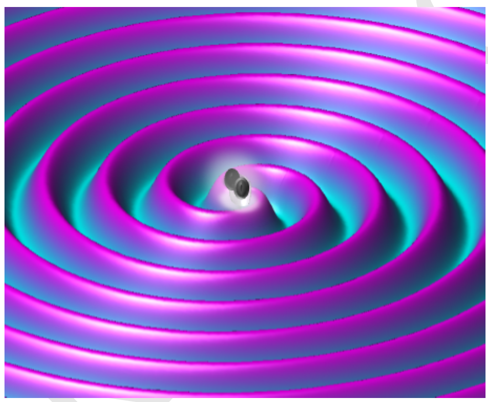
Relatividad y Gravitación

Teoría, algoritmos y problemas



Jorge I. Zuluaga

Profesor titular de Física y Astronomía

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Antioquia

6 de marzo de 2020

Índice general

Índice de figuras

Capítulo 1

Relatividad Especial

Resumen. Este capítulo esta dedicado a la Relatividad especial.

1.1. Motivación

¿Qué son las leyes de la física?. Son regularidades observadas (¿o reales?) en los fenómenos que vemos en el mundo. Estas regularidades se expresan normalmente como relaciones matemáticas entre cantidades observadas.

Tomen por ejemplo esta regularidad:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Siempre que un cuerpo de masa m (una propiedad intrínseca suya), es sometido a una "perturbación" (una fuerza $\vec{F}$), el cuerpo, sin importar el estado de movimiento en el que estaba, cambia su estado en una magnitud $\vec{a}$ (aceleración).

Esta regularidad ha sido observada en los laboratorios en la Tierra (edificios). ¿Pero es válida en el resto del Universo y para todos los observadores?. Esta es la pregunta del millón de la física y el corazón de la relatividad.

Conjetura 1.1

Las leyes de la física son universales. Cualquiera sea la regularidad que llamemos *ley física* debe ser realmente universal, debe cumplirse en todas partes, a todas horas y con independencia de quién la registre. En caso contrario lo que tendríamos sería solo una regularidad contingente.

1.2. Conceptos básicos

Para abordar la pregunta básica de la sección anterior debemos primero introducir una serie de conceptos:

- **Cantidad física**. Las leyes físicas son patrones matemáticos entre números (y otras entidades matemáticas) que asociamos a los fenómenos. Piense por ejemplo en la velocidad. Es un número que asociamos al desplazamiento de un cuerpo en el tiempo. Para definir cualquier cantidad física se necesitan: patrones (comparación), una calibración (definir los ceros o puntos de referencia) e instrumentos (dispositivos que realicen la comparación).

  Por ejempl para medir la posición (lugar) uso como partrón una varilla de longitud fija, mi calibración es el lugar que escojo como punto de partida y el instrumento de medida es la misma varilla. Para medir el tiempo (fecha) uso como patrón un fenómeno repetitivo, como calibración escojo el instante a partir del cuál contar las oscilaciones y el instrumento es un reloj.

  Para obtener el *valor* de una cantidad física se pueden usar medios directos o indirectos. Preferimos los medios directos que implican la comparación de lo medido con el instrumento (el patrón y la calibración) **localmente**: es decir debemos poner el instrumento donde ocurre el fenómeno.

- **Espacio-tiempo**. Es el escenario en el que ocurre el universo. Matemáticamente es un espacio geométrico en el que a todo lugar e instante se le asocian unas coordenadas:

$$[x^{\mu}]_{\mu=0,1,2,3}$$

  esta será una notación que usaremos en lo sucesivo y que adoptará sentido más adelante.

- **Evento**. Es uno de los puntos del espacio-tiempo. Un evento físico es equivalente

- **Observador**. También llamado (de forma intercambiable) **sistema de referencia**. Un observador es una entidad que registra cualquier cantidad física que ocurre en el espacio-tiempo usando un conjunto (infinito) de instrumentos físicos, que usan el mismo patrón y calibración, distribuídos (idealmente) por todos los eventos del espacio-tiempo. El observador lleva un registro de todos los fenómenos sin importar que tan lejos estén del lugar espacial en el que se encuentre.

Existen un conjunto de leyes que fueron formuladas originalmente con la idea de universalidad que mencionamos antes. Son las leyes del movimiento de Newton:

- **Ley de Inercia**. En la ausencia de fuerzas (interacciones) el *estado de movimiento* se conserva.
- **Ley de fuerza**. La acción de una fuerza cambia el *estado de movimiento*.
- **Ley de acción y reacción**. El cambio en el estado de movimiento de un sistema A que interactúa con otro B, es igual en magnitud pero de sentido contrario, que el cambio de movimiento que experimenta B.

Sabemos que estas leyes de pueden resumir en una sola relación matemática. Si definimos la *cantidad de movimiento* o momento lineal $\vec{p} \equiv m\vec{v}$, entonces:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

Este conjunto de leyes se mantienen las mismas si se usan **observadores inerciales**.

Definición 1.1

observador inercial. Es un observador para el cuál sus registros muestran que la la ley de inercia es válida.

Registrar la validez de la ley de inercia no es experimentalmente fácil.

> **Proposición: Observadores con velocidad relativa constante**. Si un observador O es por definición o demostración inercial, cualquier observador O' cuyo origen de coordenadas se mueva respecto al origen de coordenadas de O con velocidad $\vec{u}$ constante, será también un observador inercial.

1.3. Principio de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo

Postulado 1.1

Principio de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo. Cualquier experimento que se realice en un sistema de referencia inercial tendrá exactamente el mismo resultado sin importar dónde se realice (homogeneidad) o en que tiempo se realice. Alrededor de todos los eventos del espacio-tiempo, los experimentos producen las mismas regularidades.

De acuerdo al principio de homogeneidad, todos los observadores inerciales que solo difieran por su origen en el espacio o por su origen en el tiempo registraran las mismas leyes de la física. Se puede probar que el principio de homogeneidad e isotropía es *equivalente* lógicamente al principio fundacional de la teoría de la relatividad.

Postulado 1.2

Principio de relatividad especial. Todas las leyes de la física deben ser iguales para todos los observadores inerciales.

1.4. La relatividad Newtoniana

Una cosa es decir que las leyes son las mismas y otra muy distinta es demostrar que lo son.

Las leyes son relaciones matemáticas entre cantidades físicas de modo que para demostrar su validez hay que probar que las relaciones son las mismas.

Definición 1.2

Covarianza de las leyes físicas. Llamamos *covarianza* de una ley física al hecho de que su forma matemática no se modifique independientemente de las transformaciones geométricas (cambios de sistemas de referencia o coordenadas) que se operen.

La pregunta es: dos observadores inerciales S y S' que miden cantidades físicas distintas $m, \vec{v}, \vec{r}$ y $\vec{F}$ (y las respectivas cantidades primadas), al describir las mismas regularidades llegaran a:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}'}{\mathrm{d}t'} = \vec{F}'$$

Para ello debemos *postular* (¿o deducir?) la relación entre las cantidades implicadas.

Definición: Transformaciones de Galileo-Newton. La siguiente es la relación entre las cantidades cinemáticas y dinámicas básicas entre dos observadores inerciales:

$$\begin{array}{rcl} t' & = & t \\ m' & = & m \\ \vec{F}' & = & \vec{F} \\ \vec{r}' & = & \vec{r} - \vec{u}t \end{array}$$

> donde $\vec{u}$ es la velocidad relativa en el espacio entre los dos observadores.

Puede probarse que si las leyes de Newton son válidas en O también lo serán en O'.

1.5. El problema del electromagnetismo

Pero las leyes de la física no se restringen a la mecánica. También están las leyes de la termodinámica, la óptica, el electromagnetismo, la física nuclear, etc. ¿Son también estas leyes covariantes bajo las transformaciones de Galileo-Newton.

Tomemos el caso por ejemplo de dos leyes básicas del electromagnetismo:

- La ley de Faraday (ley de inducción en el vacío):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E}$$

- La ley de Ampere-Maxwell (en el vacío y sin corrientes):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

Verifiquemos si son las mismas bajo las transformaciones de Galileo-Newton:

1.6. Las transformaciones de Lorentz-Einstein

Como vemos las leyes del electromagnetismo no son covariantes bajor las TGN. ¿Qué está mal? ¿las transformaciones o las leyes del EM?. Supongamos que son las transformaciones.

Postulado 1.2

Covarianza manifiesta de las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones de Maxwell son *manifiestamente* covariantes, es decir, la forma en la que fueron escritas originalmente por Maxwell es covariante para observadores inerciales.

Este postulado es fuerte en el sentido en el que da mucha confianza a un conjunto de ecuaciones que esencialmente se obtienen a partir de experimentos. Esta es una prueba de la confianza que tenían los Einstein en el electromagnetismo incluso sobre

Como ya vimos que las ecuaciones no son covariantes bajo las transformaciones de Galileo-Newton, debemos encontrar un conjunto nuevo de transformaciones con las cuales las ecuaciones de Maxwell si son covariantes. Para ello asumamos que existe una familia de transformaciones lineal más generales que relacionan las coordenadas.

$$t' = a_{tt}t + a_{tx}x \tag{1.1}$$
$$x' = a_{xt}t + a_{xx}x \tag{1.2}$$
$$\tag{1.3}$$

donde los coeficientes a_{tt}, a_{tx}, a_{xt}, a_{xx} son cantidades que no dependen de la posición, ni del tiempo y a lo sumo pueden depender de la velocidad relativa u entre los sistemas coordenados:

$$a_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}(u)$$

donde $\mu : t, x$.

Nota

Las transformaciones entre sistemas inerciales son lineales. En principio las transformaciones entre las variables de dos sistemas de referencia podrían tener una forma funcional arbitraria:

$$\begin{aligned} t' &= t'(t,x) \\ x' &= x'(t,x) \end{aligned}$$

sin embargo la definición misma de observador inercial, sumado al principio de homogeneidad e isotropía, restringen el número posible de funciones.
Por la definición de sistema de referencia inercial, debe cumplirse que si el observador O observa una partícula que se mueve con velocidad constante $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ constante (no actúa ninguna fuerza sobre ella), también el observador O' debe medir $v' = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$ constante. Para calcular esta última cantidad primero podemos determinar los diferenciales:

$$\mathrm{d}x' = \mathrm{d}t\left(\frac{\partial x'}{\partial x}v + \frac{\partial x'}{\partial t}\right) \tag{1.4}$$

$$\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\left(\frac{\partial t'}{\partial x}v + \frac{\partial t'}{\partial t}\right) \tag{1.5}$$

$$\tag{1.6}$$

de donde se sigue que:

$$v' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{v\partial x'/\partial x + \partial x'/\partial t}{v\partial t'/\partial t + \partial t'/\partial t}$$

de esta última expresión se ve que solo si las derivadas parciales respecto al espacio y el tiempo de las reglas de transformación son constantes, es decir, solo si las transformaciones son líneales, entonces v constante implicará v' constante y viceversa.

Sin necesidad de conocer la forma funcional de los coeficientes de las transformaciones generales, es posible encontrar algunas propiedades básicas que nos permiten simplificar mucho la búsqueda de sus valores. Así por ejemplo:

1. Por la definición misma de observador inercial sabemos que el origen del sistema O' esta localizado en $x' = 0$ según su propio sistema de referencia, mientras que en el sistema O se encuentra ubicado en $x = ut$. Reemplazando estas dos condiciones en la Ec. (1.2) obtenemos:

$$0 = a_{xt}t + a_{xx}ut$$

Para $t > 0$ esta condición implica que $a_{xt} = -ua_{xx}$ con lo que la Ec. (1.2) se escribe:

$$x' = a_{xx}(-ut + x) \qquad (1.7)$$
$$(1.8)$$

2. Un razonamiento similar pero aplicado al origen del sistema O para el cual $x = 0$ y $x' = -ut'$ conduce a las condiciones:

$$\begin{array}{rcl} t' & = & a_{tt}t \\ -ut' & = & -ua_{xx}t \end{array}$$

   Para $t > 0$, $t' > 0$ lo que implica: 1) $a_{tt} > 0$ y 2) dividiendo término a término las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$a_{tt} = a_{xx} \equiv \gamma(u) > 0$$

   donde hemos introducido la función $\gamma(u)$.

3. Si introducimos un tercer observador O'' que se mueve con velocidad $-u$ (en dirección del eje x respecto de O, el tiempo de eventos en el origen de coordenadas de O registrados por O'' será:

$$t'' = \gamma(-u)t$$

   Ahora bien, por la postulado de isotropía, un obervador que se dirige hacia $+x$ y uno que se dirije hacia $-x$ deben producir las mismas medidas de un evento en el lugar común $x = 0$, es decir para este evento $t'' = t'$ y por lo tanto:

$$\gamma(-u) = \gamma(u)$$

Con estas propiedades, la transformación general de coordenadas entre observadores inerciales que satisfacen el postulado de homogeneidad e isotropía se pueden escribir como:

$$t' = \gamma(u)(t + bx) \qquad (1.9)$$
$$x' = \gamma(u)(-ut + x) \qquad (1.10)$$
$$(1.11)$$

donde hemos definido $b \equiv a_{tx}/\gamma$.

No es difícil mostrar que las derivadas parciales respecto a las variables espacio-temporales serán entonces:

$$\partial_t = \gamma(\partial_{t'} - u\partial_{x'}) \qquad (1.12)$$
$$\partial_x = \gamma(b\partial_{t'} + \partial_{x'}) \qquad (1.13)$$
$$\partial_y = \partial_{y'} \qquad (1.14)$$
$$\partial_z = \partial_{z'} \qquad (1.15)$$

El reto consiste en encontrar las cantidades γ y b de la transformación tal que las ecuaciones de Maxwell sean covariantes.

La componente z de la ley de Faraday:

$$\frac{1}{c}\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

es:

$$\frac{1}{c}\partial_t B_z = \partial_z E_x - \partial_x E_y \tag{1.16}$$

Escrita después de aplicar las transformaciones de las derivadas será:

$$\frac{1}{c}\gamma(\partial_{t'} - u\partial_{x'})B_z = \partial_z E_x - \gamma(b\partial_{t'} + \partial_{x'})E_y$$

reuniendo términos semejantes:

$$\frac{1}{c'}\partial_{t'}\left[\gamma\left(\frac{c'}{c}B_z + bcE_y\right)\right] = \partial_z E_x - \partial_{x'}\left[\gamma\left(E_y - \frac{u}{c}B_z\right)\right]$$

Para que la ley de Faraday sea covariante y la ecuación anterior tenga la misma forma que la Ec. (1.16) se debe cumplir que:

$$B'_z = \gamma\left(\frac{c'}{c}B_z + bcE_y\right) \tag{1.17}$$

$$E'_y = \gamma\left(E_y - \frac{u}{c}B_z\right) \tag{1.18}$$

Por otro lado, la componente y de la ley de Ampere-Maxwell:

$$\frac{1}{c}\partial_t \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

es:

$$\frac{1}{c}\partial_t E_y = \partial_y B_x - \partial_x B_z \tag{1.19}$$

Aplicando un procedimiento análogo obtenemos que para que esta ecuación sea covariante bajo la transformación lineal general definida antes, la regla de transformación de las componentes z y y de los campos debería ser:

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{u}{c}E_y\right) \tag{1.20}$$

$$E'_y = \gamma\left(\frac{c'}{c}E_y + bcB_z\right) \tag{1.21}$$

Es claro que para que las Ecs. (1.17),(1.18) y (1.20),(1.21) correspondan al mismo conjunto de ecuaciones, sin importar cuál es el valor de los campos se debe cumplir que:

$$c' = c$$

y

$$b = -\frac{u}{c^2}$$

De donde obtenemos nuestro primer resultado significativo:

Proposición 1.3

Invarianza de la velocidad de la luz. La velocidad de la luz medida por dos observadores inerciales diferentes es siempre la misma:

$$c = c'$$

Esta conclusión es muy interesante y contraintuitiva. La velocidad de propagación de la luz juega un papel central en la relatividad y en la física en general. Lograr que su valor sea una cantidad constante independiente del observador inercial es significativo. No era para menos puesto que sabemos que la cantidad en la teoría electromagnética deènde de dos constantes de la naturaleza:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

En la versión original de la teoría presentada por los Einstein, la constancia de la velocidad de la luz aparece como una hipótesis sin ninguna justificación. La aproximación utilizada aquí, por lo menos, obtiene este resultado como consecuencia de la covarianza de las ecuaciones de Maxwell, es decir es un teorema que se deriva de un postulado muy razonable, a saber que las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo son *manifiestamente covariantes*.

Adicionalmente encontramos la manera como se relacionan las componentes y y z de los campos eléctrico y magnético:

$$B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{u}{c}E_y\right) \tag{1.22}$$

$$E'_y = \gamma\left(E_y - \frac{u}{c}B_z\right) \tag{1.23}$$

Solo nos queda una cuestión por resolver: ¿cuánto vale γ?.

La inversa de las transformaciones en las Ecs. (1.22) y (1.23) se puede obtener cambiando u por $-u$:

$$B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{u}{c}E'_y\right) \tag{1.24}$$

$$E_y = \gamma\left(E'_y + \frac{u}{c}B'_z\right) \tag{1.25}$$

donde hemos usado el hecho que $\gamma(-u) = \gamma(u)$.

Las 4 ecuaciones anteriores son completamente independientes. Conociendo el valor de γ y u, podrían usarse para encontrar el valor de cualquier componente del campo en función de las demás. Pero una característica curiosa que tienen es que pueden usarse también para encontrar el valor de gamma.

Si reemplazamos el B_z de la Ec. (1.24) y el E_y de la Ec. (1.25) en la ecuación para B'_z (Ec. 1.22) obtenemos:

$$B'_z = \gamma \left[\gamma \left(B'_z + \frac{u}{c} E'_y \right) - \frac{u}{c} \gamma \left(E'_y + \frac{u}{c} B'_z \right) \right]$$

y reuniendo los términos comunes obtenemos:

$$\left[1 - \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) \right] B'_z = 0$$

Puesto que suponemos que esta relación es válida para cualquier campo magnético, entonces:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Proposición 1.4

Transformaciones de Lorentz-Einstein (TLE). Las transformaciones de coordenadas que dejan covariantes las ecuaciones de Maxwell ante cambios de observador inercial con velocidad relativa $u_x = u$ son:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - ux/c^2 \right) \\ x' &= \gamma \left(-ut + x \right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1.26}$$

donde:

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{1.27}$$

se conocerá en lo sucesivo como el **factor de Lorentz** o **factor de Einstein**.

Una interesante consecuencia matemática de todo el razonamiento anterior es:

Proposición 1.5

La velocidad de la luz es la máxima velocidad relativa. Dado que $\gamma > 0$ y es real, es fácil mostrar que siempre:

$$0 \leq u < c$$

.

1.7. Propiedades de las TLE

Las transformaciones de Lorentz-Einstein juegan un papel central en el estudio de todas las propiedades del espacio-tiempo que se derivan de los postulados de la relatividad.

Postulado 1.6

Postulado de relatividad espacial. Todas las leyes de la física son covariantes bajo las transformaciones de Lorentz-Einstein.

1.7.1. Unidades luz

La característica más notable de las TLE es que combinan espacio y tiempo en un mismo conjunto de ecuaciones de transformación. Este hecho de entrada rompe con el tiempo absoluto de la física newtoniana.

Al hacerlo sin embargo crea el problema de que en una misma ecuación (y en otros contextos en la teoría) tengamos cantidades muy diferentes desde el punto de vista físico y dimensional como lo son el tiempo y el espacio.

Una manera de subsanar este inconveniente es midiendo una de estas cantidades con unidades análogas a la otra. En Astronomía estamos por ejemplo acostumbrado a medir las distancias con unidades de tiempo cuando decimos que la estrella más cercana esta a 4.2 años-luz (al) de distancia. Dada una cantidad x, medida en unidades de longitud, la cantidad equivalente medida en unidades de tiempo será:

$$x_L = \frac{x}{c}$$

donde $[x_L]$ =sl (segundos luz).

Menos frecuente es usar unidades de distancia para referirse al tiempo. De manera análoga a como medimos 1 segundo-luz (sl), podemos definir 1 metro-luz como el tiempo que le toma a la luz recorrer un metro. El tiempo t_L en metros luz se calcula como:

$$t_L = ct$$

En unidades luz, la velocidad (la rapidez o cualquier componente) es:

$$v_L = \frac{\mathrm{d}x_L}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{c}$$

1.7.2. La TLE como una rotación hiperbólica

Las transformaciones de Lorentz en términos de cantidades escritas en unidades luz serán:

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - u_L x_L\right) \\ x'_L &= \gamma\left(-u_L t + x_L\right) \end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{aligned} t'_L &= \gamma\left(t_L - u_L x\right) \\ x' &= \gamma\left(-u_L t_L + x\right) \end{aligned}$$

En ambos casos podemos si definimos $u_L \equiv u/c$, que no es otra cosa que la rapidez medida en unidades luz, las TLE se pueden escribir de forma:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x'_L \end{pmatrix} = \Lambda(u_L) \begin{pmatrix} t \\ x_L \end{pmatrix}$$

donde

$$\Lambda(u_L) \equiv \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma u_L \\ -\gamma u_L & \gamma \end{pmatrix}$$

y $\gamma = (1 - u_L^2)^{-1/2}$.

Esta matriz tiene dos propiedades interesantes:

1. $\det \Lambda = 1$
2. $\Lambda(u_L)^{-1} = \Lambda(-u_L)$

Que son las mismas propiedades de las matrices de rotación:

$$R(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

lo que sugiere que podemos considerarla como tal. Pero hay un inconveniente. Los signos de la diagonal de la matriz TLE no son contrarios. Pero hay una solución para ello y es usar una matriz de rotación hiperbólica:

$$R_h(\phi) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix}$$

donde ϕ más que un ángulo, es un parámetro de rotación.

Si hacemos la identificación:

$$\cos\phi \equiv \gamma$$

es fácil probar que

$$\sin\phi = \gamma u_L$$

por lo que concluímos que la transformación que relaciona las coordenadas espacio-tiempo de dos observadores inerciales con velocidad relativa u_L es una rotación hiperbólica con parámetro $\cos\phi = \gamma(u_L)$.

Definición 1.3

Vector posición en el espacio-tiempo. Al vector:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} t \\ x_L \\ y_L \\ z_L \end{pmatrix}$$

lo llamaremos el vector posición en el espacio-tiempo.

1.7.3. Las TLE y la notación de Einstein

Otra manera de escribir la TLE aprovechando que puede expresarse matricialmente es:

$$x'_\mu = \sum_\nu \Lambda_{\mu\nu} x_\nu$$

donde $\mu, \nu : 0(t), 1(x), 2(y), 3(z)$ y $\Lambda_{\mu\nu}$ son las componentes de la matriz de rotación.

Con lo común que será manipular expresiones como estas, estar escribiendo sumatorias por todas partes se hace muy incómodo. Para evitarlo Einstein invento una notación que se vale de una importante propiedad matemática.

Definición 1.4

componentes covariantes y contravariantes de un vector. Dado un espacio coordenado de 4 dimensiones, y un conjunto de 4 vectores $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ no paralelos entre sí (que llamaremos base). Cualquier vector $\vec{v}$ en el espacio tiene asociados 4 números que llamamos sus componentes, definidos de la siguiente maneral:

1. **Componentes contravariantes**, $\vec{v} : (v^0, v^1, v^2, v^3)$, que son tales que:

$$\vec{v} = v^0\vec{e}_0 + v^1\vec{e}_1 + v^2\vec{e}_2 + v^3\vec{e}_3$$

Los llamamos *contravariantes* porque si un cambio de escala modifica las longitudes de $\vec{e}_\mu$ por un factor k, las componentes v^μ se modificaran por un factor $1/k$ (*contrario* a los vectores de base).

2. **Componentes covariantes**, $\vec{v} : (v_0, v_1, v_2, v_3)$, que son tales que:

$$v_0 = \vec{v} \cdot \vec{e}_0,\ v_1 = \vec{v} \cdot \vec{e}_1,\ v_2 = \vec{v} \cdot \vec{e}_2,\ v_3 = \vec{v} \cdot \vec{e}_3$$

Los llamamos *covariantes* porque si un cambio de escala modifica las longitudes de $\vec{e}_\mu$ por un factor k, las componentes v^μ se modificaran por un factor k (*contrario* a los vectores de base).

Las componentes contravariantes y covariantes de un vector coinciden si: 1) El producto punto es el definido en el espacio euclidiano y 2) si los vectores de la base son ortogonales[a].

[a] Un video con una explicación de la diferencia entre componentes contravariantes y covariantes puede encontrarse aquí: https://www.youtube.com/watch?v=CliW7kSxxWU

Nótese que en términos compactos cualquier vector se puede escribir en términos de sus componentes contravariantes como:

$$\vec{v} = \sum_\mu v^\mu \vec{e}_\mu$$

Para abreviar la expresión anterior usaremos en lo sucesivo la convención de que cuándo en una suma, los índices se repiten (normalmente en posiciones covariantes y contravariantes) entonces, la sumatoria correspondiente al índice se puede eliminar. Al índice lo llamamos también un *índice mudo* y su nombre puede cambiarse a voluntad. Así:

$$\vec{v} = \sum_{\mu} v^{\mu} \vec{e}_{\mu} = v^{\mu} \vec{e}_{\mu} = v^{\nu} \vec{e}_{\nu}$$

En lo sucesivo y en un espíritu similar, usaremos la expresion v^{μ} para referirnos al vector $\vec{v}$ mismo.

En términos de la notación de Einstein y de las componentes contravariantes del vector posición en el espacio tiempo x^{μ} las TLE se pueden escribir como:

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$$

aquí ν es un índice mudo y μ' es el índice de la ecuación.

Las componentes explícitas de la matriz $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ son, cuando la velocidad va en la dirección del eje x:

$$\begin{gathered} \Lambda^{0'}_{0} = \Lambda^{1'}_{1} = \gamma \\ \Lambda^{2'}_{2} = \Lambda^{3'}_{3} = 1 \\ \Lambda^{0'}_{1} = \Lambda^{1'}_{0} = -u_L \gamma \end{gathered}$$

1.7.4. Las TLE generales

Las transformaciones deducidas hasta aquí asumían que la velocidad relativa entre los sistemas de referencia inerciales iba en la dirección del eje x. Aunque siempre es posible hacer esa elección, puede ser también común que otras direcciones sean más importantes para definir nuestro sistema de coordenadas. Por tal razón tiene mucho interés escribir las TLE cuando $\vec{u}$ es arbitraria.

Proposición 1.7

Transformaciones de Lorentz-Einstein vectoriales. Si dos sistemas de referencia O y O' tienen velocidad relativa $\vec{u}$, sus medidas de espacio y tiempo se relacionan a través de:

$$t' = \gamma \left(t - \vec{u}_L \cdot \vec{r}_L \right) \tag{1.28}$$

$$\vec{r}\,'_L = \vec{r}_L + \left(\frac{\gamma - 1}{u_L^2} \vec{u}_L \cdot \vec{r}_L - \gamma t \right) \vec{u}_L \tag{1.29}$$

Esta transformación general puede entenderse si se escribe $\vec{r} = r_{\parallel} \hat{u} + r_{\perp} \hat{v}$, donde $\hat{v} \cdot \hat{u} = 0$. Remplazando, la transformación queda:

$$
\begin{aligned}
t' &= \gamma\left(t - u_L r_\parallel\right)\\
r'_\parallel &= r_\parallel + \left(\frac{\gamma-1}{u_L^2} u_L r_\parallel - \gamma t\right) u_L\\
&= \gamma(-u_L t + r_\parallel)\\
r'_\perp &= r_\perp
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

que es exactamente la TLE original.

Es posible probar que las componentes de la matriz de rotación del TLE en el caso general son:

$$\Lambda^{0'}_0 = \gamma \Lambda^{0'}_i = \Lambda^{i'}_0 = -\gamma u^i_L \Lambda^{i'}_j = \delta_{ij} + (\gamma-1) u^i_L u^j_L / u^2_L$$

1.7.5. El valor del factor de Lorentz-Einstein

Las TLE dependen del valor de u_L y del factor de Lorentz γ. Es importante familiarizarse con el valor de estas cantidades.

La primera propiedad importante es que $u_L < 1$ y por lo tanto $\gamma > 1$. Ahora bien para velocidades comunes (la velocidad de un vehículo, un avión, un planeta, incluso una estrella o una galaxia), $u_L \ll 1$. Por la misma razón entonces el factor se puede expandir usando el teorema del binomio:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u_L^2}} = 1 + \frac{u_L^2}{2} + \mathcal{O}(\sqcap^{\ni}_{\mathcal{L}})$$

o lo que es lo mismo:

$$\gamma - 1 = \frac{u_L^2}{2} + \mathcal{O}(\sqcap^{\ni}_{\mathcal{L}})$$

A menudo es más fácil calcular $\gamma - 1$ que γ mismo.

Un gráfico del factor de Lorentz como función de la fracción u_L se muestra en la figura abajo.

(Algoritmo 1.1)

```
from numpy import log10,sqrt,logspace
us=logspace(log10(1e-5),log10(0.9999),1000)
gammas=1/sqrt(1-us**2)-1
gamma_approx=us**2/2

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure()
ax=fig.gca()

ax.plot(us,gammas,label='Exacto')
ax.plot(us,gamma_approx,label='Aprox. binomial')
```

```
ax.set_xscale("log")
ax.set_yscale("log")
ax.set_xlim((1e-5,1e0))
ax.set_ylim((1e-11,1e1))

ax.set_label(r"$u/c$")
ax.set_ylabel(r"$\gamma-1$")
ax.grid()
```

ver Figura 1.1

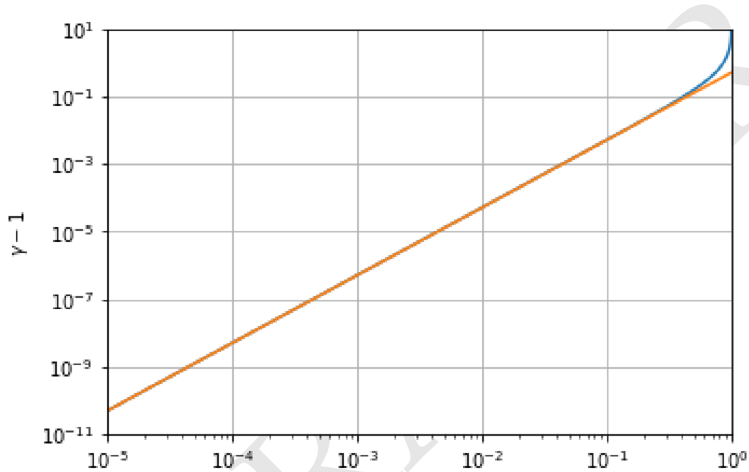


Figura 1.1: *Figura correspondiente al código 1.1.*

Nótese que la aproximación $\gamma = u_L^2/2$ es suficientemente buena (error relativo menor a 1 %) hasta $u_L \approx 0{,}2$

1.7.6. Mapas de la TLE

¿Cómo se ven gráficamente las TLE?. Para mostrar cómo se ven la TLE podemos definir esta rutina general que permite el cálculo de $x^{\mu'}$ dados los valores de x^{μ}:

(Algoritmo 1.2)

```
def Lambda_TLE(u):
    from numpy import zeros
    Lambda=zeros((4,4))

    #Factor de Lorentz
    umag=(u[0]**2+u[1]**2+u[2]**2)**0.5
    gamma=(1-umag**2)**(-0.5)

    #Lambda
```

```
    Lambda[0,0]=gamma
    Lambda[0,1:]=-u*gamma
    Lambda[1:,0]=-u*gamma
    for i in range(1,4):
        for j in range(1,4):
            dij=0
            if i==j:dij=1
            Lambda[i,j]=dij+(gamma-1)*u[i-1]*u[j-1]/umag**2
    return Lambda
```

Construyamos por ejemplo una transformación sencilla escogiendo la velocidad en la dirección de x:

```
from numpy import array
u=array([0.2,0.0,0.0])
Lambda=Lambda_TLE(-u)
```

```
Lambda (u = [0.2 0.  0. ]) =
[[1.02062073 0.20412415 0.         0.        ]
 [0.20412415 1.02062073 0.         0.        ]
 [0.         0.         1.         0.        ]
 [0.         0.         0.         1.        ]]
```

Una manera de visualizar las transformaciones de Lorentz-Einstein es ver qué valor de t', x' toman eventos con valor de t o x constantes:

(Algoritmo 1.3)

```
#Escoge valores de x:
from numpy import linspace
rmax=10
xs=linspace(0,rmax,rmax+1,endpoint=True)
ts=linspace(0,rmax,rmax+1,endpoint=True)

#Calcula valores de t' y x' usando la matriz:
from numpy import zeros_like
tps=zeros_like(xs)
xps=zeros_like(xs)

from numpy import matmul

import matplotlib.pyplot as plt
fig=plt.figure(figsize=(5,5))
ax=fig.gca()

for t in xs:
    for i,x in enumerate(xs):
        tps[i],xps[i],yp,zp=matmul(Lambda,[t,x,0,0])
    ax.plot(tps,xps,'r-')

for x in xs:
    for i,t in enumerate(ts):
        tps[i],xps[i],yp,zp=matmul(Lambda,[t,x,0,0])
```

```
    ax.plot(tps,xps,'r-')

#Decoración
ax.set_xticks(xs)
ax.set_yticks(xs)
ax.set_xlabel("$t$")
ax.set_ylabel("$x$")
ax.set_xlim((0,rmax))
ax.set_ylim((0,rmax))
ax.grid()
fig.tight_layout()
```

ver Figura 1.2

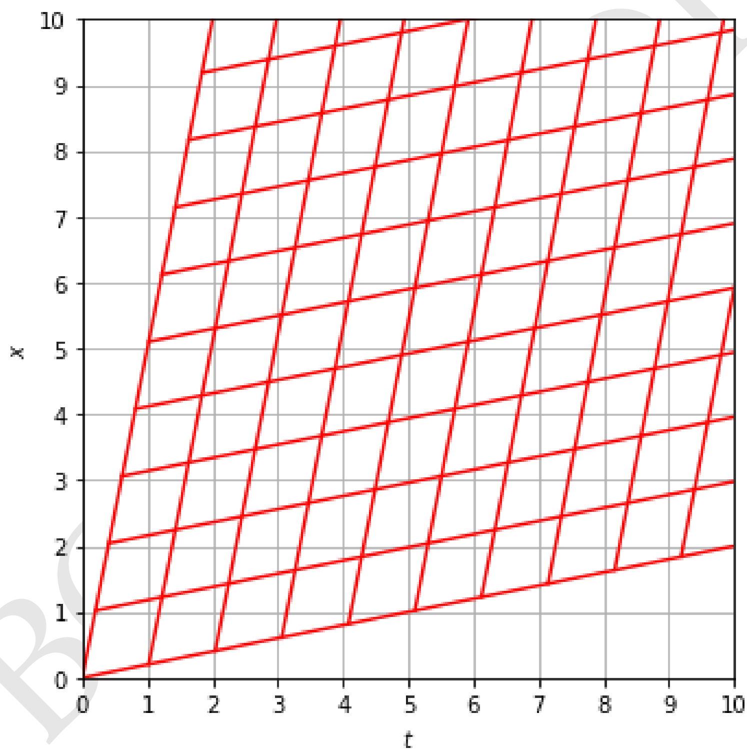


Figura 1.2: *Figura correspondiente al código 1.3.*

Bibliografía