VIO-hw6-基础作业

VIO

---

2 证明$Dy=0$的最优解y等于D^TD的最小奇异值对应的奇异值向量

矩阵D^TD的奇异值分解如下：

$$\mathbf{D}^\top\mathbf{D}=\sum_{i=1}^{4}\sigma_i^2\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j^\top$$

回顾我们的原始问题如下：
求解$D_{2n\times4}y_{4\times1}=0$，这是一个超定方程，本质上求解得到的是一个最小二乘解，使用如下表示：

$$\min_y ||Dy||^2=(Dy)^T(Dy)=y^TD^TDy$$

其中$||y||=1$

y可以由D^TD的奇异值向量线性组合得到，也就是可以表示成如下形式

$$y=\sum_{i=1}^{4}k_iu_i=k_iu_i+v$$

其中

$$v=\sum_{j=1,j\neq i}^{4}k_ju_j$$

$$k_i,k_j\in R$$

容易知道u_i和v正交。
将y代入y^TD^TDy得到

$$\min_y ||Dy||^2=(k_iu_i+v)^TD^TD(k_iu_i+v)=k_i^2u_i^TD^TDu_i+v^TD^TDv+k_iu_i^TD^TDv+k_iv^TD^TDu_i$$

由于u_i和v正交，所以后两项为0；并且$Du_i=\sigma_iu_i$，带入得到

$$\min_y ||Dy||^2=(k_iu_i+v)^TD^TD(k_iu_i+v)=k_i^2u_i^TD^TDu_i+v^TD^TDv=k_i^2\sigma_i^2||u_i||^2+v^TD^TDv>=k_i^2\sigma_i^2||u$$

当且仅当$v=0$的时候等号成立。
如果想取得最小值，则$\sigma_i=\sigma_4$,也就是取得最小奇异值的时候，目标函数取得最小值，此时

$$y=k_4u_4+v=k_4u_4$$

由于$||y||=1$,所以$k_4=1$,所以

$$y=u_4$$