相対性理論

高校 n 年 season07001674

2020/05/05

目次

第 I 部
特殊相対性理論

電磁気学のマクスウェル方程式には不可解な点があった。式中にでてくる光速度がどの慣性系を基準に測ったものなのか分からなかったのである。マクスウェル方程式はガリレイ変換に対して不変ではない。実際ヘルツは、マクスウェル方程式はエーテルに対して静止した慣性系で成立すると解釈し、ガリレイ変換によって変形したマクスウェル方程式を提出した。つまり慣性系によって光の速さは変わるというわけである。しかしこの考えは実験によって覆された。マイケルソンとモーレーは、エーテル中を運動している地球の速度を検出しようとしたが、光速はどの方向でも常に一定であるという結論を得た。エーテルが地球に引きずられているということも考えられるが、光速は木星の食を利用しても測られているので否定された。力学と電磁気学は矛盾していたのである。従って少なくともどちらか一方が修正されなければならない。アインシュタイン以前の人々が考えた理論の中には、ローレンツ変換や局所時間という概念を提案するなど、数式上は相対論と一致したものもあった。しかしそれらには物理的解釈に不明な点が残り、満足のいくものではなかった。そこでアインシュタインがとった解決法は、次の二つの原理を仮定することであった。

- 相対性原理:全ての慣性系で物理法則は同じ
- 光速度不変の原理:光源に依らず光速度は一定

後者は実験事実であり、前者はそこから類推される原理である。これらに加えて $v/c \ll 1$ の極限でニュートン力学に一致することが要請される。また二つの原理から直ちに「任意の慣性系、任意の光源に対し、光速は一定」ということが導かれる。

1 ローレンツ変換の導出

マクスウェル方程式にガリレイ変換を適用すると形式が変わってしまう。そこで新たに相対性原理と光速度不変の原理を満たすような慣性系間の変換を考えなければならない。これをローレンツ変換という。
二つの慣性系 K, K' を考える。時刻 $t = t' = 0$ のとき両者の座標は一致していたとして、K' 系は K 系に対して x 軸方向に速さ v で進んでいるとする。また開始と同時に原点から光が出発したとき、両方の系で光速は等しいので、

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2$$

となる。つまりローレンツ変換は $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ を不変に保つ。一方で速度 v の符号を反転させれば元の逆変換になっているはずである。二つの慣性系は互いに等速直線運動をしているので、二次以上の項

があってはならない。よって、

$$
\begin{aligned}
ct' &= a_{00}ct + a_{01}x + a_{02}y + a_{03}z \\
x' &= a_{10}ct + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\
y' &= a_{20}ct + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\
z' &= a_{30}ct + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z
\end{aligned}
$$

である。ところで相対論では空間座標と次元を合わせるために時間成分を ct としている。こちらの方がローレンツ変換などで 4 つの成分の対応が分かりやすく記述できるのである。$(x', y', z') = (0, 0, 0)$ の時、$(x, y, z) = (vt, 0, 0)$ なので、

$$
\begin{aligned}
a_{10}c + a_{11}v &= 0 \\
a_{20}c + a_{21}v &= 0 \\
a_{30}c + a_{31}v &= 0
\end{aligned}
$$

同様に、$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ の時、$(x', y', z') = (-vt', 0, 0)$ なので、

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{10}}{a_{00}} &= -\frac{v}{c} \\
\frac{a_{20}}{a_{00}} &= 0 \\
\frac{a_{30}}{a_{00}} &= 0
\end{aligned}
$$

従って $a_{20} = a_{21} = a_{30} = a_{31} = 0$ である。
y, z 軸は x 軸の周りに回転させても形式は変わらないので、自明に $a_{02} = a_{03} = a_{12} = a_{13} = 0$ である。また第 3,4 式についても適用する。y, z 軸は対称なので、$a_{22} = a_{33} = p, a_{23} = a_{32} = q$ である。よって、

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} p\cos\theta - q\sin\theta & -p\sin\theta + q\cos\theta \\ p\sin\theta + q\cos\theta & p\cos\theta + q\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\cos\theta + q\sin\theta & -p\sin\theta + q\cos\theta \\ p\sin\theta + q\cos\theta & p\cos\theta - q\sin\theta \end{pmatrix}
$$

この式は任意の y, z 及びθ で成立するので $q = 0$。逆変換を考えれば $p^2 = 1$ 。物理的に妥当なのは $p = 1$ である。
開始と同時に原点から x 軸方向に向かって光が放たれたとすると、$(x, y, z) = (ct, 0, 0)$ の時、$(x', y', z') = (ct', 0, 0)$ なので、

$$
ct' = (a_{00} + a_{01})ct = (a_{10} + a_{11})ct
$$

同様に $(x, y, z) = (-ct, 0, 0)$ の時、$(x', y', z') = (-ct', 0, 0)$ なので、

$$
ct' = (a_{00} - a_{01})ct = (-a_{10} + a_{11})ct
$$

つまり $a_{00} = a_{11} = a, a_{01} = a_{10} = b$ である。速度 v の符号を反転させれば逆変換になる。しかし係数にどのような形で v が含まれているか分からないので、代わりに x 軸を反転させる。

$$
\begin{aligned}
ct' &= act - b \cdot -x \\
-x' &= -bct + a \cdot -x
\end{aligned}
$$

よって、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので $a^2-b^2=1$ である。$b/a=-v/c$ なので、$a=\dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, b=-\dfrac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ となる。
つまりローレンツ変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct - \frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x \\ x' &= -\frac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}}ct + \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$v/c \ll 1$ の極限ではガリレイ変換に帰着することが容易にわかる。また $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ はローレンツ因子と呼ばれ、相対論で良く現れる。
相対性原理とは全ての慣性系で物理法則が不変であるというものだった。特に物理法則はローレンツ変換に対して不変でなければならない。これを特殊相対性原理と呼ぶ。

2　ローレンツ変換の帰結

2.1　時間の遅れとローレンツ短縮

$x'=0$ と置けば $x=vt$ を得る。これを t について解けば、

$$t=\frac{t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

つまり動いている物体は時間が遅れることが分かる。また K 系と K'系 の原点の間の距離を l,l'と置くと、$l=x=vt$。また $x=0$ と置けば $x'=-\gamma vt$ より $l'=-x'=\gamma vt$ よって、

$$l=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}l'$$

つまり動いている物体はその長さが進行方向に対して縮むことが分かる。これをローレンツ収縮という。

2.2　速度の合成

K' 系が K 系に対して x 軸方向に速度 v_1 で進んでいて、K' 系で質点が $(x',y')=(v_2t'\cos\theta, v_2t'\sin\theta)$ で移動しているとする。これをローレンツ変換して、

$$\begin{aligned} ct &= \gamma ct' + \gamma v_1/c\cdot v_2t'\cos\theta \\ x &= \gamma v_1/c\cdot ct' + \gamma v_2t'\cos\theta \\ y &= v_2t'\sin\theta \end{aligned}$$

よって合成速度 V は、

$$V_x = \frac{x}{t} = \frac{v_1 + v_2 \cos\theta}{1 + \dfrac{v_1 v_2 \cos\theta}{c^2}}$$
$$V_y = \frac{y}{t} = \frac{1}{\gamma} \frac{v_2 \sin\theta}{1 + \dfrac{v_1 v_2 \cos\theta}{c^2}}$$

$u_1 = v_1/c, u_2 = v_2/c, U = V/c$ と置くと U の絶対値は

$$\begin{aligned} V^2 = V_x^2 + V_y^2 &= \frac{(v_1 + v_2\cos\theta)^2 + (1 - v_1^2/c^2) v_2^2 \sin^2\theta}{\left(1 + \dfrac{v_1 v_2 \cos\theta}{c^2}\right)^2} \\ U^2 &= \frac{(u_1 + u_2\cos\theta)^2 + (1 - u_1^2) u_2^2 \sin^2\theta}{(1 + u_1 u_2 \cos\theta)^2} \\ &= \frac{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \cos\theta - u_1^2 u_2^2 \sin^2\theta}{(1 + u_1 u_2 \cos\theta)^2} \end{aligned}$$

3 点が必ず同一平面上にあることに注意すると、合成速度はベクトルで書くことができて、

$$U^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 \cdot u_2 - |u_1 \times u_2|^2}{(1 + u_1 \cdot u_2)^2}$$

となる。これを変形すると、

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{-1 + u_1^2 + u_2^2 - u_1^2 u_2^2 + 1 + 2u_1 \cdot u_2 + (u_1 \cdot u_2)^2}{(1 + u_1 \cdot u_2)^2} \\ &= \frac{(1 + u_1 \cdot u_2)^2 - (1 - u_1^2)(1 - u_2^2)}{(1 + u_1 \cdot u_2)^2} \\ 1 - U^2 &= \frac{(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)}{(1 + u_1 \cdot u_2)^2} \end{aligned}$$

となるので $u_1, u_2 \leq 1$ なら $U \leq 1$ より合成速度が光速を超えないことが示せる。

2.3 光行差

光行差とは、移動している観測者が天体を見るとき、天体が移動方向にずれて見える現象またはそのずれを指す。垂直に降っている雨を電車の中から見ると斜めに降っているように見えるのと同じである。ただ、相対論的効果を考慮しなければならない。観測者が速度 v で移動しており、その進行方向に対して角 θ にある天体の光行差を a とする。K 系では時刻 t における光の位置が $(-ct\cos\theta, -ct\sin\theta)$ であるとする。これをローレンツ変換して、

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \gamma v/c \cdot (-ct\cos\theta) \\ x' &= -\gamma v/c ct + \gamma(-ct\cos\theta) \\ y' &= y = -ct\sin\theta \end{aligned}$$

従って

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\tan(\theta - a)} &= \frac{x'}{y'} = \frac{-\gamma vt - \gamma ct\cos\theta)}{-ct\sin\theta} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(\frac{v}{c\sin\theta} + \frac{1}{\tan\theta}\right)
\end{aligned}
$$

となる。

2.4　光のドップラー効果

K 系から見て光源は原点にあり、光は $(ct\cos\theta, ct\sin\theta)$ にあるとする。これをローレンツ変換して、

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma ct - \gamma v/c \cdot ct\cos\theta \\
x' &= -\gamma v/c \cdot ct + \gamma ct\cos\theta \\
y' &= y = ct\sin\theta
\end{aligned}
$$

よって光の進む経路の比は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{ct} &= \left[(-\gamma\frac{v}{c} + \gamma\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right]^{1/2} \\
&= \gamma\left[\frac{v^2}{c^2} - \frac{2v}{c}\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{1/2} \\
&= \gamma\left[1 - \frac{2v}{c}\cos\theta + \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right]^{1/2} \\
&= \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

となる。二つの慣性系で光の振動する回数は等しいので、

$$
\begin{aligned}
\lambda' &= \frac{1-(v/c)\cos\theta}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\lambda \\
\nu' &= \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1-(v/c)\cos\theta}\nu
\end{aligned}
$$

である。特に $\theta = 0°$ の時は、

$$
\lambda' = \frac{1-(v/c)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\lambda
$$

$v > 0$ の時光源に近付いていて、$v < 0$ の時に光源から遠ざかっていることに注意すると、近付くときは波長が縮んで青っぽく見え (青方偏移)、遠ざかるときは波長が伸びて赤っぽく見える (赤方偏移)。また $\theta = 90°$ の時は、

$$
\lambda' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\lambda
$$

となって波長が伸びる。これを横ドップラー効果という。

3 四次元の時空

3.1 ミンコフスキー時空

ローレンツ変換ではガリレイ変換と違い、空間だけでなく時間も一体となって変換される。そこで相対論では x, y, z に時間成分である ct を加えた 4 次元空間を考える。これをミンコフスキー時空という。4 つを添え字で表すために $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ とする。相対論では出来事を事象 (event) と呼ぶ。事象はミンコフスキー時空で点として表され、世界点という。また質点の運動はこの時空で曲線となるが、これを世界線という。二つの世界点 $(ct_1, x_1, y_1, z_1), (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ の間で、

$$s_{12}^2 = -(ct_2 - ct_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

という量を定義する。これを世界間隔という。ユークリッド空間における距離の概念を拡張したものだ。特に原点との世界間隔

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

を世界長さという。微小長さはミンコフスキー計量

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を使えば、

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j$$

となる。ミンコフスキー時空の原点を通過する光 (つまり時刻 $t = 0$ で観測者から遠ざかる光) は、時間軸から 45 度傾いた円錐面 (実際は面ではない)

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

の上を伝播する。これを光円錐と呼ぶ。光円錐の内側 ($s^2 < 0$) では、原点での事象と因果関係を持つことができ、時間的 (time like) 領域と呼ばれる。それに対して外側 ($s^2 > 0$) は空間的 (space like) 領域と呼ばれる。ところで 3 次元空間を原点の周りに回転させても原点からの距離 $x^2 + y^2 + z^2$ は変化しない。これはローレンツ変換の前後で s が変化しないことに類似している。つまりローレンツ変換というのは、ミンコフスキー時空内でのある種の回転を表していると考えられる。実際 $v/c = \tanh\theta$ とすれば、

$$ct' = \cosh\theta ct - \sinh\theta x$$
$$x' = -\sinh\theta ct + \cosh\theta x$$

である。

3.2 テンソル解析

単位行列はクロネッカーのデルタ δ^i_j で表すことができる。

$$\begin{aligned}\delta'^i_j &= \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} \\ &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^a}{\partial x'^j}\delta^a_a \\ &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial x'^j}\delta^a_b\end{aligned}$$

と書けるので混合テンソルである。
時空の計量は、

$$ds^2 = g_{kl}dx^k dx^l = g'_{ij}dx'^i dx'^j$$

より、

$$g'_{ij} = g_{kl}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j}$$

なので二階の共変テンソルである。そこでこれを計量テンソルという。計量テンソルの逆行列は $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ と書けるので、二階の反変テンソルである。
三次元の微分演算子 ∇ を四次元に拡張する。微分演算子はそれ自身では共変ベクトルだが、テンソルに作用するときは一般にテンソルとはならない。しかし座標変換が一次変換のみを許すならば、テンソルと同じように振る舞う。特にローレンツ変換では形式を変えない。

$$(\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

とする。これとミンコフスキー計量との縮約をとると、

$$(\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

となる。更にこれらの縮約をとり、

$$\partial^i\partial_i = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

これはマクスウェル方程式などに出てくるダランベール演算子である。

3.3 固有時

注目している物体に対して静止した座標系で測った時間を固有時 (固有時間) τ という。固有時はその静止座標系における通常の時間である。K' 系においてその物体が原点にあるとすれば、$(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (c\tau)^2$ なので、$\tau = -s/c$。固有時は慣性系では世界長さと同様ローレンツ変換で変わらない不変量である。これを

慣性系だけでなく、一般の加速する座標系でも不変となるように微小量で考え、

$$
\begin{aligned}
d\tau^2 &= dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} \\
\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 &= 1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \\
&= 1 - \frac{v^2}{c^2} \\
t &= \int dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} d\tau
\end{aligned}
$$

となる。

4 四元ベクトル

ある物体を異なる慣性系で見たときに速度がどのように変わるか考える。速度の合成則より、

$$v'_x = \frac{-v + v_x}{1 - vv_x/c^2}$$

となる。しかし各々の物理量についてこのような変換があったのでは、式の意味を捉え難くなってしまうであろう。つまり速度もローレンツ変換と同じような変更を受けるようにしたいのである。アインシュタインが相対論を作り上げる上で土台とした相対性原理は、いかなる慣性系でも物理法則の形は変わらないというものであった。従ってローレンツ共変性を持つことが一目見て判るような形式にしたいのである。このようなものを共変形式 (covariant form) と呼ぶ。

4.1 四元速度

四元速度を $u^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ と定義する。座標を不変量である固有時で微分しているので確かに座標と同じ座標変換を受ける。ここで速度の時間座標などという量が出てきているが、座標と同じように都合が良いので導入することにする。本来の速度との関係を導いてやると、

$$
\begin{aligned}
u^0 &= \frac{dct}{dt/\gamma} = \gamma c \\
u^1 &= \frac{dx^i}{dt\gamma} = \gamma v^i (i = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$

となる。よって $u^i = \gamma(c, v)$ である。またこれ以降は $v^i = (c, v_x, v_y, v_z)$ と表すことにする。

4.2 四元運動量

同様に四元運動量を導入する。四元運動量は四元速度に質量を掛けたものである。つまり $p^i = mu^i = \gamma mv^i$ である。ここで我々は一旦、運動量保存則を見直さなければならない。古典的な運動量の定義である mv では物体が光速を超えることを許している。一方 γmv では $v = c$ で運動量が発散するようになっている。この点を踏まえると、後者が本来の運動量であり、保存しているのもこちらではないかと考えるのが自然だろう。実際、実験では四元運動量の方が保存していることが確かめられている。そこで新しく四元運動量を本来

の運動量として定義し直すことにする。
ここで p^0 について考察してみる。

$$(mc)^2 = (p^0)^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = (p^0)^2 - p^2$$

なので、

$$\begin{aligned} p^0 c &= \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} \\ &= mc^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}} \end{aligned}$$

テイラー展開して、

$$= mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \cdots$$

第二項はニュートン力学におけるエネルギーに似ている。そこで運動量の場合と同じように、p^0 は物体の全エネルギー E を c で割ったものだと解釈する。特に運動量が 0 の時は $E = mc^2$ となり、有名な公式が導かれる。一般的には、

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

或いは $p = \gamma mv$ より、

$$1 + \frac{p^2}{(mc)^2} = 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = \gamma^2$$

なので、

$$E = \gamma mc^2$$

である。前者の式は $m = 0$ とした時に、電磁波の運動量とエネルギーの関係式に一致する。このことから光の質量は 0 であると考えられるようになった。エネルギーとはもはやスカラーではなく、四元運動量としてベクトルの一成分に取り込まれたのだ。

■質量の増加　相対論では、運動量は $p = \gamma mv$ でエネルギーは $E = \gamma mc^2$ と表される。これらの式を眺めてみると、物体が運動するときはあたかも質量が γ 倍に増えていると解釈できる。しかし力などの他の物理量を考えてみると γ 倍になっていないこともある。また運動している物体の重力が増えるわけではないので、少なくとも重力質量は変化していない。よって運動している物体の (慣性) 質量が増えているのではなく、運動量は速度に比例するよりも早く増加すると考える方が無難である。

4. 物理法則の共変形式

マクスウェル方程式がローレンツ変換で不変であることがわかり、力学は修正を迫られることになった。この章では 20 世紀以前の物理学を共変形式に書き直すことを行う。

4.3 ニュートンの運動方程式

ニュートンの運動方程式は $\frac{dp}{dt} = F$ である。p は四元運動量として良いが、時間で微分すればローレンツ変換したときに形式が変わってしまう。そこで四元力というものを次のように定義する。

$$f^i = \frac{dp^i}{d\tau}$$

これが相対論における運動方程式である。速度が十分小さいときは四元力はニュートン力学での力と一致する。これを観測者の座標で書き換えるとかなり複雑になる。

$$\begin{aligned} f &= \frac{dp}{d\tau} = \gamma m \frac{du}{dt} \\ &= \gamma m \left(\gamma \frac{d(c, v)}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}(c, v) \right) \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot -\frac{1}{c^2}\frac{dv^2}{dt} \\ &= \frac{\gamma^3}{c^2}\frac{dv^2/2}{dt} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} f^0 &= \gamma m \frac{\gamma^3}{c^2}\frac{dv^2/2}{dt} c = \frac{\gamma^4}{c}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \\ &= \gamma^4 \frac{d}{dt}\frac{E}{c} \\ f^i &= \gamma m \left(\gamma \frac{dv^i}{dt} + \frac{\gamma^3}{c^2}\frac{dv^2/2}{dt} v^i \right) \\ &= \gamma^2 \frac{dp^i}{dt} + \frac{\gamma^4}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) v^i \\ &= \gamma^2 \frac{dp^i}{dt} + \gamma^4 \frac{d}{dt}\frac{E}{c} \cdot \frac{v^i}{c} \ \ (i = 1, 2, 3) \end{aligned}$$

4.4 変分原理

古典的な解析力学において変分原理とは、物体は、ラグランジアンを L、時間を t として、作用

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, v^i, t) dt$$

を極小にするような軌道をとるというものだった。作用が極小になるような物体の軌道はオイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

で与えられ、座標に依存しない形式である。これを固有時をパラメータとしたものに書き換える。L を x^i, u^i, τ の関数として、作用を固有時による積分で表す。ここで L はスカラー量となる。つまり、

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x^i, u^i, \tau) d\tau$$

として、これを極小とするような軌道は

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

となる。尚作用は、時間をパラメータとしたものでも固有時をパラメータとしたものでも良い。それぞれのラグランジアンと運動方程式で計算した結果は同じになる。

4.4.1 自由粒子のラグランジアン

古典力学において自由粒子のラグランジアンは $L = \frac{1}{2}mv^2$ であった。運動エネルギーがそのままラグランジアンとなっていたので、相対論的な粒子のラグランジアンとして、最初に γmc^2 が考えられるが、これではうまくいかない。ここで $L_m(x, v, t) = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ としてみる。テイラー展開すると、$-mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ なので、非相対論的極限でニュートン力学と一致する。これを共変形式に書き直すと、

$$\begin{aligned}
S &= -\int mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \\
&= -\int mc\left\{\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)^2\right\}^{1/2} dt \\
&= -\int mc\left\{-\eta_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\right\}^{1/2} dt
\end{aligned}$$

$dt = (dt/d\tau)d\tau$ より、

$$= -\int mc\left\{-\eta_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}\right\}^{1/2} d\tau$$

ここで自由粒子のラグランジアンを

$$L_m(x, u, \tau) = -mc\sqrt{-\eta_{ij}u^i u^j}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_m}{\partial u^i} &= -mc \cdot \frac{1}{2}(-\eta_{ij}u^i u^j)^{-1/2} \cdot -2\eta_{ij}u^j \\
&= mu_i \\
\frac{\partial L_m}{\partial x^i} &= 0
\end{aligned}$$

反変ベクトルに直して、

$$\frac{dp^i}{d\tau} = 0$$

となり、運動方程式が導かれる。
L_m は複雑に見えるが、$(cd\tau)^2 = -\eta_{ij}x^i x^j$ なので、

$$\delta S = -mc^2 \int d\tau = 0$$

である。つまり物体は固有時が極大となるような軌道をとるということである。
このラグランジアンは天下り的な導入だったが、筋の通る説明をすることができる。時間 t をパラメータとして、ハミルトニアンを求めると、

$$\begin{aligned}H_m &= \gamma m v\cdot v - L_m = \gamma m v^2 + mc^2\frac{1}{\gamma}\\ &= \gamma mc^2\left\{\frac{v^2}{c^2}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right\}\\ &= \gamma mc^2\end{aligned}$$

と、粒子の全エネルギーになる。

4.5 マクスウェル方程式

電磁場形式のマクスウェル方程式は

$$\begin{gathered}\mathrm{div}E = \frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \mathrm{rot}B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 i\\ \mathrm{div}B = 0\\ \mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0\end{gathered}$$

で表される。これを共変であることが分かりやすいように書き直す。まず第一式と第二式を展開する。

$$\begin{gathered}\partial\cdot(0, E_x, E_y, E_z) = \frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \partial\cdot(-E_x/c, 0, B_z, -B_y) = \mu_0 i_x\\ \partial\cdot(-E_y/c, -B_z, 0, B_x) = \mu_0 i_y\\ \partial\cdot(-E_z/c, B_y, -B_X, 0) = \mu_0 i_z\end{gathered}$$

次に第三式と第四式を展開して、

$$\begin{gathered}\partial\cdot(0, B_x, B_y, B_z) = 0\\ \partial\cdot(-B_x, 0, E_z/c, -E_y/c) = 0\\ \partial\cdot(-B_y, -E_z/c, 0, E_x/c) = 0\\ \partial\cdot(-B_z, E_y/c, -E_x/c, 0) = 0\end{gathered}$$

ここで、

$$\begin{gathered}F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c\\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y\\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x\\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}\\ G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}0 & B_x & B_y & B_z\\ -B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c\\ -B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c\\ -B_z & E_y/c & -E_x/c & 0\end{pmatrix}\\ j^\mu = (\rho c, i_x, i_y, i_z)\end{gathered}$$

とすれば、

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$
$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$$

となる。$F^{\mu\nu}$ を電磁テンソル、j^μ を四元電流密度という。ちなみに第二式の右辺の 0 ベクトルはスカラーだが、これは同時に反変ベクトル、共変ベクトルである。従って形式を整えるために $G^{\mu\nu}$ も二階反変テンソルとした。$F^{\mu\nu}$ とミンコフスキー計量で縮約をとり共変テンソルにすると、

$$\begin{aligned}F_{ab} &= \eta_{\mu a}\eta_{\mu b}F^{\mu\nu} = \eta_{aa}\eta_{bb}F^{ab}\\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

これを用いて $G^{\mu\nu}$ を書き直すと、

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -F_{23} & -F_{31} & -F_{12} \\ F_{23} & 0 & F_{30} & F_{02} \\ -F_{13} & -F_{30} & 0 & -F_{01} \\ F_{12} & F_{20} & F_{01} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。従って、

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu$$
$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \ (Bianch \text{ の恒等式})$$

である (第二式は添え字が重なる場合も成り立つ)。

次に電磁ポテンシャル形式のマクスウェル方程式は

$$\Box A - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = -\mu_0 i$$
$$\Delta\phi + \mathrm{div}\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

である。第一式の grad の中身を見れば、新たに $A = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$ とすれば良いとわかる。A を四元ポテンシャルという。すると第一式は

$$\Box A^\mu - \partial^\mu\partial_\nu A^\nu = -\mu_0 j^\mu \ (\mu = 1, 2, 3)$$

となる。また第二式を

$$\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0}\\ \Box\phi + \frac{\partial}{\partial t}\partial_\nu A^\nu &= -\frac{\phi}{\epsilon_0}\\ \Box A^0 - \partial^0\partial_\nu A^\nu &= -\mu_0 j^0\end{aligned}$$

二つの式をまとめれば、

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = -\mu_0 j^\mu$$

である。この式を

$$\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 j^\mu$$

と書いて、先ほどの電磁テンソルの式と比較すれば、$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + X^{\mu\nu}$ だが、$X^{\mu\nu} = 0$ となることが分かるので、

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

となる。$F_{\mu\nu}$ は無条件に Bianch の恒等式を満たすことがわかる。

マクスウェル方程式を導くラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は、電磁場の項 $\mathcal{L}_{em}$ と物質による項 $\mathcal{L}_{int}$ に分かれる。ここで $\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \mathcal{L}_{em} = A^\mu j_\mu$ とする。$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \eta_{\mu a}\eta_{\nu b}F^{\mu\nu}F^{ab}$ なので、

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial(\partial_i A^j)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial A^j} = -\frac{1}{2\mu_0}\eta_{\mu a}\eta_{\nu b}F^{ab}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}{\partial(\partial_i A^j)}$$

電磁テンソルの偏微分が 0 にならないのは $(\mu,\nu) = (i,j),(j,i)$ の時なので、

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial x^i}(\eta_{ia}\eta_{jb}F^{ab} - \eta_{ja}\eta_{ib}F^{ab}) \\
&= -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial}{\partial x^i}(F_{ij} - F_{ji}) \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^i} \\
\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial(\partial_i A^j)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{int}}{\partial A^j} &= -\frac{\partial A^\mu j_\mu}{\partial A^j} \\
&= -j_j
\end{aligned}$$

辺々足せば、

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x^i} = -\mu_0 j_j$$

となるので、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{em} + \mathcal{L}_{int} = -\frac{1}{4\mu_0}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A^\mu j_\mu$$

である。

4.6 ローレンツ力

ローレンツ力は電磁気学の中でも力学と接点を持つ概念なので、運動方程式と同様修正する必要がある。

$$F = e(E + v \times B)$$

を展開すると、

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

となる。中央の行列は電磁テンソルと 1,2,3 行成分が一致している。これに 0 行目を追加する。さらに両辺に γ を掛けると左辺は四元力、右辺のベクトルは四元速度となるので、

$$f^\mu = F^{\mu\nu} u_\nu$$

である。

また荷電粒子のラグランジアンは電磁ポテンシャルで表すと $-e(\phi - v \cdot A)$ であった。これを四元ポテンシャルで表すと、$ev^\mu A_\mu$ である。ローレンツ力を四元力に拡張した結果、元より γ 倍されたので、ラグランジアンも γ 倍して、

$$L_{int} = eu^\mu A_\mu$$

となる。

第 II 部
一般相対性理論

特殊相対論の問題点は、加速する座標系と重力場を表現できなかったことである。アインシュタインは一般相対性理論を構築するにあたって次のような仮定を設けた。

- 一般相対性原理:物理法則は全ての座標系で同じ
- 一般共変性原理:物理法則は全ての座標系で同じ形式でなければならない
- 等価原理:任意の世界点で、局所的に慣性系となるような座標系を選ぶことができる
- 局所座標系における特殊相対論の成立
- 測地線の仮定:自由質点は測地線を描く

特殊相対性原理が全ての慣性系で物理法則が同じことを仮定していたのに対し、一般相対性原理ではあらゆる座標系で物理法則が同じであることを主張している。一般共変性原理は数学的には、物理法則はテンソル方程式と共変微分で表現できるということである。これらの仮定は、物理的な要請よりも理論の形式を優先している。

1　リーマン幾何学

1.1　共変微分

反変ベクトル $A^i(X^j)$ を座標変換したものが $a^i(x^j)$ であるとする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial a^i}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^l}A^l\right)\\ &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial X^l}A^l + \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\frac{\partial A^l}{\partial X^k}\end{aligned}$$

共変ベクトルも同様に、

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_i}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial X^l}{\partial x^i}A^l\right)\\ &= \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^i \partial x^j}A_l + \frac{\partial X^l}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\frac{\partial A_l}{\partial X^k}\end{aligned}$$

第二項だけを見ればそれぞれ混合テンソル、共変テンソルのようになっている。ローレンツ変換だけを考えていれば、座標の二階微分である第一項は 0 になり、微分演算子はテンソルとして振る舞う。そこで新たに、一般の座標変換に対して共変であり、慣性系において通常の微分に一致するような演算子を考える必要がある。

$$\begin{aligned}\nabla_j a^i &= \frac{\partial a^i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial X^l}A^l\\ &= \frac{\partial a^i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial X^l}\frac{\partial X^l}{\partial x^k}a^k\\ \nabla_j a_i &= \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^i \partial x^j}A_l\\ &= \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial X^l}a_k\end{aligned}$$

とすれば X と x の二つの座標系間の変換で不変となる。これを共変微分という。第二項の a^k, a_k の係数は接続係数またはアフィン係数と呼ばれる。このままでは他の座標系に依存してしまうので X をデカルト座標で固定する。しかし、曲がった空間ではデカルト座標との関係が不定であり、そもそも存在を前提とするわけにはいかないので、計量を使って書き直す。ユークリッド計量を δ_{ij}(クロネッカーのデルタ) とすると、

$$g_{ij} = \frac{\partial X^m}{\partial x^i}\frac{\partial X^n}{\partial x^j}\delta_{mn}$$

これを微分して、

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \delta_{mn}\left(\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial X^n}{\partial x^j} + \frac{\partial X^m}{\partial x^i}\frac{\partial^2 X^n}{\partial x^j \partial x^k}\right)$$

計量は対称テンソルなので、添え字を巡回的に入れ替えて足し引きする。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \delta_{mn}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial X^n}{\partial x^k}$$

とすると左辺は第一種クリストッフェル記号そのものであり Γ_{kij} と書く。第二種クリストッフェル記号を Γ^l_{ij} と書き、

$$
\begin{aligned}
\Gamma^l_{ij} &= g^{lk}\Gamma_{kij} \\
&= g^{lk}\delta_{mn}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial X^n}{\partial x^k} \\
&= \frac{\partial x^l}{\partial X^u}\frac{\partial x^k}{\partial X^v}\delta^{uv}\delta_{mn}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial X^n}{\partial x^k}
\end{aligned}
$$

$\delta^{ij}, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ なので

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^l}{\partial X^u}\frac{\partial x^k}{\partial X^u}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial X^m}{\partial x^k} \\
&= \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^l}{\partial X^u}\frac{\partial X^m}{\partial X^u}
\end{aligned}
$$

$\frac{\partial X^m}{\partial X^u} = \delta^m_u$ より

$$
= \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^l}{\partial X^m}
$$

となって共変ベクトルの共変微分の接続係数となる。一方、反変ベクトルの共変微分の接続係数は、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial X^l}\frac{\partial X^l}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^l}\right)\frac{\partial X^l}{\partial x^k} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^l}\frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial X^l}{\partial x^k} \\
&= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial X^l} \\
&= -\Gamma^i_{jk}
\end{aligned}
$$

となる。つまり接続係数はどちらもクリストッフェル記号で表すことができる。共変微分の定義を書き直すと、

$$
\begin{aligned}
\nabla_j a^i &= \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk}a^k \\
\nabla_j a_i &= \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}a_k
\end{aligned}
$$

となる。ミンコフスキー計量の場合接続係数は 0 になるので、慣性系では通常の微分に一致する。一般のテンソルに対しても同様に定義することができる。二階のテンソルの場合は、

$$
\begin{aligned}
\nabla_k T^{ij} &= \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km}T^{mj} + \Gamma^j_{km}T^{mj} \\
\nabla_k T^i_j &= \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km}T^m_j - \Gamma^m_{jk}T^i_m \\
\nabla_k T_{ij} &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik}T_{mj} - \Gamma^m_{jk}T_{im}
\end{aligned}
$$

となる。
以下に共変微分の公式を書いておく。ただし添え字は省略する。

共変微分の公式

$$
\begin{aligned}
\nabla_i(T_1+T_2) &= \nabla_i T_1 + \nabla_i T_2 \\
\nabla_i(kT) &= k\nabla_i T \ (k \text{ はスカラー}) \\
\nabla_i(T_1T_2) &= (\nabla_i T_1)T_2 + T_1(\nabla_i T_2)
\end{aligned}
$$

■**計量条件**　計量テンソルを共変微分すると、デカルト座標で考えることにより、

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k \delta_{ij} = 0$$

となる。これを計量条件という。反変の計量テンソルについても同様に 0 となる。

1.2　曲率

共変微分の交換は、

$$
\begin{aligned}
[\nabla_l, \nabla_k]A_j &= \nabla_l\nabla_k A_j - \nabla_k\nabla_l A_j \\
&= [\partial_k\Gamma^i_{jl} - \partial_i\Gamma^l_{jk} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}]A_i
\end{aligned}
$$

である。係数は一階反変三階共変のテンソルであり、

$$R^i_{jkl} = \partial_k\Gamma^i_{jl} - \partial_l\Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{lm}$$

及びこれを縮約した

$$R_{ijkl} = g_{ih}R^h_{jkl}$$

をリーマン曲率テンソルと呼ぶ。さらに

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= R^k_{ikj} \\
R &= g^{ij}R_{ij}
\end{aligned}
$$

をそれぞれリッチテンソル、リッチスカラー (スカラー曲率) という。

1.3　ビアンキの恒等式

共変微分の交換関係より、$\nabla_j A_i = a_j b_i$ と書けるので

$$
\begin{aligned}
[\nabla_k, \nabla_l]\nabla_j A_i &= (\nabla_l\nabla_k - \nabla_k\nabla_l)(a_j b_i) \\
&= \nabla_l\left[(\nabla_k a_j)b_i + a_j(\nabla_k b_i)\right] - \nabla_k\left[(\nabla_l a_j)b_i + a_j(\nabla_l b_i)\right] \\
&= ([\nabla_k, \nabla_l]a_j)b_i + a_j([\nabla_k, \nabla_l]b_i) \\
&= R^h_{jkl}a_h b_i + R^h_{ikl}a_j b_h \\
&= R^h_{jkl}\nabla_h A_i + R^h_{ikl}\nabla_j A_h
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\nabla_j[\nabla_k, \nabla_l]A_i &= \nabla_j(R^h_{ikl}A_h) \\
&= \nabla_j R^h_{ikl}A_h + R^h_{ikl}\nabla_j A_h
\end{aligned}
$$

辺々引けば、

$$[\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_l]]A_i = R^h_{jkl}\nabla_h A_i - \nabla_j R^h_{ikl}A_h$$

となる。添え字を循環的に入れ替えて足すと、左辺はヤコビの恒等式と呼ばれるものになり、恒等的に 0 である。つまり、

$$(R^h_{jkl} + R^h_{klj} + R^h_{ljk})\nabla_h A_i - (R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k})A_h = 0$$

任意の A_i についてこれが成り立つので、

$$R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0$$
$$R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0$$

である。これをそれぞれビアンキの第一及び第二恒等式という。
ビアンキの第二恒等式を変形する。

$$\nabla_k R^h_{ilj} - \nabla_j R^h_{ilk} + \nabla_l R^h_{ijk} = 0$$

$h = l$ として縮約し、第三項を書き換える。

$$\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R^h_{ik} + \nabla_l g^{ih} R_{hijk} = 0$$

両辺に g^{ij} を掛ける。計量条件より共変微分の中に入れることができて、

$$\begin{aligned}\nabla_k R - \nabla_j R^j_k - \nabla_l g^{ih} R^j_{hjk} &= \nabla_k R - \nabla_j R^j_k - \nabla_l R^i_k \\ &= \nabla_k R - 2\nabla_j R^j_k\end{aligned}$$

第一項を書き換えて、

$$= \nabla_j(\delta^j_k R) - 2\nabla_j R^j_k = 0$$

となる。

$$G^j_k = R^j_k - \frac{1}{2}\delta^j_k R$$

と置く。これをアインシュタインテンソルという。添え字を上げて二階の反変テンソルにすれば、

$$G^{ij} = g^{ik} G^j_k = R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij}$$

計量条件より、

$$\nabla_j G^{ij} = 0$$

である。

2　時空の方程式

2.1　一般座標系への拡張

一般相対性原理によれば、物理法則は全ての座標系において不変である。そして等価原理により、重力場の作用する時空でも適当な座標変換によって、局所的に慣性系に変換することができる。さらに、ミンコフスキー計量で接続係数は 0 なので、共変微分は通常の微分に一致する。したがって、特殊相対論の数式を一般相対論の数式に拡張するには、通常の微分を共変微分に置き換えるだけで良い。

2.2 測地線の方程式

特殊相対論における自由粒子のラグランジアンは

$$L = -mc\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}$$

であった。これの自然な拡張はミンコフスキー計量 $\eta_{\mu\nu}$ を一般の計量 $g_{\mu\nu}$ で置き換えることである。ここで作用

$$S = -mc\int\sqrt{-g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}d\tau$$

の極値を与える軌道は、計量 $-g_{\mu\nu}$ の導入された四次元空間における測地線を表している。つまり物質の運動方程式は、$-g_{\mu\nu}$ のクリストッフェル記号が $g_{\mu\nu}$ と同じなので、

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \ (i = 0, 1, 2, 3)$$

となる。

2.3 アインシュタイン方程式

前章で物質の運動方程式を求めたが、軌道を求めるには時空の計量を定める必要がある。一般相対性理論における重力場の方程式は次の条件の下でニュートン力学に一致するはずである。

- 弱い重力場
- 重力場は時間変化しない
- 質点の速度は光速に比べて十分遅い

まず加速度系における計量を求める。慣性系 K に対して加速度系 K' が x 軸方向に加速度 g で進んでいるとする。時刻 $t = 0$ で両者が一致しているとすれば、十分小さい t について、

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - \frac{1}{2}gt^2 \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

である。従って慣性系ではミンコフスキー計量なので、

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$dx = \frac{\partial x}{\partial x'}dx' + \frac{\partial x}{\partial t'}dt'$ より

$$\begin{aligned} &= -c^2dt'^2 + (dx' + gtdt')^2 + dy'^2 + dz'^2 \\ &= \left(-1 + \frac{(gt)^2}{c^2}\right)(cdt')^2 + 2gtdt'dx' + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \end{aligned}$$

K' 系の原点では $x=\frac{1}{2}gt'^2$ なので

$$=\left(-1+\frac{2gx}{c^2}\right)(cdt')^2+2\sqrt{2gx}dt'dx'+dx'^2+dy'^2+dz'^2$$

重力ポテンシャルは $\phi=-gx$ なので

$$=\left(-1-\frac{2\phi}{c^2}\right)(cdt')^2-2\sqrt{-2\phi}dt'dx'+dx'^2+dy'^2+dz'^2$$

重力ポテンシャルはスカラーなので、加速の方向に依らず、$g_{00}=-1-\frac{2\phi}{c^2}$ である。
時空の計量は物質の分布、すなわちエネルギー運動量テンソルに依存するはずである。エネルギー運動量テンソルには、$\nabla_j T_{ij}=0$ という関係が成り立っていた。計量に関係する量 X_{ij} で、$X_{ij}=T_{ij}$ となるようなものがあれば、$\nabla_j X_{ij}=0$ を満たす。アインシュタインテンソルや計量テンソルはそのような性質を持っている。
ニュートン力学における重力場の方程式はポアソン方程式

$$\Delta\phi=4\pi G\rho$$

である。ϕ の二階微分は g_{00} の二階微分に比例するので、X_{ij} は計量の二階微分を含まなければならないとわかる。実は、g_{ij} の x に関する 0,1,2 階微分を含み、$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^2}$ の一次式であり、その共変微分が 0 となるような二階反変テンソルは G_{ij} と g_{ij} の線形結合に限るということが分かっている。つまり、

$$G_{ij}+\Lambda g_{ij}=\kappa T_{ij}$$

である。ところで左辺を計算するには、g_{ij} から Γ^i_{jk} を求め、リーマン曲率テンソルを計算し、リッチテンソルとリッチスカラーを導くという流れになる。リッチスカラーを求めるのは大変なので方程式を簡略化する。
両辺に g^{ij} を掛けて縮約する。

$$g^{ij}R_{ij}-\frac{1}{2}Rg^{ij}g_{ij}+\Lambda g^{ij}g_{ij}=\kappa g^{ij}T_{ij}$$

$g^{ij}g_{ij}$ はクロネッカーのデルタのトレースなので 4 である。

$$R-2R+4\Lambda=\kappa T$$
$$R=4\Lambda-\kappa T$$

これをもとの式に代入して、

$$R_{ij}-\frac{1}{2}(4\Lambda-\kappa T)g_ij+\Lambda g_{ij}=\kappa T_{ij}$$
$$R_{ij}-\Lambda g_{ij}=\kappa(T_{ij}+\frac{1}{2}Tg_{ij})$$

である。
まずリッチテンソルを計算する。$g_{ij}=\eta_{ij}+h_{ij}$ とすると、$h_{00}=-\frac{2\phi}{c^2}$ である。クリストッフェル記号は、

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

微分すれば η_{ij} は消える。h_{ij} の二次の項を無視すれば、

$$=\frac{1}{2}\eta_{kl}\left(\frac{\partial h_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial h_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^l}\right)$$
$$\Gamma^k_{00}=\frac{1}{2}\eta_{kl}\left(\frac{\partial h_{l0}}{\partial x^0}+\frac{\partial h_{l0}}{\partial x^0}-\frac{\partial h_{00}}{\partial x^l}\right)$$

計量は変化しないので時間微分は消えて

$$= -\frac{1}{2}\eta_{kl}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^l}$$

である。リッチテンソルは、後ろの二項が h_{ij} の二次になるので無視して、

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^k_{0k0} \\ &= \frac{\partial \Gamma^k_{00}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{0k}}{\partial x^0} \end{aligned}$$

時間微分は消えて、

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \Gamma^k_{00}}{\partial x^k} \\ &= -\frac{1}{2}\eta_{kl}\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^k \partial x^l} \\ &= -\frac{1}{2}\partial^i\partial_i h_{00} \end{aligned}$$

時間微分は 0 なので、

$$= -\frac{1}{2}\Delta h_{00}$$

次にエネルギー運動量テンソルを計算する。$T_{ij} = \rho u_i u_j$ だが、速度が十分小さいので $T_{00} = \rho c^2$ で残りの成分は全て 0 である。よって $T = g_{ij}T^{ij} = g_{00}\rho c^2$ である。従って方程式は、

$$R_{ij} - \Lambda g_{ij} = \kappa(T_{ij} + \frac{1}{2}Tg_{ij})$$

00 成分だけ取り出して、

$$-\frac{1}{2}\Delta h_{00} - \Lambda g_{00} = \kappa\rho c^2(1 - \frac{1}{2}g_{00}^2)$$

$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2}, g_{00} = -1$ を代入すれば、

$$\frac{1}{c^2}\Delta\phi + \Lambda = \frac{c^2}{2}\kappa\rho$$

ポアソン方程式 $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ と比較すると、$\Lambda = 0, \kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ であることが分かる。つまり、

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$$

である。これをアインシュタイン方程式または重力場方程式という。

■宇宙項