第二节课习题

高洪臣

2019 年 6 月 23 日

基础作业

1. 设置 IMU 仿真代码中的不同参数，生成 Allan 方差 [1] 曲线

（1）参数 1

在 IMU 仿真代码 vio_data_simulation(ros version) 中设置参数，生成 bag 文件

```
double gyro_bias_sigma  = 0.00005;
double acc_bias_sigma   = 0.0005;
double gyro_noise_sigma = 0.015; // rad/s
double acc_noise_sigma  = 0.019; // m/(s^2)
```

根据生成的 bag 文件，通过 imu_utils 生成 Allan 方差曲线

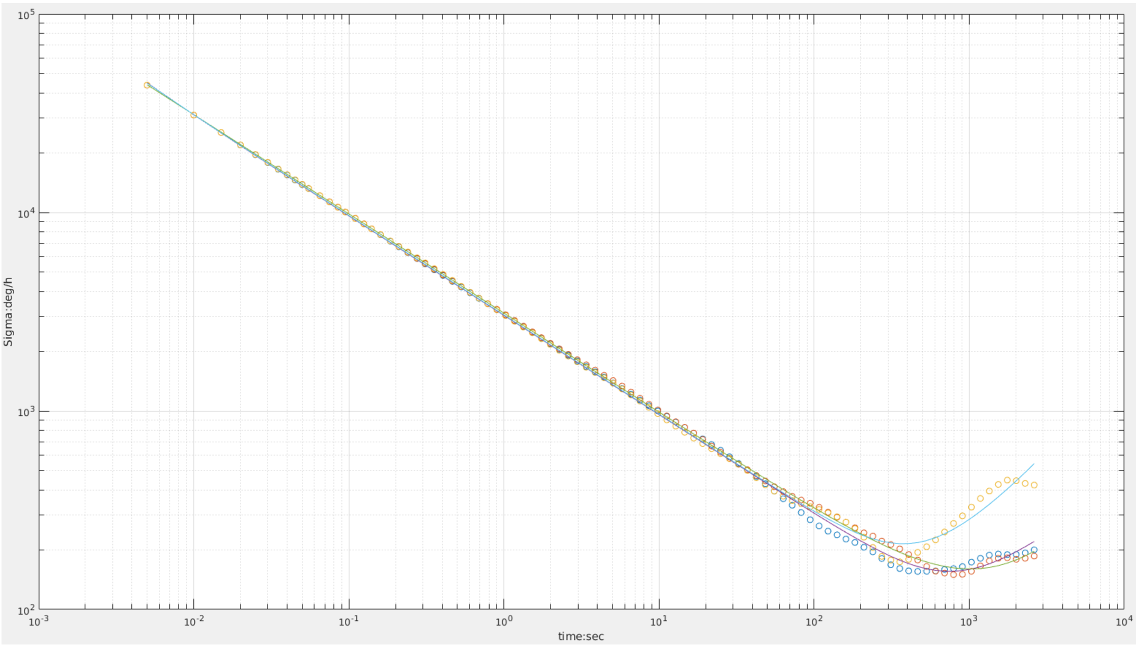

Figure 1: AD log-log plot of Gyroscope

根据 Allan 方差曲线1，$\sigma_g = 3007 \frac{deg}{h} \frac{1}{\sqrt{hz}} = 0.014578 \frac{rad}{s} \frac{1}{\sqrt{hz}}$，$\sigma_{bg}$ 的数量级在 10^{-5}；根据 Allan 方差曲线2，$\sigma_a = 0.01883 \frac{m}{s^2} \frac{1}{\sqrt{hz}}$，$\sigma_{ba}$ 的数量级在 10^{-4}。

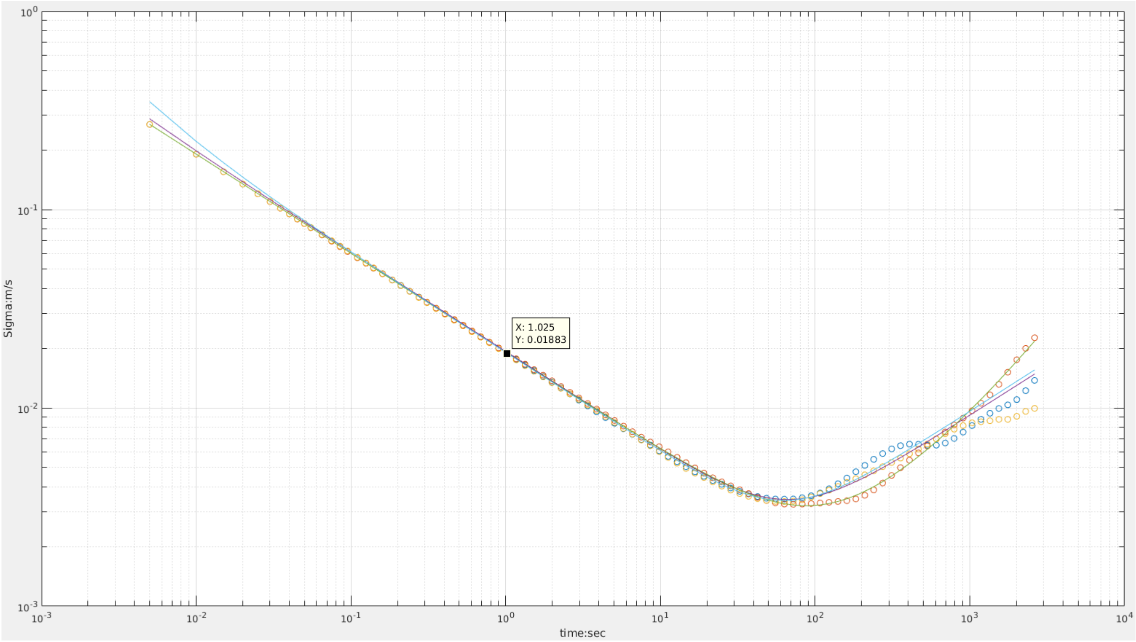

Figure 2: AD log-log plot of Acceleration

（2）参数 2

在 IMU 仿真代码 vio_data_simulation(ros version) 中设置参数，生成 bag 文件

```
double gyro_bias_sigma  = 0.00001;
double acc_bias_sigma   = 0.0001;
double gyro_noise_sigma = 0.005;   // rad/s
double acc_noise_sigma  = 0.0003;  // m/(s^2)
```

根据生成的 bag 文件，通过 imu_utils 生成 Allan 方差曲线

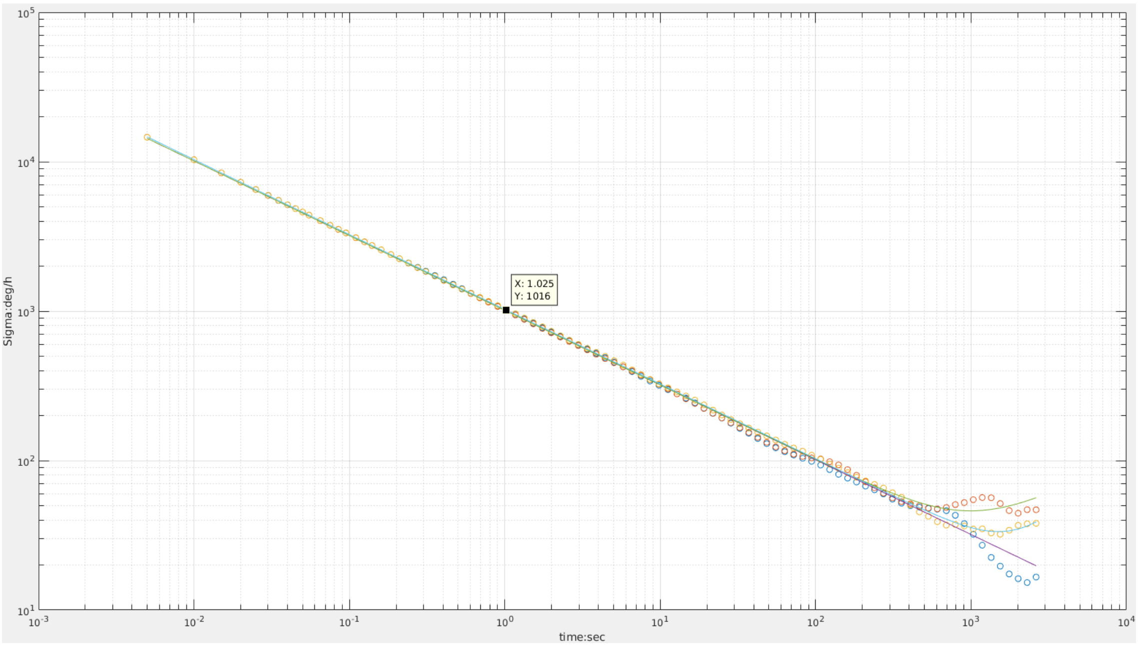

Figure 3: AD log-log plot of Gyroscope

根据 Allan 方差曲线3，$\sigma_g = 1016 \frac{deg}{h}\frac{1}{\sqrt{hz}} = 0.0049 \frac{rad}{s}\frac{1}{\sqrt{hz}}$，$\sigma_{bg}$ 的数量级在 10^{-5}；根据 Allan 方差曲线4，$\sigma_a = 0.0002998 \frac{m}{s^2}\frac{1}{\sqrt{hz}}$，$\sigma_{ba}$ 的数量级在 10^{-4}。

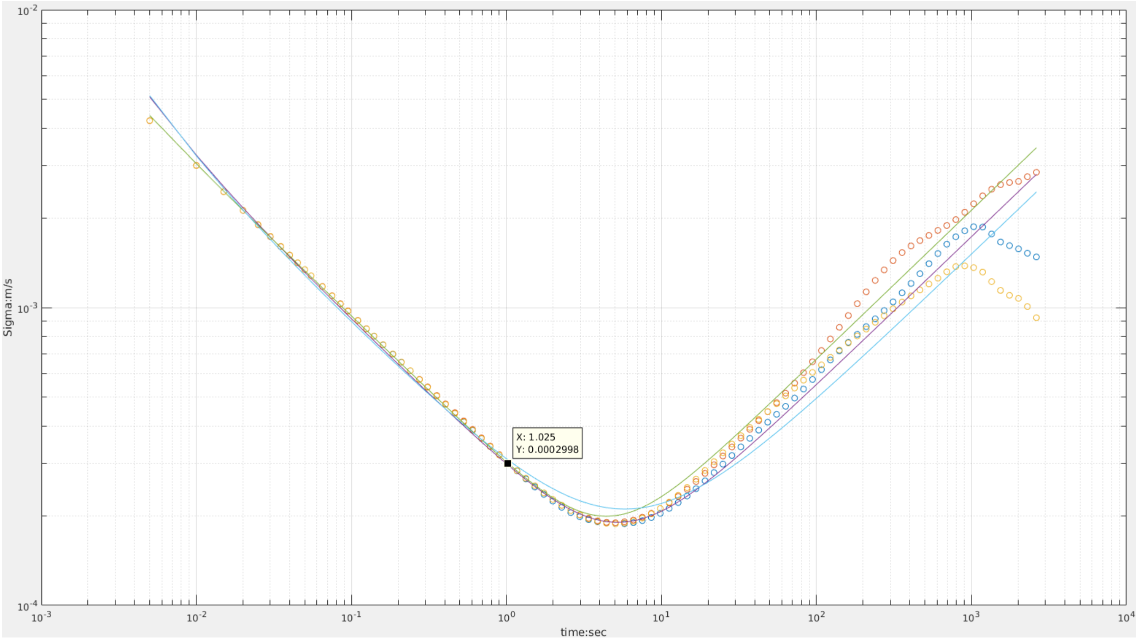

Figure 4: AD log-log plot of Acceleration

2. 将 IMU 仿真代码中的欧拉积分替换成中值积分

```
MotionData imupose    = imudata[i];
MotionData imupose_p  = imudata[i-1];

Eigen::Vector3d imu_gyro_c = imupose.imu_gyro;
Eigen::Vector3d imu_gyro_p = imupose_p.imu_gyro;

Eigen::Vector3d imu_acc_c = imupose.imu_acc;
Eigen::Vector3d imu_acc_p = imupose_p.imu_acc;

Eigen::Quaterniond dq;
Eigen::Vector3d dtheta_2 = (imu_gyro_c + imu_gyro_p) * dt * 0.25;
dq.w() = 1;
dq.x() = dtheta_2.x();
dq.y() = dtheta_2.y();
dq.z() = dtheta_2.z();

Eigen::Quaterniond Qwb_p = Qwb;
Qwb = Qwb_p * dq;

Eigen::Vector3d acc_w_c = Qwb   * imu_acc_c + gw;
Eigen::Vector3d acc_w_p = Qwb_p * imu_acc_p + gw;
Eigen::Vector3d acc_w = 0.5 * (acc_w_c + acc_w_p);

Pwb = Pwb + Vw * dt + 0.5 * dt * dt * acc_w;

Vw = Vw + acc_w * dt;
```

中值积分代码

提升作业

阅读从已有轨迹生成 imu 数据的论文, 撰写总结推导:

已知 k 阶（$k-1$ 次）B 样条（B-spline）曲线的表达式 [2],[3] 为:

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n}P_iB_{i,k}(t),\quad s.t.\quad P_i\in\mathbb{R}^N, t\in[t_{k-1},t_{n+1}) \tag{1}$$

其中, $P_i\in\mathbb{R}^N$ 为在时刻 t_i $(i\in 0,1,\dots,n)$ 的控制点, $B_{i,k}$ 为 B 样条基函数, 其 DeBoor-Cox 递推公式为

$$\begin{aligned}
B_{i,1}(t)&=\begin{cases}1 & \text{if } t\in[t_i,t_{i+1}),\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}\\
B_{i,k}(t)&=\left(\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}\right)B_{i,k-1}(t)+\left(\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}\right)B_{i+1,k-1}(t),\quad k>1
\end{aligned} \tag{2}$$

根据 [4]，公式(1)可转换成累积（Cumulative）形式，

$$P(t)=P_0\tilde{B}_{0,k}(t)+\sum_{i=1}^{n}(P_i-P_{i-1})\tilde{B}_{i,k}(t) \tag{3}$$

其中，

$$\tilde{B}_{i,k}(t)=\sum_{j=i}^{n}B_{j,k}(t) \tag{4}$$

我们使用 4 阶 3 次（$k=4$）均匀 B 样条曲线 [3]，均匀时间间隔为 Δt；在 3 次 B 样条中，时刻 t 的曲线受 4 个控制点的影响，我们定义这 4 个控制点为在时刻 $[t_{i-1},t_i,t_{i+1},t_{i+2}]$。

为了方便表示，定义 $s(t)$ 将 t_i 的控制点转换到 $s_i\in[0,1,\dots,n]$

$$s(t)=\frac{t-t_0}{\Delta t} \tag{5}$$

定义

$$u(t)=s(t)-s_i \tag{6}$$

根据公式(2)(3)(4)，$\tilde{\mathbf{B}}(u)$ 的矩阵形式

$$\tilde{\mathbf{B}}(u)=\mathbf{C}\begin{bmatrix}1\\u\\u^2\\u^3\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0&0\\5&3&-3&1\\1&3&3&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{7}$$

定义 $\tilde{\mathbf{B}}_j(u)$ 为 $\tilde{\mathbf{B}}(u)$ 的第 j 个元素（起始索引为 0），则 $\tilde{\mathbf{B}}_0(u)=1$。
$\tilde{\mathbf{B}}(u)$ 对时间 t 的一阶和二阶导数为

$$\dot{\tilde{\mathbf{B}}}(u)=\frac{1}{\Delta t}\mathbf{C}\begin{bmatrix}0\\1\\2u\\3u^2\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{B}}}(u)=\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{C}\begin{bmatrix}0\\0\\2\\6u\end{bmatrix} \tag{9}$$

已知世界坐标系下的轨迹 $\mathbf{T}_{wi}$，其表示形式为

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{wi} &= \begin{bmatrix}\mathbf{p} & \mathbf{q}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}p_x & p_y & p_z & q_x & q_y & q_z & q_w\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{10}$$

分别推导 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 的 3 次 B 样条曲线，根据公式(3)(7) $\mathbf{p}$ 的 B 样条曲线表达式为

$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_{i-1} + \sum_{j=1}^{3}(\mathbf{p}_{i+j-1} - \mathbf{p}_{i+j-2})\tilde{\mathbf{B}}_j(u) \tag{11}$$

通过指数和对数映射、替换 P 为 $\mathbf{q}$、向量加法改为四元数乘法 [4]，公式(3)重写为

$$\mathbf{q}(u) = \mathbf{q}_{i-1}\prod_{j=1}^{3}\exp(\log(\mathbf{q}_{i+j-2}^{-1}\mathbf{q}_{i+j-1})\tilde{\mathbf{B}}_j(u)) \tag{12}$$

为了求加速度，先求 $\mathbf{p}(u)$ 对时间 t 的一阶导数，

$$\dot{\mathbf{p}}(u) = \mathbf{p}_{i-1} + \sum_{j=1}^{3}(\mathbf{p}_{i+j-1} - \mathbf{p}_{i+j-2})\dot{\tilde{\mathbf{B}}}_j(u) \tag{13}$$

则二阶导数为

$$\ddot{\mathbf{p}}(u) = \mathbf{p}_{i-1} + \sum_{j=1}^{3}(\mathbf{p}_{i+j-1} - \mathbf{p}_{i+j-2})\ddot{\tilde{\mathbf{B}}}_j(u) \tag{14}$$

为了求角速度，再求 $\mathbf{q}(u)$ 对时间 t 的一阶导数，

$$\dot{\mathbf{q}}(u) = \mathbf{q}_{i-1}(\dot{A}_1A_2A_3 + A_1\dot{A}_2A_3 + A_1A_2\dot{A}_3) \tag{15}$$

其中，

$$A_j = \exp(\log(\mathbf{q}_{i+j-2}^{-1}\mathbf{q}_{i+j-1})\tilde{\mathbf{B}}_j(u)) \tag{16}$$

$$\dot{A}_j = A_j\log(\mathbf{q}_{i+j-2}^{-1}\mathbf{q}_{i+j-1})\dot{\tilde{\mathbf{B}}}_j(u) \tag{17}$$

所以，IMU 的加速度和角速度分别为

$$\mathbf{a}_m(u) = \mathbf{R}_{wb}^T \cdot (\ddot{\mathbf{p}}(u) + g_w) + b_a \tag{18}$$

$$\omega_m(u) = \mathbf{R}_{wb}^T \cdot 2[\mathbf{q}^{-1}(u)\dot{\mathbf{q}}(u)]_{xyz} + b_g \tag{19}$$

参考文献

[1] Allan Variance. Noise analysis for gyroscopes. *Freescale Semiconductor Document Number: AN5087 Application Note Rev. 0*, 2, 2015.

[2] 孙家广. 计算机图形学. 清华大学出版社, 1998.

[3] Steven Lovegrove, Alonso Patron-Perez, and Gabe Sibley. Spline fusion: A continuous-time representation for visual-inertial fusion with application to rolling shutter cameras. In *BMVC*, volume 2, page 8, 2013.

[4] Myoung-Jun Kim, Myung-Soo Kim, and Sung Yong Shin. A general construction scheme for unit quaternion curves with simple high order derivatives. In *SIGGRAPH*, volume 95, pages 369–376, 1995.