: {pi},{mu},{mu},{xi}")
R[mu,pi,mu,xi]=-R[pi,mu,mu,xi]
R[mu,pi,xi,mu]=-R[pi,mu,mu,xi]
R[mu,xi,mu,pi]=+R[pi,mu,mu,xi]
R[xi,mu,pi,mu]=-R[pi,mu,mu,xi]
R[mu,xi,pi,mu]=-R[pi,mu,mu,xi]
R[xi,mu,mu,pi]=+R[pi,mu,mu,xi]

return G,R

```

Probemósla con la esfera:

```

from export import g_esfera_2d
from numpy import pi
xmu=[pi/6,0]
R=1
N=2
Gama,Riemann=GammaRiemann(xmu,g_esfera_2d,(R,),N)

G =
[[[-0.    0.   ]
  [ 0.    0.433]]

 [[-0.    -0.577]
  [-0.577 -0.   ]]]
mu = 0
    pi = 1
        xi = 1
            pi = xi
            g_00,1,1 = 0.0
            g_11,0,0 = -1.000088900582341
            g_00 = 1
            G^0_00 = -0.0
            G^0_11 = 0.4330127019169794
            g_11 = 0.7500000000000001
            G^1_00 = -0.0

```

```

G^1_11 = -0.0
Termino 1 = 0.5000444502911705
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.18750000002144285
Termino 4 = 0.0
R_1001 = 0.6875444503126134

mu = 1
pi = 0
xi = 0
pi = xi
g_11,0,0 = -1.000088900582341
g_00,1,1 = 0.0
g_00 = 1
G^0_11 = 0.4330127019169794
G^0_00 = -0.0
g_11 = 0.7500000000000001
G^1_11 = -0.0
G^1_00 = -0.0
Termino 1 = 0.5000444502911705
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.18750000002144285
R_0110 = 0.6875444503126134

```

Riemann

```

Out[37]: array([[[[ 0.   ,  0.   ],
                  [ 0.   ,  0.   ]],

                [[ 0.   , -0.688],
                  [ 0.688,  0.   ]]],

               [[[ 0.   , -0.688],
                  [ 0.688,  0.   ]],

                [[ 0.   ,  0.   ],
                  [ 0.   ,  0.   ]]])

```

Ahora probémoslo con el espacio tiempo plano:

```

from export import g_cilindricas_4d
xmu=[0,2,0,0]
N=4
Gama,Riemann=GammaRiemann(xmu,g_cilindricas_4d,(),N)

```

```

G =
[[[-0.   0.   0.   0. ]
 [ 0.  -0.   0.   0. ]
 [ 0.   0.  -0.   0. ]
 [ 0.   0.   0.  -0. ]]

```

```

[[ 0.  -0.   0.   0. ]
 [-0.   0.  -0.  -0. ]
 [ 0.  -0.  -2.   0. ]
 [ 0.  -0.   0.   0. ]]

[[ 0.   0.  -0.   0. ]
 [ 0.   0.   0.5  0. ]
 [-0.   0.5  0.  -0. ]
 [ 0.   0.  -0.   0. ]]

[[ 0.   0.   0.  -0. ]
 [ 0.   0.   0.  -0. ]
 [ 0.   0.   0.  -0. ]
 [-0.  -0.  -0.   0. ]]
mu = 0

pi = 1
  xi = 1
    pi = xi
    g_00,1,1 = 0.0
    g_11,0,0 = 0.0
    g_00 = 1
    G^0_00 = -0.0
    G^0_11 = -0.0
    g_11 = -1
    G^1_00 = 0.0
    G^1_11 = 0.0
    g_22 = -4
    G^2_00 = 0.0
    G^2_11 = 0.0
    g_33 = -1
    G^3_00 = 0.0
    G^3_11 = 0.0
    Termino 1 = -0.0
    Termino 2 = 0.0
    Termino 3 = 0.0
    Termino 4 = 0.0
    R_1001 = 0.0
  xi = 2
    pi != xi
    g_00,1,2 = 0.0
  xi = 3
    pi != xi
    g_00,1,3 = 0.0
pi = 2
  xi = 1
    pi != xi
    g_00,2,1 = 0.0
  xi = 2
    pi = xi
    g_00,2,2 = 0.0
    g_22,0,0 = 0.0
    g_00 = 1

```

```

G^0_00 = -0.0
G^0_22 = -0.0
g_11 = -1
G^1_00 = 0.0
G^1_22 = -2.000000000002
g_22 = -4
G^2_00 = 0.0
G^2_22 = 0.0
g_33 = -1
G^3_00 = 0.0
G^3_22 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_2002 = 0.0
xi = 3
pi != xi
g_00,2,3 = 0.0
pi = 3
xi = 1
pi != xi
g_00,3,1 = 0.0
xi = 2
pi != xi
g_00,3,2 = 0.0
xi = 3
pi = xi
g_00,3,3 = 0.0
g_33,0,0 = 0.0
g_00 = 1
G^0_00 = -0.0
G^0_33 = -0.0
g_11 = -1
G^1_00 = 0.0
G^1_33 = 0.0
g_22 = -4
G^2_00 = 0.0
G^2_33 = 0.0
g_33 = -1
G^3_00 = 0.0
G^3_33 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_3003 = 0.0
mu = 1
pi = 0
xi = 0
pi = xi
g_11,0,0 = 0.0

```

```

g_00,1,1 = 0.0
    g_00 = 1
    G^0_11 = -0.0
    G^0_00 = -0.0
    g_11 = -1
    G^1_11 = 0.0
    G^1_00 = 0.0
    g_22 = -4
    G^2_11 = 0.0
    G^2_00 = 0.0
    g_33 = -1
    G^3_11 = 0.0
    G^3_00 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_0110 = 0.0
xi = 2
    pi != xi
    g_11,0,2 = 0.0
xi = 3
    pi != xi
    g_11,0,3 = 0.0
pi = 2
xi = 0
    pi != xi
    g_11,2,0 = 0.0
xi = 2
    pi = xi
    g_11,2,2 = 0.0
    g_22,1,1 = -1.999733711954832
    g_00 = 1
    G^0_11 = -0.0
    G^0_22 = -0.0
    g_11 = -1
    G^1_11 = 0.0
    G^1_22 = -2.00000000000002
    g_22 = -4
    G^2_11 = 0.0
    G^2_22 = 0.0
    g_33 = -1
    G^3_11 = 0.0
    G^3_22 = 0.0
Termino 1 = 0.999866855977416
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 4.0000000000008001
Termino 4 = 0.0
R_2112 = 4.999866855985417
xi = 3
    pi != xi
    g_11,2,3 = 0.0

```



```

pi = 3
  xi = 0
    pi != xi
    g_11,3,0 = 0.0
  xi = 2
    pi != xi
    g_11,3,2 = 0.0
  xi = 3
    pi = xi
    g_11,3,3 = 0.0
    g_33,1,1 = 0.0
      g_00 = 1
      G^0_11 = -0.0
      G^0_33 = -0.0
      g_11 = -1
      G^1_11 = 0.0
      G^1_33 = 0.0
      g_22 = -4
      G^2_11 = 0.0
      G^2_33 = 0.0
      g_33 = -1
      G^3_11 = 0.0
      G^3_33 = 0.0
    Termino 1 = -0.0
    Termino 2 = 0.0
    Termino 3 = 0.0
    Termino 4 = 0.0
    R_3113 = 0.0
mu = 2
  pi = 0
    xi = 0
      pi = xi
      g_22,0,0 = 0.0
      g_00,2,2 = 0.0
        g_00 = 1
        G^0_22 = -0.0
        G^0_00 = -0.0
        g_11 = -1
        G^1_22 = -2.00000000000002
        G^1_00 = 0.0
        g_22 = -4
        G^2_22 = 0.0
        G^2_00 = 0.0
        g_33 = -1
        G^3_22 = 0.0
        G^3_00 = 0.0
      Termino 1 = -0.0
      Termino 2 = 0.0
      Termino 3 = 0.0
      Termino 4 = 0.0
      R_0220 = 0.0
    xi = 1

```

```

                pi != xi
                g_22,0,1 = 0.0
    xi = 3
                pi != xi
                g_22,0,3 = 0.0
pi = 1
    xi = 0
                pi != xi
                g_22,1,0 = 0.0
    xi = 1
                pi = xi
                g_22,1,1 = -1.999733711954832
                g_11,2,2 = 0.0
                g_00 = 1
                G^0_22 = -0.0
                G^0_11 = -0.0
                g_11 = -1
                G^1_22 = -2.00000000000002
                G^1_11 = 0.0
                g_22 = -4
                G^2_22 = 0.0
                G^2_11 = 0.0
                g_33 = -1
                G^3_22 = 0.0
                G^3_11 = 0.0
                Termino 1 = 0.999866855977416
                Termino 2 = 0.0
                Termino 3 = 0.0
                Termino 4 = 4.0000000000008001
                R_1221 = 4.999866855985417
    xi = 3
                pi != xi
                g_22,1,3 = 0.0
pi = 3
    xi = 0
                pi != xi
                g_22,3,0 = 0.0
    xi = 1
                pi != xi
                g_22,3,1 = 0.0
    xi = 3
                pi = xi
                g_22,3,3 = 0.0
                g_33,2,2 = 0.0
                g_00 = 1
                G^0_22 = -0.0
                G^0_33 = -0.0
                g_11 = -1
                G^1_22 = -2.00000000000002
                G^1_33 = 0.0
                g_22 = -4
                G^2_22 = 0.0

```

```

G^2_33 = 0.0
g_33 = -1
G^3_22 = 0.0
G^3_33 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_3223 = 0.0

mu = 3
pi = 0
xi = 0
pi = xi
g_33,0,0 = 0.0
g_00,3,3 = 0.0
g_00 = 1
G^0_33 = -0.0
G^0_00 = -0.0
g_11 = -1
G^1_33 = 0.0
G^1_00 = 0.0
g_22 = -4
G^2_33 = 0.0
G^2_00 = 0.0
g_33 = -1
G^3_33 = 0.0
G^3_00 = 0.0
Termino 1 = -0.0
Termino 2 = 0.0
Termino 3 = 0.0
Termino 4 = 0.0
R_0330 = 0.0

xi = 1
pi != xi
g_33,0,1 = 0.0

xi = 2
pi != xi
g_33,0,2 = 0.0

pi = 1
xi = 0
pi != xi
g_33,1,0 = 0.0

xi = 1
pi = xi
g_33,1,1 = 0.0
g_11,3,3 = 0.0
g_00 = 1
G^0_33 = -0.0
G^0_11 = -0.0
g_11 = -1
G^1_33 = 0.0
G^1_11 = 0.0

```

```

        g_22 = -4
        G^2_33 = 0.0
        G^2_11 = 0.0
        g_33 = -1
        G^3_33 = 0.0
        G^3_11 = 0.0
        Termino 1 = -0.0
        Termino 2 = 0.0
        Termino 3 = 0.0
        Termino 4 = 0.0
        R_1331 = 0.0
    xi = 2
        pi != xi
        g_33,1,2 = 0.0
pi = 2
    xi = 0
        pi != xi
        g_33,2,0 = 0.0
    xi = 1
        pi != xi
        g_33,2,1 = 0.0
    xi = 2
        pi = xi
        g_33,2,2 = 0.0
        g_22,3,3 = 0.0
        g_00 = 1
        G^0_33 = -0.0
        G^0_22 = -0.0
        g_11 = -1
        G^1_33 = 0.0
        G^1_22 = -2.00000000000002
        g_22 = -4
        G^2_33 = 0.0
        G^2_22 = 0.0
        g_33 = -1
        G^3_33 = 0.0
        G^3_22 = 0.0
        Termino 1 = -0.0
        Termino 2 = 0.0
        Termino 3 = 0.0
        Termino 4 = 0.0
        R_2332 = 0.0

```

Todos los términos del tensor de Riemann en este caso deberían dar cero:

Riemann

```

Out[39]: array([[[[ 0.,  0.,  0.,  0.],
                  [ 0.,  0.,  0.,  0.],
                  [ 0.,  0.,  0.,  0.],
                  [ 0.,  0.,  0.,  0.]],
                [[ 0., -0.,  0., -0.],

```

$$\begin{bmatrix} 0., & 0., & 0., & 0.], \\ [-0., & -0., & 0., & 0.], \\ [0., & -0., & 0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & -0., & -0., & -0.], \\ [-0., & 0., & -0., & 0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.], \\ [0., & 0., & -0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & 0., & 0., & -0.], \\ [0., & 0., & 0., & -0.], \\ [0., & 0., & 0., & -0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & -0., & 0., & -0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.], \\ [-0., & -0., & 0., & 0.], \\ [0., & -0., & 0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & 0., & 0., & 0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & -0., & -0., & 0.], \\ [-0., & 0., & -5., & 0.], \\ [0., & 5., & 0., & 0.], \\ [0., & -0., & -0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & -0., & 0., & -0.], \\ [-0., & 0., & -0., & -0.], \\ [0., & -0., & 0., & -0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & 0., & -0., & -0.], \\ [-0., & 0., & -0., & 0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.], \\ [0., & 0., & -0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & -0., & -0., & 0.], \\ [0., & 0., & -5., & 0.], \\ [-0., & 5., & 0., & 0.], \\ [0., & -0., & -0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0., & 0., & 0., & 0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.], \\ [0., & 0., & 0., & 0.]]], \end{bmatrix}$$

$$[[0., & 0., & -0., & -0.],$$

```
[ 0., 0., -0., -0.],
[-0., -0., 0., -0.],
[ 0., 0., 0., 0.]]],
```

```
[[[ 0., -0., -0., -0.],
[ 0., 0., 0., -0.],
[ 0., 0., 0., -0.],
[ 0., 0., 0., 0.]],
```

```
[[ 0., -0., 0., -0.],
[ 0., 0., 0., -0.],
[ 0., -0., 0., -0.],
[-0., 0., 0., 0.]],
```

```
[[ 0., 0., -0., -0.],
[ 0., 0., -0., -0.],
[ 0., 0., 0., -0.],
[-0., -0., 0., 0.]],
```

```
[[ 0., 0., 0., 0.],
[ 0., 0., 0., 0.],
[ 0., 0., 0., 0.],
[ 0., 0., 0., 0.]]])
```

### 1.9.5. Desviación geodésica numérica

Podemos poner a prueba los conceptos vistos en esta sección usando la desviación geodésica.

Tomemos el caso de la métrica de Newton:

Usemos las mismas condiciones iniciales que habíamos visto:

```
#Constantes
c=3e8 # m/s
G=6.67e-11 # m^3 kg^-1 s^-2

#Propiedades del planeta
Mp=5.98e24 # kg
Rp=6.371e6 # m
gp=G*Mp/Rp**2
R=2*G*Mp/c**2

#Altura y velocidad
h=100.0 # m
v=10000.0 # m/s
from numpy import sqrt
T=sqrt(2*h/gp)

#Tiempo de integración
from numpy import pi,linspace
ss=linspace(0,T,30)
```

Pero vamos a estudiar lo que pasa sobre dos geodésicas vecinas

```
#Condiciones iniciales
from numpy import array,pi
Y1_0s=array([0.0,(Rp+h)/c,pi/2,pi/2,
              1,0,0,-0*v/Rp])

Y2_0s=array([0.0,(Rp+h+0.1)/c,pi/2,pi/2,
              1,0,0,-0*v/Rp])
```

Resolvamos las ecuaciones geodésicas:

```
from scipy.integrate import odeint
from export import ecuacion_geodesica,g_newtoniana_4d
N=4
Y1s=odeint(ecuacion_geodesica,Y1_0s,ss,args=(g_newtoniana_4d,(R/c,),N))
Y2s=odeint(ecuacion_geodesica,Y2_0s,ss,args=(g_newtoniana_4d,(R/c,),N))
```

Grafiquemos:

(Algoritmo 1.5)

```
#Convierte solución en coordenadas esféricas
from numpy import sin,cos
#Geodésica 1
t1s=Y1s[:,0]
r1s=Y1s[:,1]
q1s=Y1s[:,2]
f1s=Y1s[:,3]
x1s=r1s*sin(q1s)*cos(f1s)
y1s=r1s*sin(q1s)*sin(f1s)
z1s=r1s*cos(q1s)
#Geodésica 2
t2s=Y2s[:,0]
r2s=Y2s[:,1]
q2s=Y2s[:,2]
f2s=Y2s[:,3]
x2s=r2s*sin(q2s)*cos(f2s)
y2s=r2s*sin(q2s)*sin(f2s)
z2s=r2s*cos(q2s)

#Desviación geodésica
xi_x=x1s-x2s
xi_y=y1s-y2s
xi_z=z1s-z2s

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig,axs=plt.subplots(1,2,figsize=(10,5))
axs[0].plot(ss,c*xi_x)
axs[0].set_xlabel(r"$\tau$")
```

```

axs[0].set_ylabel(r"\xi_x\$")
axs[1].plot(ss,c*xi_y)
axs[1].set_xlabel(r"\tau\$")
axs[1].set_ylabel(r"\xi_y\$")
fig.tight_layout()

```

ver Figura 1.11

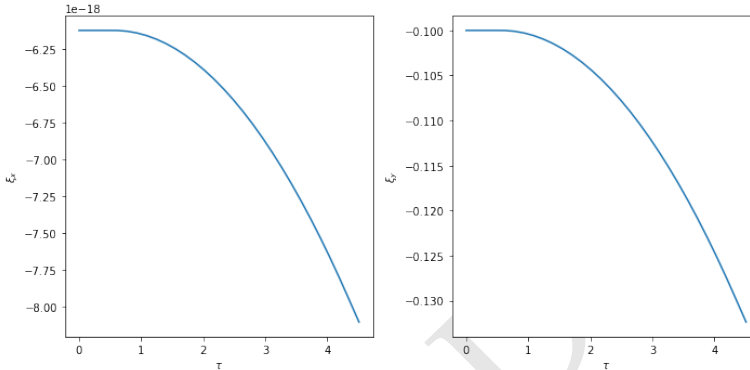


Figura 1.11: Figura correspondiente al código 1.5.

## 1.10. Principio de consistencia

Hasta ahora hemos desarrollado una teoría del movimiento de la materia bajo métricas distintas a la métrica de Minkowski. En secciones anteriores descubrimos que es posible describir los efectos del movimiento en un campo gravitacional débil como movimiento inercial en una métrica simple que llamamos la métrica de Newton. Esta idea, además del principio de equivalencia, nos permite conjeturar que la gravedad es un fenómeno geométrico. Que la presencia de materia tiene un efecto sobre el espacio-tiempo que implica el cambio de la métrica de Minkowski a métricas diferentes.

Pero ¿cómo determina la materia el valor de la métrica? ¿cuáles son las ecuaciones que conectan esas dos cosas?

La teoría general de la relatividad ha resultado ser, sin proponerlo en este desarrollo una teoría de los fenómenos gravitacionales. Nos proponemos en las siguientes secciones desarrollar los elementos centrales de esta teoría partiendo de los conceptos geométricos que hemos visto hasta ahora.

Cualquiera sea la respuesta a la anterior pregunta es necesario que la teoría que desarrollemos prediga, en el límite de curvatura muy pequeña las mismas cosas que veíamos en el caso de la relatividad especial y en la teoría gravitacional de Newton. Esta coincidencia la elevaremos a la altura de un principio:



**Principio 1.1**

**Principio de consistencia.** Cualquier teoría del espacio-tiempo y la manera como sus propiedades son determinadas por la masa-energía y como esas propiedades determinan el movimiento de la materia, debe predecir en el límite de curvatura cercana a cero:

1. Las mismas cosas que predecimos con la teoría de la gravedad Newtoniana.
2. Las mismas cosas que predecimos con la teoría especial de la relatividad.

## 1.11. Una ecuación de campo general

La teoría gravitacional newtoniana se formula normalmente en términos de fuerzas. Para lo que nos proponemos hacer aquí debemos formularla como una teoría de campos, de manera análoga a como lo hicimos con la electrodinámica.

Ya habíamos recordado antes que es posible escribir la aceleración gravitacional producida por un cuerpo puntual como :

$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

Podemos definir, como lo hacemos en la teoría electromagnética, el flujo de campo gravitacional como:

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S}$$

En el caso de una partícula puntual o una distribución esférica de materia:

$$\Phi = 4\pi r^2 g$$

donde  $R$  es la distancia al centro de la distribución esférica de materia y  $g$  es campo gravitacional, constante en este caso a una distancia  $r$  del centro.

En este caso:

$$\Phi = -4\pi G m_r$$

donde  $m_r$  es la cantidad de masa contenida dentro de  $r$

Sabiendo que:

$$m_r = \int_V \rho dV$$

E igualando queda:

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \int_V \rho dV$$

Dado que  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi$  independientemente de la distribución de materia, y aplicando el teorema de la divergencia concluimos que:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_0$$

Esta ecuación, que llamamos **la ecuación de Poisson** para el campo gravitacional aplica en general para calcular el potencial gravitacional  $\phi(\vec{r})$  en un punto arbitrario del espacio, dada cualquier distribución de materia con densidad propia  $\rho_0(\vec{r})$ .

Usando la notación que hemos venido utilizando en el curso, la ecuación de Poisson se puede escribir como:

$$\partial_i \partial^i \phi = 4\pi G \rho_0$$

En un espacio  $\partial^i = \partial_i$  esta ecuación se puede escribir también como:

$$\phi_{,i,i} = 4\pi G \rho_0$$

donde hay una suma sobre los índices repetidos que no se representa aquí.

Si queremos construir una teoría consistente con la gravedad Newtoniana, esa teoría debe conducir a una ecuación similar a la anterior.

En secciones anteriores habíamos visto que el potencial gravitacional de un campo débil estaba relacionado con las componentes de la métrica:

$$1 + \frac{2\phi}{c^2} = g_{00}$$

Si queremos deducir ecuaciones que describan la gravedad en relatividad y que sean consistentes con las ecuaciones de la gravedad de Newton debemos encontrar una ecuación que sea similar a la ecuación de Poisson pero involucrando la métrica. Derivando dos veces la ecuación anterior, obtenemos:

$$\phi_{,i,i} = \frac{1}{2} g_{00,i,i} c^2$$

Reemplazando en la ecuación de Poisson:

$$\frac{1}{2} g_{00,i,i} c^2 = 4\pi G \rho_0$$

O en términos de la derivada:

$$g_{00,i,i} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0$$

En el lado derecho de esta ecuación aparece la cantidad de materia medida en términos de la densidad de masa. Pero en realidad, para ser consistentes con la relatividad, deberíamos tener la densidad de energía. De modo que la ecuación es:

$$g_{00,i,i} = \frac{8\pi G}{c^4} (\rho_0 c^2)$$

Esta ecuación nos da el molde básico al cual la ecuación de general que tenemos que deducir. Esta ecuación naturalmente no debería contener solo el coeficiente métrico correspondiente al tiempo y podría contener combinaciones complejas de las segundas derivadas. Podemos conjeturar que se escribe así:

$$\mathcal{G}(g_{\mu\nu,\alpha,\alpha}) \equiv \mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} E_{\mu\nu}$$

o de forma más compacta:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} E_{\mu\nu}$$

Llamaremos a esta **la ecuación de campo general**.

Donde la función tensorial  $\mathcal{G}(g_{\mu\nu,\alpha,\alpha}) \equiv \mathcal{G}_{\mu\nu}$ , es una *función lineal* de las segundas derivadas de la métrica (contraídas) y el tensor general  $E_{\mu\nu}$  contiene la densidad de energía. En el límite de campo débil:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{00} &= g_{00,i,i} \\ E_{00} &= \rho_0 c^2 \end{aligned}$$

La tarea que nos proponemos es encontrar los tensores  $G_{\mu\nu}$  y  $E_{\mu\nu}$  tal que la ecuación derivada de forma heurística aquí sea consistente físicamente. Lo único que sabemos por ahora es que si las cantidades a la izquierda y a la derecha de la ecuación son *cantidades tensoriales* entonces esta ecuación cumplirá además con el principio de covariancia general.

## 1.12. Tensor de momentum-energía

Cómo construir una cantidad tensorial  $E_{\mu\nu}$  que involucre todas las posibles fuentes de energía que existen en una región del espacio-tiempo dado, tal que:

$$E_{00} = \rho c^2$$

Cualquiera sea la cantidad que construyamos debemos satisfacer el principio de conservación de la energía: dada una región del espacio-tiempo donde hay masa-energía en movimiento, la cantidad de masa-energía debe conservarse.

Ya habíamos visto en la electrodinámica que la conservación de la carga se expresa en la forma de la ecuación de continuidad:

$$J_{,\mu}^{\mu} = 0$$

donde

$$J^{\mu} = \rho \frac{dx^{\mu}}{dt}$$

donde  $dx^{\mu}/dt$  es la velocidad de un elemento de volumen de fluido alrededor del evento en el que la densidad carga es  $\rho(x^{\nu})$ .

Si tenemos un sistema formado por partículas puntuales (masa constante), la conservación de la masa se expresa de forma similar. ¿Cómo generalizar este principio de continuidad a sistemas mecánicos mucho más generales?

Una primera idea sería la de definir una corriente más general:

$$J_q^{\mu} \equiv q \frac{dx^{\mu}}{dt}$$

donde  $q$  es la densidad una cantidad física que asumimos conservada.

La ecuación de continuidad de la electrodinámica será entonces aquella que corresponde a la conservación de la carga:

$$J_{\rho_q, \mu}^{\mu} = 0$$

donde  $Q = \rho_q$  es la densidad de carga eléctrica, mientras que la conservación de la masa será:

$$J_{\rho_m, \mu}^{\mu} = 0$$

donde  $Q = \rho_m c^2$  es la densidad de masa.

Pero en mecánica conocemos otras cantidades conservadas, por ejemplo, en ausencia de fuerzas y torques, en una nube de partículas el momentum lineal y angular se conservan. De modo que podemos definir las corrientes de estas cantidades.

Por ejemplo, la densidad de momentum se puede definir como:

$$J^{\mu}_{\pi_i} = \pi_i \frac{dx^{\mu}}{dt}$$

donde es importante anotar que  $\pi_i$  no es el momentum convencional, sino su densidad (momentum total por unidad de volumen). Esta cantidad sin embargo no es una cantidad muy apropiada para la relatividad puesto que involucra cantidades vectoriales y tensoriales. Definamos de forma más general la **densidad de flujo de cuadrimentum**:

$$T^{\mu\nu} \equiv J^{\nu}_{\pi^{\mu}} \equiv \pi^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{dt}$$

donde  $\pi^{\mu}(x^{\alpha})$  es la densidad de cuadrimentum en el evento  $x^{\alpha}$  (cuadrimentum total de un elemento de volumen por unidad de volumen).

Esta cantidad recibe, de forma más conveniente, el nombre de **tensor de momentum-energía** y es la cantidad tensorial que estamos buscando para nuestra ecuación de campo general, como demostraremos enseguida.

### 1.12.1. Tensor de momentum-energía para una nube de partículas

Para entender mejor lo que es el tensor momentum energía, podemos calcularlo en algunos casos conocidos. El mejor es el de una **nube de partículas no interactuantes**.

Cada partícula en la nube tiene masa idéntica  $m$ . La densidad de número de partículas es  $n$ . La velocidad de las partículas en un entorno infinitesimal alrededor de un evento  $x^{\alpha}$  se considera idéntica e igual a  $U^{\mu}(x^{\alpha})$  y cada partícula tendrá por tanto un cuadrimentum  $P^{\mu}(x^{\alpha}) = mU^{\mu}(x^{\alpha})$ .

En estas condiciones la densidad de momentum en la dirección espacial  $\mu$  se puede escribir como:

$$\pi^{\mu}(x^{\alpha}) = nmU^{\mu}(x^{\alpha}) = \rho U^{\mu}(x^{\alpha})$$

De allí que el tensor de momentum energía será:

$$T_{\text{nube}}^{\mu\nu}(x^\alpha) = \frac{\rho}{\gamma_v} U^\mu(x^\alpha) U^\nu(x^\alpha) = \rho_0 U^\mu(x^\alpha) U^\nu(x^\alpha)$$

donde hemos usado el hecho:

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\gamma_v} U^\mu$$

y hemos reconocido que

$$\rho = nm = (\gamma_v n_0)m$$

donde  $n_0$  es la densidad de número propia en el punto  $x^\alpha$  en la que las partículas tienen velocidad  $\vec{v}(x^\alpha)$ .

En síntesis podemos decir que el tensor momentum-energía para una nube de partículas no interactuantes será:

$$T_{\text{nube}}^{\mu\nu} = \rho_0 U^\mu U^\nu$$

Otra manera de escribirlo y como se encuentra comunmente en la literatura es:

$$T_{\text{nube}}^{\mu\nu} = n \left( \frac{P^\mu P^\nu}{E/c^2} \right)$$

donde  $E = \gamma mc^2$ .

Una componente de interés es la componente temporal que será:

$$T_{\text{nube}}^{00} = \rho_0 U^0 U^0 = n_0 m \gamma^2 c^2 = (\gamma n_0)(\gamma mc^2) \equiv \varepsilon$$

donde  $\varepsilon \equiv n(\gamma mc^2)$  es la densidad de energía.

También podemos escribir como:

$$T_{\text{nube}}^{00} = \gamma \rho c^2$$

donde  $\rho = nm$ .

Podemos finalmente escribir explícitamente las componentes del tensor momentum energía:

$$T_{\text{nube}}^{\mu\nu} = \gamma \rho c^2 \begin{pmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & v_x^2/c^2 & v_x v_y/c^2 & v_x v_z/c^2 \\ v_y/c & v_x v_y/c^2 & v_y^2/c^2 & v_y v_z/c^2 \\ v_z/c & v_x v_z/c^2 & v_y v_z/c^2 & v_z^2/c^2 \end{pmatrix}$$

### 1.12.2. Tensor de momentum-energía para polvo

Si la nube de partículas se mueve con velocidad muy pequeña comparada con la velocidad de la luz el tensor será:

$$T_{\text{polvo}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Llamamos a esta situación polvo porque las partículas se mueven lentamente posiblemente debido a que son macroscópicas (galaxias, granos sólidos de polvo, estrellas, etc.)

### 1.12.3. Tensor $T^{\mu\nu}$ y el tensor de esfuerzos $\sigma^{\mu\nu}$

El tensor de momentum-energía tiene relación con un tensor clásico, el **tensor de esfuerzos de Cauchy**, que también miden el flujo de momentum.

Sabemos que la componente  $i$  fuerza que actúa sobre un elemento de volumen es  $F^i = dp^i/dt$ , por tanto la fuerza por unidad de área o tracción  $\sigma^i$  medida en la dirección de la superficie en dirección  $\hat{e}_j$  será:

$$\sigma_j^i \equiv \frac{dF^i}{dA^j} = \frac{d^2p^i}{dt dA^j}$$

que es justo lo que llamamos el flujo de momentum espacial  $p^i$  a través del área  $A^j$ .

El tensor de esfuerzos en un medio elástico se puede escribir como:

$$\sigma_j^i = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

donde  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  se conocen como los resfuerzos normales y  $\tau_{ij}$  se conocen como los esfuerzos cortantes.

Con esta definición podemos escribir el tensor de momentum energía mecánico como:

$$T_{\text{mec}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{01} & \sigma^{11} & \sigma^{12} & \sigma^{13} \\ T^{02} & \sigma^{12} & \sigma^{22} & \sigma^{23} \\ T^{03} & \sigma^{13} & \sigma^{12} & \sigma^{33} \end{pmatrix}$$

### 1.12.4. Tensor de momentum-energía para fluido perfecto

Para un fluido perfecto (no viscosidad, es decir no hay esfuerzos cortantes) en equilibrio hidrodinámico, el tensor de esfuerzos adopta la forma:

$$\sigma_j^i = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

donde  $p$  es la presión en el fluido.

El tensor de esfuerzos contravariante será:

$$\sigma^{ij} = g^{ik} \sigma_k^j = \begin{pmatrix} -g^{11}p & 0 & 0 \\ 0 & -g^{22}p & 0 \\ 0 & 0 & -g^{33}p \end{pmatrix}$$

Si nos paramos en el sistema de referencia del fluido entonces  $T^{00} = \rho_0 c^2$  y  $T^{0i} = 0$  el tensor momentum-energía será:

$$T_{\text{perfecto}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_0 c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g^{11}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g^{22}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^{33}p \end{pmatrix}$$

Si ahora observamos el fluido desde un sistema de referencia que se mueve con velocidad  $\vec{u}$  debemos transformar el tensor de acuerdo con las reglas de transformación generales correspondientes a la métrica  $g_{\mu\nu}$ :

$$T_{\text{perfecto}}^{\mu'v'} = \mathcal{G}_{\mu'}^{\mu} \mathcal{G}_{v'}^{\nu} T_{\text{perfecto}}^{\mu\nu}$$

Un tedioso cálculo algebraico produce como resultado:

$$T_{\text{perfecto}}^{\mu\nu} = \left( \rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) U^{\mu} U^{\nu} - p g^{\mu\nu}$$

#### 1.12.5. La conservación de $T^{\mu\nu}$ y la ecuación geodésica

Recordemos que una de las razones por las que dedujimos el tensor de momentum-energía era pensando justamente en que este tuviera la propiedad de conservación de otras corrientes, a saber:

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$$

donde hemos escrito en lugar de la derivada “,” de la ley de conservación de la cuadricorriente, la derivada covariante “;” de la relatividad general.

Es posible partiendo del tensor momentum-energía de una nube de partículas probar que la condición anterior solo se cumple si las partículas de la nube se mueven siguiendo geodésicas (ver Lorenzo, página 295-297):

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\sigma^2} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\sigma} \frac{dx^{\gamma}}{d\sigma} = 0$$

Es posible mostrar que la ecuación de conservación se puede escribir también como:

$$T_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$$

### 1.13. La ecuación de campo métrico

Tenemos ya todos los elementos para encontrar la ecuación general que conecta el flujo de momentum y energía con la curvatura del espacio tiempo.

Hasta ahora hemos reunido las condiciones que requería el lado derecho de la ecuación general de campo que cumple el principio de consistencia.

$$\mathcal{G}(g_{\mu\nu,\alpha,\alpha}) \equiv \mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} E_{\mu\nu}$$

Construimos una cantidad que cumple la función de  $E_{\mu\nu}$ , el tensor momentum energía:

$$E_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\alpha\beta}$$

que cumple la condición de que en campo débil:

$$E_{00} = \rho_0 c^2$$

De este modo la ecuación general queda:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Esta cantidad satisface un principio de conservación:

$$T_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$$

Ahora debemos trabajar para obtener el tensor  $\mathcal{G}_{\mu\nu}$  en el lado que sea una función lineal del D'Alambertiano de la métrica.

El principio de conservación del momentum y la energía exigen que se cumpla la condición:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$$

### 1.13.1. El tensor de Einstein

Conocemos un tensor que depende de la segunda derivada de la métrica, el tensor de Riemann:

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\kappa} = g^{\alpha\lambda}R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}g_{\{\mu\nu,\lambda,\kappa\}} - g^{\alpha\lambda}g_{\alpha\beta}(\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\beta} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\alpha}\Gamma_{\lambda\nu}^{\beta})$$

Un tensor que contiene el D'Alambertiano de la métrica  $g_{\mu\nu,\alpha,\alpha}$  resulta de contraer todas las componentes con igual índices  $\alpha$  y  $\kappa$ :

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha} = g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\mu\nu\alpha} = R_{\mu\nu}(g_{\mu\nu,\alpha,\alpha})$$

llamamos a este el **tensor de Ricci**.

#### Nota

**Simetría y componentes del tensor de Ricci.** El tensor de Ricci será muy importante en lo sucesivo. Por las propiedades del tensor de Riemann se puede probar que el tensor de Ricci es simétrico:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

esto implica que solo tiene 10 componentes independientes.

La derivada covariante de este tensor cumple tiene una interesante propiedad. Comencemos con la identidad de Bianchi:

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\mu\nu;\sigma]} = 0 \quad R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu;\sigma} + R^{\alpha}{}_{\beta\nu\sigma;\mu} + R^{\alpha}{}_{\beta\sigma\mu;\nu} = 0$$



Si tomamos todos los términos con  $\alpha = \nu$  y sumamos las identidades correspondientes obtenemos:

$$R_{\beta\mu;\sigma} - R_{\beta\sigma;\mu} + R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu;\alpha} = 0$$

Si multiplicamos por  $g^{\beta\mu}$  y sumamos sobre todos los  $\mu$  y todos los  $\beta$  obtenemos:

$$g^{\beta\mu} R_{\beta\mu;\sigma} - g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} + g^{\beta\mu} R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu;\alpha} = 0$$

Definiendo:

$$R \equiv g^{\beta\mu} R_{\beta\mu}$$

como el **escalar de curvatura**, la anterior ecuación nos queda:

$$R_{;\sigma} - g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} + g^{\beta\mu} R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu;\alpha} = 0$$

El tensor de Riemann en el último término se puede escribir como  $R^{\alpha}_{\beta\sigma\mu} = g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\beta\sigma\mu}$  de modo que la ecuación queda:

$$R_{;\sigma} - g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} + g^{\beta\mu} g^{\alpha\lambda} R_{\lambda\beta\sigma\mu;\alpha} = 0$$

Por definición del tensor de Ricci:

$$g^{\beta\mu} R_{\beta\lambda\sigma\mu} = R_{\lambda\sigma}$$

de donde la ecuación se puede escribir como:

$$R_{;\sigma} - g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} - g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\sigma;\alpha} = 0$$

Aquí se puede ver que los dos últimos términos son idénticos (se pueden poner los índices mudos iguales:

$$R_{;\sigma} - 2g^{\beta\mu} R_{\beta\sigma;\mu} = 0$$

Que se puede escribir como:

$$R_{\beta\sigma}{}^{;\beta} - \frac{1}{2} R_{;\sigma} = 0$$

o como

$$\left( R_{\beta\sigma} - \frac{1}{2} g_{\beta\sigma} R \right)^{;\beta} = 0$$

Si definimos el vector:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

que llamaremos, el **tensor de Einstein**, la identidad de Bianchi contraída resulta ser:

$$G_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$$

**Nota**

**El signo de tensor de Einstein.** Nótese que existe una libertad en la manera en la que elegimos el signo del tensor de Einstein que no afecta sus propiedades.

### 1.13.2. Una ecuación de campo general

Es posible demostrar que los únicos tensores de rango dos que son funciones lineales del D'Alambertiano de la métrica y que al mismo tiempo satisfacen la condición:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$$

se pueden escribir como:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = kG_{\mu\nu}$$

donde  $k$  es una constante.

De allí que la ecuación más general que describe la relación entre el flujo de momentum y energía y el D'Alambertiano de la métrica será:

$$k(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

o bien,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{kc^4} T_{\mu\nu}$$

Por la simetría el tensor de Ricci esta corresponde a 10 ecuaciones.

Nos restaría por determinar el valor de las constantes  $a$ .

Una propiedad interesante resulta al contraer los índices:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{kc^4} g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

Teniendo en cuenta que  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$  y llamando  $T^\mu_\mu = T$ :

$$R = -\frac{8\pi G}{kc^4} T$$

Reemplazando en la ecuación de campo queda:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{kc^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

que es una versión alternativa de la ecuación.

### 1.13.3. La ecuación de campo y el principio de consistencia

Ahora que tenemos una ecuación candidata volvamos al principio de consistencia.

Volvamos a comenzar con la métrica de campo débil:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

donde  $h_{\mu\nu} \ll 1$ .

Si escribimos la inversa de la métrica como:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + b^{\mu\nu}$$

Puede probarse (ver Problemas al final del capítulo) que:

$$b^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}$$

Los símbolos de Christoffel serán:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (h_{\rho\mu,\nu} + h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu})$$

El tensor de Riemann:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\delta} \Gamma_{\nu\delta}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\delta} \Gamma_{\mu\delta}^{\rho}$$

Dado que los símbolos de Christoffel son proporcionales a  $h_{\mu\nu}$  los términos  $\Gamma^2 \sim \mathcal{O}(h^2)$ , de modo que el tensor de Riemann es:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} \approx \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^{\rho}$$

Alternativamente:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda\kappa} - g_{\nu\lambda,\kappa\mu} + g_{\lambda\kappa,\mu\nu} - g_{\kappa\mu,\nu\lambda}) + g_{\sigma\zeta} (\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \Gamma_{\lambda\nu}^{\zeta} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\lambda\kappa}^{\zeta})$$

Eliminando los términos cuadráticos en  $h$ , el tensor de Riemann queda:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx -\frac{1}{2} (h_{\mu\nu,\lambda\kappa} - h_{\nu\lambda,\kappa\mu} + h_{\lambda\kappa,\mu\nu} - h_{\kappa\mu,\nu\lambda})$$

Por definición el tensor de Ricci es:

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha} \approx \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha}$$

O en términos de las derivadas de la métrica:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\mu\nu\alpha} \approx -\frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} (h_{\mu\nu,\lambda\alpha} - h_{\nu\lambda,\alpha\mu} + h_{\lambda\alpha,\mu\nu} - h_{\alpha\mu,\nu\lambda})$$

Finalmente el tensor métrico:

$$T_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}T^{\alpha\beta} \approx (\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} + \eta_{\alpha\mu}h_{\beta\nu} + h_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu})T^{\alpha\beta} \quad (1.8)$$

$$(1.9)$$

Para aplicar el principio de consistencia asumamos que tenemos una nube de polvo,  $T^{00} = \text{diag}(\rho_0 c^2, 0, 0, 0)$  y la métrica de Newton,  $h_{00} = 2\Phi/c^2$ ,  $h_{ij} = h_{i0} = 0$ . Tomemos la ecuación 00:

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{kc^4} \left( T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right)$$

La componente  $T_{00}$  será:

$$T_{00} = g_{0\mu}g_{0\nu}T^{\mu\nu} \approx (g_{00})^2 T^{00}$$

La traza de  $T$  sera:

$$T = T^\mu_\mu = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = g_{00}T^{00}$$

Por otro lado el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ :

$$R_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}(h_{\mu\nu,\alpha,\alpha} - h_{\nu\alpha,\alpha,\mu} + h_{\alpha\alpha,\mu,\nu} - h_{\alpha\mu,\nu,\alpha})$$

Como la métrica es estática, las únicas componentes no nulas del tensor son:

$$R_{00} \approx -\frac{1}{2}\eta^{ij}h_{00,i,j} = \frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

Reemplazando en la ecuación tenemos:

$$\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi = \frac{8\pi G}{kc^4} \left[ (g_{00})^2\rho_0 c^2 - \frac{1}{2}(g_{00})^2\rho_0 c^2 \right]$$

Haciendo  $(g_{00})^2 = (1 + 2\Phi/c^2)^2 \approx 1$ , la ecuación queda finalmente como:

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi G}{k}\rho_0$$

que es justamente la ecuación de Poisson si  $k = 1$ .

La conclusión de aplicar el principio de consistencia es que una ecuación de campo general es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

o más convenientemente:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

### 1.13.4. La ecuación de campo débil para fluido perfecto

Para un fluido perfecto  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho_0 c^2, p, p, p)$  donde  $p$  es la presión. En la aproximación de campo débil la traza del tensor de momentum energía es:

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \approx T^{00} - T^{11} - T^{22} - T^{33} = \rho_0 c^2 - 3p$$

Por otro lado:

$$T_{00} = g_{0\mu} g_{0\nu} T^{\mu\nu} \approx (g_{00})^2 T^{00} \approx T^{00}$$

Mientras que la componente 00 del tensor de Riemann habíamos demostrado es igual a:

$$R_{00} \approx \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi$$

Reemplazando en la ecuación de campo obtenemos una nueva versión de la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right)$$

Esta es una predicción nueva de la relatividad general: la presión también produce gravitación.

### 1.13.5. El término cosmológico

Como vimos desde el principio, la manera en la que se deduce heurísticamente la ecuación de campo métrico es buscando un tensor que tenga divergencia covariante cero. Demostramos que el tensor  $G_{\mu\nu}$  tiene esa condición. Pero hay otros tensores que pueden tener esa condición. Por ejemplo el tensor métrico mismo tiene divergencia covariante cero:

$$g_{\mu\nu}{}^{;\mu} = 0$$

Por qué ibamos entonces a suponer que el tensor general del lado izquierdo de la ecuación es solo el tensor de Einstein y no algo más general de la forma:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}$$

donde  $\lambda$  es una constante.

Una ecuación aún más general entonces sería:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

El único inconveniente con esta ecuación es que en el límite de campo débil y para la métrica newtoniana, la ecuación resultante no es la ecuación de Poisson ¿o sí?. Una manera de reconciliar la nueva ecuación sería agregar el término en el lado derecho de la ecuación:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

y agrupar el nuevo término con el tensor momentum energía:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + \rho_{\Lambda}c^2g_{\mu\nu})$$

donde

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

Si  $\rho_{\Lambda} \ll \rho$  para la mayoría de las situaciones gravitacionales que vemos en astronomía, entonces la ecuación seguiría siendo válida.

Pero ¿qué es  $\rho_{\Lambda}$ ?

A primera vista vemos que se trata de una densidad de materia que existiría incluso en la ausencia de otras formas de materia, es decir, podría interpretarse como una densidad de masa del vacío con tensor de momentum energía asociado:

$$T_{\mu\nu}^{\text{vacío}} = \rho_{\Lambda}c^2g_{\mu\nu}$$

Es decir, el vacío se comporta como un fluido perfecto con densidad y presión:

$$\begin{aligned}\rho_{\text{vacío}} &= -\rho_{\Lambda} \\ p_{\text{vacío}} &= -\rho_{\Lambda}c^2\end{aligned}$$

En una situación en la que no hay materia y asumiendo que  $\rho_{\Lambda}$  es muy pequeña (campo débil) la ecuación de Poisson para el vacío será:

$$\nabla^2\Phi = -8\pi G\rho_{\Lambda} = -\Lambda c^2$$

Es decir el vacío producirá un efecto *repulsivo*.

### Un poco de historia

**Einstein y el mayor error de su vida.** Einstein introdujo el término cosmológico en su ecuación porque pensaba que si no lo hacía el Universo podría colapsar por su propio peso. Esto es que si aplicamos la ecuación de campo a un fluido homogéneo encontramos un potencial atractivo que tendería a hacer que la materia se atrayese y el universo habría terminado hace mucho. En la época de Einstein todo parecía indicar que el Universo era eterno y estático. Es por eso que el término  $\Lambda g_{\mu\nu}$  que introdujimos en el lado derecho se conoce como el término cosmológico.

Después que se descubrió que el Universo en efecto se expandía Einstein reconoció que la introducción del término cosmológico había sido un gran error ("*my biggest blunder*").

En 1998 astrónomos descubrieron que la expansión del Universo se estaba acelerando lo que implicaba que efectivamente el término cosmológico estaba presente en la ecuación. Si bien durante todo el siglo XX la mayoría de los cosmólogos dejaron el término cosmológico en su lugar y lo estudiaron como una curiosidad, lo cierto es que para los 2000 ya habíamos incluso medido esta cantidad.

Hoy se sabe que la densidad de masa debida al término cosmológico es del orden de 0.74 veces la densidad crítica,  $\rho_{\text{crit}} = 8,5 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$ , es decir  $\rho_{\Lambda} = 6,29 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$ . Teniendo en cuenta que:

### Un poco de historia (Cont.)

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

hoy sabemos que la constante cosmológica debe ser muy cercana a:

$$\Lambda \approx 1,2 \times 10^{-52} \text{ m}^{-2}$$

Curiosamente el valor de la constante cosmológicamente coincide en orden de magnitud, con el inverso del cuadrado del Universo observable,  $1/R_U^2 = 1/(10 \text{ Gal}) \sim 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ .

#### 1.13.6. La ecuación de Hilbert-Einstein

La deducción que hicimos de la ecuación de campo métrico es de naturaleza heurística. Una deducción más rigurosa fue hecha de forma simultánea por el matemático alemán David Hilbert.

Esta deducción puede [encontrarse aquí](#)<sup>4</sup> y parte de suponer que en el espacio-tiempo con materia se extremiza la denominada **acción de Hilbert-Einstein**:

$$S = \int \sqrt{g} \left[ \frac{c^4}{16\pi G} (R + 2\Lambda) - \mathcal{L}_M \right] d^4x$$

donde  $g$  es el determinante de la métrica  $R$  es el escalar de curvatura y  $\mathcal{L}_M$  sería el equivalente a un *lagrangiano* correspondiente a la materia-energía presente en el espacio-tiempo.

Si se aplica la condición convencional de que:

$$\delta S = 0$$

entonces la ecuación resultante es:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

que se conoce por la misma razón como la **ecuación de Hilbert-Einstein** (HEE) o la **ecuación de campo métrico de Einstein** (EFE).

#### Nota

**Sobre los signos en la ecuación de Einstein.** Es posible encontrar distintas versiones diferentes de la ecuación de Einstein y de la acción de Hilbert-Einstein, que dependen de la signatura que hayamos usado para la métrica y del signo que hayamos escogido para el tensor de Einstein o el tensor de Riemann.

1. **Propiedades de la derivada covariante.** Demostrar las propiedades de la derivada covariante:

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein%E2%80%93Hilbert\\_action](https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein%E2%80%93Hilbert_action)

- a. **Derivada covariante de una suma:**  $(A^\mu + B^\mu)_{;\nu} = A^\mu_{;\nu} + B^\mu_{;\nu}$
- b. **Derivada covariante de un producto o regla de Leibniz:**  
 $(A^\mu B^\nu)_{;\alpha} = A^\mu_{;\alpha} B^\nu + A^\mu B^\nu_{;\alpha}$
- c. **Derivada covariante de un campo escalar (1):**  $\phi_{;\mu} = \phi_{,\mu}$
- d. **Derivada covariante de un campo escalar (2):**  $(A^\mu B_\mu)_{;\alpha} = (A^\mu B_\mu)_{,\alpha}$
- e. **Derivada covariante de un tensor covariante:**  $B_{\mu;\nu} = B_{\mu,\nu} - C^\gamma_{\mu\nu} B_{\gamma}$
- f. **Derivada covariante de un tensor contravariante de segundo rango:**  
 $A^{\mu\nu}_{;\alpha} = A^{\mu\nu}_{,\alpha} + C^\mu_{\gamma\alpha} A^{\gamma\nu} + C^\nu_{\alpha\gamma} A^{\mu\gamma}$
- g. **Derivada covariante de un tensor covariante de segundo rango:**

2. **Conexión.** Demostrar que si la derivada coariante definida por:

$$D_\alpha A^\mu = \partial_\alpha A^\mu + C_{\gamma\alpha}^\mu A^\gamma$$

es un tensor bajo una transformación general  $\mathcal{G}'_\nu$ , entonces la conexión afín  $C^\mu_{\gamma\alpha}$  transforma de acuerdo con:

\$\$

$$C^{\{\nu'\}}_{\{\mu'\sigma'\}} = \{ \{ \text{cal } G^{\{\nu'\}} \}_{\nu} \{ \{ \text{cal } G^{\{\mu'\}} \}_{\mu'} \} \{ \{ \text{cal } G^{\{\sigma'\}} \}_{\sigma'} \}$$

\$\$

3. **Primeras derivadas de la métrica.** Probar que:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}_{\phantom{\alpha\beta},\gamma} &= -g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\gamma}^{\beta} - g^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \end{aligned}$$

4. **Conexión.** En el caso de métricas diagonales, los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\gamma} &= \Gamma_{\alpha\beta\gamma} - \Gamma_{\beta\alpha\gamma} \\ g^{\alpha\beta}_{,\gamma} &= -g^{\alpha\mu}\Gamma_{\mu\gamma}^{\beta} - g^{\mu\beta}\Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} \end{aligned}$$

Probar que en un espacio de  $N$  dimensiones el número de términos es  $N(2N - 1)$

5. **Tensor de torsión.** Partiendo de la forma general en la que transforman los coeficientes de conexión afin  $C_{\nu\mu}^\sigma$ , demostrar que la torsión  $T_{\mu\nu}^\sigma \equiv C_{\mu\nu}^\sigma - C_{\nu\mu}^\sigma$  es un tensor.



6. **Tensor de torsión.** Usando la definición de los símbolos de Christoffel, demostrar que la derivada covariante:

$$A^\mu_{;\alpha} = A^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha} A^\gamma$$

Es un tensor de segundo rango.

7. **Tensor de torsión.** Calcular los símbolos de Christoffel para el espacio tiempo plano en coordenadas esféricas para el cual:

$$g_{\mu\nu} : \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta)$$

8. **Tensor de Riemann.** Probar que el coeficiente de Riemann es un tensor.
9. **Forma explícita del tensor de Riemann.** Contrayendo índices probar que el tensor de Riemann se puede escribir de forma explícita como:
10. **Segunda derivada total covariante.** Probar que:

$$\frac{D^2 A^\mu}{D\lambda^2} = \frac{d^2 A^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dA^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (1.12)$$

$$- \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\kappa\lambda} A^\alpha \frac{dx^\kappa}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \quad (1.13)$$

BORRADOR

## Capítulo 2

# Aplicaciones de la relatividad general

### Resumen

Después de deducir el formalismo básico de la relatividad general, procederemos en este capítulo a usarlo para estudiar problemas concretos y hacer las predicciones más importantes de la teoría general de la relatividad.

Nos concentraremos aquí en tres aplicaciones importantes:

- **Ondas gravitacionales.** La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y la descripción de algunas de sus propiedades básicas es una de las más interesantes y poco triviales predicciones de la teoría general de la relatividad. Aquí estudiaremos algunos aspectos básicos de la teoría (un tratamiento riguroso y en detalle está más allá del nivel de este curso), concentrándonos en ofrecer las bases para un estudio más detallado y para predecir las propiedades específicas de sistemas que emiten ondas gravitacionales en el universo.
- **Solución de Schwarzschild y agujeros negros.** La métrica de Schwarzschild es una de las únicas soluciones analíticas que se conocen de la ecuación de campo métrico. Describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior de un objeto con simetría esférica. Deduciremos aquí la métrica y estudiaremos el movimiento de partículas de prueba en este espacio-tiempo. En particular con estos datos predeciremos las propiedades de los agujeros negros.
- **La métrica de Friedmann-Robertson-Walker.** Otra de las soluciones analíticas a la ecuación de campo métrico es la que describe un universo homogéneo e isotrópico. Esta solución fue también obtenida muy poco tiempo después del surgimiento de la relatividad. Aquí deduciremos esta solución y un conjunto muy importante de ecuaciones relacionadas que se conocen como las ecuaciones de Friedmann y que describen la dinámica del universo en expansión y su relación con el contenido (y tipo) de masa energía. Estudiaremos las propiedades de la métrica y sus predicciones respecto al Universo.

El orden que seguiremos no es el orden convencional. Hemos decidido concentrarnos en los temas de mayor actualidad en el momento.

## 2.1. Ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales son una de las más increíbles predicciones de la relatividad general.

### 2.1.1. Historia de las ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales fueron predichas por primera vez por Einstein en 1916. En 1922, sin embargo Eddington mostró que las ondas originalmente predichas por Einstein eran en realidad un artefacto matemático debido al cambio de coordenadas, las llamo *ondas de coordenadas* y que se podían mover a cualquier velocidad. Sin embargo el mismo Eddington predijo que había un tercer tipo de ondas que se propagaban a la velocidad de la luz.

En 1936 Einstein y Nathan Rosen sometieron un artículo demostrando que las ondas gravitacionales no existían porque aparecían singularidades en la solución ondulatoria de la ecuación de campo. Afortunadamente el artículo no fue aceptado por un referee inicialmente anónimo (después resultó ser Howard Robertson, el mismo de la métrica cosmológica) quien demostró que las singularidades en realidad eran producto de las coordenadas.

La predicción de las ondas gravitacionales y de sus propiedades se concretó en las décadas por venir entre finales de 1930 y mediados de los 1950.

En 1974 se descubrió un pulsar binario cuya órbita decaía obedeciendo las predicciones de la relatividad general y de la emisión de ondas gravitacionales. El decaimiento del pulsar binario fue confirmado a lo largo de dos décadas y le valió a sus descubridores, Russell Hulse y Joseph Taylor el premio Nobel de física de 1993.

Entre mediados de 1970 y principios de 1990 se consolidó un proyecto de detector usando interferometría, una idea que había sido concebida por varios en los 1960. Este proyecto fue el *Laser Interferometer Gravitational Observatory* LIGO, que finalmente inició observaciones en 2002. Durante 13 años el detector no vio nada. El 18 de septiembre de 2015 se inauguró una nueva fase conocida como *LIGO mejorado*.

El 14 de septiembre de 2015 una señal fue detectada por los observatorios aún en prueba. El paper sobre la detección fue publicado el 11 de febrero de 2016. La detección correspondía a la fusión de dos agujeros negros de cerca de 30 masas solares a la increíble distancia de 1300 millones de años luz. En 2017 se otorgó el premio Nobel de física a 3 de los más destacados personajes asociados con el detector.

El 25 de agosto de 2017 se detectó simultáneamente en rayos gamma, luz visible, ondas de radio y ondas gravitacionales la primera fuente astrofísica dando nacimiento a la que hoy se conoce como la *astronomía multimensajero*, una de las más importantes revoluciones en la astronomía desde la invención del telescopio.

Es muy importante para cualquier profesional de la astronomía o de la física conocer algunos detalles sobre la predicción de la existencia de las ondas gravitacionales y de sus propiedades específicas.

### 2.1.2. Un programa de estudio

En estas notas nos concentraremos en algunos de los aspectos básicos de la física de estas ondas sin profundizar en todos sus detalles (que escapan al nivel del curso). Nos concentraremos en los siguientes aspectos:

- La teoría linearizada de la gravedad y sus ecuaciones correspondientes.
- La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y las ecuaciones correspondientes.
- La solución a la ecuación de onda en el vacío y las propiedades básicas de las ondas gravitacionales.
- La ecuación de onda con fuentes y la predicción de la intensidad de este tipo de ondas.
- La física de la emisión de ondas gravitacionales y las ecuaciones básicas resultantes.
- El estudio de algunos sistemas de interés en astrofísica.
- La física básica de la detección de las ondas.

### 2.1.3. Gravedad linearizada

La teoría general de la relatividad que desarrollamos en el capítulo precedente tiene una gran generalidad. Excepto por los casos en los que estudiamos situaciones donde los campos gravitacionales eran muy pequeños, especialmente con el propósito de utilizar el principio de consistencia, los resultados obtenidos aplican para cualquier campo.

Para estudiar las ondas gravitacionales vamos a asumir que el espacio-tiempo es plano, excepto en la onda, y que la onda misma tiene una amplitud muy pequeña. La teoría resultante se conoce como gravedad linearizada.

La métrica de un espacio-tiempo así tiene la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\alpha)$$

donde  $|h_{\mu\nu}(x^\alpha)| \ll 1$  es una perturbación a la métrica del espacio-tiempo plano.

Otra manera de expresar la condición anterior es suponiendo que podemos escribir  $h_{\mu\nu}$  en términos de funciones convencionales  $H_{\mu\nu}$  tal que:

$$h_{\mu\nu} = \epsilon H_{\mu\nu}$$

con  $\epsilon \ll 1$ .

Asumiremos también que las derivadas de  $h_{\mu\nu}$ ,  $h_{\mu\nu,\alpha}$  son del mismo orden que  $\epsilon$  y por lo tanto son muy pequeña.

La gravedad linearizada se obtiene cuando partiendo de estas suposiciones se deducen las ecuaciones de la relatividad general eliminando todos los términos proporcionales a  $\epsilon^2$ .

#### Inversa de la métrica linearizada

El primer cálculo interesante en gravedad linearizada se hace para obtener la inversa de la métrica. Suponemos que se puede escribir de la forma.

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + b^{\mu\nu}$$

tal que  $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$ .

Reemplazando queda:

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} &= \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} + \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \\ &\approx \delta_\nu^\mu + \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

de modo que  $b$  debe cumplir la condición:

$$b^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = -\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}$$

Si multiplicamos por  $\eta^{\lambda\nu}$  a ambos lados obtenemos:

$$b^{\mu\lambda} = -h^{\mu\lambda}$$

Concluimos entonces que:

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

### Símbolo de Christoffel linearizado

Los símbolos de Christoffel se definen como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

Es claro que para espacio-tiempo plano  $\eta_{\mu\nu}$  los símbolos de Christoffel son cero. Sin embargo en una métrica linearizada los símbolos de Christoffel tienen un pequeño valor:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} (\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho}) (h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu}) \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &\approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu}) \end{aligned}$$

Nótese que hemos usado la notación  $\delta\Gamma$  para dar a entender que estamos lidiando con una perturbación (sobre 0) del símbolo de Christoffel. Aquí podemos ver que  $\delta\Gamma$  también es una cantidad proporcional a  $\epsilon$ .

El hecho que  $\eta$  sea diagonal nos permite también escribir:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\lambda} (h_{\lambda\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda} + h_{\nu\lambda,\mu})$$

### El tensor de Riemann linearizado

El tensor de Riemann se define como:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\delta \Gamma_{\mu\delta}^\rho$$

De nuevo, para el espacio tiempo plano todas las componentes de este tensor son cero. En espacio tiempo linearizado nos quedan también una versión perturbada que a primer orden y en término de las perturbaciones en los símbolos de Christoffel se escriben:

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} \approx \delta \Gamma^\rho_{\sigma\mu,\nu} - \delta \Gamma^\rho_{\sigma\nu,\mu}$$

Alternativamente:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + g_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - g_{\kappa\mu,\nu,\lambda}) + \\ + g^{\sigma\zeta}(\Gamma^\sigma_{\mu\kappa}\Gamma^\zeta_{\lambda\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\zeta_{\lambda\kappa})$$

Eliminando los términos cuadráticos en  $\epsilon$ , el tensor de Riemann queda:

$$\delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx -\frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + h_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - h_{\kappa\mu,\nu,\lambda})$$

### El tensor de Ricci linearizado

Por definición el tensor de Ricci es:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\mu\nu\alpha}$$

De modo que la versión linearizada será

$$\delta R_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha}(h_{\mu\nu,\lambda,\alpha} - h_{\nu\lambda,\alpha,\mu} + h_{\lambda\alpha,\mu,\nu} - h_{\alpha\mu,\nu,\lambda}) \\ \approx -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\lambda}(h_{\mu\nu,\lambda,\lambda} - h_{\nu\lambda,\lambda,\mu} + h_{\lambda\lambda,\mu,\nu} - h_{\lambda\mu,\nu,\lambda})$$

Aquí podemos reconocer algunas propiedades y simetrías interesantes.

En primer lugar la operación  $\eta^{\lambda\lambda}h_{\mu\nu,\lambda,\lambda}$  se puede escribir como:

$$\eta^{\lambda\lambda}h_{\mu\nu,\lambda,\lambda} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 h_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu}$$

que es lo que nosotros llamamos el *D'Alambertiano* de  $h_{\mu\nu}$ .

De otro lado los términos restantes de la asuma se pueden escribir como:

$$-h^{\lambda\lambda}(-h_{\nu\lambda,\lambda,\mu} + h_{\lambda\lambda,\mu,\nu} - h_{\lambda\mu,\nu,\lambda}) = h^\lambda_{\nu,\lambda,\mu} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu,\nu} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu,\nu} + h^\lambda_{\mu,\nu,\lambda}$$

nótese que dividimos el término  $h_{\lambda\lambda,\mu,\nu}$  en dos para poder escribir dos términos muy parecidos uno de otro.

Si definimos:

$$V_\mu = h^\lambda_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu}$$

El tensor de Ricci se escribirá:

$$\delta R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu})$$

### El tensor de Einstein linealizado

El tensor de Einstein se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Este tipo de tensores se conocen también en relatividad como tensores de *traza invertida* (*trace-reversed* en inglés) porque:

$$G = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = -R$$

de modo que en lo sucesivo diremos que  $G_{\mu\nu}$  es la *traza invertida* del tensor de Ricci.

Aplicando la definición obtenemos:

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha)$$

Donde  $h = h^\alpha_\beta$  es la traza de la perturbación.

### El tensor momentum-energía

¿Qué podremos decir sobre el tensor momentum-energía en esta situación? Aplazaremos esta discusión para después.

#### 2.1.4. Ecuación de campo linealizada en el vacío

Tenemos hasta ahora todos los elementos para proceder a escribir la ecuación de campo métrico linealizada:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

Donde ahora podemos usar el lenguaje para decir que la ecuación de campo dice que el tensor de Ricci es proporcional a la *traza invertida* del tensor momentum-energía.

Por ahora procederemos a estudiar el caso en el que la onda se propaga en una región vacía  $T^{\mu\nu} = 0$ :

En esta situación la ecuación de campo métrico queda:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

que es una importante ecuación en relatividad general que vamos a seguir viendo en lo sucesivo.

#### Nota

**Tensor de Ricci cero no significa curvatura cero.** Es interesante anotar que la ecuación de campo evaluada en el vacío:



**Nota (Cont.)**

$$R_{\mu\nu} = 0$$

implica solamente que localmente en los puntos donde no haya materia todas las componentes del tensor de Ricci son 0. Eso no significa sin embargo que la curvatura allí sea cero, en tanto el espacio-tiempo puede haber sido curvado por la presencia de materia que esta cerca de allí. Esto conduce a una serie de implicaciones que son interesantes:

1. Si  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$  entonces el espacio-tiempo es plano.
2. Si  $R_{\mu\nu} = 0$  no necesariamente el espacio-tiempo es plano.
3. Si  $R = 0$  no necesariamente el espacio-tiempo es plano.
4. Si el espacio-tiempo es curvo entonces al menos una  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \neq 0$
5. Si  $R \neq 0$  entonces el espacio-tiempo es curvo.
6. Si al menos una componente de  $R_{\mu\nu} \neq 0$  entonces el espacio-tiempo es curvo.
7. Si al menos una componente de  $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \neq 0$  entonces el espacio-tiempo es curvo.

En terminos de la perturbación la ecuación de campo métrico queda:

$$\frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\square h_{\mu\nu} - (V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}) = 0$$

o bien,

$$\square h_{\mu\nu} = V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}$$

donde recordemos que:

$$V_\mu = h^\lambda_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2}h_{,\mu}$$

### 2.1.5. Libertad gauge

Antes de proceder a resolver hay un asunto que debemos discutir. ¿Por qué la métrica no es plana? Es posible tener una métrica que no es plana por muy diversas razones: 1) porque tenemos una perturbación real (con curvatura) del campo gravitacional o 2) por la particular elección del sistema de coordenadas.

Veamos como cambia  $h$  y todo lo que hemos visto cuando se modifican sutilmente las coordenadas

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$$

donde  $|\xi| = \mathcal{O}(\epsilon)$ . Dada esta última convención, siempre será posible reemplazar  $x'$  por  $x$  donde sea necesario.

La inversa de esta transformación será simplemente:

$$x^{\mu} = x'^{\mu} - \xi^{\mu}(x')$$

donde a primer orden  $\xi^{\mu}(x') \approx \xi^{\mu}(x)$ .

La transformación de la métrica será:

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}(x)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \approx \delta^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}_{,\alpha}$$

donde  $\xi^{\mu}_{,\alpha} = \partial \xi^{\mu} / \partial x^{\alpha}$ .

la métrica transforma como

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(x') &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}(x) \\ &= \left( \delta^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}_{,\alpha} \right) \left( \delta^{\nu}_{\beta} - \xi^{\nu}_{,\beta} \right) [g_{\mu\nu}(x') - g_{\mu\nu,\sigma}(x') \xi^{\sigma}] \\ &\approx g_{\alpha\beta}(x') - \xi^{\mu}_{,\alpha} g_{\mu\beta} - \xi^{\nu}_{,\beta} g_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

La diferencia entonces en la métrica debido al pequeño desplazamiento es:

$$g'_{\alpha\beta}(x') - g_{\alpha\beta}(x') \equiv h'_{\alpha\beta}(x') - h_{\alpha\beta}(x') = -\xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$$

o lo que es lo mismo:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$$

Entonces, un simple cambio de coordenadas me cambia el  $h$ . A esto es a lo que se conoce como *libertad gauge* en las perturbaciones.

### 2.1.6. El gauge armónico

La libertad gauge es interesante porque nos permite identificar cuál podría ser el mejor sistema de coordenadas en el que se puede trabajar para que la ecuación de campo linearizada sea sencilla.

Si se escoge un conjunto  $\xi^{\alpha}$  tal que :

$$V'_{\mu} = h'^{\lambda}_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2} h'_{,\mu} = 0$$

entonces la ecuación de campo queda reducida a:

$$\square h'_{\mu\nu} = 0$$

y llamamos a este el **gauge armónico** por las evidentes implicaciones de la última ecuación.

Otra manera de escribir el gauge armónico es:

$$V'^{\nu} = h'^{\mu\nu}{}_{,\mu} - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} h'_{,\mu}{}^{\mu} = 0$$

Definiendo la traza-invertida de  $h$  como:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} \equiv h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h'$$

el gauge armónico queda:

$$\bar{h}'^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0$$

#### Nota

**El gauge armónico para  $\xi$ .** Con la definición  $\bar{h}$  podemos escribir la transformación de coordenadas como:

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \xi^{\lambda}_{,\lambda} \eta_{\alpha\beta}$$

Sacando las componentes contravariantes y tomando la derivada tenemos:

$$\bar{h}'^{\mu\nu}{}_{,\mu} = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\mu} - \xi^{\nu,\mu}{}_{,\mu} + \xi^{\lambda}_{,\lambda\mu} \eta^{\mu\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu} - \square \xi^{\nu}$$

de modo que en términos de la perturbación original el gauge armónico se puede escribir:

$$\square \xi^{\nu} = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu}$$

El problema es que para cualquier función escalar  $f$  siempre se puede encontrar una función escalar  $F$  tal que  $\square F = f$ , de modo que el gauge armónico lo satisfacen infinitas funciones  $\xi$ . Si imponemos la condición adicional de que:

$$\square \xi^{\nu} = 0$$

esto completa nuestra condición para el gauge armónico.

### 2.1.7. La ecuación de campo en el gauge armónico

En lo sucesivo asumiremos que estamos trabajando en el *gauge armónico* y ya no haremos la distinción entre las componentes primadas y no primadas.

En este gauge la ecuación de campo se escribe:

$$\square h_{\mu\nu} = 0$$

Una ecuación equivalente se obtiene si se reconoce que una vez definido:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$$

entonces,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h$$

pero

$$\square h = \square(\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}) = \eta_{\mu\nu}\square h_{\mu\nu} = 0$$

de modo que:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu}$$

Así que una manera más conveniente de escribir la ecuación de campo métrico en el vacío será:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

con el gauge armónico

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\mu} = 0$$

Una vez obtenida la solución siempre es posible regresar a la parametrización original usando:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

### 2.1.8. La ecuación de campo con fuentes

¿Qué pasa ahora si tenemos en el espacio fuentes?

La ecuación de campo será ahora:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Reemplazando el tensor de Einstein:

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha)$$

la ecuación queda:

$$-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Si aplicamos una transformación de coordenadas para quedar en el gauge armónico, i.e.  $V_\mu = 0$ , obtenemos:

$$-\frac{1}{2}(\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

En términos de la traza invertida de la variable de perturbación  $\bar{h}_{\mu\nu}$  la ecuación queda finalmente:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

que es la ecuación de campo con fuentes.

### 2.1.9. La métrica postnewtoniana

La versión linearizada de la ecuación de campo puede usarse para resolver el problema de la gravedad newtoniana.

Supongamos que tenemos una distribución de polvo con simetría radial  $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho_0 c^2, 0, 0, 0)$ .

La única componente de la ecuación de campo nos queda:

$$\square \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_0 c^2$$

En campo estático,  $\square \bar{h}_{00} = -\nabla^2 \bar{h}_{00}$  así la ecuación queda:

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = \frac{16\pi G}{c^4} \rho_0 c^2$$

Para que la ecuación coincida con la ecuación de Poisson se necesita que:

$$\bar{h}_{00} = \frac{4\Phi}{c^2}$$

donde  $\Phi$  es el potencial gravitacional.

La traza será naturalmente igual a  $\bar{h} = 4\Phi/c^2$

La perturbación original será por tanto:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}$$

Por componentes:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2\Phi/c^2 \\ h_{ii} &= -2\Phi/c^2 \end{aligned}$$

De donde la métrica resultante es:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\vec{r}_L^2$$

que llamaremos la **métrica postnewtoniana**.

Nótese que esta métrica difiere e la métrica de newton:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - d\vec{r}_L^2$$

2.1.10. Analogía electromagnética

Existe una interesantísima analogía entre esta ecuación y la electrodinámica. Recordemos que  $h_{\mu\nu}$  en campo débil por ejemplo alrededor de un cuerpo con masa estaba asociado al potencial. En electromagnetismo el cuadripotencial es  $A_\mu$ . La ecuación inhomogénea de Maxwell se escribe:

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

que en un lugar donde no hay cargas se puede escribir como

$$\square A^\nu = 0$$

Pero debemos recordar que pudimos escribir esta expresión gracias al Gauge de Lorentz:

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0$$

una condición arbitraria sobre los potenciales que permitía escribir las ecuaciones inhomogéneas de forma simple como una función de onda.

Como vemos hay una analogía profunda entre las ecuaciones de Maxwell en espacio-tiempo plano y las ecuaciones de campo métrico donde el papel del cuadripotencial  $A^\mu$  lo juega ahora el potencial tensorial  $\bar{h}^{\mu\nu}$ .

Paralelos:

Aspecto	Electromagnetismo	Gravitación linealizada
Potenciales	$\phi, \vec{A}$	$h_{\mu\nu}$
Cuadripotencial	$A^\mu$	$\bar{h}_{\mu\nu}$
Transformación Gauge	$\phi' = \phi - \partial\psi/\partial t,$ $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$	$h_{\mu'\nu'} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$
Gauge	$A^\mu{}_{,\mu} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial\phi/\partial t = 0$	$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = h^{\mu\nu}{}_{,\mu} - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} h_{,\mu} = 0$
Ecuaciones en el vacío	$\square \vec{A} = 0, \square \phi = 0$	$\square h_{\mu\nu} = 0$
Fuentes	$\square A^\mu = 0$	$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$
Ecuación con fuentes	$J^\nu$	$T_{\mu\nu}$
	$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$	$\partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

### 2.1.11. Ecuación de onda en el vacío

Estudiaremos otro caso particular de la ecuación de campo.

Partamos de la ecuación de campo en el vacío:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

que se puede escribir en términos explícitos de la derivada como:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Esta ecuación es idéntica a una ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2}$$

Es decir si se perturba una región de un espacio-tiempo, la perturbación se propagará a otros lugares con la velocidad de la luz  $c$ . Podemos decir también que **la gravedad se propaga a la velocidad de la luz** y con esto resolvemos el problema de Newton de la acción a distancia.

Esta es la esencia de la predicción que se hace de la existencia de ondas gravitacionales.

#### Nota

**¿Son ondas reales u ondas de coordenadas?** En nuestras notas históricas habíamos dicho que en el primer intento de Einstein de predecir las ondas gravitacionales, en realidad las ondas que predijo eran solo ondas de coordenadas, es decir ondas que se producían gracias a la elección de un sistema de coordenadas particular. Dado que la ecuación que obtuvimos antes imponiendo el gauge armónico es una ecuación que se deriva justamente de usar un conjunto particular de coordenadas, ¿cómo sabemos que las ondas predichas aquí son efectivamente ondas físicas, ondas reales?

Una manera de saberlo es ver si el único tensor que es distinto de cero independientemente de la elección del sistema de coordenadas, a saber el tensor de Riemann  $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ :

$$\delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx -\frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + h_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - h_{\kappa\mu,\nu,\lambda})$$

también satisface una ecuación armónica. Es claro que en el gauge armónico  $\square h_{\mu\nu} = 0$  de modo que es trivial demostrar que en ese mismo gauge:

$$\square \delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$$

Dado que lo que le pasa a este tensor en un sistema de coordenadas realmente repercute sobre la naturaleza del tensor en todos los sistemas de coordenadas, podemos decir que efectivamente las componentes de

**Nota (Cont.)**

este tensor oscilan siguiendo una ecuación de ondas. ¡Son ondas reales! (independientes del sistema de coordenadas).

**2.1.12. Solución general a la ecuación de onda**

Una cosa es escribir la ecuación de onda y otra encontrar una solución. Si bien ya estamos acostumbrados a la ecuación de onda en otras áreas, existen ciertos aspectos de nuestro problema que hacen estas ondas muy especiales. En particular la ecuación de onda escrita anteriormente sólo es válida en el gauge armónico. ¿Qué implicaciones físicas tiene esto?

Sabemos que una solución particular para la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2}$$

es

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(i\omega t) = A_{\mu\nu} \exp(ik^\alpha x_\alpha)$$

siempre que se cumpla la condición:

$$k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = 0$$

o bien:

$$k^0 = k$$

Llamamos a  $k^\mu$  el cuadrivector de onda (del que ya habíamos hablado antes en el curso) que como vemos tiene magnitud nula.

Para los propósitos que tenemos nos interesa la parte real esta cantidad que se puede escribir de la forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = |A_{\mu\nu}| \cos(k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \equiv a_{\mu\nu} \cos(k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

De aquí podemos identificar  $k^0 = \omega_k/c$  y  $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ , con  $\omega_k$  la frecuencia angular asociada con el modo  $k$ ,  $\lambda$  la longitud de onda del modo  $k$ . En términos de  $\lambda$  el cuadrivector de onda se puede escribir como:

$$k^\mu : \frac{2\pi}{\lambda} (c, \hat{k})$$

que era la manera en la que lo habíamos escrito antes.

Una solución general se puede escribir superponiendo las soluciones particulares así:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} \left( \int A_{\mu\nu}(\vec{k}) \exp(ik^\mu x_\mu) d^3k \right)$$



### 2.1.13. El gauge transversal de traza cero

Tomemos una onda armónica que se propaga en una dirección definida de  $\vec{k}$  (onda plana). En este caso el tenso  $a_{\mu\nu}$  indica la amplitud que tienen cada una de las componentes espacio temporales de la onda. En general habrán 10 amplitudes, que contrastan con la amplitud única que tiene una onda en una dimensión. ¿Qué son esas 10 amplitudes?

Las amplitudes  $a_{\alpha\beta}$  de la onda determinaran su *polarización* a la manera como lo hacen por ejemplo en el caso de una onda electromagnética. Es por eso que es conveniente llamar a  $a_{\mu\nu}$  el **tensor de polarización**.

Sabemos que por el gauge armónico se debe cumplir la condición:

$$\bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} = a^{\mu\alpha} k_{\alpha} = 0$$

Estas son 4 ecuaciones que relacionan las componentes de la polarización. Esta condición nos deja entonces con solo 6 componentes independientes del tensor de polarización.

Veamos cómo se relacionan esas componentes. Para ello escribamos mejor el gauge armónico en su forma original:

$$V_{\mu} = \eta^{\alpha\alpha} \left( h_{\alpha\mu,\alpha} - \frac{1}{2} h_{\alpha\alpha,\mu} \right) = 0$$

y la solución general:

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

Si escogemos el sistema de coordenadas de modo que la dirección del eje  $z$  apunte hacia  $\vec{k}$ , la perturbación general queda:

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos(\Phi)$$

donde  $\Phi \equiv \omega t - kz + \varphi$

Nótese que la perturbación no depende de  $x, y$  y por eso llamamos a esta una *onda plana*. Las únicas derivadas distintas de cero serán entonces:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu,0} &= -a_{\mu\nu} \frac{\omega}{c} \sin(\Phi) \\ h_{\mu\nu,3} &= a_{\mu\nu} k \sin(\Phi) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde hemos hecho  $\partial_0 = \partial_t / c$ .

Esto implica que para una solución armónica:

$$h_{\mu\nu,0} = -h_{\mu\nu,3}$$

Reemplazando en la condición gauge para  $\mu = 0$  queda:

$$\begin{aligned}
\eta^{00} \left( h_{00,0} - \frac{1}{2} h_{00,0} \right) + \eta^{ii} \left( h_{i0,i} - \frac{1}{2} h_{ii,0} \right) &= 0 \\
-\frac{1}{2} k a_{tt} - \frac{1}{2} k a_{xx} - \frac{1}{2} k a_{yy} - \frac{1}{2} k a_{zz} + k a_{zt} &= 0 \\
a_{tt} + a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} + 2a_{zt} &= 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Reemplazando en la condición gauge para  $\mu = 3$  queda:

$$\begin{aligned}
\eta^{00} \left( h_{03,0} - \frac{1}{2} h_{00,3} \right) + \eta^{ii} \left( h_{i3,i} - \frac{1}{2} h_{ii,3} \right) &= 0 \\
-k a_{zt} - \frac{1}{2} k a_{tt} + \frac{1}{2} k a_{xx} + \frac{1}{2} k a_{yy} - \frac{1}{2} k a_{zz} &= 0 \\
a_{tt} - a_{xx} - a_{yy} + a_{zz} + 2a_{zt} &= 0
\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores queda:

$$a_{tz} = -\frac{1}{2}(a_{tt} + a_{zz})$$

y restando:

$$a_{xx} = -a_{yy}$$

Para las otras componentes obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_{tx} + a_{zx} &= 0 \\
a_{ty} + a_{zy} &= 0
\end{aligned}$$

De modo que la matriz de polarización queda:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_{tt} & a_{tx} & a_{ty} & -(a_{tt} + a_{zz})/2 \\ a_{tx} & a_{xx} & a_{xy} & -a_{tx} \\ a_{ty} & a_{xy} & -a_{xx} & -a_{ty} \\ -(a_{tt} + a_{zz})/2 & -a_{tx} & -a_{ty} & a_{zz} \end{pmatrix}$$

donde las componentes independientes son:  $a_{tt}, a_{tx}, a_{ty}, a_{tz}, a_{xx}, a_{zz}$ .

¿Podemos precisar mejor esas componentes? Recordemos que la libertad gauge implica que:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

Dado que  $\xi^\mu$  también cumple una ecuación del tipo:

$$\square \xi^\mu = 0$$

debe tener también forma armónica:

$$\xi^\mu = b_\mu \cos(\omega t - kz + \varphi_\xi)$$

con una fase  $\varphi_\xi$  que no necesariamente coincide con la fase de la onda.

La transformación de coordenadas implica, para la componentes temporales de la perturbación, la condición:

$$\begin{aligned} h'_{00} &= h_{00} - \dot{\xi}_0 \\ h'_{03} &= h_{03} - \dot{\xi}_3 + \dot{\xi}_0 \\ h'_{0i} &= h_{0i} - \dot{\xi}_i \end{aligned}$$

y por otro lado

$$h'_{33} = h_{33} + 2\dot{\xi}_3$$

Se pueden escoger las funciones  $\xi_\mu$  tal que:

$$\begin{aligned} h'_{0\mu} &= 0 \\ h'_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Con este gauge las componentes de la polarización se simplifican significativamente para ser igual a:

$$a'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{xx} & a'_{xy} & 0 \\ 0 & a'_{xy} & -a'_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una propiedad de este gauge particular es que tiene traza 0:

$$h' = h'^{\mu}_{\mu} = h'_{00} - h'_{11} - h'_{22} - h'_{33} = 0$$

Usando esta condición y escribiendo de nuevo la componente  $i$  del gauge:

$$V_i = \eta^{\alpha\alpha} h'_{i\alpha,\alpha} = k^0 a'_{i0} + k^z a'_{iz} = 0$$

Esta última condición significa esencialmente que la onda resultante es transversal.

Es por eso que a este gauge lo llamamos el **gauge transversal de traza cero**.

En síntesis en el gauge transversal de traza cero la perturbación métrica correspondiente a una onda plana que se propaga en una dirección arbitraria  $z$  y que tiene longitud de onda  $\lambda$ , número de onda  $k = 2\pi/\lambda$  y frecuencia angular  $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$  es:

$$h'^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

donde  $a_+$  y  $a_\times$  son las componentes de *polarización más* (*plus polarization*) y *polarización cruz* (*cross polarization*) respectivamente.

La métrica en este gauge tendrá la forma general:

$$ds^2_{TT} = c^2 dt^2 - [1 + h(u)] dx^2 - [1 - h(u)] dy^2 + 2[1 + g(u)] dx dy - dz^2$$

donde:

$$\begin{aligned}h(u) &= a_+ \cos(ku + \varphi) \\g(u) &= a_- \cos(ku + \varphi)\end{aligned}$$

y  $u \equiv ct - z$ .

### 2.1.14. Geodésicas en una onda gravitacional

Cuando una onda gravitacional pasa por un punto del espacio en el que se encuentra una partícula de prueba, la ecuación de movimiento de la partícula es:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

¿Que trayectoria describirá?

Consideremos un ejemplo numérico. Para ello definamos la geodésica de una onda gravitacional plana solo con polarización más, ie.  $a_- = 0$ :

```
from numpy import array
def g_gw_plana(xmu,mu,omega=1,aplas=0,fi=0):
    """
    Coeficiente métrico g_mumu calculados en el evento xmu
    para espacio-tiempo plano con coordenadas cilíndricas.

    g_mumu=diag(1,
                 -[1+f(u)],
                 -[1-f(u)],
                 -1
                 )+cross_xy([1+r(u)],[1+r(u)])
    """
    from numpy import cos
    t,x,y,z=xmu
    u=t-z #Unidades luz
    k=omega #En unidades luz k = omega
    fu=aplas*cos(k*u+fi)
    if mu==0:
        g=1
    elif mu==1:
        g=-(1+fu)
    elif mu==2:
        g=-(1-fu)
    elif mu==3:
        g=-1
    return g
```

Ahora definamos las condiciones iniciales para una partícula que se encuentra sobre el eje x en  $t = 0$ :

```
#Condiciones iniciales
Y0s=array([0.0,1.0,1.0,0.0,
            1.0,0.0,0.0,0.0])
```

```
#Tiempo de integración
from numpy import linspace
ss=linspace(0,10,100)
```

Asumimos que la onda se propaga en dirección del eje x y que tiene las siguientes propiedades:

```
#Frecuencia en rad/s
omega=1

#Fase inicial
fi=0

#Amplitud (polarización)
aplus=1e-3
```

Podemos calcular las componentes de los símbolos de Christoffel para verificar que (en las coordenadas que estamos utilizando) son distintos de cero:

```
from export import Gamma
xmu=[1,1,0,0]
G=Gamma(xmu,g_gw_plana,gargs=(omega,aplus,fi),N=4)
```

Símbolos de Christoffel:

```
[[[-0.      0.      0.      0.      ]
 [ 0.      -0.00042074  0.      0.      ]
 [ 0.      0.      0.00042074  0.      ]
 [ 0.      0.      0.      -0.      ]]]

[[ 0.      -0.00042051  0.      0.      ]
 [-0.00042051  0.      -0.      0.00042051]
 [ 0.      -0.      0.      0.      ]
 [ 0.      0.00042051  0.      0.      ]]]

[[ 0.      0.      0.00042096  0.      ]
 [ 0.      0.      -0.      0.      ]
 [ 0.00042096 -0.      0.      -0.00042096]
 [ 0.      0.      -0.00042096  0.      ]]]

[[ 0.      0.      0.      -0.      ]
 [ 0.      -0.00042074  0.      -0.      ]
 [ 0.      0.      0.00042074 -0.      ]
 [-0.      -0.      -0.      0.      ]]]
```

Resolvemos ahora la ecuación de la geodésica:

```
#Integra la ecuación de la geodésica
from scipy.integrate import odeint
from export import ecuacion_geodesica
N=4
Ys=odeint(ecuacion_geodesica,Y0s,ss,args=(g_gw_plana,(1,0,0.1),N))
```

```
#Convierte solución en coordenadas esféricas
ts=Ys[:,0]
xs=Ys[:,1]
ys=Ys[:,2]
zs=Ys[:,3]
```

Coordenadas x: [1. 1. 1. ... 1. 1. 1.]

Coordenadas y: [1. 1. 1. ... 1. 1. 1.]

Curiosamente descubrimos que aunque hay una onda gravitacional atravesando el espacio-tiempo donde se encuentra la partícula, la onda no modifica la posición de la misma. ¿Cómo es posible esto?

Volvamos nuevamente a la ecuación geodésica y consideremos solamente la componente espacial de la ecuación perturbada:

$$\frac{d^2 \delta x^i}{d\tau^2} = -\delta \Gamma_{\alpha\gamma}^i \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau}$$

Como la partícula se encuentra en reposo entonces  $U^\alpha = (1, 0, 0, 0)$  y por lo tanto:

$$\frac{d^2 \delta x^i}{d\tau^2} = -\delta \Gamma_{tt}^i$$

Pero sabemos que:

$$\delta \Gamma_{tt}^i = -\frac{1}{2} \eta^{ii} h_{tt,i} = 0$$

De modo que la partícula no va a ningún lugar:

$$\frac{d^2 \delta x^i}{d\tau^2} = 0$$

### 2.1.15. Distancias en una onda gravitacional

Aunque las coordenadas de partículas de prueba puestas en reposo espacial en el camino de una onda gravitacional no se ven perturbadas, la distancia entre ellas cuenta otra historia.

Supongamos que tenemos una partícula de referencia puesta en el origen de un sistema de coordenadas cartesiano. Vamos a colocar partículas en el espacio alrededor de esa partícula.

La distancia entre el origen y la partícula ubicada en la posición  $(x, y, z)$  será:

$$L = \int_{L_0} dl = \int_{L_0} \sqrt{g^{xx} dx^2 + g^{yy} dy^2 + g^{xy} dx dy + g^{zz} dz^2}$$

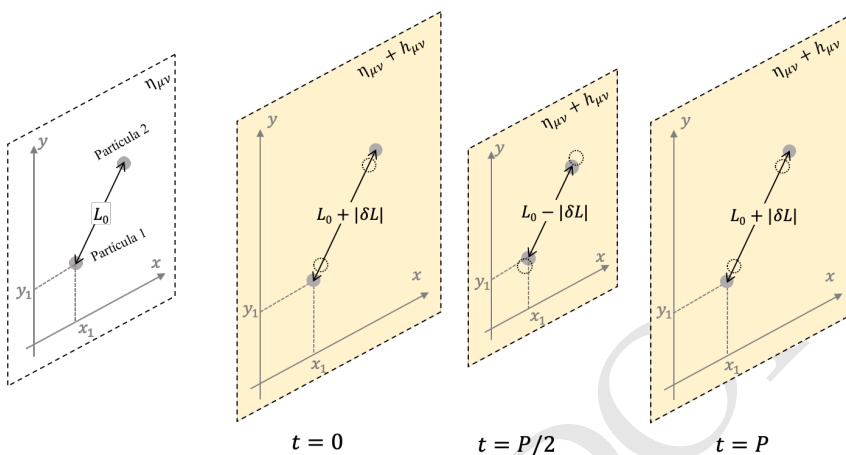
Consideremos algunos casos sencillos. Calculemos por ejemplo la distancia a un punto sobre el eje  $x$ , para una onda con polarización  $a_+$ :

$$L = \int_{L_0} dx \sqrt{g^{xx}} = L_0 \sqrt{1 + h(u)} \approx L_0 \left( 1 + \frac{1}{2} h(u) \right)$$

cond  $u = ct - z$ .

Antes de la llegada  
de la onda

Al paso  
de la onda



**Figura 2.1:** Ilustración gráfica de cómo al paso de una onda gravitacional las coordenadas de las partículas de prueba se mantienen constantes pero su distancia mutua cambia con el tiempo.

Como vemos aunque la posición de las partículas no se modifica, su distancia si cambia sutilmente.

El cambio relativo en la distancia entre ellas (nótese que  $L_*$  sería la distancia si el espacio-tiempo fuera plano), que llamaremos la **deformación** o en inglés **strain** producido por el paso de la onda será:

$$\frac{\delta L(u)}{L_0} = \frac{1}{2} h(u) = \frac{1}{2} a_+ \cos(ku + \varphi)$$

Podemos definir la rutina para  $h$  así:

```
from numpy import cos
h=lambda t,z,omega,aplus,fi:aplus*cos(omega*(t-z)+fi)
```

Y hacer un gráfico de la distancia:

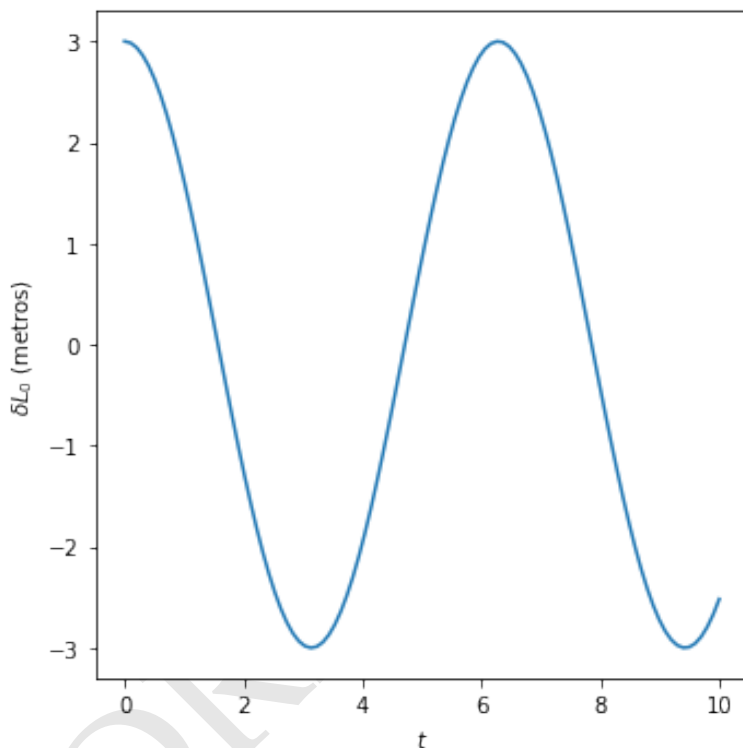
(Algoritmo 2.1)

```
# Distancia "propia"
L0=6000 # metros= 6 km

#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
ax.plot(ss,0.5*h(ss,0,omega,aplus,fi)*L0)
```

```
#Decoración
ax.set_xlabel("$t$");
ax.set_ylabel("$\delta L_0$ (metros)");
fig.tight_layout()
```

ver Figura 2.2



**Figura 2.2:** Figura correspondiente al código 2.1.

Esta situación puede generalizarse de forma sencilla a un punto ubicado en cualquier lugar sobre un plano perpendicular a la onda:

$$\frac{\delta L(u)}{L_0} = \frac{1}{2} h_{ij}(u) n^i n^j$$

donde  $\hat{n} : (n_x, n_y)$  es un vector unitario en dirección al punto.

Definamos una rutina para la onda:

```
def hij(i,j,t,z,omega=1,aplust=0,across=0,fi=0):
    k=omega
    cosu=cos(k*(t-z)+fi)
    if i==3 or j==3: return 0
    if i!=j: h=across*cosu
```



```

elif i==1:h=aplust*cosu
elif i==2:h=-aplust*cosu
return h

```

Si construyo entonces un grid de puntos situados en coordenadas tal que su distancia convencional a la partícula central sea  $R$ , entonces al paso de la onda su distancia real será:

$$R(u) = R \left( 1 + \frac{\delta L(u)}{L_0} \right) = R \left[ 1 + \frac{1}{2} h_{ij}(u) n^i n^j \right]$$

Y sus coordenadas serán:

$$\begin{aligned} X(u) &= R(u) n^x \\ Y(u) &= R(u) n^y \end{aligned}$$

Veamos lo que pasa con un conjunto de puntos situados a una distancia constante del origen con el siguiente algoritmo:

```

#Distancia en espacio plano al origen
R=1e-4

#Tiempo y z
t=0
z=0

#Posición de los puntos
from numpy import linspace,pi,cos,sin
Np=40
qs=linspace(0,2*pi,Np)

#Vectores unitarios de posición
nxs=cos(qs)
nys=sin(qs)

#Posiciones sin modificar
xs=R*nxs
ys=R*nys

#Propiedades de la onda
omega=1.0
aplust=0.3
across=0.0
fi=0
hargs=omega,aplust,across,fi

#Distancias modificadas por el paso de la onda
Rs=R*(1+0.5*(hij(1,1,t,z,*hargs)*nxs*nxs+
               hij(2,2,t,z,*hargs)*nys*nys+
               2*hij(1,2,t,z,*hargs)*nxs*nys))

#Posiciones modificadas

```

```
Xs=Rs*nxs
Ys=Rs*nys
```

Ahora grafiquemos:

(Algoritmo 2.2)

```
#Gráfico
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()
#ax.plot(Xs-xs,Ys-ys,'ko')
ax.plot(xs/R,ys/R,'k-',label="Posiciones")
ax.plot(Xs/R,Ys/R,'ro',label="Distancias")
ax.quiver(xs/R,ys/R,(Xs-xs)/R,(Ys-ys)/R,
          color='b',angles='xy',scale_units='xy',
          label="Desplazamiento")

#Decoración
ax.legend()
rango=1.2
ax.set_xlim(-rango,rango)
ax.set_ylim(-rango,rango)
ax.set_xlabel("$x$");
ax.set_ylabel("$y$");
ax.text(0.05,0.95,f"$t={t}$",
        ha="left",va="center",
        transform=ax.transAxes);
ax.set_title(f"$\\omega$={omega}, $a_+={aplus}$, $a_x$={across}",
            fontsize=12);
```

ver Figura 2.3

Para gráficos animados de esta figura vea la [versión electrónica del libro](#)<sup>5</sup>.

### 2.1.16. Detectores de ondas gravitacionales

Pueden encontrar buenos artículos de la historia de la detección de ondas gravitacionales, por ejemplo [este](#)<sup>6</sup>.

Los primeros detectores que se intentaron construir usaban el hecho que la distancia entre las partículas de prueba al paso de una onda oscilaban periódicamente. Si se lograba que una onda resonara con alguna frecuencia fundamental en un material se podía detectar la onda. Este fue por ejemplo el caso del diseño de Joseph Weber que construyó su detector a finales de 1970. Según él detectó las ondas procedentes del centro de la galaxia en 1970, pero la frecuencia de esas mismas ondas no coincidían con lo esperado.

<sup>5</sup><http://github.com/seap-udea/Relatividad-Zuluaga>

<sup>6</sup><https://arxiv.org/pdf/1609.09400.pdf>

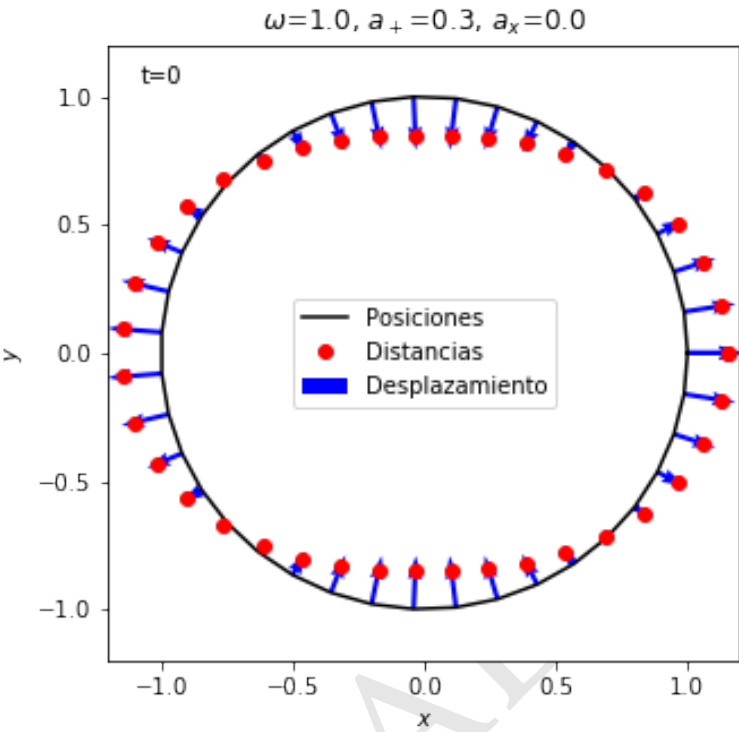


Figura 2.3: Figura correspondiente al código 2.2.

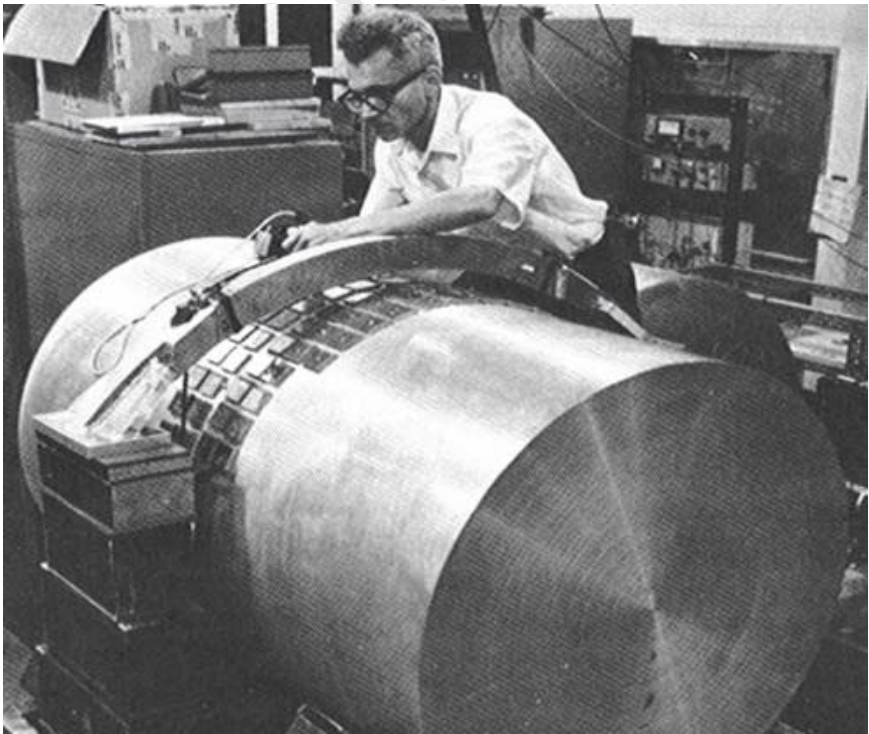
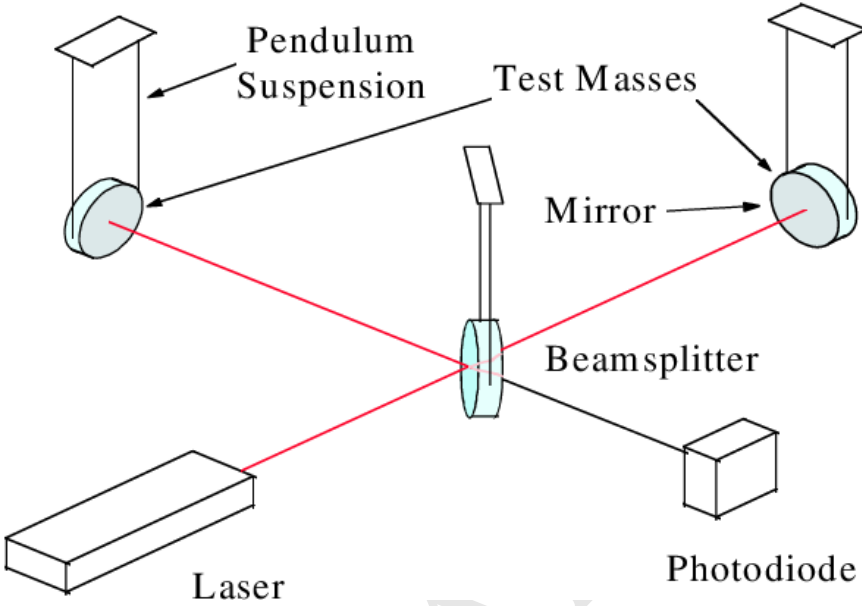


Figura 2.4: Detector de ondas gravitacionales de Joseph Weber

En los años 60 se introdujo la idea de usar un arreglo interferométrico para detectar las ondas usando un sencillo principio (ver Figura abajo).



**Figura 2.5:** Diseño básico para un interferómetro de ondas gravitacionales como el que usa hoy el LIGO

En este caso los espejos juegan el papel de las masas de prueba y el *beam splitter* representa el origen de coordenadas.

La idea del interferómetro es medir usando interferencia la diferencia entre la distancia, medida a lo largo de una geodésica nula en ambas direcciones, entre el origen de coordenadas (el beam splitter) y los espejos puestos en dirección perpendicular uno de otro.

Para ondas gravitacionales que se propaguen en dirección perpendicular al interferómetro, las ondas electromagnéticas en cada brazo podemos suponer que tienen una componente horizontal del campo eléctrico, después de recorrer la totalidad del brazo igual a:

$$\begin{aligned} E_x^{(L_y)} &= E_0 \sin[k_L(ct - L_y)] \\ E_x^{(L_x)} &= E_0 \sin[k_L(ct - L_x)] \end{aligned}$$

donde  $k_L = 2\pi/\lambda$ .

Cuando los haces interfieren en el origen su campo será:

$$E_x = E_0 \{ \sin[k_L(ct - L_x)] + \sin[k_L(ct - L_y)] \}$$

Usando la identidad:

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \left( \frac{\theta + \phi}{2} \right) \cos \left( \frac{\theta - \phi}{2} \right)$$

el campo total queda:

$$E_x = 2E_0 \sin \left[ k_L \left( ct - \frac{L_x + L_y}{2} \right) \right] \cos \left[ \frac{1}{2} k_L (L_y - L_x) \right]$$

La intensidad promedio de la onda en el vacío será:

$$I = \frac{c\epsilon_0}{2} \langle |E|^2 \rangle$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica del vacío y debemos promediar sobre un período de la onda electromagnética.

El resultado será:

$$I = I_0 \cos^2 \left[ \frac{1}{2} k_L (L_y - L_x) \right]$$

donde  $I_0$  es la máxima intensidad de la interferencia entre las señales, que se produce cuando  $L_y = L_x$  y las dos ondas llegan en fase.

Sabiendo que:

$$L_i = L_0 + \delta L_i$$

entonces

$$L_y - L_x \equiv \Delta L = \delta L_y - \delta L_x$$

y la intensidad se puede finalmente escribir como:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \right) \right]$$

Definiendo  $\delta I / I_0 \equiv 1 - I / I_0$  entonces:

$$\frac{\delta I}{I_0} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \right) \right]$$

### Sensibilidad de los detectores

En el caso de una onda realista  $\Delta L \ll \lambda$  y podemos usar una expansión en series de potencias del coseno para escribir:

$$\frac{\delta I}{I_0} = \pi^2 \left( \frac{\Delta L}{\lambda} \right)^2$$

Si asumimos las mejores condiciones para la detección, es decir que la incidencia es normal y la polarización de la onda esta alineada con los brazos del detector, podemos escribir:

$$\Delta L = \Delta L_{\max} \cos(ku + \phi)$$

de donde:

$$\frac{\delta I}{I_0} = \pi^2 \left( \frac{\Delta L_{\max}}{\lambda} \right)^2 \cos^2(ku + \phi)$$

De modo que de lo que se trata es de detectar cambios en la intensidad increíblemente pequeño que se repiten con el tiempo (factor oscilatorio) con una frecuencia el doble que la frecuencia de la onda.

El LIGO (*Laser Interferometer Gravitational Observatory*) es actualmente sensible a cambios relativos  $\Delta L_{\max}$  similares e incluso menores a 1 mil millonésima de la luz visible ( $\lambda \approx 600$  nm), esto permite detectar cambios en la longitud de sus brazos tan pequeños como:

$$\Delta L_{\max} \lesssim 10^{-9} \times 6 \times 10^{-7} \text{ m} = 6 \times 10^{-16} \text{ m}$$

Un gráfico de la señal de interferencia, para esta situación óptima, se muestra en la figura:

(Algoritmo 2.3)

```
#Constantes
c=3e8

# Propiedad del detector
lamb=6e-7 # Longitud de onda

#Propiedades de la onda
f=100 # Hertz
DLmax=6e-16 # Máxima amplitud de la señal
z=0
fi=0

#Propiedades derivadas de la onda
from numpy import pi
k=2*pi*f/c # Número de onda
P=1/f # Período en segundos

#Gráfico de la señal
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

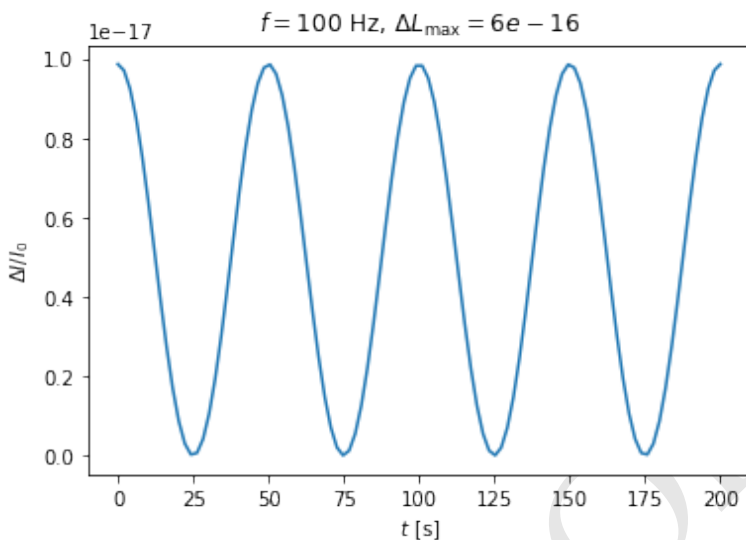
from numpy import linspace,cos
ts=linspace(0,2*f,100)
ax.plot(ts,pi**2*(DLmax/lamb)**2*cos(k*(c*ts-z+fi))**2)

#Decoración
ax.set_title(f"$f={f}$ Hz, $\Delta L_{\mathrm{{max}}}={DLmax}$")
ax.set_xlabel("$t$ [s]");
ax.set_ylabel("$\Delta I/I_0$");
```

ver Figura 2.6

La sensibilidad a la amplitud de la onda que llamaremos  $|h_{\min}|$ , es decir, la amplitud de la onda gravitacional más pequeña que puede percibir el detector, dependerá finalmente de la longitud de los brazos del interferómetro:

$$|h_{\min}| \sim \frac{\delta L}{L} \approx \frac{\Delta L_{\max}}{L}$$

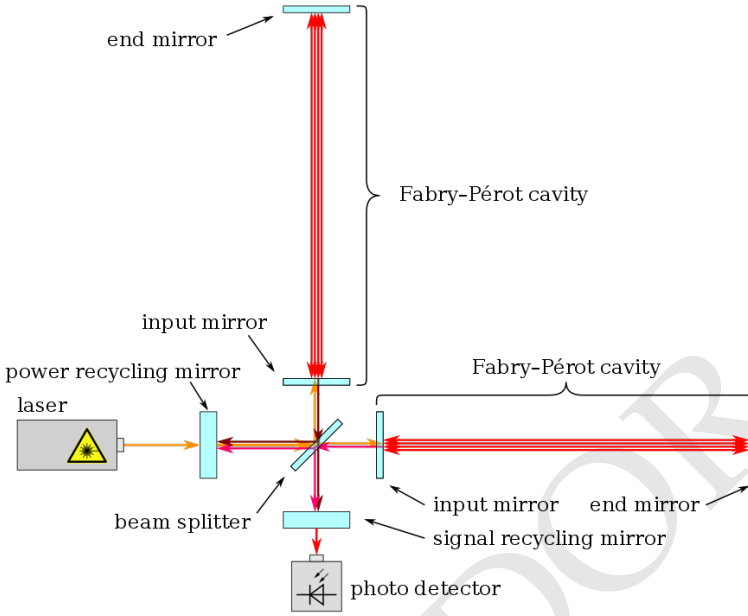


**Figura 2.6:** Figura correspondiente al código 2.3.

entre más largo los brazos, mayor será la sensibilidad.

LIGO usa brazos de 4 km de longitud pero usa un artificio óptico conocido como cavidades resonantes de Fabri-Perot (ver figura abajo) que aumenta la longitud efectiva del brazo hasta  $L = 1200$  km, de modo que la sensibilidad de LIGO avanzado es del orden de:

$$|h_{\min}| \approx \frac{\Delta L_{\max}}{L} \sim 10^{-21}$$



**Figura 2.7:** Diseño real de un interferómetro de ondas gravitacionales como el que usa hoy el LIGO

Las ondas detectables en LIGO serán aquellas que produzcan un *strain* mínimo mayor que el *strain* correspondiente al ruido del detector. Pero dado que la detección no se hace en una única frecuencia como hemos explicado hasta aquí, la sensibilidad a la amplitud de una onda no se puede representar simplemente como un *strain* mínimo. En lugar de ello se usa la que se conoce como la *densidad espectral* del ruido  $S_n(f)$  (cantidad de ruido por unidad de frecuencia), en función de la cuál, el *strain* correspondiente al ruido será (ver [esta referencia](https://arxiv.org/pdf/1408.0740.pdf)<sup>7</sup>):

$$h_n(f) = f^{1/2} \sqrt{S_n(f)}$$

donde  $f$  es la frecuencia de la onda gravitacional.

Para la detección de una onda es necesario que:

$$|h_{\min}(f)| > h_n(f)$$

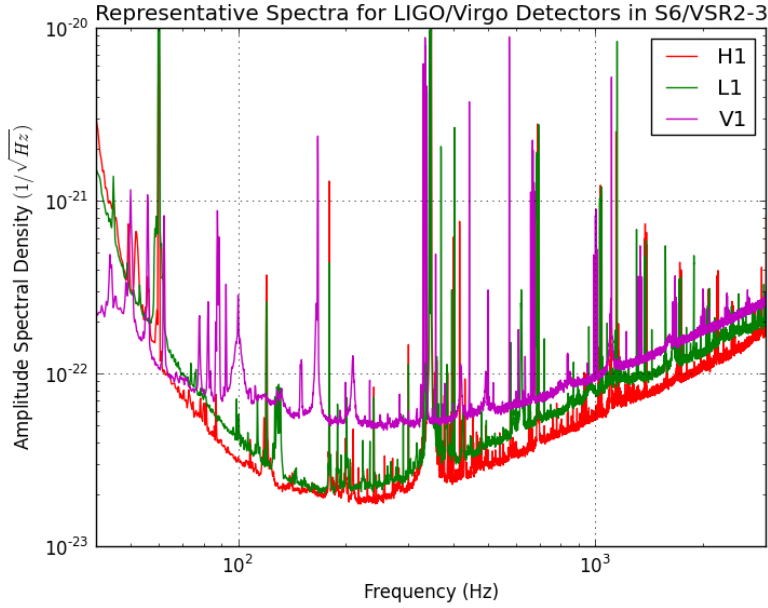
Normalmente lo que se representa para caracterizar la sensibilidad de los instrumentos es  $\sqrt{S_n(f)}$  que se conoce como la *amplitud de densidad espectral* y que tiene unidades de inverso de  $\text{Hz}^{-1/2}$ .

Por eso cuando se trata de entender la sensibilidad usando gráficos como los que se muestran abajo, es necesario multiplicar la sensibilidad provista por el gráfico por la raíz cuadrada de la frecuencia:

$$|h_{\min}| = f^{1/2} \sqrt{S_n(f)}$$

<sup>7</sup><https://arxiv.org/pdf/1408.0740.pdf>





**Figura 2.8:** Sensibilidad de LIGO avanzado como función de la frecuencia de las ondas gravitacionales detectadas. La sensibilidad esta expresada en términos de lo que se conoce como la amplitud de densidad espectral que tiene unidades del inverso de la raíz cuadrada de la frecuencia.

Así por ejemplo, para una frecuencia  $f \sim 100$  Hz la densidad de amplitud espectral de LIGO es (según el gráfico)  $\sim 5 \times 10^{-23} \text{ Hz}^{-1/2}$ , de modo que a esa frecuencia el strain mínimo detectable será:

$$|h_{\min}| \sim \sqrt{100} \times 5 \times 10^{-23} = 0,5 \times 10^{-21}$$

que coincide con el estimativo que habíamos hecho antes.

### 2.1.17. Simulación de una señal

Usando lo visto hasta aquí podemos intentar simular la señal de una o varias ondas gravitacionales llegando a uno o varios detectores interferométricos como LIGO.

Para ello usaremos la ecuación deducida en la sección anterior:

$$\frac{\delta I}{I_0} = \pi^2 \left( \frac{\Delta L}{\lambda} \right)^2$$

donde  $\Delta L = \delta L_y - \delta L_x$  y  $\delta L_i$  es el cambio en la distancia medido a lo largo del eje  $i$  del detector.

La primera condición que debemos entender en un caso completamente general es que la plano y orientación del detector no necesariamente es: 1) perpendicular a la dirección de proveniencia de la onda y 2) los brazos del detector no

necesariamente coinciden con la dirección de la polarización de la onda (el eje  $x$  sobre el que definimos la amplitud  $a_+$ ).

#### Detector con orientación arbitraria

Podemos resolver el primer problema mostrando que la distancia entre el origen de coordenadas y un punto situado en cualquier lugar  $(x, y, z) = L_0(n^x, n^y, n^z)$  en el detector, cambia de acuerdo con la expresión (ver Problemas al final del capítulo):

$$\delta L(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} h_{ij}(ct - n^z s) n^i n^j ds$$

Las coordenadas del punto y dirección del vector unitario  $\hat{n}$  están en el sistema de referencia de la onda gravitacional. Más interesante aún sería expresar el mismo resultado pero en el sistema de referencia del detector que indicaremos aquí con coordenadas primadas.

Si suponemos que la onda gravitacional se propaga en dirección  $\hat{k}'$  en el sistema de referencia del detector (que coincide con la dirección del eje  $z$  del sistema de referencia de la onda gravitacional), dirección que podemos cuantificar con su distancia cenital  $z$  y su azimut  $A$ , la relación entre las componentes de un vector cualquiera  $\vec{A}'$  en el sistema de referencia del detector y las mismas componentes pero en el sistema de referencia de la onda  $\vec{V}$  serán:

$$\vec{V} = R_x(z) R_z(A) \vec{V}'$$

donde  $R_z(A)$  es una matriz de rotación alrededor del eje  $z$  en un ángulo  $A$ , en sentido contrario de las manecillas del reloj:

$$R_z(A) = \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

análogamente:

$$R_x(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos z & \sin z \\ 0 & -\sin z & \cos z \end{pmatrix}$$

La matriz de rotación resultante será:

$$\begin{aligned} R_x(z) R_z(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos z & \sin z \\ 0 & -\sin z & \cos z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos A & \sin A & 0 \\ -\sin A \cos z & \cos A \cos z & \sin z \\ \sin A \sin z & -\cos A \sin z & \cos z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como solamente me interesa saber las direcciones de los brazos del detector, que en su sistema de referencia corresponden a  $\hat{n}'_{(x)} : (1, 0, 0)$  y  $\hat{n}'_{(y)} : (0, 1, 0)$ , los

únicos dos puntos de interés para calcular el cambio en la longitud de los brazos serán:

$$\begin{aligned}\hat{n}_{(x)} &: (\cos A, -\sin A \cos z, \sin A \cos z) \\ \hat{n}_{(y)} &: (\sin A, \cos A \cos z, -\cos A \sin z)\end{aligned}$$

Nótese que si la onda gravitacional se dirige hacia arriba  $z = 0$  de modo que su eje  $x$  coincide con el eje  $x$  del detector,  $A = 0$  las componentes de los vectores unitarios en el sistema de la onda coincidirán con las del detector. Si por el contrario la onda se dirige directamente hacia abajo ( $z = \pi, A = 0$ ), el eje  $y$  del detector corresponderá al negativo del eje  $y$  de la onda, lo que coincide con nuestras expectativas.

### Suma de ondas gravitacionales

Dado que estamos bajo la aproximación de gravedad linearizada, sabemos que si  $N$  ondas inciden sobre el detector produzcan una perturbación total  $H_{ij}$  que será simplemente la suma de todas las ondas individuales:

$$H_{ij}(u) = \sum_{n=1}^N h_{ij}^{(n)}(u; k^{(n)}, a_+^{(n)}, a_\times^{(n)}, \phi^{(n)})$$

donde asumimos que todas las ondas vienen de la misma dirección y están polarizadas en la misma dirección y  $u = ct - z$ .

Donde la perturbación métrica es:

$$h_{ij}(u; k, a_+, a_\times, \phi) = \begin{cases} 0 & \text{Si } i = 3 \quad j = 3 \\ a_\times \cos(ku + \phi) & \text{Si } i \neq j \\ a_+ \cos(ku + \phi) & \text{Si } i = j = 1 \\ -a_+ \cos(ku + \phi) & \text{Si } i = j = 2 \end{cases}$$

### Implementación numérica

Vamos ahora a ensamblar las componentes que hemos desarrollado anteriormente.

Para ello comenzamos definiendo la perturbación de la onda debida a la superposición de muchas ondas planas:

```
from numpy import cos
CLIGHT=3e8 # m/s
def Hij(i,j,u,ondas):
    ks=2*pi*ondas["f"]/CLIGHT
    coskus=cos(ks*u+ondas["fi"])
    if i==3 or j==3: return 0
    if i!=j: h=(ondas["ac"]*coskus).sum()
    elif i==1: h=(ondas["ap"]*coskus).sum()
    elif i==2: h=(-ondas["ap"]*coskus).sum()
    return h
```

Las propiedades de las ondas son:

```

#Propiedades de la onda plana
from numpy import array
ondas=dict(
    f=array([100,100]), # Hertz
    ap=array([1e-21,1e-21]),
    ac=array([0.0,0.0]),
    fi=array([0,0]), # Rad
)
#Periodo de la primera onda
P=1/ondas["f"][0] #Segundos

#Dirección de proveniencia
from numpy import pi
A=0*pi/180 # Rad
z=0*pi/180 # Rad

#Vectores unitarios
from numpy import cos,sin
nx=array([cos(A),-sin(A)*cos(z),sin(A)*cos(z)])
ny=array([sin(A),cos(A)*cos(z),-cos(A)*sin(z)])

```

Período onda 1 = 0.01 segundos

$n(x) = [1. \ 0. \ 0.]$

$n(y) = [0. \ 1. \ 0.]$

Con estas propiedades, valores típicos de la perturbación métrica serán:

$H_{11}(u=0) = 2e-21$

$H_{22}(u=0) = -2e-21$

$H_{12}(u=0) = 0.0$

Las propiedades del detector serán:

```

detector=dict(
    #Tamaño de los brazos
    L=1.2e6, # metros
    #Longitud de onda
    lamb=6.0e-7, #metros
)

```

El cambio en la distancia en dirección al vector  $\hat{n}$  se puede calcular con esta rutina:

```

from scipy.integrate import quad as integral
def deltaL(t,n,ondas,detector):
    def integrando(s):
        u=CLIGHT*t-n[2]*s
        return Hij(1,1,u,ondas)*n[0]*n[0]+\
            Hij(2,2,u,ondas)*n[1]*n[1]+\
            2*Hij(1,2,u,ondas)*n[0]*n[1]
    dL=integral(integrando,0,detector["L"])[0]
    return dL

```

Valores típicos de la deformación de los brazos del detector serán:

```
delta L (0,nx) = 2.4e-15
delta L (0,ny) = -2.4e-15
```

Ahora necesitamos implementar una rutina que nos dé la señal:

```
def Iinterf(t,n_x,n_y,ondas,detector):
    dL_x=deltaL(t,n_x,ondas,detector)
    dL_y=deltaL(t,n_y,ondas,detector)
    DL=dL_y-dL_x
    deltaI=pi**2*(DL/detector["lamb"])**2
    return deltaI
```

Un valor típico de la señal de interferencia será:

```
print(f"dI/I (t=0) = {Iinterf(0,nx,ny,ondas,detector)}")
```

```
dI/I (t=0) = 6.316546816697189e-16
```

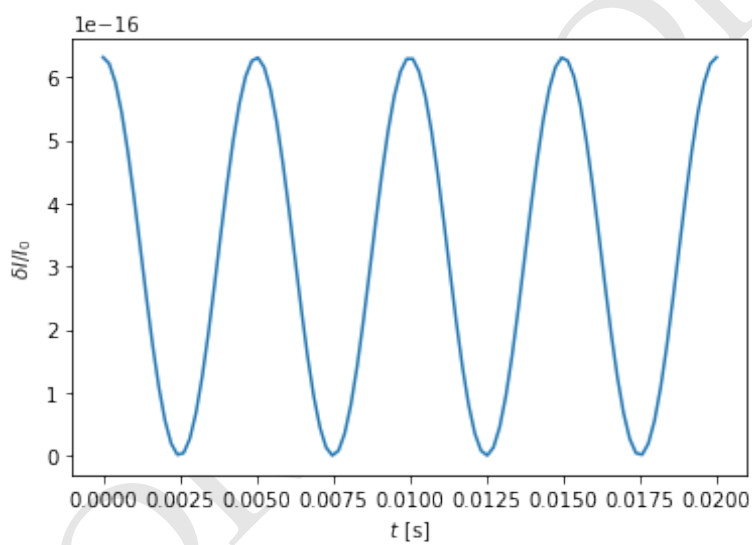
(Algoritmo 2.4)

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

from numpy import linspace
ts=linspace(0,2*P,100)
deltaIs=[]
for t in ts:
    deltaIs+= [Iinterf(t,nx,ny,ondas,detector)]
ax.plot(ts,deltaIs)

ax.set_xlabel("$t$ [s]")
ax.set_ylabel("$\delta I/I_0$");
```

ver Figura 2.9



**Figura 2.9:** Figura correspondiente al código 2.4.

# Bibliografía

BORRADOR