第六节课习题

高洪臣

2019 年 7 月 27 日

基础题

证明式（15）中，取 $\mathbf{y}=\mathbf{u}_4$ 是该问题的最优解。

提示：设 $\mathbf{y}'=\mathbf{u}_4+\mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 正交于 $\mathbf{u}_4$，证明 $\mathbf{y}'\mathbf{D}^\top\mathbf{D}\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}^\top\mathbf{D}^\top\mathbf{D}\mathbf{y}$，该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

答：

对于一般式

$$\min_x \|Ax\| \quad s.t. \quad \|x\|=1$$

SVD 分解 A

$$\mathrm{SVD}(A)=UDV^T$$

并根据酉矩阵的保范性

$$\|UDV^Tx\|=\|DV^Tx\|, \|x\|=\|V^Tx\|$$

令 $y=V^Tx$，则

$$\min_y \|Dy\| \quad s.t. \quad \|y\|=1$$

则

$$y=(0,0,\ldots,0,1)^T$$

此时

$$x=Vy=V_n$$

即 V 的最后一列。

同样的，对于本题

$$\min_y \|Dy\|_2^2 \quad s.t. \quad \|y\|=1, D\in\mathbb{R}^{2n\times 4}$$

当 $y=u_4$ 时，该问题具有最优解

提升题

三角化估计深度的代码：

```
/* your code begin */
int num = end_frame_id - start_frame_id;
Eigen::MatrixXd mA(2*num,4);
mA = Eigen::MatrixXd::Zero(2*num,4);
for (int i = 0; i < num; ++i) {
    int idx = i + start_frame_id;

    double u = camera_pose[idx].uv[0];
    double v = camera_pose[idx].uv[1];

    Eigen::MatrixXd Tcw(3,4);
    Eigen::Matrix3d Rcw = camera_pose[idx].Rwc.transpose();
    Eigen::Vector3d tcw = -Rcw * camera_pose[idx].twc;
    Tcw.block<3,3>(0,0) = Rcw;
    Tcw.block<3,1>(0,3) = tcw;

    mA.row(2*i + 0) = u * Tcw.row(2) - Tcw.row(0);
    mA.row(2*i + 1) = v * Tcw.row(2) - Tcw.row(1);
}
Eigen::JacobiSVD<Eigen::MatrixXd> svd(mA, Eigen::ComputeThinU | Eigen::ComputeThinV);
Eigen::Matrix4d mV = svd.matrixV();
Eigen::Vector4d v_last = mV.col(3);
if(v_last[3] < 1e-8)
    v_last[3] = 0.00001;
P_est = v_last.hnormalized();
/* your code end */
```

运行结果如下：

```
ground truth:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
your result:
  -2.9477 -0.330799   8.43792
```