

数 学

(120 分)

数学 I, 数学 II, 数学 III, 数学 A, 数学 B

2020 年 3 月 12 日

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- 2 この問題冊子は 7 ページあります。2 ページ目と 3 ページ目は白紙です。
試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合には、手を挙げて監督者に知らせなさい。
- 3 解答用紙は 4 枚です。解答はすべて解答用紙の所定の場所に、途中経過も含めて記入しなさい。解答用紙は裏面も使用できます。
- 4 下書き用紙は 2 枚です。
- 5 受験番号は、すべての解答用紙の所定の欄(2 か所)に必ず記入しなさい。
- 6 試験終了後は、解答用紙の上にある白ぬきの番号の順に並べなさい。
- 7 配付した解答用紙は持ち出してはいけません。
- 8 問題冊子と下書き用紙は持ち帰りなさい。

第1問 (80点)

問 1 次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \frac{\sin x}{\log(1+x^2)}$$

問 2 次の不定積分、定積分を求めよ。

$$(1) \int \frac{1}{\cos(\pi x)} dx$$

$$(2) \int_0^1 x \log(x+1) dx$$

問 3 $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ とおく。関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求めよ。また、 $f^{-1}(x)$ の定義域を求めよ。

第2問 (90点)

問 1 座標平面上で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。 n を正の整数とするとき、次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。

$$x \geq 0, y \geq 0, y \leq n^2 - x^2$$

問 2 n を6以上の整数とする。また、 k は $3 \leq k \leq n-3$ を満たす整数とする。赤玉 k 個と白玉 $n-k$ 個が入っている袋から、3個の玉を同時に取り出す。

(1) $n=10, k=4$ のとき、赤玉1個と白玉2個が出る確率を求めよ。

(2) 取り出す3個に赤玉と白玉の両方が含まれる確率を $P_n(k)$ とする。

(a) $P_n(k)$ を n と k を用いて表せ。

(b) n を固定して、 k を変化させたときの $P_n(k)$ の最大値を n を用いて表せ。

第3問 (90点)

△ABCにおいて、辺BCを5:3に内分する点をDとし、線分ADを4:1に内分する点をPとする。次の問いに答えよ。

問1 \vec{PD} と \vec{PA} をそれぞれ \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表せ。

問2 点Eを $\vec{AE} = 2\vec{AB}$ を満たす点とし、直線APと直線CEの交点をFとする。

(1) \vec{PF} を \vec{PB} と \vec{PC} を用いて表せ。

(2) $\triangle PBC$ と $\triangle FCB$ の面積比を求めよ。

問3 $|\vec{PA}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{PB}| = |\vec{PC}| = \sqrt{17}$ であるとき、内積 $\vec{PB} \cdot \vec{PC}$ の値を求めよ。

第4問 (90点)

関数 $f(x) = \sqrt{3} \tan^2 x - 2 \tan x - \sqrt{3}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ について、次の問いに答えよ。

問 1 極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+ 0} f(x)$ を調べよ。

問 2 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

問 3 関数 $f(x)$ の増減、極値を調べよ。

問 4 (1) 不定積分 $\int (1 + \tan^2 x) dx$ を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。