

数 学

(120 分)

数学 I, 数学 II, 数学 III, 数学 A, 数学 B

平成 31 年 3 月 12 日

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は 7 ページあります。2 ページ目と 3 ページ目は白紙です。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答用紙は 4 枚です。解答はすべて解答用紙の所定の場所に、途中経過も含めて記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。
- 4 下書き用紙は 2 枚です。
- 5 受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄(2か所)に必ず記入しなさい。
- 6 試験終了後は、解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。
- 7 配付した解答用紙は持ち出してはいけません。
- 8 問題冊子と下書き用紙は持ち帰りなさい。

第1問 (80点)

問 1 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \log \left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} \right|$$

問 2 次の不定積分、定積分を求めよ。

$$(1) \int e^{-x} \log(1 + e^x) dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$$

問 3 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$ の収束、発散を調べよ。

第2問 (90点)

問1 次の命題が偽であることを示せ。

「数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対し, 数列 $\{a_n + b_n\}$ が収束するならば, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はともに収束する」

問2 0でない複素数 z に対して, 複素数 w を $w = z - \frac{1}{z}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1) w の実部が正になるような z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) w が正の実数になるような z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

第3問 (80点)

正十角形 D を考え、その10個の頂点を反時計回りに順に P_1, P_2, \dots, P_{10} とする。次の問いに答えよ。

問 1 点 P_1, P_2, \dots, P_{10} のうちの4個を頂点とする四角形は、全部で何個あるか。

問 2 問 1 で考えた四角形のうち、 D と3本の辺を共有するものは、全部で何個あるか。

問 3 問 1 で考えた四角形のうち、 D とちょうど2本の辺を共有するものは、全部で何個あるか。

問 4 問 1 で考えた四角形のうち、 D と辺を1本も共有しないものは、全部で何個あるか。

第4問 (100点)

関数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$ について、次の問いに答えよ。

問 1 極限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を調べよ。

問 2 関数 $f(x)$ の増減、極値を調べよ。

問 3 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の y 切片を $g(t)$ とおく。

(1) $g(t)$ が極大となる t はただ一つであることを示せ。

(2) $g(t)$ が極大となるときの接線を ℓ とする。曲線 $y = f(x)$, 直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。