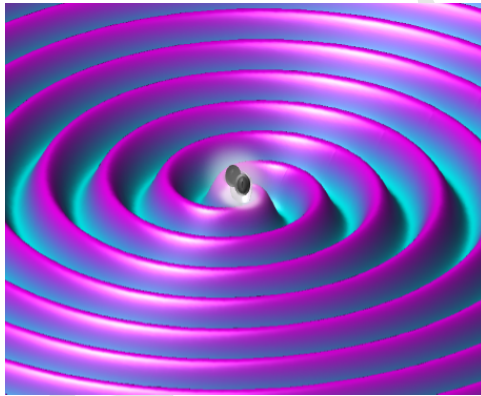


Relatividad y Gravitación

Teoría, algoritmos y problemas



Jorge I. Zuluaga

Profesor titular de Astronomía y Física

Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia

3 de junio de 2020

BORRADOR

Índice general

1.	Aplicaciones de la relatividad general	7
1.1.	Ondas gravitacionales	8
1.1.1.	Historia de las ondas gravitacionales	8
1.1.2.	Un programa de estudio	9
1.1.3.	Gravedad linearizada	9
1.1.4.	Ecuación de campo linearizada en el vacío	12
1.1.5.	Libertad gauge	13
1.1.6.	El gauge armónico	14
1.1.7.	La ecuación de campo en el gauge armónico	15
1.1.8.	La ecuación de campo con fuentes	16
1.1.9.	La métrica postnewtoniana	17
1.1.10.	Analogía electromagnética	18
1.1.11.	Ecuación de onda en el vacío	19
1.1.12.	Solución general a la ecuación de onda	20
1.1.13.	El gauge transversal de traza cero	21
	Bibliografía	25

BORRADOR

Índice de figuras

BORRADOR

BORRADOR

Capítulo 1

Aplicaciones de la relatividad general

Resumen

Después de deducir el formalismo básico de la relatividad general, procederemos en este capítulo a usarlo para estudiar problemas concretos y hacer las predicciones más importantes de la teoría general de la relatividad.

Nos concentraremos aquí en tres aplicaciones importantes:

- **Ondas gravitacionales.** La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y la descripción de algunas de sus propiedades básicas es una de las más interesantes y poco triviales predicciones de la teoría general de la relatividad. Aquí estudiaremos algunos aspectos básicos de la teoría (un tratamiento riguroso y en detalle está más allá del nivel de este curso), concentrándonos en ofrecer las bases para un estudio más detallado y para predecir las propiedades específicas de sistemas que emiten ondas gravitacionales en el universo.
- **Solución de Schwarzschild y agujeros negros.** La métrica de Schwarzschild es una de las únicas soluciones analíticas que se conocen de la ecuación de campo métrico. Describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior de un objeto con simetría esférica. Deduciremos aquí la métrica y estudiaremos el movimiento de partículas de prueba en este espacio-tiempo. En particular con estos datos predeciremos las propiedades de los agujeros negros.
- **La métrica de Friedmann-Robertson-Walker.** Otra de las soluciones analíticas a la ecuación de campo métrico es la que describe un universo homogéneo e isotrópico. Esta solución fue también obtenida muy poco tiempo después del surgimiento de la relatividad. Aquí deduciremos esta solución y un conjunto muy importante de ecuaciones relacionadas que se conocen como las ecuaciones de Friedmann y que describen la dinámica del universo en expansión y su relación con el contenido (y tipo) de masa energía. Estudiaremos las propiedades de la métrica y sus predicciones respecto al Universo.

El orden que seguiremos no es el orden convencional. Hemos decidido concentrarnos en los temas de mayor actualidad en el momento.

1.1. Ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales son una de las más increíbles predicciones de la relatividad general.

1.1.1. Historia de las ondas gravitacionales

Las ondas gravitacionales fueron predichas por primera vez por Einstein en 1916. En 1922, sin embargo Eddington mostró que las ondas originalmente predichas por Einstein eran en realidad un artefacto matemático debido al cambio de coordenadas, las llamo *ondas de coordenadas* y que se podían mover a cualquier velocidad. Sin embargo el mismo Eddington predijo que había un tercer tipo de ondas que se propagaban a la velocidad de la luz.

En 1936 Einstein y Nathan Rosen sometieron un artículo demostrando que las ondas gravitacionales no existían porque aparecían singularidades en la solución ondulatoria de la ecuación de campo. Afortunadamente el artículo no fue aceptado por un referee inicialmente anónimo (después resulto ser Howard Robertson, el mismo de la métrica cosmológica) quien demostró que las singularidades en realidad eran producto de las coordenadas.

La predicción de las ondas gravitacionales y de sus propiedades se concreto en las décadas por venir entre finales de 1930 y mediados de los 1950.

En 1974 se descubrió un pulsar binario cuya órbita decaía obedeciendo las predicciones de la relatividad general y de la emisión de ondas gravitacionales. El decaimiento del pulsar binario fue confirmado a lo largo de dos décadas y le valió a sus descubridores, Russell Hulse y Joseph Taylor el premio Nobel de física de 1993.

Entre mediados de 1970 y principios de 1990 se consolidó un proyecto de detector usando interferometría, una idea que había sido concebida por varios en los 1960. Este proyecto fue el *Laser Interferometer Gravitational Observatory* LIGO, que finalmente inició observaciones en 2002. Durante 13 años el detector no vio nada. El 18 de septiembre de 2015 se inauguro una nueva fase conocida como *LIGO mejorado*.

El 14 de septiembre de 2015 una señal fue detectada por los observatorios aún en prueba. El paper sobre la detección fue publicado el 11 de febrero de 2016. La detección correspondía a la fusión de dos agujeros negros de cerca de 30 masas solares a la increíble distancia de 1300 millones de años luz. En 2017 se otorgo el premio Nobel de física a 3 de los más destacados personajes asociados con el detector.

El 25 de agosto de 2017 se detecto simultaneamente en rayos gama, luz visible, ondas de radio y ondas gravitacionales la primera fuente astrofísica dando nacimiento a la que hoy se conoce como la *astronomía multimensajero*, una de las más importantes revoluciones en la astronomía desde la invención del telescopio.

Es muy importante para cualquier profesional de la astronomía o de la física conocer algunos detalles sobre la predicción de la existencia de las ondas gravitacionales y de sus propiedades específicas.

1.1.2. Un programa de estudio

En estas notas nos concentraremos en algunos de los aspectos básicos de la física de estas ondas sin profundizar en todos sus detalles (que escapan al nivel del curso). Nos concentraremos en los siguientes aspectos:

- La teoría linealizada de la gravedad y sus ecuaciones correspondientes.
- La predicción de la existencia de ondas gravitacionales y las ecuaciones correspondientes.
- La solución a la ecuación de onda en el vacío y las propiedades básicas de las ondas gravitacionales.
- La ecuación de onda con fuentes y la predicción de la intensidad de este tipo de ondas.
- La física de la emisión de ondas gravitacionales y las ecuaciones básicas resultantes.
- El estudio de algunos sistemas de interés en astrofísica.
- La física básica de la detección de las ondas.

1.1.3. Gravedad linealizada

La teoría general de la relatividad que desarrollamos en el capítulo precedente tiene una gran generalidad. Excepto por los casos en los que estudiamos situaciones donde los campos gravitacionales eran muy pequeños, especialmente con el propósito de utilizar el principio de consistencia, los resultados obtenidos aplican para cualquier campo.

Para estudiar las ondas gravitacionales vamos a asumir que el espacio-tiempo es plano, excepto en la onda, y que la onda misma tiene una amplitud muy pequeña. La teoría resultante se conoce como gravedad linealizada.

La métrica de un espacio-tiempo así tiene la forma:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x^\alpha)$$

donde $|h_{\mu\nu}(x^\alpha)| \ll 1$ es una perturbación a la métrica del espacio-tiempo plano.

Otra manera de expresar la condición anterior es suponiendo que podemos escribir $h_{\mu\nu}$ en términos de funciones convencionales $H_{\mu\nu}$ tal que:

$$h_{\mu\nu} = \epsilon H_{\mu\nu}$$

con $\epsilon \ll 1$.

Asumiremos también que las derivadas de $h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu,\alpha}$ son del mismo orden que ϵ y por lo tanto son muy pequeña.

La gravedad linealizada se obtiene cuando partiendo de estas suposiciones se deducen las ecuaciones de la relatividad general eliminando todos los términos proporcionales a ϵ^2 .

Inversa de la métrica linealizada

El primer cálculo interesante en gravedad linealizada se hace para obtener la inversa de la métrica. Suponemos que se puede escribir de la forma.

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + b^{\mu\nu}$$

tal que $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$.

Reemplazando queda:

$$\begin{aligned} g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} &= \eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} + \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha} h_{\alpha\beta} \\ &\approx \delta_\nu^\mu + \eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu} + b^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} \end{aligned}$$

de modo que b debe cumplir la condición:

$$b^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = -\eta^{\mu\alpha} h_{\alpha\nu}$$

Si multiplicamos por $\eta^{\lambda\nu}$ a ambos lados obtenemos:

$$b^{\mu\lambda} = -h^{\mu\lambda}$$

Concluimos entonces que:

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Símbolo de Christoffel linearizado

Los símbolos de Christoffel se definen como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\mu\nu,\rho} + g_{\nu\rho,\mu})$$

Es claro que para espacio-tiempo plano $\eta_{\mu\nu}$ los símbolos de Christoffel son cero. Sin embargo en una métrica linearizada los símbolos de Christoffel tienen un pequeño valor:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \frac{1}{2} (\eta^{\lambda\rho} + h^{\lambda\rho}) (h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu}) \\ \delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda &\approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (h_{\rho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\rho} + h_{\nu\rho,\mu}) \end{aligned}$$

Nótese que hemos usado la notación $\delta\Gamma$ para dar a entender que estamos lidiando con una perturbación (sobre 0) del símbolo de Christoffel. Aquí podemos ver que $\delta\Gamma$ también es una cantidad proporcional a ϵ .

El hecho que η sea diagonal nos permite también escribir:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\lambda} (h_{\lambda\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\lambda} + h_{\nu\lambda,\mu})$$

El tensor de Riemann linearizado

El tensor de Riemann se define como:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \Gamma_{\sigma\mu,\nu}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu,\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\delta \Gamma_{\nu\delta}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\delta \Gamma_{\mu\delta}^\rho$$

De nuevo, para el espacio tiempo plano todas las componentes de este tensor son cero. En espacio tiempo linearizado nos quedan también una versión perturbada que a primer orden y en término de las perturbaciones en los símbolos de Christoffel se escriben:

$$\delta R^\rho_{\sigma\mu\nu} \approx \delta \Gamma^\rho_{\sigma\mu,\nu} - \delta \Gamma^\rho_{\sigma\nu,\mu}$$

Alternativamente:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + g_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - g_{\kappa\mu,\nu,\lambda}) + \\ + g^{\sigma\zeta}(\Gamma^\sigma_{\mu\kappa}\Gamma^\zeta_{\lambda\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\zeta_{\lambda\kappa})$$

Eliminando los términos cuadráticos en ϵ , el tensor de Riemann queda:

$$\delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx -\frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + h_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - h_{\kappa\mu,\nu,\lambda})$$

El tensor de Ricci linearizado

Por definición el tensor de Ricci es:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\mu\nu\alpha}$$

De modo que la versión linearizada será

$$\delta R_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\alpha}(h_{\mu\nu,\lambda,\alpha} - h_{\nu\lambda,\alpha,\mu} + h_{\lambda\alpha,\mu,\nu} - h_{\alpha\mu,\nu,\lambda}) \\ \approx -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\lambda}(h_{\mu\nu,\lambda,\lambda} - h_{\nu\lambda,\lambda,\mu} + h_{\lambda\lambda,\mu,\nu} - h_{\lambda\mu,\nu,\lambda})$$

Aquí podemos reconocer algunas propiedades y simetrías interesantes.

En primer lugar la operación $\eta^{\lambda\lambda}h_{\mu\nu,\lambda,\lambda}$ se puede escribir como:

$$\eta^{\lambda\lambda}h_{\mu\nu,\lambda,\lambda} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 h_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu}$$

que es lo que nosotros llamamos el *D'Alambertiano* de $h_{\mu\nu}$.

De otro lado los términos restantes de la asuma se pueden escribir como:

$$-h^{\lambda\lambda}(-h_{\nu\lambda,\lambda,\mu} + h_{\lambda\lambda,\mu,\nu} - h_{\lambda\mu,\nu,\lambda}) = h^\lambda_{\nu,\lambda,\mu} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu,\nu} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu,\nu} + h^\lambda_{\mu,\nu,\lambda}$$

nótese que dividimos el término $h_{\lambda\lambda,\mu,\nu}$ en dos para poder escribir dos términos muy parecidos uno de otro.

Si definimos:

$$V_\mu = h^\lambda_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2}h^\lambda_{\lambda,\mu}$$

El tensor de Riemann se escribirá:

$$\delta R_{\mu\nu} \approx \frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu})$$

El tensor de Einstein linealizado

El tensor de Einstein se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Este tipo de tensores se conocen también en relatividad como tensores de *traza invertida* (*trace-reversed* en inglés) porque:

$$G = g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = -R$$

de modo que en lo sucesivo diremos que $G_{\mu\nu}$ es la *traza invertida* del tensor de Ricci.

Aplicando la definición obtenemos:

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha)$$

Donde $h = h^\alpha_\beta$ es la traza de la perturbación.

El tensor momentum-energía

¿Qué podremos decir sobre el tensor momentum-energía en esta situación? Aplazaremos esta discusión para después.

1.1.4. Ecuación de campo linealizada en el vacío

Tenemos hasta ahora todos los elementos para proceder a escribir la ecuación de campo métrico linealizada:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

Donde ahora podemos usar el lenguaje para decir que la ecuación de campo dice que el tensor de Ricci es proporcional a la *traza invertida* del tensor momentum-energía.

Por ahora procederemos a estudiar el caso en el que la onda se propaga en una región vacía $T^{\mu\nu} = 0$:

En esta situación la ecuación de campo métrico queda:

$$R_{\mu\nu} = 0$$

que es una importante ecuación en relatividad general que vamos a seguir viendo en lo sucesivo.

Nota

Tensor de Ricci cero no significa curvatura cero. Es interesante anotar que la ecuación de campo evaluada en el vacío:

Nota (Cont.)

$$R_{\mu\nu} = 0$$

implica solamente que localmente en los puntos donde no haya materia todas las componentes del tensor de Ricci son 0. Eso no significa sin embargo que la curvatura allí sea cero, en tanto el espacio-tiempo puede haber sido curvado por la presencia de materia que esta cerca de allí. Esto conduce a una serie de implicaciones que son interesantes:

1. Si $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0$ entonces el espacio-tiempo es plano.
2. Si $R_{\mu\nu} = 0$ no necesariamente el espacio-tiempo es plano.
3. Si $R = 0$ no necesariamente el espacio-tiempo es plano.
4. Si el espacio-tiempo es curvo entonces al menos una $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \neq 0$
5. Si $R \neq 0$ entonces el espacio-tiempo es curvo.
6. Si al menos una componente de $R_{\mu\nu} \neq 0$ entonces el espacio-tiempo es curvo.
7. Si al menos una componente de $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \neq 0$ entonces el espacio-tiempo es curvo.

En terminos de la perturbación la ecuación de campo métrico queda:

$$\frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}) = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\square h_{\mu\nu} - (V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}) = 0$$

o bien,

$$\square h_{\mu\nu} = V_{\mu,\nu} + V_{\nu,\mu}$$

donde recordemos que:

$$V_\mu = h^\lambda_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2}h_{,\mu}$$

1.1.5. Libertad gauge

Antes de proceder a resolver hay un asunto que debemos discutir. ¿Por qué la métrica no es plana? Es posible tener una métrica que no es plana por muy diversas razones: 1) porque tenemos una perturbación real (con curvatura) del campo gravitacional o 2) por la particular elección del sistema de coordenadas.

Veamos como cambia h y todo lo que hemos visto cuando se modifican sutilmente las coordenadas

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$$

donde $|\xi| = \mathcal{O}(\epsilon)$. Dada esta última convención, siempre será posible reemplazar x' por x donde sea necesario.

La inversa de esta transformación será simplemente:

$$x^{\mu} = x'^{\mu} - \xi^{\mu}(x')$$

donde a primer orden $\xi^{\mu}(x') \approx \xi^{\mu}(x)$.

La transformación de la métrica será:

$$g'_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}(x)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \approx \delta^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}_{,\alpha}$$

donde $\xi^{\mu}_{,\alpha} = \partial \xi^{\mu} / \partial x^{\alpha}$.

la métrica transforma como

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(x') &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}(x) \\ &= \left(\delta^{\mu}_{\alpha} - \xi^{\mu}_{,\alpha} \right) \left(\delta^{\nu}_{\beta} - \xi^{\nu}_{,\beta} \right) [g_{\mu\nu}(x') - g_{\mu\nu,\sigma}(x') \xi^{\sigma}] \\ &= g_{\alpha\beta}(x') - \xi^{\alpha}_{,\mu} g_{\mu\beta} - \xi^{\nu}_{,\beta} g_{\alpha\nu} - g_{\alpha\beta,\sigma} \xi^{\sigma} \end{aligned}$$

La diferencia entonces en la métrica debido al pequeño desplazamiento es:

$$g'_{\alpha\beta}(x') - g_{\alpha\beta}(x') \equiv h'_{\alpha\beta}(x') - h_{\alpha\beta}(x') = -\xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$$

o lo que es lo mismo:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}$$

Entonces, un simple cambio de coordenadas me cambia el h . A esto es a lo que se conoce como *libertad gauge* en las perturbaciones.

1.1.6. El gauge armónico

La libertad gauge es interesante porque nos permite identificar cuál podría ser el mejor sistema de coordenadas en el que se puede trabajar para que la ecuación de campo linearizada sea sencilla.

Si se escoge un conjunto ξ^{α} tal que :

$$V'_{\mu} = h'^{\lambda}_{\mu,\lambda} - \frac{1}{2} h'_{,\mu} = 0$$

entonces la ecuación de campo queda reducida a:

$$\square h'_{\mu\nu} = 0$$

y llamamos a este el **gauge armónico** por las evidentes implicaciones de la última ecuación.

Otra manera de escribir el gauge armónico es:

$$V'^{\nu} = h'^{\mu\nu}{}_{,\mu} - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} h'_{,\mu} = 0$$

Definiendo la traza-invertida de h como:

$$\bar{h}'_{\mu\nu} \equiv h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h'$$

el gauge armónico queda:

$$\bar{h}'_{,\mu}{}^{\mu\nu} = 0$$

Nota

El gauge armónico para ξ . Con la definición \bar{h} podemos escribir la transformación de coordenadas como:

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \xi_{,\lambda}^{\lambda} \eta_{\alpha\beta}$$

Sacando las componentes contravariantes y tomando la derivada tenemos:

$$\bar{h}'_{,\mu}{}^{\mu\nu} = \bar{h}_{,\mu}{}^{\mu\nu} - \xi^{\mu,\nu}{}_{,\mu} - \xi^{\nu,\mu}{}_{,\mu} + \xi_{,\lambda\mu}^{\lambda} \eta^{\mu\nu} = \bar{h}_{,\mu}{}^{\mu\nu} - \square \xi^{\nu}$$

de modo que en términos de la perturbación original el gauge armónico se puede escribir:

$$\square \xi^{\nu} = \bar{h}_{,\mu}{}^{\mu\nu}$$

El problema es que para cualquier función escalar f siempre se puede encontrar una función escalar F tal que $\square F = f$, de modo que el gauge armónico lo satisfacen infinitas funciones ξ . Si imponemos la condición adicional de que:

$$\square \xi^{\nu} = 0$$

esto completa nuestra condición para el gauge armónico.

1.1.7. La ecuación de campo en el gauge armónico

En lo sucesivo asumiremos que estamos trabajando en el *gauge armónico* y ya no haremos la distinción entre las componentes primadas y no primadas.

En este gauge la ecuación de campo se escribe:

$$\square h_{\mu\nu} = 0$$

Una ecuación equivalente se obtiene si se reconoce que una vez definido:

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$$

entonces,

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h$$

pero

$$\square h = \square(\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}) = \eta_{\mu\nu}\square h_{\mu\nu} = 0$$

de modo que:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu}$$

Así que una manera más conveniente de escribir la ecuación de campo métrico en el vacío será:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

con el gauge armónico

$$\bar{h}^{\mu\nu}_{,\mu} = 0$$

Una vez obtenida la solución siempre es posible regresar a la parametrización original usando:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

1.1.8. La ecuación de campo con fuentes

¿Qué pasa ahora si tenemos en el espacio fuentes?

La ecuación de campo será ahora:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Reemplazando el tensor de Einstein:

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha)$$

la ecuación queda:

$$-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu) + \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\square h - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}(\partial_\alpha V_\beta + \partial_\beta V_\alpha) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Si aplicamos una transformación de coordenadas para quedar en el gauge armónico, i.e. $V_\mu = 0$, obtenemos:

$$-\frac{1}{2}(\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h) = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

En términos de la traza invertida de la variable de perturbación $\bar{h}_{\mu\nu}$ la ecuación queda finalmente:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

que es la ecuación de campo con fuentes.

1.1.9. La métrica postnewtoniana

La versión linearizada de la ecuación de campo puede usarse para resolver el problema de la gravedad newtoniana.

Supongamos que tenemos una distribución de polvo con simetría radial $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho_0 c^2, 0, 0, 0)$.

La única componente de la ecuación de campo nos queda:

$$\square \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho_0 c^2$$

En campo estático, $\square \bar{h}_{00} = -\nabla^2 \bar{h}_{00}$ así la ecuación queda:

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = \frac{16\pi G}{c^4} \rho_0 c^2$$

Para que la ecuación coincida con la ecuación de Poisson se necesita que:

$$\bar{h}_{00} = \frac{4\Phi}{c^2}$$

donde Φ es el potencial gravitacional.

La traza será naturalmente igual a $\bar{h} = 4\Phi/c^2$

La perturbación original será por tanto:

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h}$$

Por componentes:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2\Phi/c^2 \\ h_{ii} &= -2\Phi/c^2 \end{aligned}$$

De donde la métrica resultante es:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\vec{r}_L^2$$

que llamaremos la **métrica postnewtoniana**.

Nótese que esta métrica difiere e la métrica de newton:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - d\vec{r}_L^2$$

1.1.10. Analogía electromagnética

Existe una interesantísima analogía entre esta ecuación y la electrodinámica. Recordemos que $h_{\mu\nu}$ en campo débil por ejemplo alrededor de un cuerpo con masa estaba asociado al potencial. En electromagnetismo el cuadripotencial es A_μ . La ecuación inhomogénea de Maxwell se escribe:

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

que en un lugar donde no hay cargas se puede escribir como

$$\square A^\nu = 0$$

Pero debemos recordar que pudimos escribir esta expresión gracias al Gauge de Lorentz:

$$A^\mu{}_{,\mu} = 0$$

una condición arbitraria sobre los potenciales que permitía escribir las ecuaciones inhomogéneas de forma simple como una función de onda.

Como vemos hay una analogía profunda entre las ecuaciones de Maxwell en espacio-tiempo plano y las ecuaciones de campo métrico donde el papel del cuadripotencial A^μ lo juega ahora el potencial tensorial $\bar{h}^{\mu\nu}$.

Paralelos:

Aspecto	Electromagnetismo	Gravitación linealizada
Potenciales	ϕ, \vec{A}	$h_{\mu\nu}$
Cuadripotencial	A^μ	$\bar{h}_{\mu\nu}$
Transformación Gauge	$\phi' = \phi - \partial\psi/\partial t,$ $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$	$h_{\mu'\nu'} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$
Gauge	$A^\mu{}_{,\mu} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial\phi/\partial t = 0$	$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\mu} = h^{\mu\nu}{}_{,\mu} - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} h_{,\mu} = 0$
Ecuaciones en el vacío	$\square \vec{A} = 0, \square \phi = 0$	$\square h_{\mu\nu} = 0$
Fuentes	$\square A^\mu = 0$	$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$
Ecuación con fuentes	J^ν	$T_{\mu\nu}$
	$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$	$\partial_\alpha \partial^\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$

1.1.11. Ecuación de onda en el vacío

Estudiaremos otro caso particular de la ecuación de campo.

Partamos de la ecuación de campo en el vacío:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

que se puede escribir en términos explícitos de la derivada como:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2} - \nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = 0$$

Esta ecuación es idéntica a una ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2}$$

Es decir si se perturba una región de un espacio-tiempo, la perturbación se propagará a otros lugares con la velocidad de la luz c . Podemos decir también que **la gravedad se propaga a la velocidad de la luz** y con esto resolvemos el problema de Newton de la acción a distancia.

Esta es la esencia de la predicción que se hace de la existencia de ondas gravitacionales.

Nota

¿Son ondas reales u ondas de coordenadas? En nuestras notas históricas habíamos dicho que en el primer intento de Einstein de predecir las ondas gravitacionales, en realidad las ondas que predijo eran solo ondas de coordenadas, es decir ondas que se producían gracias a la elección de un sistema de coordenadas particular. Dado que la ecuación que obtuvimos antes imponiendo el gauge armónico es una ecuación que se deriva justamente de usar un conjunto particular de coordenadas, ¿cómo sabemos que las ondas predichas aquí son efectivamente ondas físicas, ondas reales?

Una manera de saberlo es ver si el único tensor que es distinto de cero independientemente de la elección del sistema de coordenadas, a saber el tensor de Riemann $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$:

$$\delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} \approx -\frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - h_{\nu\lambda,\kappa,\mu} + h_{\lambda\kappa,\mu,\nu} - h_{\kappa\mu,\nu,\lambda})$$

también satisface una ecuación armónica. Es claro que en el gauge armónico $\square h_{\mu\nu} = 0$ de modo que es trivial demostrar que en ese mismo gauge:

$$\square \delta R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$$

Dado que lo que le pasa a este tensor en un sistema de coordenadas realmente repercute sobre la naturaleza del tensor en todos los sistemas de coordenadas, podemos decir que efectivamente las componentes de

Nota (Cont.)

este tensor oscilan siguiendo una ecuación de ondas. ¡Son ondas reales! (independientes del sistema de coordenadas).

1.1.12. Solución general a la ecuación de onda

Una cosa es escribir la ecuación de onda y otra encontrar una solución. Si bien ya estamos acostumbrados a la ecuación de onda en otras áreas, existen ciertos aspectos de nuestro problema que hacen estas ondas muy especiales. En particular la ecuación de onda escrita anteriormente sólo es válida en el gauge armónico. ¿Qué implicaciones físicas tiene esto?

Sabemos que una solución particular para la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{\partial t^2}$$

es

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \exp(i\omega t) = A_{\mu\nu} \exp(ik^\alpha x_\alpha)$$

siempre que se cumpla la condición:

$$k^\mu k_\mu = (k^0)^2 - \vec{k}^2 = 0$$

o bien:

$$k^0 = k$$

Llamamos a k^μ el cuadrivector de onda (del que ya habíamos hablado antes en el curso) que como vemos tiene magnitud nula.

Para los propósitos que tenemos nos interesa la parte real esta cantidad que se puede escribir de la forma:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = |A_{\mu\nu}| \cos(k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \equiv a_{\mu\nu} \cos(k^0 ct - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

De aquí podemos identificar $k^0 = \omega_k/c$ y $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$, con ω_k la frecuencia angular asociada con el modo k , λ la longitud de onda del modo k . En términos de λ el cuadrivector de onda se puede escribir como:

$$k^\mu : \frac{2\pi}{\lambda} (c, \hat{k})$$

que era la manera en la que lo habíamos escrito antes.

Una solución general se puede escribir superponiendo las soluciones particulares así:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \text{Re} \left(\int A_{\mu\nu}(\vec{k}) \exp(ik^\mu x_\mu) d^3k \right)$$

1.1.13. El gauge transversal de traza cero

Tomemos una onda armónica que se propaga en una dirección definida de \vec{k} (onda plana). En este caso el tenso $a_{\mu\nu}$ indica la amplitud que tienen cada una de las componentes espacio temporales de la onda. En general habrán 10 amplitudes, que contrastan con la amplitud única que tiene una onda en una dimensión. ¿Qué son esas 10 amplitudes?

Las amplitudes $a_{\alpha\beta}$ de la onda determinaran su *polarización* a la manera como lo hacen por ejemplo en el caso de una onda electromagnética. Es por eso que es conveniente llamar a $a_{\mu\nu}$ el **tensor de polarización**.

Sabemos que por el gauge armónico se debe cumplir la condición:

$$\bar{h}_{,\alpha}^{\mu\alpha} = a^{\mu\alpha} k_{\alpha} = 0$$

Estas son 4 ecuaciones que relacionan las componentes de la polarización. Esta condición nos deja entonces con solo 6 componentes independientes del tensor de polarización.

Veamos cómo se relacionan esas componentes. Para ello escribamos mejor el gauge armónico en su forma original:

$$V_{\mu} = \eta^{\alpha\alpha} \left(h_{\alpha\mu,\alpha} - \frac{1}{2} h_{\alpha\alpha,\mu} \right) = 0$$

y la solución general:

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

Si escogemos el sistema de coordenadas de modo que la dirección del eje z apunte hacia \vec{k} , la perturbación general queda:

$$h_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} \cos(\Phi)$$

donde $\Phi \equiv \omega t - kz + \varphi$

Nótese que la perturbación no depende de x, y y por eso llamamos a esta una *onda plana*. Las únicas derivadas distintas de cero serán entonces:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu,0} &= -a_{\mu\nu} \frac{\omega}{c} \sin(\Phi) \\ h_{\mu\nu,3} &= a_{\mu\nu} k \sin(\Phi) \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde hemos hecho $\partial_0 = \partial_t / c$.

Esto implica que para una solución armónica:

$$h_{\mu\nu,0} = -h_{\mu\nu,3}$$

Reemplazando en la condición gauge para $\mu = 0$ queda:

$$\begin{aligned}
\eta^{00} \left(h_{00,0} - \frac{1}{2} h_{00,0} \right) + \eta^{ii} \left(h_{i0,i} - \frac{1}{2} h_{ii,0} \right) &= 0 \\
-\frac{1}{2} k a_{tt} - \frac{1}{2} k a_{xx} - \frac{1}{2} k a_{yy} - \frac{1}{2} k a_{zz} + k a_{zt} &= 0 \\
a_{tt} + a_{xx} + a_{yy} + a_{zz} + 2a_{zt} &= 0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Reemplazando en la condición gauge para $\mu = 3$ queda:

$$\begin{aligned}
\eta^{00} \left(h_{03,0} - \frac{1}{2} h_{00,3} \right) + \eta^{ii} \left(h_{i3,i} - \frac{1}{2} h_{ii,3} \right) &= 0 \\
-k a_{zt} - \frac{1}{2} k a_{tt} + \frac{1}{2} k a_{xx} + \frac{1}{2} k a_{yy} - \frac{1}{2} k a_{zz} &= 0 \\
a_{tt} - a_{xx} - a_{yy} + a_{zz} + 2a_{zt} &= 0
\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones anteriores queda:

$$a_{tz} = -\frac{1}{2}(a_{tt} + a_{zz})$$

y restando:

$$a_{xx} = -a_{yy}$$

Para las otras componentes obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_{tx} + a_{zx} &= 0 \\
a_{ty} + a_{zy} &= 0
\end{aligned}$$

De modo que la matriz de polarización queda:

$$a_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a_{tt} & a_{tx} & a_{ty} & -(a_{tt} + a_{zz})/2 \\ a_{tx} & a_{xx} & a_{xy} & -a_{tx} \\ a_{ty} & a_{xy} & -a_{xx} & -a_{ty} \\ -(a_{tt} + a_{zz})/2 & -a_{tx} & -a_{ty} & a_{zz} \end{pmatrix}$$

donde las componentes independientes son: $a_{tt}, a_{tx}, a_{ty}, a_{tz}, a_{xx}, a_{zz}$.

¿Podemos precisar mejor esas componentes? Recordemos que la libertad gauge implica que:

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

Dado que ξ^μ también cumple una ecuación del tipo:

$$\square \xi^\mu = 0$$

debe tener también forma armónica:

$$\xi^\mu = b_\mu \cos(\omega t - kz + \varphi_\xi)$$

con una fase φ_ξ que no necesariamente coincide con la fase de la onda.

La transformación de coordenadas implica, para la componentes temporales de la perturbación, la condición:

$$\begin{aligned} h'_{00} &= h_{00} - \dot{\xi}_0 \\ h'_{03} &= h_{03} - \dot{\xi}_3 + \dot{\xi}_0 \\ h'_{0i} &= h_{0i} - \dot{\xi}_i \end{aligned}$$

y por otro lado

$$h'_{33} = h_{33} + 2\dot{\xi}_3$$

Se pueden escoger las funciones ξ_μ tal que:

$$\begin{aligned} h'_{0\mu} &= 0 \\ h'_{33} &= 0 \end{aligned}$$

Con este gauge las componentes de la polarización se simplifican significativamente para ser igual a:

$$a'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{xx} & a'_{xy} & 0 \\ 0 & a'_{xy} & -a'_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una propiedad de este gauge particular es que tiene traza 0:

$$h' = h'^{\mu}_{\mu} = h'_{00} - h'_{11} - h'_{22} - h'_{33} = 0$$

Usando esta condición y escribiendo de nuevo la componente i del gauge:

$$V_i = \eta^{\alpha\alpha} h'_{i\alpha,\alpha} = k^j a'_{ij} = 0$$

Esta última condición significa esencialmente que la onda resultante es transversal.

Es por eso que a este gauge lo llamamos el **gauge transversal de traza cero**.

En síntesis en el gauge transversal de traza cero la perturbación métrica correspondiente a una onda plana que se propaga en una dirección arbitraria z y que tiene longitud de onda λ , número de onda $k = 2\pi/\lambda$ y frecuencia angular $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$ es:

$$h'^{TT}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_+ & a_\times & 0 \\ 0 & a_\times & -a_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos(\omega t - kz + \varphi)$$

donde a_+ y a_\times son las componentes de *polarización más* (*plus polarization*) y *polarización cruz* (*cross polarization*) respectivamente.

La métrica en este gauge tendrá la forma general:

$$ds^2_{TT} = c^2 dt^2 - [1 + f(u)] dx^2 - [1 - f(u)] dy^2 + 2[1 + r(u)] dx dy - dz^2$$

donde:

$$\begin{aligned}f(u) &= a_+ \cos(ku + \varphi) \\r(u) &= a_\times \cos(ku + \varphi)\end{aligned}$$

y $u \equiv ct - z$.

BORRADOR

Bibliografía

BORRADOR