

ICE-BA 论文分析及 GBA 代码解析

崔华坤 2018.10.30

目录

ICE-BA 论文分析及 GBA 代码解析	1
一、BA 求解	3
1.1 建立 Normal Equation	3
1.2 建立 Schur Complement	3
1.3 求解 camera 位姿	3
1.4 求解路标点	3
1.5 ICE-BA 与传统 Batch BA 的区别	4
二、图解 Hession 矩阵	4
2.1 xyz 参数化的视觉约束	4
2.2 逆深度参数化的视觉约束	6
2.3 视觉和 IMU 联合约束	7
2.4 $[H b]$ 矩阵的数学形式	8
三、因子图分析法 Factor-Graph	9
3.1 观测因子——视觉约束	9
3.2 运动因子——IMU 约束	10
3.3 VIO 约束的因子图表示	11
3.4 先验因子	11
四、ICE-BA 后端非线性优化的数学说明	12
4.1 状态向量	12
4.2 目标函数	13
4.3 视觉约束	14
4.4 IMU 约束	14
4.5 Marginalization 约束	15

五、ICE-BA 中的一些变量	19
5.1 m_Zs 和 m_zs	19
六、GBA 代码解析	20
6.1 更新视觉约束 UpdateFactorsFeature	21
6.2 更新 IMU 约束 UpdateFactorsIMU	24
6.3 更新位姿先验 UpdateFactorsPriorCameraPose	27
6.4 更新运动先验 UpdateFactorsPriorCameraMotion	28
6.5 更新路标点先验 UpdateFactorsPriorDepth	29
6.6 更新 Schur complement	30
6.7 求解相机位姿	32
6.8 求解路标点	34
五、参考文献	34
六、附录	34
6.1 Marginalization 中的 ep' 证明	34
6.2 图 12 中的 Hession 和 b 矩阵数学形式	35

一、BA 求解

SLAM 优化求解的问题是一个 BA (Bundle Adjustment) 问题, BA 的求解过程可分为如下四步:

1.1 建立 Normal Equation

以 Gauss-Newton 法为例, 求解优化变量 δX 的增量方程 (又称 Normal Equation) 可写为:

$$J^T J \delta X = J^T e \quad (1)$$

其中 J 为残差 e 关于整体优化变量 X 的 Jacobian, 上式可简写 $H \delta X = b$, 其中 H 为近似的 Hessian 矩阵, 公式(1)可写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} U & W \\ W^T & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_c \\ \delta x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 U 是相机位姿间的关系, V 是路标点间的关系, 通常 U 、 V 是对角阵, W 是相机与路标点的关系。

1.2 建立 Schur Complement

求解增量方程时常用的方法是 Schur Complement, 即先边缘化掉路标点 δx_p , 可得:

$$(U - WV^{-1}W^T)\delta x_c = (u - WV^{-1}v) \quad (3)$$

上式可简写为 $S\delta x_c = g$, S 是表示相机之间共视关系的矩阵, 对于滑动窗口来说, 通常 S 是稠密的, 即两两相机之间都能看到相同的路标点, 如 ICE-BA 中的 LBA; 而 KeyFrame 之间的共视点通常比较少, 除了相邻的关键帧, 以及闭环两端的关键帧外, 其他关键帧之间往往并没有公共点, 因此 S 通常是稀疏的, 如 ICE-BA 中的 GBA。值得注意的是, 建立 Schur Complement 方程这一步是 BA 求解中最耗时的部分。

1.3 求解 camera 位姿

利用 S 矩阵的稀疏性, ICE-BA 用预处理共轭梯度 (Preconditioned Conjugate Gradient, 简称 PCG) 算法, 高效求解公式(3)的舒尔补方程, 得到 δx_c 。

1.4 求解路标点

将 δx_c 代入到下式, 求解 δx_p :

$$\delta x_p = V^{-1}(v - W^T \delta x_c) \quad (4)$$

1.5 ICE-BA 与传统 Batch BA 的区别

ICE-BA 认为在建立公式 (1) 的增量方程时，对之前已经算过的那些状态向量再次计算其 Jacobian 对精度不会有太大改善，因此没必要重新线性化（线性化就是计算 Jacobian），因为即使重新计算，得到的 Jacobian 也没什么变化。并且，在公式 (3) 中也没必要对整体 $[H|b]$ 矩阵进行消元，而是只对变化的进行更新。最后，在计算公式 (4) 时，只计算变化的路标点即可。对于没有变化的状态向量的临时值则一直保存下来，避免重新计算。

总结来说，在 ICE-BA 中更新 Factor 有三种情况：

1. 该 Factor 在本次迭代中没有变化，则不更新；
2. 该 Factor 是新 Factor，则在原来基础上 += 新 Factor。如新观察到一个新的路标点，则对此新路标点的观测约束就是一个新的 Factor；
3. 该 Factor 已存在但需要更新，则先减去旧 Factor，再加上新 Factor。

二、图解 Hession 矩阵

2.1 xyz 参数化的视觉约束

当路标点用 xyz 这种参数化形式时，图 1 给出了一个实例，其中绿色的圆圈为相机位姿 $T_i^{6 \times 1} = [R_i | p_i]$ ，黄色五角星为路标点 $X_j^{3 \times 1} = (x_j, y_j, z_j)$ ，黑色线条表示一个相机对一个路标点的观测，误差为重投影误差 $r_{ij}^{2 \times 1}$ ，其中 i 为相机 id， j 为路标点 id。

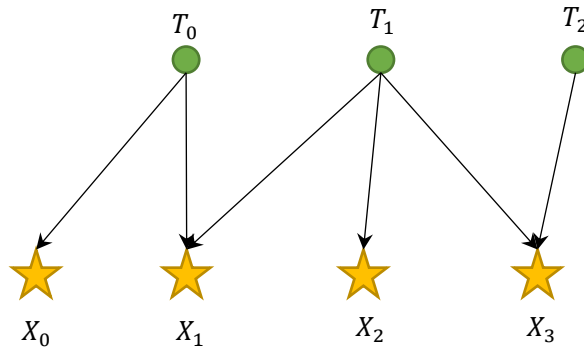


图 1 路标点为 xyz 参数化的例子

根据上图可得 Jacobian 矩阵如下所示，其中横轴为优化变量，竖轴为六次视觉观测，每个绿色小方块表示一次视觉重投影误差对相机位姿的 Jacobian，大小为 2×6 ，黄色小方块表示一次视觉重投影误差对路标点的 Jacobian，大小为 2×3 ：

$$J^{12 \times (18+12)} =$$

	T0	T1	T2	x0	x1	x2	x3
r00							
r01							
r11							
r12							
r13							
r23							

图 2 Jacobian 矩阵

那么，公式(2)可用下图表示，其中 U、V 为对角阵，W 为相机与路标点的观测关系：

	T0	T1	T2	x0	x1	x2	x3
T0							
T1							
T2							
x0							
x1							
x2							
x3							

 \times

T0	
T1	
T2	
x0	
x1	
x2	
x3	

 $=$

T0	
T1	
T2	
x0	
x1	
x2	
x3	

图 3 Normal Equation

同样，公式(3)可用下图表示，其中 S 为共视矩阵：

	T0	T1	T2
T0			
T1			
T2			

 $=$

	T0	T1	T2
T0			
T1			
T2			

 $-$

	T0	T1	T2
T0			
T1			
T2			

 \times

	x0	x1	x2	x3
x0				
x1				
x2				
x3				

 \times

	T0	T1	T2
T0			
T1			
T2			

$$\begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{red} & \text{white} & \text{white} \\ \text{white} & \text{red} & \text{white} \\ \text{white} & \text{white} & \text{red} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{yellow} & \text{white} & \text{white} \\ \text{white} & \text{yellow} & \text{white} \\ \text{white} & \text{white} & \text{yellow} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v \end{bmatrix}$$

图 4 Marginalization

2.2 逆深度参数化的视觉约束

因 ICE-BA 中采用逆深度参数化，因此下面将详细进行说明。每一次视觉观测都将与三个物理量有关：路标点的逆深度，第一次观测到该路标点的相机（ICE-BA 中称之为 source camera (cx)），和当前观测到该路标点的相机（measurement camera (cz)）。如下图所示，灰线表示第一次观测到该路标点的相机与路标点的关系；橙线表示一次观测 rv_{ij} ，其中 i 为当前观测到该路标点的相机 cz 的 id, j 为路标点 id，下面我们都将以下图为例进行说明。

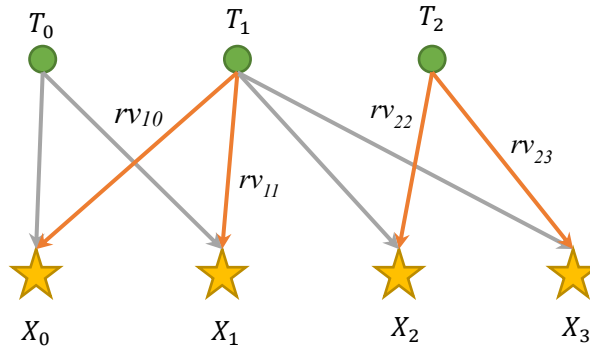


图 5 逆深度参数化例子

那么 Jacobian 可用下图表示，注意与上一个例子中的区别是每次视觉残差都与两个相机和一个路标点相关，其中黄色小方块所表示的 Jacobian 参数块尺寸为 2×1 ：

	T0	T1	T2	x0	x1	x2	x3
rv10							
rv11							
rv22							
rv23							

图 6 逆深度参数下的 Jacobian 矩阵

可计算得到 Hession 如下所示（2.4 部分中将详细介绍下图的数学求解过程）：

	T0	T1	T2	x0	x1	x2	x3
T0							
T1							
T2							
x0							
x1							
x2							
x3							

图 7 逆深度参数下的 Hession 矩阵

2.3 视觉和 IMU 联合约束

VIO 中除了视觉约束还需要考虑 IMU 约束,IMU 引入了相邻相机间的位置、旋转、速度、Bias 的约束。那么，对于我们在图 5 的基础上添加两个 IMU 约束，如下图中蓝色线所示：

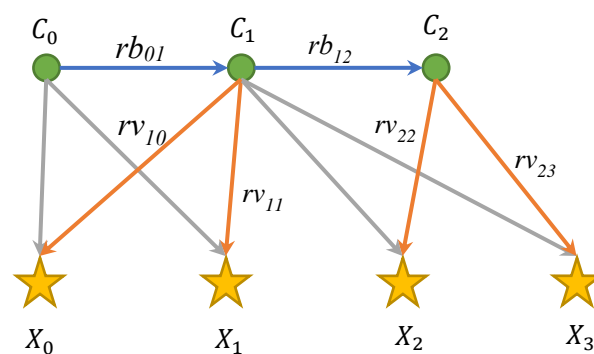


图 8 VIO 中的 IMU 约束

上图中 IMU 约束的 Jacobian 如下所示，其中蓝色小方块为 IMU 残差关于相机位姿的 Jacobian，大小为 15×6 ；红色小方块为 IMU 残差关于相机运动的 Jacobian，大小为 15×9 ：

	T0	M0	T1	M1	T2	M2	x0	x1	x2	x3
rb01										
rb12										

图 9 IMU 约束的 Jacobian 矩阵

将 IMU 约束和视觉约束合并后的 Jacobian 为：

	T0	M0	T1	M1	T2	M2	x0	x1	x2	x3
rv10	■		■				■			
rv11	■							■		
rv22					■				■	
rv23					■					■
rb01	■	■	■	■						
rb12			■	■	■	■				

图 10 VIO 的视觉和 IMU 共同约束下的 Jacobian 矩阵

那么，计算出公式（1）中的 Hession 和 b 矩阵如下图所示，其中绿色小块同时受视觉和 IMU 共同约束影响，黄色小块仅受 IMU 约束影响，红色和蓝色小块仅受视觉约束影响，下面我们将对下图进行详细的数学说明。

	T0	M0	T1	M1	T2	M2	x0	x1	x2	x3	b
T0	■	■	■	■			■				■
M0	■	■	■	■							■
T1	■	■	■	■	■		■	■	■	■	■
M1	■	■	■	■	■	■					■
T2			■		■				■	■	■
M2			■	■	■	■					■
x0	■		■				■	■			■
x1	■		■					■	■		■
x2					■				■	■	■
x3					■					■	■

图 11 VIO 的视觉和 IMU 共同约束下的 Hession 和 b 矩阵

2.4 [H|b]矩阵的数学形式

为了简化讨论，我们暂且忽略目标函数中的先验和 marg 约束，并且为了文章简洁，我们将[H|b]矩阵的详细数学形式放到附录 6.2 中。在下面分析增量式 BA 过程中，我们将以某一次新的观测，来分析对这里数学形式的影响。但是，分析附录的数学形式会发现，对于这个仅有 3 个相机 2 个路标点的系统来说，数学形式就异常复杂，不但要分析上面的[H|b]矩阵中哪一项有值，而且要分析每一项都受哪些约束共同影响，比如 $H_{T_1 T_1}$ 就有六项约束共同影响：

$$\begin{aligned}
 H_{T_1 T_1} = & \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)
 \end{aligned}$$

可以发现，通过上面的分析方法很难清晰地分析出来，下面给出一种清晰的思路——因子图 Factor-Graph。

三、因子图分析法 Factor-Graph

因子图由两种节点组成：变量节点和因子节点。其中，变量节点是指所有的优化变量（用圆圈表示），因子节点是指优化变量之间的各种约束关系，即一个因子对应一项约束（用方块表示）。ICE-BA 中的约束包括：视觉约束、IMU 约束、先验约束、相对边缘化约束。下面重点分析前三种约束，相对边缘化约束将放在 4.5 中讨论。

3.1 观测因子——视觉约束

从简单例子入手，以两个相机看到一个路标点为例，那么因子图可表示如下：

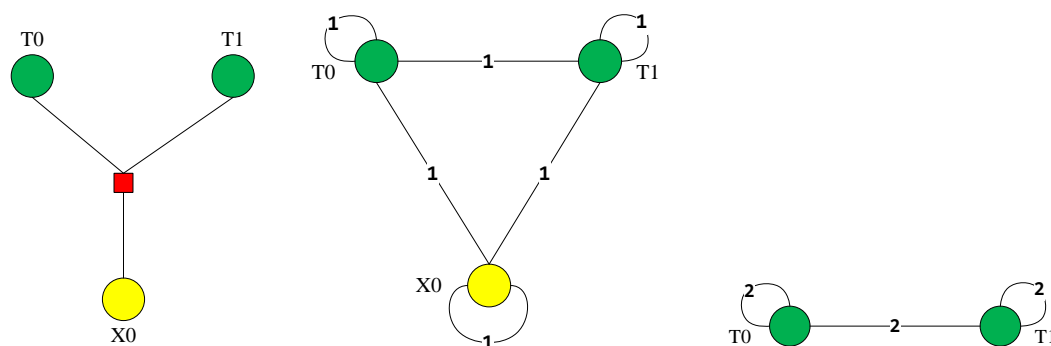


图 12 Factor-Graph 表示

其中，上图中的三个图便轻松地表示了从视觉约束，到 Hession 矩阵，再到 Schur Complement 的过程，非常简洁！（这里感谢刘浩敏博士带我进入 Factor-Graph 的海洋！），下面详细介绍：

1. 左图中一个小方块表示一个约束（又称一个因子），这里的红色因子表示两个相机（ T_0 和 T_1 ）共同观测到一个路标点 X_0 的视觉约束，其中相机和路标点为优化变量；

2. 中间图表示该红色因子对 H 矩阵的影响：即与小方块相连的所有变量的两两之间，和自己与自己之间，都添加一个边，边上的数字表示有几个约束会同时影响 H 矩阵中该处的值，其中一个红色视觉因子，会对 H 矩阵产生六处影响，对应到 H 矩阵中如下所示，其中下图中 H 矩阵对角线上的项对应到因子图中每个变量自身和自身的那个圆圈边，而非对角线的项对应到因子图中两两之间的边。

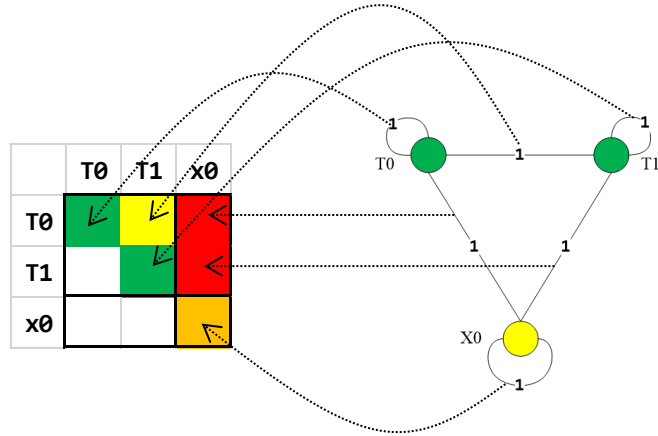


图 13 与上面因子图对应的 Hession 矩阵

3. 若建立 Schur Complement, 只需要将图 12 中的路标点 X_0 作为一个约束去掉即可, 那么 X_0 会对与它相连的变量添加上两两约束及自身和自身的约束, 如右图所示。

3.2 运动因子——IMU 约束

下面给出 IMU 约束对应的因子图:

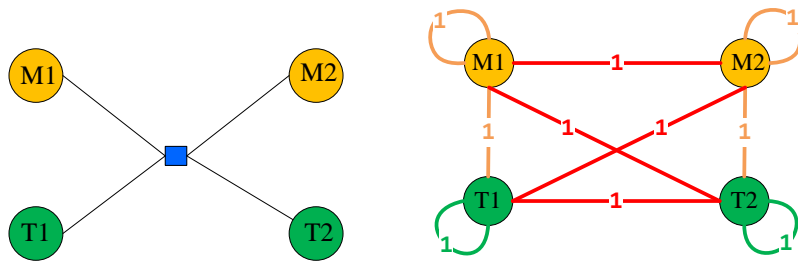


图 14 运动因子

上图中蓝色小块为 IMU 预积分引入的约束项, 此项因子对 Hession 矩阵的影响如右图所示。因子图与 Hession 矩阵的对应关系如下:

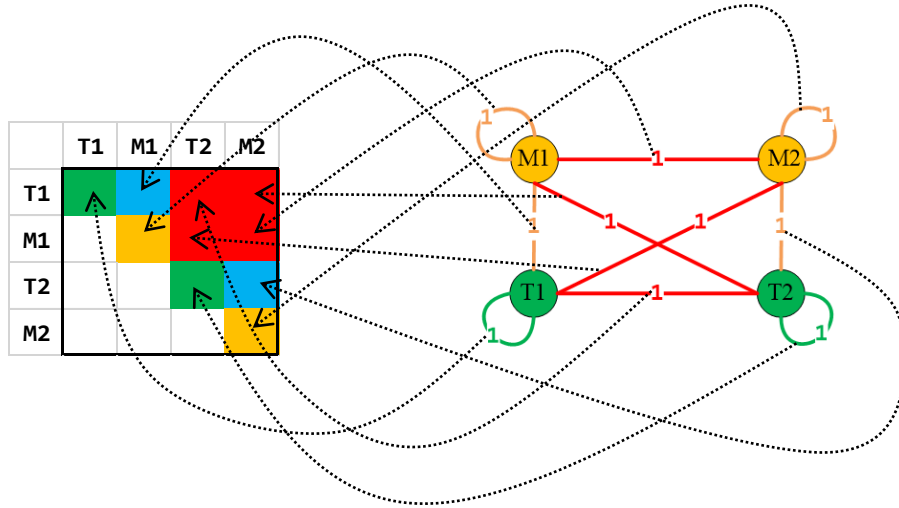


图 15 运动因子对应的 Hession 矩阵

3.3 VIO 约束的因子图表示

对图 8 我们可以用因子图的形式来表示，其中一个小方块表示一个约束，包括 2 个蓝色的 IMU 约束和 4 个红色的视觉约束；与小方块连接的线是表示与该约束相关的优化变量；当去掉一个小方块时，需要在所有连接的优化变量上和两两之间上都添加一个边，这个边表示该约束在整体 Hession 矩阵中的作用，我们会在 4.1 和 4.2 节的视觉和 IMU 约束中详细说明。

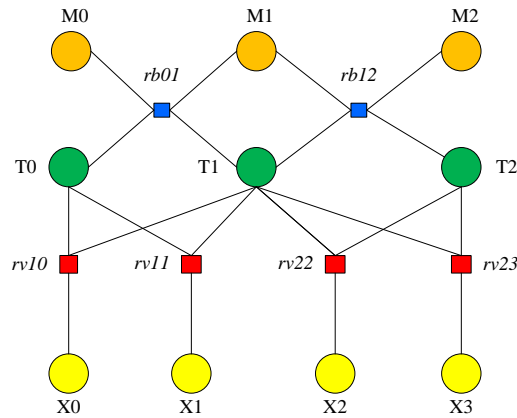


图 16 Graph 表示的 VIO 约束关系图

3.4 先验因子

先验约束比较简单，比如我们固定住第一帧的位姿：位置为 0，朝向为对齐重力方向，那么就引入了对第一帧位姿的先验约束。如下图所示，此例中的先验因子为单元因子，即只对一个优化变量有影响：

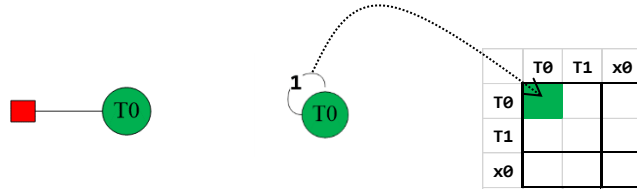


图 17 先验因子

四、ICE-BA 后端非线性优化的数学说明

4.1 状态向量

为了深入理解图 11 的大矩阵 $[H|b]$ ，同时也为了便于理解接下来的增量式 BA 思路，这里有必要对其中的 Hessian 矩阵的数学求解过程进行详细说明，首先我们从 ICE-BA 的状态向量，即优化的物理量进行说明：

状态向量共包括滑动窗口内的 n 个所有相机的状态（包括位置、朝向、速度、加速度计 bias 和陀螺仪 bias）和 m 个 3D 点的逆深度，尺寸为 $15n+m$ ：

$$\mathcal{X} = [C_0, C_1, \dots, C_{n-1}, \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{m-1}] \quad (5)$$

$$C_k = (T_k, M_k) = [R_k, p_k, v_k, b_{a_k}, b_{w_k}]$$

其中， C_k 表示第 k 帧相机状态， T_k 表示位置和朝向， M_k 表示速度和 bias，下面对论文[1]中的坐标系进行说明：

$T_k = T_{c_k \leftarrow w}$ 表示从世界系到第 k 帧相机系的变换

$R_k = R_{c_k \leftarrow w}$ 表示从世界系到第 k 帧相机系的旋转

$p_k = p_{w \leftarrow c_k}$ 表示从第 k 帧相机系到世界系的平移，即第 k 帧相机在世界系中的坐标

$v_k = {}^w v_{c_k}$ 表示第 k 帧相机在世界系中的速度

其中，从世界系到第 k 帧相机系的平移，可计算得：

$$p_{c_k \leftarrow w} = -R_{c_k \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_k} \quad (6)$$

那么，对于世界系中的任意点 P_w ，它在第 k 帧相机系下的坐标为：

$$P_{c_k} = T_{c_k \leftarrow w} P_w = R_{c_k \leftarrow w} P_w - R_{c_k \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_k} \quad (7)$$

为了避免混淆，下文均采用等式右边的改写方式。

另外，上面提到的滑动窗口值得解释下：如下图所示，在 LBA 中，滑动窗口是指时间上最邻近的多帧图像，如蓝色虚框中的 7 个 Frame，LBA 中的 Frame 不一定是关键帧（KF），而是按时序从前端依次进来的帧，并且通常为均匀分布。但 GBA 中包含了所有的 KF，而优化后的 KF 位姿会更新给 LBA；LBA 中也含有 GBA 中所有的 KF，但是会固定住不变，等待 GBA 为其更新。经过 GBA 优化后的 KF 可以使得 LBA 更准确地求解位姿。值得说明的是，LBA 中会将 KF 复制一份作为普通的 Frame 放到滑窗中进行优化（比如 LBA 中的 h_7 、 h_9 、 h_{10} 和 h_{12} 对应 GBA 的 k_5 、 k_6 、 k_7 、 k_8 ），但是因为复制品跟 KF 一模一样，因此位姿不会发生大的偏差。

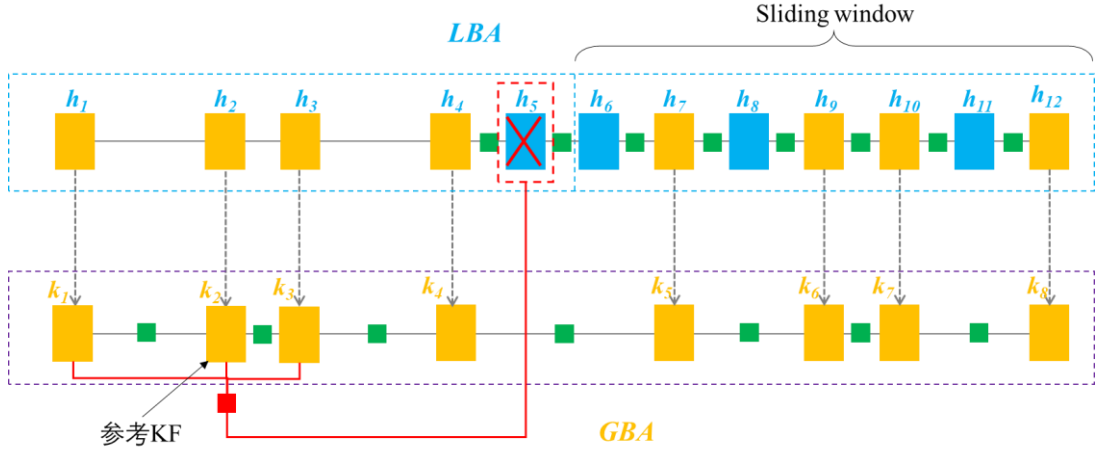


图 18 LBA 和 GBA

4.2 目标函数

论文[1]给出了 LBA 的整体目标函数，包括视觉约束、IMU 约束和先验约束。

$$\operatorname{argmin}_x \left\| f_{ij}^{vis} (T_i, T_{s_j}, \rho_j) \right\|_{\Sigma_{ij}^{vis}} + \left\| f_0^{prior} (C_0) \right\|_{\Sigma_0^{prior}} + \left\| f_{i,i+1}^{imu} (C_i, C_{i+1}) \right\|_{\Sigma_{i,i+1}^{imu}} \quad (8)$$

GBA 在上面基础上多了一项 marg 约束，如下所示：

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_x \left\| f_{ij}^{vis} (T_i, T_{s_j}, \rho_j) \right\|_{\Sigma_{ij}^{vis}} + \left\| f_0^{prior} (C_0) \right\|_{\Sigma_0^{prior}} + \left\| f_{i,i+1}^{imu} (C_i, C_{i+1}) \right\|_{\Sigma_{i,i+1}^{imu}} \\ + \left\| f_i^{rel} (\{T_{k \in \mathcal{L}_i}\}) \right\|_{\Sigma_i^{rel}} \end{aligned} \quad (9)$$

将上式整理成 Norma Equation 形式：

$$\begin{aligned}
& \left(\sum J_{ij}^{visT} \Sigma_{ij}^{vis-1} J_{ij}^{vis} + \sum J_{i,i+1}^{imuT} \Sigma_{i,i+1}^{imu-1} J_{i,i+1}^{imu} + \sum J_i^{relT} \Sigma_i^{rel-1} J_i^{rel} \right. \\
& \quad \left. + \sum J_0^{priorT} \Sigma_0^{prior-1} J_0^{prior} \right) \delta \mathcal{X} \\
& = \sum J_{ij}^{visT} \Sigma_{ij}^{vis-1} f_{ij}^{vis} + \sum J_{i,i+1}^{imuT} \Sigma_{i,i+1}^{imu-1} f_{i,i+1}^{imu} + \sum J_i^{relT} \Sigma_i^{rel-1} f_i^{rel} + \\
& \quad \Sigma J_0^{priorT} \Sigma_0^{prior-1} f_0^{prior}
\end{aligned} \tag{10}$$

简写为:

$$(H^{vis} + H^{imu} + H^{rel} + H^{prior}) \delta \mathcal{X} = b^{vis} + b^{imu} + b^{rel} + b^{prior} \tag{11}$$

其中，每一项 H 的尺寸均为所有优化变量的尺寸 $(15n+m) \times (15n+m)$ ，每一项 b 的尺寸均为 $(15n+m) \times 1$ 。注意在 GBA 中更新时，各项约束的影响不一定存放在哪个 H 矩阵，毕竟可能有多个约束会共同影响一个地方的值，比如 IMU 约束除了会放在 H^{imu} 中，也有可能存放在 H^{vis} 中。

4.3 视觉约束

1) **残差**: 视觉残差是重投影误差，对于第 j 个路标点 P ，将 P 从第一次观看到它的相机（设为第 s_j 帧）坐标系下的归一化相机系中的值 $\bar{P}_{c_{s_j}}$ ，转换到当前的第 i 个相机坐标系下的像素坐标 $\bar{P}_{uv}^{c_i}$ ，与第 i 个相机实际看到的像素坐标 $P_{uv}^{c_i}$ 相减，定义为视觉误差项为（对应论文[1]中的公式（1））:

$$f_{ij}^{vis}(T_i, T_{s_j}, \rho_j) = f_{ij}^{vis}(T_{c_i \leftarrow w}, T_{c_{s_j} \leftarrow w}, \rho_j) = \pi \left(T_{c_i \leftarrow w} T_{c_{s_j} \leftarrow w}^{-1} \frac{1}{\rho_j} \bar{P}_{c_{s_j}} \right) - P_{uv}^{c_i} \tag{10}$$

2) 优化变量

$$[p_{w \leftarrow c_i}, R_{c_i \leftarrow w}], [p_{w \leftarrow c_{s_j}}, R_{c_{s_j} \leftarrow w}], \rho_j$$

4.4 IMU 约束

1) **残差**: 两帧之间的 PVQ 和 bias 的变化量的差:

$$f_{i,j}^{imu}(C_i, C_j) = \begin{bmatrix} e_r \\ e_v \\ e_p \\ e_{b_a} \\ e_{b_w} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Log} \left\{ \left[\text{Exp} \left(\Delta J_{ij}^r (b_i - \hat{b}_i) \right) \Delta R_{c_i \leftarrow c_j} \right]^T \cdot R_{c_i \leftarrow w} R_{c_j \leftarrow w}^T \right\} \\ R_{c_i \leftarrow w} \left({}^w v_{c_j} - {}^w v_{c_i} - {}^w g \Delta t_{ij} \right) - \left({}^{c_i} \Delta v_{ij} + \Delta J_{ij}^v (b_i - \hat{b}_i) \right) \\ R_{c_i \leftarrow w} \left(p_{w \leftarrow c_j} - p_{w \leftarrow c_i} - {}^w v_{c_i} \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} {}^w g \Delta t_{ij}^2 \right) - \left(\Delta p_{c_i \leftarrow c_j} + \Delta J_{ij}^p (b_i - \hat{b}_i) \right) \\ b_{a_j} - b_{a_i} \\ b_{\omega_j} - b_{\omega_i} \end{bmatrix}$$

2) 优化变量

$$[p_{w \leftarrow c_i}, R_{c_i \leftarrow w}], [{}^w v_{c_i}, b_{a_i}, b_{\omega_i}], [p_{w \leftarrow c_j}, R_{c_j \leftarrow w}], [{}^w v_{c_j}, b_{a_j}, b_{\omega_j}]$$

4.5 Marginalization 约束

当 LBA 滑窗中 Frame 数量大于阈值时，需要将滑窗中最老帧给边缘化掉，即论文[1]中的相对边缘化（Relative Marginalization）。ICE-BA 的相对边缘化是在参考坐标系下进行的，参考坐标系是与最老帧共视中最近的 KF，这里的最近可以是时间上最近，也可以是距离上最近。marg 后会对 GBA 中跟最老帧有共视关系的所有 KF 都产生一个线性约束。这样的话，GBA 可以根据这些 marg 约束对 KF 的位姿进行更准确地优化，从而将优化的 KF 位姿更新给 LBA，进而可以有效阻止 LBA 不断的 marg 造成的误差累积。

1) marg 视觉约束后产生的先验

按照论文[1]的第 5 部分，相对边缘化约束的参考坐标系不再是前面的世界系 w，而是与当前帧共视且距离最近的一个 KF 的相机系（设为第 k_0 帧）。那么，公式（10）的视觉约束可改写为：

$$h_{ij}^{vis} \left(T_{c_i \leftarrow c_{k_0}}, T_{c_{s_j} \leftarrow c_{k_0}}, \rho_j \right) = \pi \left(T_{c_i \leftarrow c_{k_0}} T_{c_{s_j} \leftarrow c_{k_0}}^{-1} \frac{1}{\rho_j} \bar{P}_{c_{s_j}} \right) - P_{uv}^{c_i} \quad (12)$$

其中， c_{s_j} 为 GBA 中与当前帧 c_i 共视的 source keyframe。

2) marg 掉 IMU 约束后产生的先验

根据上一步中的参考系从世界系变成距离当前帧最近的一个 KF 的相机系（设为第 k_0 帧）。那么，公式（11）的 IMU 约束可改写为：

$$h_{i,j}^{imu}(^{c_{k_0}}g, C_i', C_j') = \begin{bmatrix} e_r' \\ e_v' \\ e_p' \\ e_{b_a}' \\ e_{b_w}' \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Log} \left\{ \left[\text{Exp} \left(\Delta J_{ij}^r (b_i - \hat{b}_i) \right) \Delta R_{c_i \leftarrow c_j} \right]^T \cdot R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} R_{c_j \leftarrow c_{k_0}}^T \right\} \\ R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} \left(R_{c_{k_0} \leftarrow c_j} {}^{c_j}v_{c_j} - {}^{c_{k_0}}g \Delta t_{ij} \right) - {}^{c_i}v_{c_i} - \left({}^{c_i}\Delta v_{ij} + \Delta J_{ij}^v (b_i - \hat{b}_i) \right) \\ R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} \left(p_{c_{k_0} \leftarrow c_j} - p_{c_{k_0} \leftarrow c_i} - \frac{1}{2} {}^{c_{k_0}}g \Delta t_{ij}^2 \right) - {}^{c_i}v_{c_i} \Delta t_{ij} - \left(\Delta p_{c_i \leftarrow c_j} + \Delta J_{ij}^p (b_i - \hat{b}_i) \right) \\ b_{a_j} - b_{a_i} \\ b_{\omega_j} - b_{\omega_i} \end{bmatrix}$$

其中上式中第三项 e_p' 证明可查看附录 6.1。

3) 举例说明 marg 过程（下面仅引入了视觉约束，没看到 IMU 约束在哪？）

为了直观理解，下面举例来说明 marg 的影响。其中，紫色虚框为 GBA，蓝色虚框为 LBA。LBA 的最老帧 T_{h_1} 需要被边缘化掉， T_{k_1} 、 T_{k_2} 、 T_{k_3} 是 T_{h_1} 的 source frame， T_{k_3} 是距离 T_{h_1} 最近的 KF，并作为 marg 过程中的参考帧。

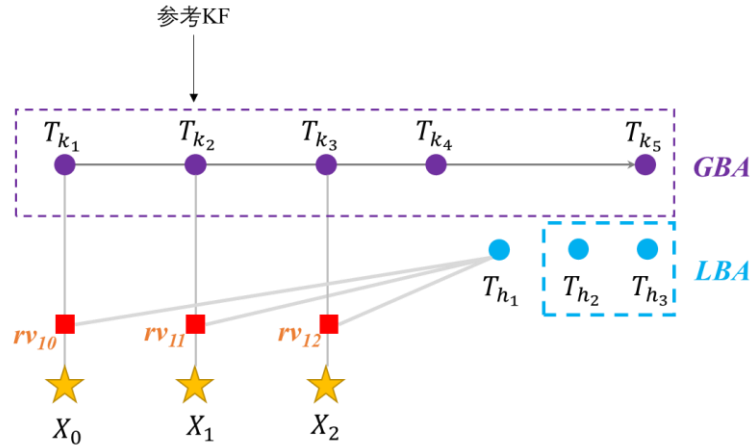


图 19 marg 的例子

将上面例子画出因子图形式如下，并去掉因子，转成对 H 矩阵的影响图：

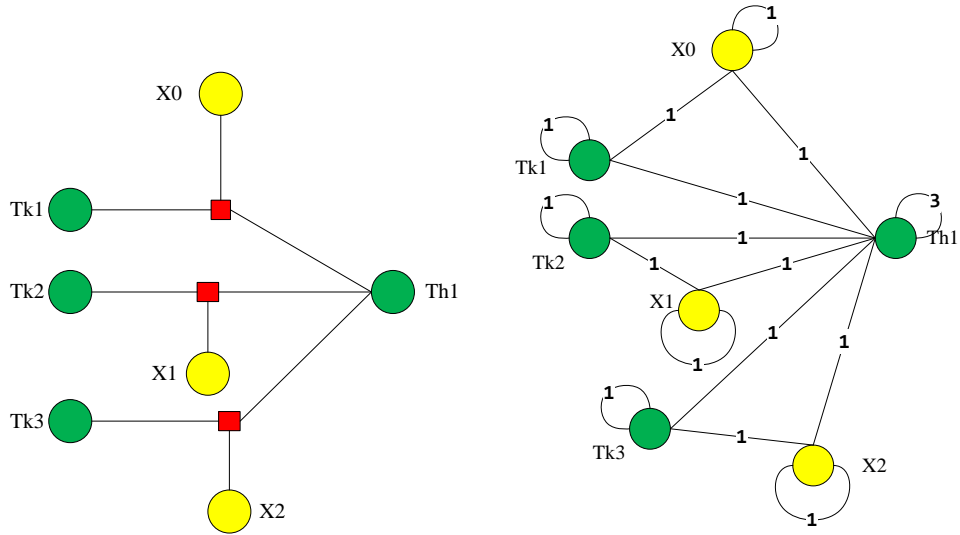


图 20 marg 的因子图表示

为了形象说明，上面过程对应到 J 和 H 矩阵可如下所示，可见 H 矩阵的每一项都可与因子图中的每个边一一对应：

	Tk1	Tk2	Tk3	Tk4	Th1	Tk5	X0	X1	X2	b
Tk1										
Tk2										
Tk3										
Tk4										
Th1										
Tk5										
X0										
X1										
X2										

	Tk1	Tk2	Tk3	Tk4	Th1	Tk5	X0	X1	X2
rv10									
rv11									
rv12									

图 21 Jacobian 和 Hessian 矩阵

当 marg 掉 T_{h_1} 时，会对 GBA 中的 T_{k_1} 、 T_{k_2} 、 T_{k_3} 产生视觉先验约束，即将上图中 T_{h_1} 边缘化掉，可得下图中左图的因子图，其中边上标注“1”的为 marg 所引入的约束；若继续 marg 掉路标点，则可得到右图的因子图，右图对应了 S 矩阵。

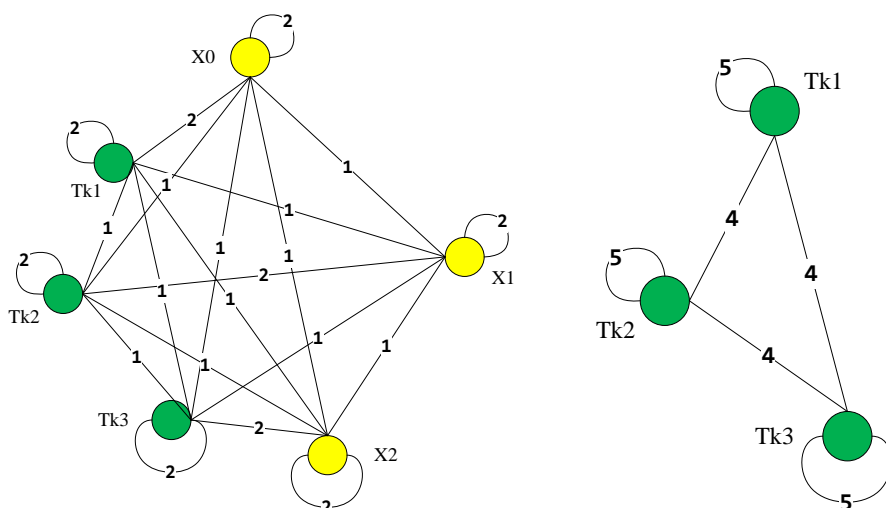


图 22 marg 掉最老帧后的因子图（左），和继续 marg 掉路标点的因子图（右）

对应到 H 矩阵的图形上，可将 $[H|b]$ 矩阵中与 T_{h_1} 有关的移到一边，用 Schur 补进行 marg，那么边缘化后的新 $[H|b]$ 矩阵如下图所示：

	Tk1	Tk2	Tk3	Tk4	Tk5	X0	X1	X2	Th1	b
Tk1										
Tk2										
Tk3										
Tk4										
Tk5										
X0										
X1										
X2										
Th1										

	Tk1	Tk2	Tk3	Tk4	Tk5	X0	X1	X2	b
Tk1									
Tk2									
Tk3									
Tk4									
Tk5									
X0									
X1									
X2									

	Tk1	Tk2	Tk3
Tk1			
Tk2			
Tk3			

图 23 将 T_{h_1} 移动到一边的 $[H|b]$ （左图）

marg 后的 $[H|b]$ （中图），及 marg 掉路标点的 S 矩阵（右图）

对比 marg 前后的矩阵可以发现，marg 掉 C_{h_1} 会导致 Hessian 稀疏性被破坏，产生了许多新的非零块，增加的新约束可以用下图中的红线来表示：

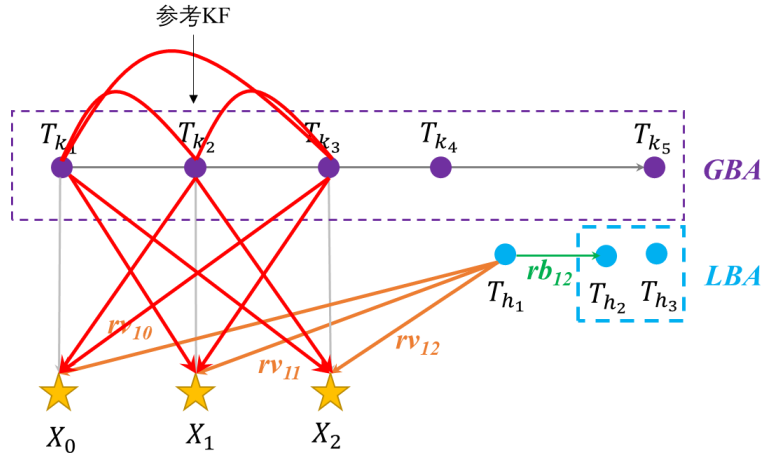


图 24 marg 产生的新约束

五、ICE-BA 中的一些变量

下面我们对 GBA 代码进行解析，首先对 ICE-BA 中的几个变量进行说明：

Unitary: 对角线的数据

Binary: 非对角线的数据

X: source

Z: measurement

iKF2X: matched KF to source feature index

iKF2d[i]: 截止到第 i 个 KF 之前的所有 KF 一共产生的 mappoint 个数

5.1 m_Zs 和 m_zs

假设当前有 10 个 MapPoints, id=0,1,2,...,8,9, 其中前 3 个 0,1,2 来自于 KF0, 在 KF0 中的 m_ix 分别为 m_ix=0,1,2; 后 7 个 3,4,...,9 来自 KF1, 在 KF1 中的 m_ix 分别为 m_ix=0,1,...,6, 如下图所示:

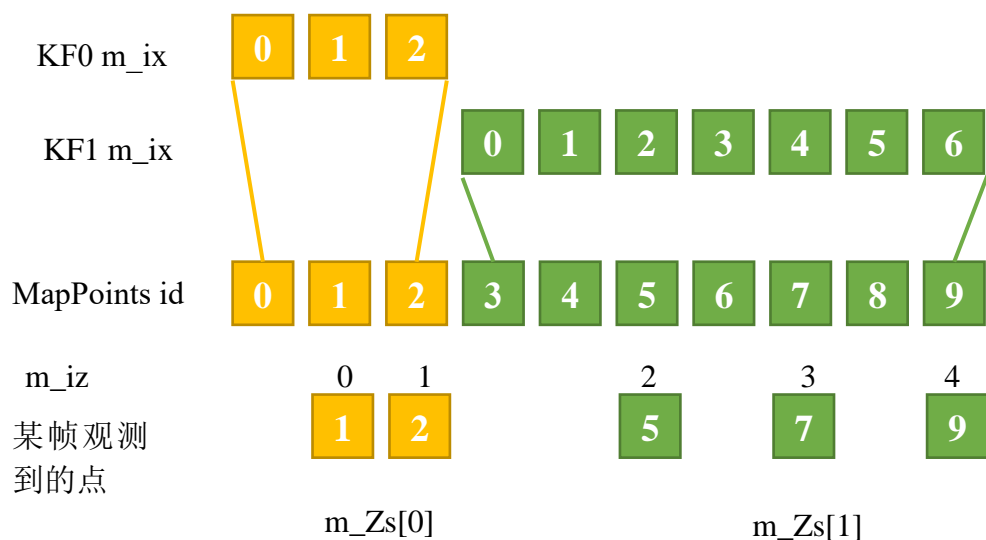


图 25 m_Zs 和 m_zs 的关系

某一帧看到 5 个 feature measurement，对应到 MapPoints 的 id=1,2,5,7,9，那么前 2 个 feature measurement 来自于 KF0，在 KF0 中的 $m_ix=1,2$ ；后 3 个 feature measurement 来自于 KF1，在 KF1 中的 $m_ix=2,4,6$ 。 m_iz1 和 m_iz2 表示当前观测帧看到的点的 id， $m_zs[]$ 表示当前帧观测到的所有路标点， m_ix 表示该路标点在第一次观测的 source KF 中的序号。

$m_Zs[0].\{m_iKF, m_iz1, m_iz2\} = \{0, 0, 2\}$

$m_Zs[1].\{m_iKF, m_iz1, m_iz2\} = \{1, 2, 5\}$

$m_zs[0].m_ix=1$ $m_zs[1].m_ix=2$

$m_zs[2].m_ix=2$ $m_zs[3].m_ix=4$ $m_zs[4].m_ix=6$

六、GBA 代码解析

GBA 线程主函数为 GlobalBundleAdjustor::Run()，流程如下：

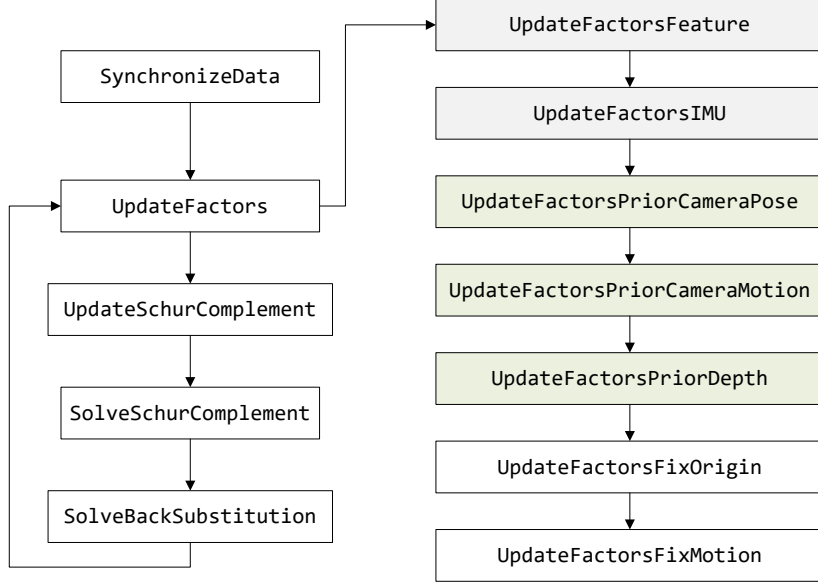


图 26 GBA 流程图

其中，UpdateFactors 对应 BA 求解中的建立增量方程，得到[H|b]矩阵，具体实现在 GlobalBundleAdjustorGN 中的 UpdateFactors()，主要包含更新视觉和 IMU 约束、更新先验和固定一些优化变量；UpdateSchurComplement 是计算 Schur Complement 中的[S|g]矩阵；SolveSchurComplement 是计算相机位姿及 Motion 等；SolveBackSubstitution 是求解路标点。

下面对各个函数进行分别说明：

6.1 更新视觉约束 UpdateFactorsFeature

对应代码为 GlobalBundleAdjustorGN::UpdateFactorsFeature()，为了便于形象理解，这里举例说明，我们假设图 14 中相机 T_2 为新来的，这时它带来了两个新的视觉观测 $\gamma_{v_{22}}$ 、 $\gamma_{v_{23}}$ 和一个新的 IMU 约束 $\gamma_{B_{12}}$ ，这里我们以 $\gamma_{v_{22}}$ 这次视觉观测为例进行分析， $\gamma_{v_{22}}$ 涉及 T_2 、 T_1 和 X_2 ，其中 T_1 为 source frame cx， T_2 为 measurement frame cz。我们再回头分析 2.4 节中的 Hession 矩阵和 b 矩阵的数学形式，可以发现， $\gamma_{v_{22}}$ 会对图 11 中的如下参数块有影响，其中红色为 $\gamma_{v_{22}}$ 的影响：

$$\begin{aligned}
 H_{T_1 T_1} &= \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right) \\
 H_{T_1 T_2} &= \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{T_1 X_2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \end{pmatrix} \\
H_{T_2 T_2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \end{pmatrix} \\
H_{T_2 X_2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \end{pmatrix} \\
H_{X_2 X_2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \end{pmatrix} \\
b_{T_1} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \end{pmatrix}^T r_{v_{10}} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \end{pmatrix}^T r_{v_{11}} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \end{pmatrix}^T r_{v_{22}} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \end{pmatrix}^T r_{v_{23}} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \end{pmatrix}^T r_{B_{01}} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \end{pmatrix}^T r_{B_{12}} \\
b_{T_2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \end{pmatrix}^T r_{v_{22}} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \end{pmatrix}^T r_{v_{23}} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \end{pmatrix}^T r_{B_{12}} \\
b_{X_2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \end{pmatrix}^T r_{v_{22}}
\end{aligned} \tag{6}$$

其中， $\gamma_{v_{22}}$ 对 H 矩阵的 6 项约束，我们下面用因子图的方式进行说明：这里只考虑 $\gamma_{v_{22}}$ 的影响，可以发现会对六个边有影响，并且发现跟上面的数学形式一一对应！这里忽略了其他的小块，其中边上的数字表示有几个约束对这个边有影响，这里只考虑 $\gamma_{v_{22}}$ 的 1 个约束。

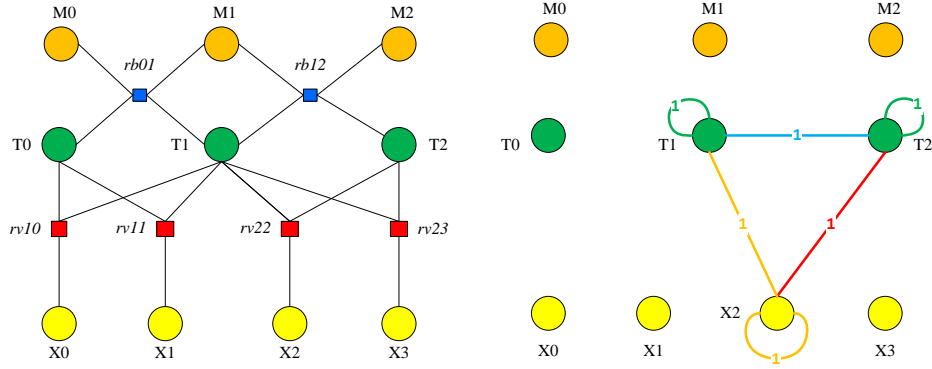


图 27 $\gamma_{v_{22}}$ 对 H 矩阵的影响

（左边为带小块的形式，右边为去掉 $\gamma_{v_{22}}$ 小块的影响）

上述九项在图 11 $[H|b]$ 矩阵的影响如下图所示，其中的 9 个彩色块即为对应的影响，对应到代码中，大矩阵 $[H|b]$ 中的绿色参数块存放在 **m_SAcus** 数组中，表示 U 对角线上跟相机位姿相关的块及对应的 b ，通过上面分析已经知道这些参数将同时受到视觉和 IMU 的影响；蓝色块存放在观测帧 T_2 的 **m_SAcxzs** 数组中，表示 U 中观测帧 T_2 所看到的所有视觉观测；橙色块存放在原始帧 T_1 的 **m_Axs**

数组中的 m_Sadx 中，表示该原始帧 T_1 负责对于路标点 X_2 的维护，比如 X_2 有可能被除 T_2 外的其他观测帧看到，也是由该路标点的原始帧 T_1 来维护。红色块存放在观测帧 T_2 的 m_Azs1 数组中的 m_adcz 中，该参数块只与 $\gamma_{v_{22}}$ 有关，不会受到其他观测的影响。

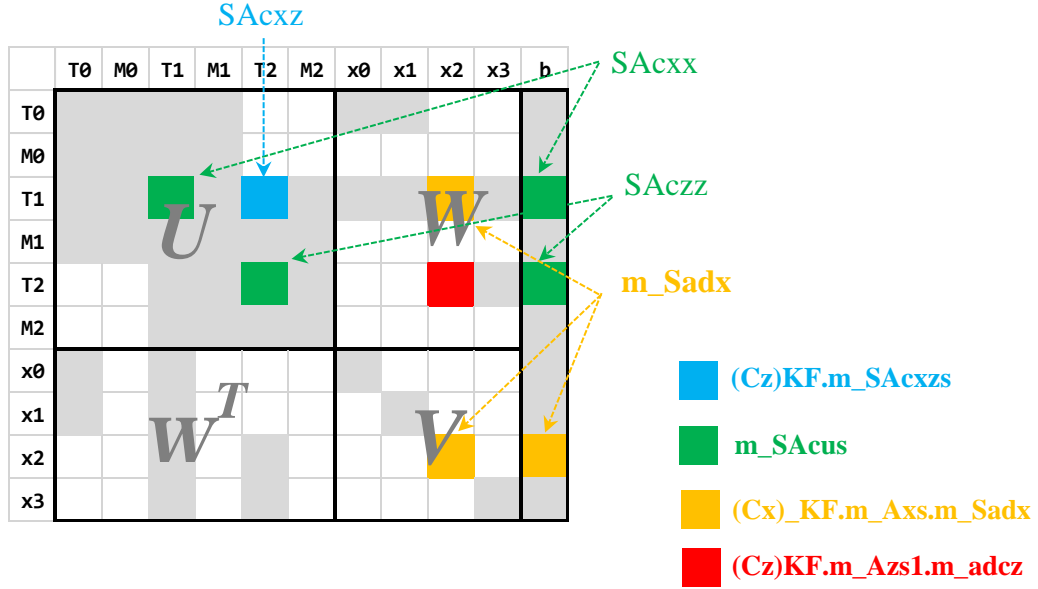


图 28 当图 9 中新来一帧 T_2 时，新的视觉观测 $\gamma_{v_{22}}$ 对 $[H|b]$ 的 9 处影响
下图形象给出了一个视觉约束因子对于 $[H|b]$ 矩阵的影响及对应关系：

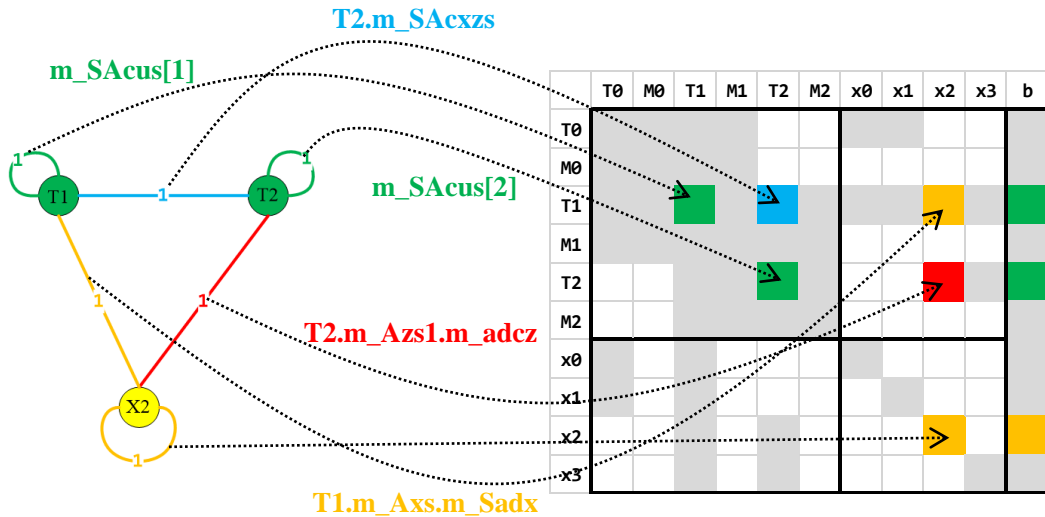


图 29 因子图与 $[H|b]$ 的对应关系

值得注意的是， $\gamma_{v_{22}}$ 对于大矩阵 $[H|b]$ 的影响存放在观测帧 T_2 的 m_Azs2 和

m_Azs1.m_adcz 中，并通过 **FTR::GetFactor** 函数计算公式（6）中的红色部分。
 为了与 **GetFactor** 中的 **Factor::Full::U->m_A**（尺寸为 13×14 ）一致，我们将图 24 中的彩色块单独拿出来，并将路标点放到左上角，则如下图所示：

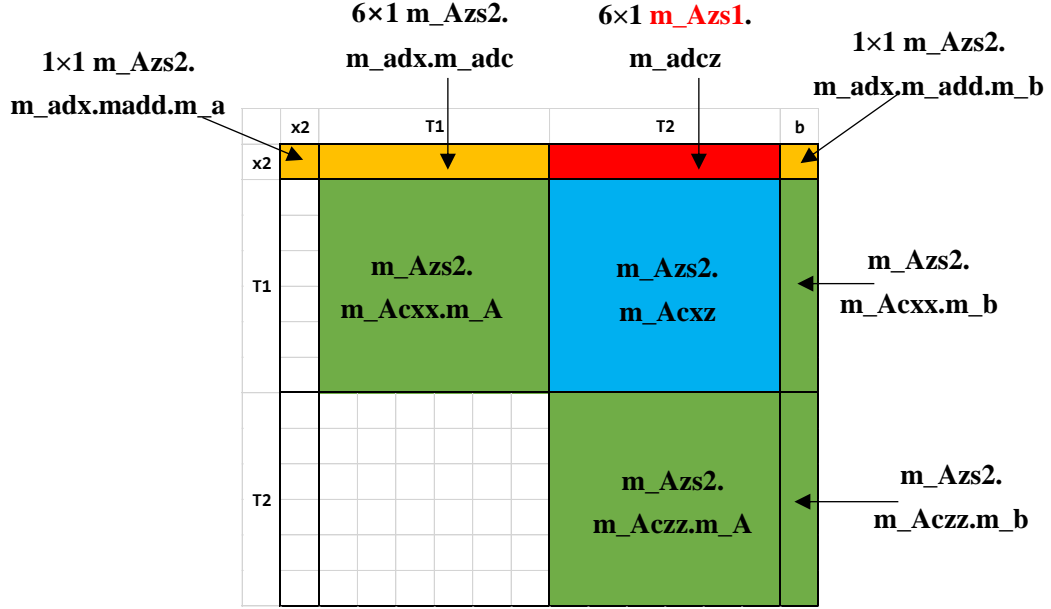


图 30 **GetFactor** 中的 **U->m_A**，尺寸为 13×14

6.2 更新 IMU 约束 **UpdateFactorsIMU**

对应代码为：**GlobalBundleAdjustorGN::UpdateFactorsIMU()**，同样的，对于图 23 来说，我们考虑新来的 T_2 带来了一个新的 IMU 约束 $\gamma_{B_{12}}$ ，那么 $\gamma_{B_{12}}$ 涉及 T_1 、 M_1 和 T_2 、 M_2 。同样的，我们将 $\gamma_{B_{12}}$ 对附录 H 中的 14 处影响如下蓝色所示：

$$\begin{aligned}
 H_{T_1 T_1} &= \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right) \\
 H_{T_1 M_1} &= \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right) \\
 H_{T_1 T_2} &= \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right) \\
 H_{T_1 M_2} &= \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right) \\
 H_{M_1 M_1} &= \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right) \\
 H_{M_1 T_2} &= \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{M_1 M_2} &= \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right) \\
H_{T_2 T_2} &= \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right) \\
H_{T_2 M_2} &= \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right) \\
H_{M_2 M_2} &= \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right) \\
b_{T_1} &= \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right)^T r_{v_{10}} + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right)^T r_{v_{11}} + \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T r_{v_{22}} + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T r_{v_{23}} + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)^T r_{B_{01}} \\
&\quad + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T r_{B_{12}} \\
b_{M_1} &= \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right)^T r_{B_{01}} + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)^T r_{B_{12}} \\
b_{T_2} &= \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right)^T r_{v_{22}} + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right)^T r_{v_{23}} + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)^T r_{B_{12}} \\
b_{M_2} &= \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right)^T r_{B_{12}}
\end{aligned}$$

$\gamma_{B_{12}}$ 对 H 矩阵的 10 处影响用 Factor-Graph 的形式可如下表示：

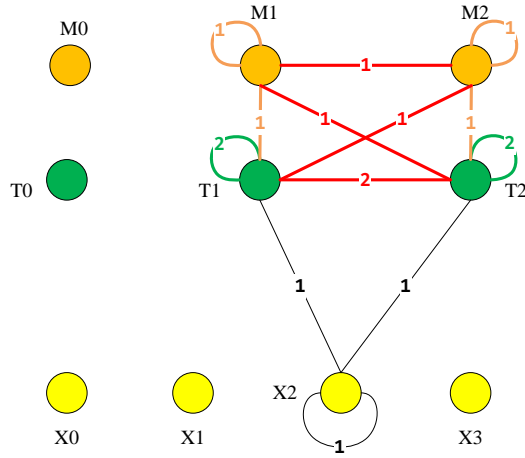


图 31 $\gamma_{B_{12}}$ 对 H 矩阵的影响

$\gamma_{B_{12}}$ 对大矩阵 $[H|b]$ 的 14 处影响可以用下图的彩色块表示，灰色块是不受影响的。其中绿色块为跟上面视觉约束相同的 **m_SAcus**，这里不再类述；黄色块为跟 IMU 的 V、bias 有关的参数块，数据存放在 **m_SAcmsLM** 数组中的 **m_Au** 中（包括 **m_Amm** 和 **m_Acm**），其中绿色块和黄色块都是可能受到其他约束影响，比如黄色块还会受到 $\gamma_{B_{01}}$ 的影响；红色块存放在 **m_SAcmsLM[im2].m_Ab** 中，表示

$\gamma_{B_{12}}$ 对两帧之间引入的约束影响，值得注意的是，红色块不会受其他 IMU 约束的影响，其中， $H_{T_1 T_2}$ 也会受到上面视觉约束影响，但这里只保存 IMU 约束对这个参数块的影响，这个变量是在 `m_DsLM[im2].GetFactor` 中计算的。

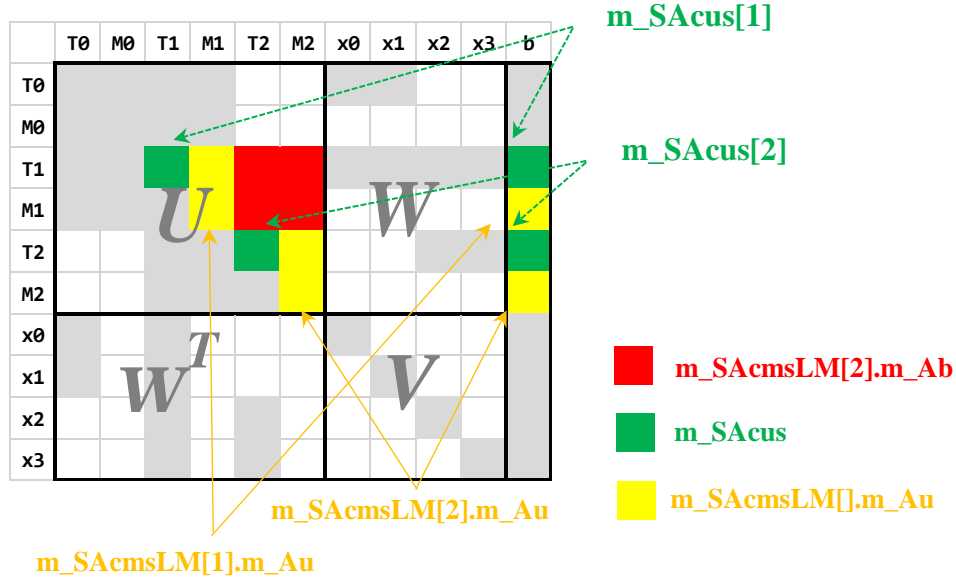


图 32 当新来一帧 T_2 时，新的视觉观测 $\gamma_{B_{12}}$ 对增量方程的 14 处影响
下图形象给出了一个 IMU 约束因子对 $[H|b]$ 矩阵的影响及对应关系：

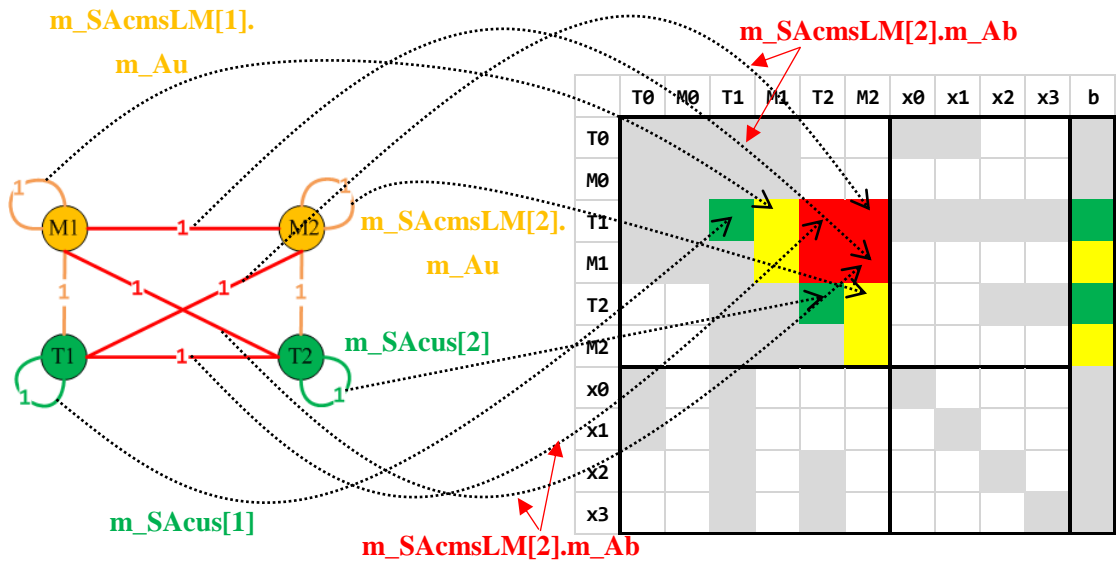


图 33 IMU 约束因子对 $[H|b]$ 矩阵的影响

$\gamma_{B_{12}}$ 对 $[H|b]$ 的影响是对应在 `m_AdsLM[im2]` 和 `m_SAcmsLM[im2].m_Ab` 这两个变量，可以用下图来表示 $\gamma_{B_{12}}$ 的影响，对应到代码 `IMU::GetFactor()` 中。其中，

黄色块为 $\mathbf{m_AdsLM}[im2] \rightarrow \mathbf{m_A11}$ ，表示 $\gamma_{B_{12}}$ 对前一个相机状态的影响；绿色块为 $\mathbf{m_AdsLM}[im2] \rightarrow \mathbf{m_A22}$ ，表示 $\gamma_{B_{12}}$ 对后一个相机状态的影响；红色为 $\mathbf{m_SAcmsLM}[im2].\mathbf{m_Ab}$ ，表示 $\gamma_{B_{12}}$ 对两个相机之间的影响。代码中 `IMU::Delta::Factor::Auxiliary::Global U` 的 `m_A[55]`，是对应到下图除 b 列之外的所有彩色块，共 55 个小块，每个小块尺寸为 3×3 ；`m_b[10]` 是对应最后一列的 10 个彩色块，即 b 列，每个小块的尺寸也是 3×3 。

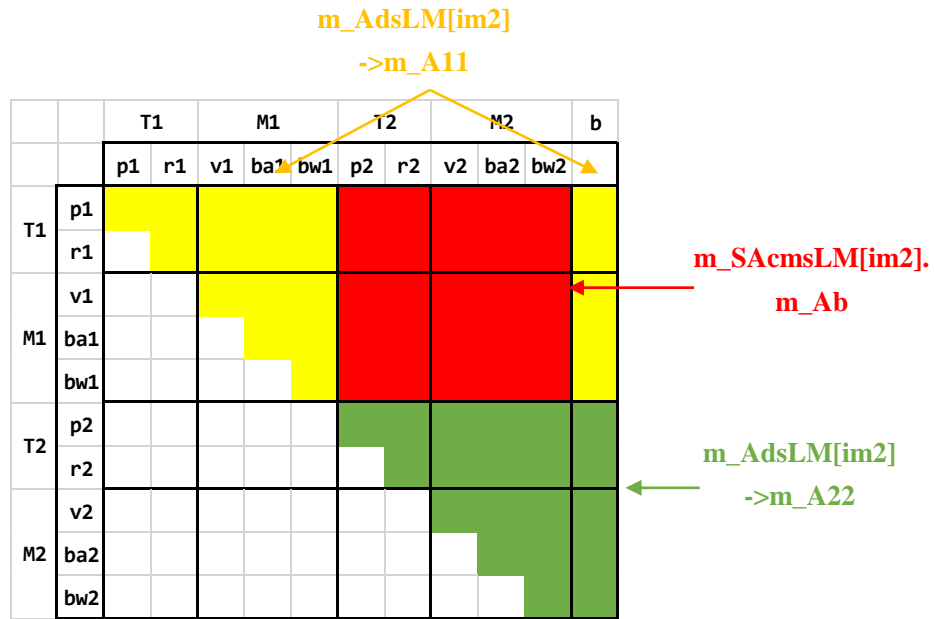


图 34 $\gamma_{B_{12}}$ 对于大矩阵 $[H|b]$ 的 14 处新影响

6.3 更新位姿先验 UpdateFactorsPriorCameraPose

对应代码为 `GlobalBundleAdjustor::UpdateFactorsPriorCameraPose()`。根据上面 4.5 节分析的 Relative Marg，当 marg 掉最老帧时，会对 GBA 中与最老帧共视的 KF 产生视觉约束，我们直接用上面的例子对该函数进行说明。首先，我们重新观察 4.5 节的例子中的最后因子图和 S 矩阵，并令 T_{k2} 为参考关键帧：

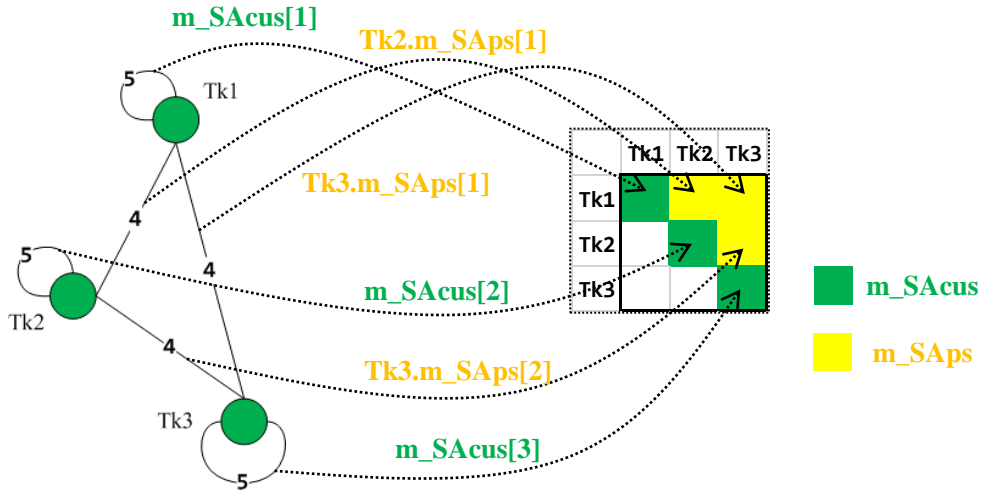


图 35 marg 引入视觉先验的例子

该函数中，将影响[H|b]矩阵中对角线的值依旧存放在 **m_SAcus** 数组中；将影响[S|g]矩阵中非对角线的值存放在相应 KF 的 **m_SAps** 数组中。

其中，某一次边缘化对整体[S|g]的影响都临时存放在 $A = m_Aps[iZ]$ 这个数组中，并通过 `Z.GetFactor()`来计算 A 。 A 的数据结构如下所示：共包含 $(N+1) \times (N+1)$ 个小格，每个小格的尺寸为 6×6 ，第 0 行存放着参考关键帧 T_{k2} 跟其他共视帧 T_{k1} 和 T_{k3} 之间的约束关系，第 1~N 行存放着除参考 KF 之外的其他共视帧两两间的约束关系。

	m_A					m_b
	0	1	2	...	N	
0	Green	Yellow	Yellow	...	Yellow	Green
1	White	Green	Yellow	...	Yellow	Green
2	White	White	Green	...	Yellow	Green
...	White	White	White	...	Yellow	Green
N	White	White	White	...	Green	Green

图 36 $A = m_Aps[iZ]$ 的数据结构

6.4 更新运动先验 UpdateFactorsPriorCameraMotion

对应代码为 `GlobalBundleAdjustor::UpdateFactorsPriorCameraMotion()`，其中通过 `m_ZpLM.GetFactor` 来计算运动先验，并存放在临时变量 `m_ApLM` 中，最后来更新全局变量 **m_SAcus[m_ZpLM.m_iKF]**和 **m_SAcmsLM[im].m_Au**。其中，`im` 为参考 KF 的 `id`，具体有：

$$im = m_ZpLM.m_iKF - m_Cs.Size() + m_CsLM.Size()$$

其中三个变量的意义为： $m_ZpLM.m_iKF$ 为当前参考关键帧、 $m_Cs.Size()$ 为 GBA 中 KF 数量、 $m_CsLM.Size()$ 为 LBA 的 KF 数量。通常 LBA 中含有 GBA 中所有的 KF，因此 $m_CsLM.Size()=m_Cs.Size()$ 。

		T0					M0					T1					M1					T2					M2					b
		p0	r0	v0	ba0	bw0	p1	r1	v1	ba1	bw1	p2	r2	v2	ba2	bw2	p0	r0	v0	ba0	bw0	p1	r1	v1	ba1	bw1	p2	r2	v2	ba2	bw2	
T0	p0																															
	r0																															
M0	v0																															
	ba0																															
	bw0																															
T1	p1																															
	r1																															
M1	v1																															
	ba1																															
	bw1																															
T2	p2																															
	r2																															
M2	v2																															
	ba2																															
	bw2																															

m_SAcus

m_SAcmsLM[].m_Au.m_Acm

m_SAcmsLM[].m_Au.m_Amm

图 37 运动先验对于大矩阵[H|b]的影响

（从因子图上或数学意义上，未能解释该函数意义，据刘博说是将 LBA 中对于参考关键帧的 Motion 先验加到了 GBA 中，待理解。另外，为何只跟 R 有关，与 p 无关？）

6.5 更新路标点先验 UpdateFactorsPriorDepth

对应代码为：UpdateFactorsPriorDepth()，用来对所有路标点的逆深度进行约束，令每个路标点的逆深度在该 source KF 所管辖的所有路标点的平均逆深度附近（还未完全对应代码，没看明白 $KF.m_d$ 是什么？），如下图所示，仅对 $KF.m_Axs[ix].m_Sadx.m_add$ 有影响。

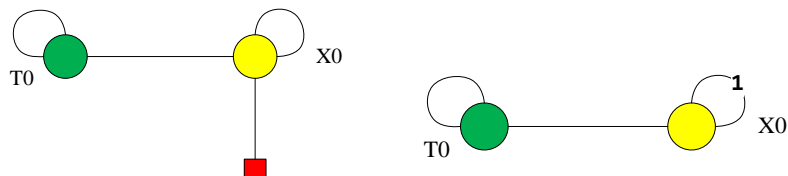


图 38 路标点的先验及影响

6.6 更新 Schur complement

1. 数学知识

根据 1.2 节中建立 Schur Complement:

$$(U - WV^{-1}W^T)\delta x_c = (u - WV^{-1}v)$$

$$S\delta x_c = g$$

其中, $S = U - WV^{-1}W^T$ 。那么, 对于 S 矩阵中某个位置 (i, j) 的值为:

$$S_{ij} = U_{ij} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_j} W_{ik} V_{kk}^{-1} (W^T)_{kj} = U_{ij} - \sum_{k \in \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_j} W_{ik} V_{kk}^{-1} W_{jk}^T$$

其中, $k \in \mathcal{V}_i \cup \mathcal{V}_j$ 表示第 i 个 KF 跟第 j 个 KF 的共视点。举例说明, 假设 T1 和 T2 的共视点为 x1 和 x3, 那么, $S_{2,4}$ 可写成:

$$S_{2,4} = U_{2,4} - (W_{2,1} V_{1,1}^{-1} W_{4,1}^T + W_{2,3} V_{3,3}^{-1} W_{4,3}^T)$$

为了形象, 给出图示:

	T0	M0	T1	M1	T2	M2	x0	x1	x2	x3
T0										
M0										
T1										
M1										
T2										
M2										
x0										
x1										
x2										
x3										

图 39 Schur Complement 例子

2. 因子图解释

用因子图表示, 我们可以把路标点当作一项约束因子进行 marg 掉, 那么, 就会对与路标点相连的相机位姿的两两之间和自身与自身之间, 添加上新的约束。下图中, 假设路标点 X_0 的 source KF 为 T_0 , X_1 的 source KF 为 T_1 , 这里忽略了其他的如 IMU 等约束, 右图给出了 marg 掉路标点后的添加的新约束。

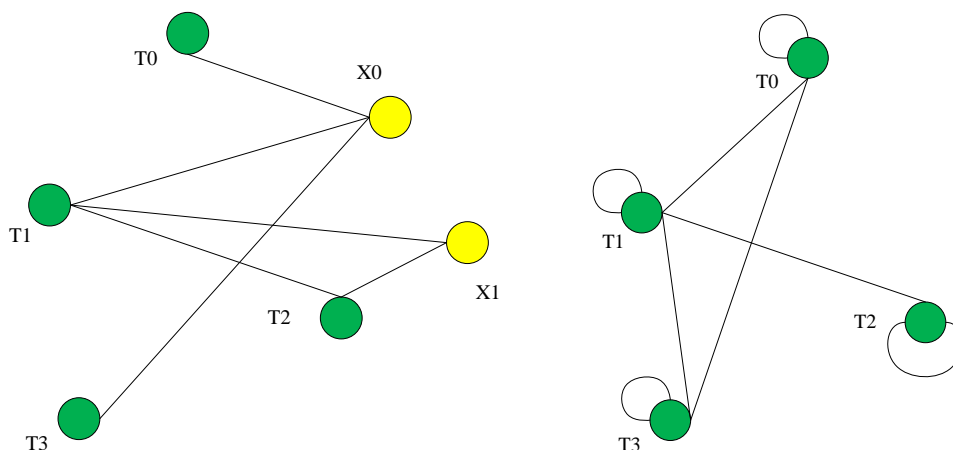


图 40 因子图：[H]矩阵（左图）、marg 掉路标点后的[S]矩阵（右图）

3. 代码解析

对应代码为：UpdateSchurComplement()。到这里，我们已经得到了[H|b]矩阵，下面要计算[S|g]矩阵。其中[H|b]矩阵是 GBA 中所有 KF 的位姿和 Motion，与所有路标点的相互关系。

代码中分成三类情况进行计算：

1) 对所有的 source KF，分析该 KF 所维护的所有路标点 m_xs 被 marg 掉后，对该 KF 在[S|g]对角线上的影响。如下图所示， X_0 和 X_1 的 source KF 为 T_0 ，当 marg 掉 X_0 和 X_1 时，会对 T_0 在[S|g]对角线的值 $m_SMcus[0]$ 产生影响，而对其他处的影响，如 T_1 、 $T_0 - T_1$ 及 T_2 、 $T_0 - T_2$ 则会在下一类情况中更新。

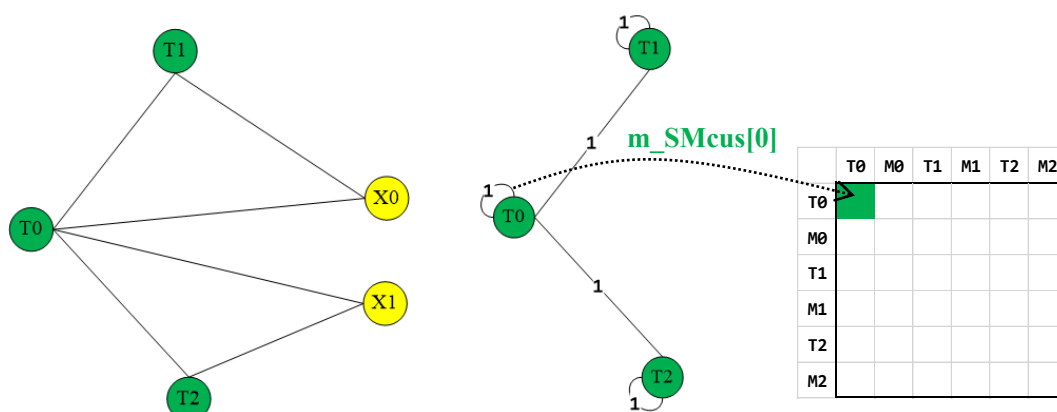


图 41 marg 路标点对 Source KF 在[S|g]矩阵中的影响

2) 对所有的 measurement KF，分析该 KF 所观测到的所有路标点 m_Zs 被 marg 掉后对该 KF 和该 KF 与 source KF 之间的影响，并将该影响存放在该 KF

的 $KF.m_Zm.m_SMczms[m_ik]$ ，其中 m_ik 为 source KF id。仍以上图为例， T_1 看到了 T_0 的 X_0 路标点，当 X_0 被 marg 掉之后，会对 T_1 、 $T_0 - T_1$ 产生如下影响：

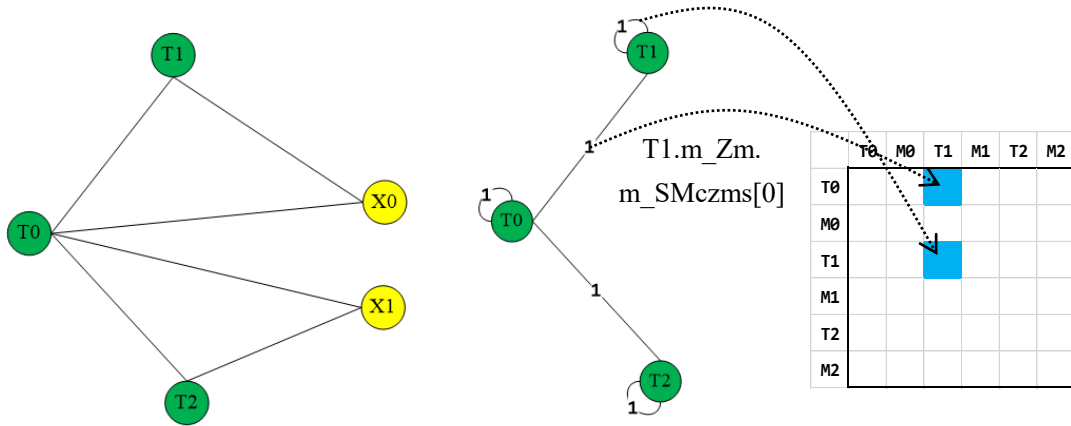


图 42 marg 路标点 X_0 对 measurement KF T_1 在 $[S|g]$ 矩阵中的影响

3) 下图情况：路标点 X_0 的 source KF 为 T_0 ， T_1 和 T_2 均能看到 X_0 点。当 Marg 掉 X_0 时，会在 T_1 和 T_2 之间添加约束，这个约束对应在代码中什么地方？
 $m_iKFsMatch$ 意义：存储着当该 KF 为 source KF 时，所有跟该 KF 共视的关键帧的 id

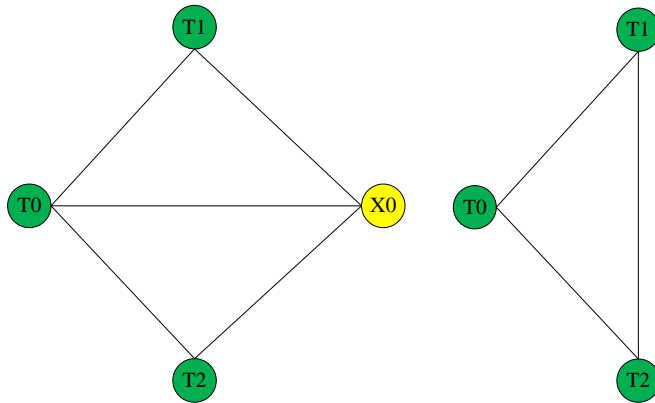


图 43 两个 measurement KF 看到同一个路标点的情况

6.7 求解相机位姿

得到了 Schur 补方程 $S\delta x_c = g$ 后，便可以对相机参数 δx_c ，即 PVQ 和 bias 的增量进行求解，代码对应为：GlobalBundleAdjustor::SolveSchurComplement()。ICE-BA 中采用 PCG 进行求解，下面对 PCG 做简单介绍：

1. PCG（预处理的共轭梯度法）

共轭梯度法（Conjugate gradient，CG）是一种求解大型、稀疏、对称、正定

线性方程组 $Ax=b$ 的迭代方法，其中， A 为 $n \times n$ 的对称正定矩阵， b 为 $n \times 1$ 的列向量。该方程即对应着上面的 Schur Complement 方程 $S\delta x_c = g$ 。

共轭梯度法是介于梯度下降法与牛顿法之间的一个方法，是一个一阶方法，它克服了梯度下降法收敛慢的缺点，又避免了存储和计算牛顿法所需要的二阶导数信息。共轭梯度法的思想就是找到 n 个两两共轭的共轭方向，每次沿着一个方向优化得到该方向上的极小值，后面再沿其它方向求极小值的时候，不会影响前面已经得到的沿哪些方向上的极小值，所以理论上对 n 个方向都求出极小值就得到了 n 维问题的极小值。在 n 维的优化问题中，共轭梯度法最多 n 次迭代就能找到最优解（是找到，不是接近）。

虽然 CG 方法可以减小求解时间和内存占用，但是缺点是矩阵 A 的条件数会很大程度上影响收敛速度。为了减小条件数，需要对 A 进行预处理，即得到预处理共轭梯度法 PCG。

PCG 算法的流程^[4]为：

```

 $x_0 = 0$ 
 $r_0 := b - Ax_0$ 
 $z_0 := M^{-1}r_0$ 
 $p_0 := z_0$ 
 $k := 0$ 
repeat
     $\alpha_k := \frac{r_k^T z_k}{p_k^T A p_k}$ 
     $x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k$ 
     $r_{k+1} := r_k - \alpha_k A p_k$ 
    if  $r_{k+1}$  is sufficiently small then exit loop end if
     $z_{k+1} := M^{-1}r_{k+1}$ 
     $\beta_k := \frac{z_{k+1}^T r_{k+1}}{z_k^T r_k}$ 
     $p_{k+1} := z_{k+1} + \beta_k p_k$ 
     $k := k + 1$ 
end repeat

```

那么， x_{k+1} 就是得到的解。

2. 代码解析（后续再补）

6.8 求解路标点

对应代码为：GlobalBundleAdjustor::SolveBackSubstitution()（后续再补）

五、参考文献

[1] H. Liu. ICE-BA: Incremental, consistent and efficient bundle adjustment for visual-inertial slam. 2018. CVPR.

[2] H. Liu. Robust keyframe-based dense SLAM with an RGB-D camera. 2017.

[3]https://www.jianshu.com/p/aad6a0a8bbe2?utm_campaign=haruki&utm_content=note&utm_medium=reader_share&utm_source=weixin, 范帝楷, ice-ba 论文学习.

[4]https://en.wikipedia.org/wiki/Conjugate_gradient_method#The_preconditioned_conjugate_gradient_method

六、附录

6.1 Marginalization 中的 e_p 证明

公式 (11) e_p 等式左边为：

$$\begin{aligned}
 & R_{c_i \leftarrow w} \left(p_{w \leftarrow c_j} - p_{w \leftarrow c_i} - {}^w v_{c_i} \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} {}^w g \Delta t_{ij}^2 \right) \\
 &= R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} R_{c_{k_0} \leftarrow w} \left(p_{w \leftarrow c_j} - p_{w \leftarrow c_i} - {}^w v_{c_i} \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} {}^w g \Delta t_{ij}^2 \right) \\
 &= R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} \left(R_{c_{k_0} \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_j} - R_{c_{k_0} \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_i} - R_{c_{k_0} \leftarrow w} {}^w v_{c_i} \Delta t_{ij} - R_{c_{k_0} \leftarrow w} \frac{1}{2} {}^w g \Delta t_{ij}^2 \right) \\
 &= R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} \left(R_{c_{k_0} \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_j} - R_{c_{k_0} \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_i} - R_{c_{k_0} \leftarrow w} R_{w \leftarrow c_i} {}^{c_i} v_{c_i} \Delta t_{ij} - \frac{1}{2} {}^{c_{k_0}} g \Delta t_{ij}^2 \right) \\
 &= R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} \left(R_{c_{k_0} \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_j} - R_{c_{k_0} \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_i} - \frac{1}{2} {}^{c_{k_0}} g \Delta t_{ij}^2 \right) - {}^{c_i} v_{c_i} \Delta t_{ij} \\
 &= R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} \left(\left(R_{c_{k_0} \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_j} + p_{c_{k_0} \leftarrow w} \right) - \left(R_{c_{k_0} \leftarrow w} p_{w \leftarrow c_i} + p_{c_{k_0} \leftarrow w} \right) - \frac{1}{2} {}^{c_{k_0}} g \Delta t_{ij}^2 \right) \\
 &\quad - {}^{c_i} v_{c_i} \Delta t_{ij} \\
 &= R_{c_i \leftarrow c_{k_0}} \left(p_{c_{k_0} \leftarrow c_j} - p_{c_{k_0} \leftarrow c_i} - \frac{1}{2} {}^{c_{k_0}} g \Delta t_{ij}^2 \right) - {}^{c_i} v_{c_i} \Delta t_{ij}
 \end{aligned}$$

其中倒数第二步可以理解为在 world 系中的一个点，乘上变换矩阵 $T_{c_{k_0} \leftarrow w}$ ，

可得到在 c_{k_0} 系的点坐标，而这个点就是 c_j 坐标系的原点。

6.2 图 12 中的 Hession 和 b 矩阵数学形式

第一行 T_0 :

$$H_{T_0 T_0} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_0} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_0} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_0} \right)$$

$$H_{T_0 M_0} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_0} \right)$$

$$H_{T_0 T_1} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)$$

$$H_{T_0 M_1} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right)$$

$$H_{T_0 X_0} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial X_0} \right)$$

$$H_{T_0 X_1} = \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial X_1} \right)$$

第二行 M_0 :

$$H_{M_0 M_0} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_0} \right)$$

$$H_{M_0 T_1} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)$$

$$H_{M_0 M_1} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right)$$

第三行 T_1 :

$$H_{T_1 T_1} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)$$

$$H_{T_1 M_1} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)$$

$$H_{T_1 T_2} = \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)$$

$$H_{T_1 M_2} = \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right)$$

$$H_{T_1 X_0} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial X_0} \right)$$

$$H_{T_1 X_1} = \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial X_1} \right)$$

$$H_{T_1 X_2} = \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \right)$$

$$H_{T_1 X_3} = \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial X_3} \right)$$

第四行 M_1 :

$$H_{M_1 M_1} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)$$

$$H_{M_1 T_2} = \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)$$

$$H_{M_1 M_2} = \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right)$$

第五行 T_2 :

$$H_{T_2 T_2} = \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right) + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)$$

$$H_{T_2 M_2} = \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right)$$

$$H_{T_2 X_2} = \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \right)$$

$$H_{T_2 X_3} = \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial X_3} \right)$$

第六行 M_2 :

$$H_{M_2 M_2} = \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right)$$

第七行~第十行的 V :

$$H_{X_0 X_0} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial X_0} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial X_0} \right)$$

$$H_{X_1 X_1} = \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial X_1} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial X_1} \right)$$

$$H_{X_2 X_2} = \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \right)$$

$$H_{X_3 X_3} = \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial X_3} \right)^T \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial X_3} \right)$$

最后一列 b 矩阵:

$$b_{T_0} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_0} \right)^T r_{v_{10}} + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_0} \right)^T r_{v_{11}} + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_0} \right)^T r_{B_{01}}$$

$$b_{M_0} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_0} \right)^T r_{B_{01}}$$

$$b_{T_1} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial T_1} \right)^T r_{v_{10}} + \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial T_1} \right)^T r_{v_{11}} + \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_1} \right)^T r_{v_{22}} + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_1} \right)^T r_{v_{23}} + \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial T_1} \right)^T r_{B_{01}} + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_1} \right)^T r_{B_{12}}$$

$$b_{M_1} = \left(\frac{\partial r_{B_{01}}}{\partial M_1} \right)^T r_{B_{01}} + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_1} \right)^T r_{B_{12}}$$

$$b_{T_2} = \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial T_2} \right)^T r_{v_{22}} + \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial T_2} \right)^T r_{v_{23}} + \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial T_2} \right)^T r_{B_{12}}$$

$$b_{M_2} = \left(\frac{\partial r_{B_{12}}}{\partial M_2} \right)^T r_{B_{12}}$$

$$b_{X_0} = \left(\frac{\partial r_{v_{10}}}{\partial X_0} \right)^T r_{v_{10}}$$

$$b_{X_1} = \left(\frac{\partial r_{v_{11}}}{\partial X_1} \right)^T r_{v_{11}}$$

$$b_{X_2} = \left(\frac{\partial r_{v_{22}}}{\partial X_2} \right)^T r_{v_{22}}$$

$$b_{X_3} = \left(\frac{\partial r_{v_{23}}}{\partial X_3} \right)^T r_{v_{23}}$$