微分幾何学

高校 n 年 season07001674

2019/09/22

目次

第 I 部　数学的準備 2

1 微分形式 2

2 外微分 3

3 テンソル解析 4

3.1 反変ベクトルと共変ベクトル 4

3.2 テンソル 5

第 II 部　曲線 6

1 曲線の表示 6

2 Frenet-Serret の公式 6

第 III 部　曲面 7

1 曲面の表示 7

2 曲面の基本量 8

2.1 第一基本形式 8

2.2 第二基本形式 8

3 曲面の曲率 9

3.1 測地的曲率と法曲率 9

3.2 主曲率 9

3.3 ガウス曲率と平均曲率 10

3.4 オイラーの定理 (微分幾何) 10

4　曲面の分類と驚異の定理　11
4.1　Gauss-Weingarden の方程式　11
4.2　Gauss-Codazzi の積分可能条件　12
4.3　驚異の定理　14
5　測地線と極小曲面　15
5.1　測地線　15
6　Gauss-Bonnet の定理　17
第 IV 部　リーマン幾何学　17
1　共変微分　17
2　曲率　20
3　ビアンキの恒等式　20

第 I 部
数学的準備

1　微分形式

$f_{i_1,\ldots,i_k}$ を $x=(x_1,\ldots,x_n)$ の関数として、

$$\xi = \sum f_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

を k 次微分形式と呼ぶ。また、関数を 0 次微分形式とする。$\wedge$ は外積またはウェッジ積と呼ばれるもので、次のような性質を満たす。

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i \qquad \text{(交代性)}$$
$$dx_i \wedge dx_i = 0$$
$$(f_1 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k) \wedge (f_2 dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_l)$$
$$= f_1 f_2 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_l$$

微分形式同士の積には分配法則が成り立つ。また、$\xi = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ に対し、

$$\int \xi = \int f dx_1 \cdots dx_k$$

で定義する。
なぜこのようなことを考えるかというと、基本的には複素数や四元数などと同じである。線形独立な要素を一つの式にまとめて表すことで、計算や表記が簡単になる。また、外積が積の順番によって符号を変えるのは、

面の表と裏が区別可能であることから来ている。外積はクロス積の拡張であり、面の法線ベクトルは二つある。それらを同一視しないのはむしろ自然なことである。

2　外微分

外微分とは関数の全微分の概念を高次の微分形式に拡張したものである。まず、関数 f の外微分 df を定義する。

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

そして k 次微分形式 $\xi = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ の外微分は、

$$\begin{aligned} d\xi &= df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \end{aligned}$$

多様体 M 上の微分形式 ω に対し、

$$d(d\omega) = 0$$

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \qquad \text{(ストークスの定理)}$$

が成り立つ。

■ベクトル解析　微分形式を使うとベクトル解析の記号記号を完結に書くことができる。スカラー場を f、ベクトル場を $F = (F_x, F_y, F_z)$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathrm{grad} f &= df \\ \mathrm{rot} F &= d(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ \mathrm{div} F &= d(F_x dy \wedge dz + F_y dz \wedge dx + F_z dx \wedge dy) \end{aligned}$$

となる。公式 $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad} = 0, \mathrm{div}\ \mathrm{rot} = 0$ はどちらも $d^2 = 0$ に対応する。
これをマクスウェル方程式

$$\begin{aligned} \mathrm{div} E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \mathrm{div} B &= 0 \\ \mathrm{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \mathrm{rot} B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} &= \mu_0 i \end{aligned}$$

に応用する。$dw = cdt$ であり、

$$\begin{aligned} F =& - E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz \\ & + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy \\ J =& \quad \frac{\rho}{c\epsilon_0} dx \wedge dy \wedge dz \\ & - c\mu_0 (i_x dt \wedge) \end{aligned}$$

とすれば、マクスウェル方程式は

$$
\begin{aligned}
dF &= 0 \\
d*F &= 0
\end{aligned}
$$

となる。

■ポアンカレの補題　$\mathcal{R}^N$ 上の微分形式 ω が与えられたとき、$d\omega = 0$ であることは、$\omega = d\alpha$ なる α が存在することと同値である。

3　テンソル解析

3.1　反変ベクトルと共変ベクトル

ベクトル場 a^i を座標変換したとき、

$$
\begin{aligned}
a'^i &= \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j \\
b'_i &= \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} b_j
\end{aligned}
$$

という変換を受けるものをそれぞれ反変ベクトル、共変ベクトルという。例えば座標は

$$
x'^i = \sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} x^j
$$

なので反変ベクトルである。また微分演算子は、

$$
\frac{\partial}{\partial x'^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}
$$

となるので共変ベクトルである。ここで反変ベクトルは添え字を右上に、共変ベクトルは右下に書くことにする。また a^i と b_i の内積をとると、

$$
\begin{aligned}
\sum_i a'^i b'_i &= \left(\sum_j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j \right) \left(\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} b_k \right) \\
&= \sum_i a^i b_i
\end{aligned}
$$

となる。つまり反変ベクトルと共変ベクトルで内積をとったものは座標変換によって変わらないスカラーになる。このような組み合わせで内積をとったものは特に縮約と呼ぶ。

3.2　テンソル

二つの反変ベクトル a^i, b^i の積は、

$$
\begin{aligned}
a'^i b'^j &= \left(\sum_k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k\right)\left(\sum_l \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} b^l\right) \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^i}{\partial x^l} a^k b^l
\end{aligned}
$$

のような変換を受ける。逆にこのような変換を受けるものは二つの反変ベクトルの積で表せるだろう。これを二階の反変テンソルという。一般に次のような座標変換を受けるものをそれぞれ反変テンソル、共変テンソルという。

$$
\begin{aligned}
T'^{ij} &= \sum_{k,l} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l} T^{kl} \\
T'_{ij} &= \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T_{kl}
\end{aligned}
$$

高階のテンソル場の場合も同様である。また

$$
T'^i_j = \sum_{k,l} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T^k_l
$$

のような変換を受けるものを混合テンソルと呼ぶ。テンソルとは複数の添え字の組に対して値が一つ決まっているようなものであり、それに加えて以上のような座標変換を受けるものである。添え字の数をそのテンソルの階数と呼ぶ。例えばスカラー量は 0 階、ベクトルは 1 階、行列は 2 階のテンソルである。また空間の各点にテンソルが定義されているものをテンソル場という。

二つのテンソル場があったとき、それらの成分ごとの積を、上付き添え字と下付き添え字が共通するものについて和をとったものは、その添え字が相殺される。これをテンソルの縮約という。例えば、

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j} A^{ij} B_{ij} &= C(\text{スカラー}) \\
\sum_m A^{im}_j B^k_{lm} &= C^{ik}_{jl} \\
\sum_{k,l} A^{ik}_l B^{jl}_k &= C^{ij}
\end{aligned}
$$

などである。ここで同じ項で添え字が重なる場合は、その添え字について和をとる、つまり縮約をとることにする。これをアインシュタインの縮約記法という。先程の反変変換、共変変換の式は、

$$
\begin{aligned}
T'^{ij} &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^l} T^{kl} \\
T'_{ij} &= \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^l}{\partial x'^j} T_{kl}
\end{aligned}
$$

と簡潔に書ける。

第 II 部
曲線

この章では、空間曲線を合同なものは同じとみなすという基準のもと、分類する問題に取り組む。

1　曲線の表示

曲線は 1 次元なので、一つのパラメータ t を用いて直交座標で、$p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と表せる。ここで $p(t)$ は滑らかな関数だとする。$p(t)$ が動かなければ尖った部分ができてしまうので、$p'(t) \neq 0$ と仮定する。しかしこれでは、パラメータが変われば曲線の表示も変わってしまう。そこで弧長パラメータを導入する。時刻 t が a から b まで動いたときの曲線の長さは、

$$s(t) = \int_a^b |p'(t)|dt$$

で与えられる。ここで s は t の関数だが、単射な関数なので、逆に t を s の関数とみることもできる。そこで s を新たにパラメータとして採用することにする。

2　Frenet-Serret の公式

s をパラメータとすれば、当然速さ $|p'(s)| = 1$ である。曲線上を点 p が一定の速さで進むとき、その進行方向の単位ベクトルを e_1 とする。$e_1 = p'(s)$ である。また加速度ベクトル $p''(s)$ は速度ベクトルと直交する。これは $p'(s) \cdot p'(s) = 1$ を微分すれば容易に示せるが、次のように考えれば直感的にわかる。速度ベクトルの絶対値は 1 なので、直線部分がなければ $(|p''(s)| \neq 0)$ ベクトルの終点は単位球面上を動く。つまり接ベクトル $p''(s)$ は $p'(s)$ と直交する。点 p が加速する方向を主法線方向と呼び、単位ベクトルを e_2 とする。そして $e_3 = e_1 \times e_2$ の方向を従法線方向と呼ぶ。三つの単位ベクトル (e_1, e_2, e_3) は正規直交基底になっていて、Frenet-Serret 標構と呼ばれる。
ここから (e'_1, e'_2, e'_3) と (e_1, e_2, e_3) の関係式を導く。まず、$|p''(s)| = \kappa(s)(> 0)$ とすれば、

$$e'_1 = p'' = \kappa(s)e_2$$

である。$|e_2| = 1$ なので、$p'(s)$ と同じように e_2 と e'_2 は直交する。つまり、e'_2 は e_1 と e_3 とで決まる平面上にある。よって $e'_2 = ke_1 + \tau e_3$ となる関数 k, τ が決まる。$e_1 \cdot e_2 = 0$ の両辺を微分して、

$$\begin{aligned} e'_1 \cdot e_2 + e_1 \cdot e'_2 = 0 \\ \kappa e_2 \cdot e_2 + e_1 \cdot (ke_1 + \tau e_3) = 0 \\ \kappa + k = 0 \end{aligned}$$

よって $k = -\kappa$ である。また $e_3 = e_1 \times e_2$ の両辺を微分して、

$$\begin{aligned} e'_3 &= e'_1 \times e_2 + e_1 \times e'_2 \\ &= \kappa e_2 \times e_2 + e_1 \times (-\kappa e_1 + \tau e_3) \\ &= \tau e_1 \times e_3 \\ &= -\tau e_2 \end{aligned}$$

以上で公式が揃った。曲線 $p(s)$ が与えられたとき、$e_1 = p'(s), \kappa = |e_1'|$ とおくと、連立方程式

$$\begin{cases} e_1' = & \kappa e_2 \\ e_2' = -\kappa e_1 & + \tau e_3 \\ e_3' = & -\tau e_2 \end{cases}$$

が成立する。これを Frenet-Serret の公式という。κ を曲率、τ を捩率 (第二曲率) という。曲率と捩率はパラメータをどこを基準にして測るか、またどちらに進むかで変わってくる。スタート地点をずらせば、$\kappa(s), \tau(s)$ を s 軸方向に平行移動させた $\kappa(\pm s - c), \tau(\pm s - c)$ も同じ曲線を表すことになる。$p(s)$ が与えられれば、$\kappa(s)(>0), \tau(s)$ が対称、平行移動を除いてただ一つに決まり、逆に、$\kappa(s)(>0), \tau(s)$ が与えられれば、$p(s)$ が合同変換を除いてただ一つに決まる。後者は、Frenet-Serret の公式の解の一意性が常微分方程式の基本定理より従う。

第 III 部
曲面

1　曲面の表示

曲面は 2 次元なので、二つのパラメータ u, v による直交座標での写像

$$D \ni (u, v) \longmapsto p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S$$

で与えられる。$p(u, v)$ は滑らかであるとする。また便宜上 (u, v) を (u_1, u_2)、(x, y, z) を (x_1, x_2, x_3) と表すことがある。曲線の場合と同様に、この曲面が点や曲線に退化しないよう、また特異点を持たないよう条件を設ける必要がある。以下の 5 つの条件は全て同等である。

1. D 上に任意の曲線 $s(t) = (u(t), v(t))$ を与えると、$s'(t) \neq 0$ ならば、$\frac{d}{dt}p(s(t)) \neq 0$ である。つまり D 上の曲線の像は S 上の曲線となる。

2. S の点 p における接ベクトル全体は平面をなす。これを接平面という。

3. x, y, z の内、任意の二つを x_i, x_j とすると、ヤコビアン
$$\left| \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0$$
である。このとき、十分小さい D で、写像
$$(u, v) \longmapsto (x_i, x_j)$$
は全単射で、逆写像も滑らかである (微分積分学の陰関数定理)。
4. x, y, z の内、任意の二つを x_i, x_j とすると、
$$dx_i \wedge dx_j \neq 0$$
5. ベクトル $\frac{\partial p}{\partial u}$ と $\frac{\partial p}{\partial v}$ は線形独立である。

曲面を表示するに当たって、正規直交枠とガウス標構を導入する。曲面上の点 p を原点とし、その点ににおける法線方向を z 軸とする直交座標系を (x, y, z) とする。それぞれの単位ベクトルを e_1, e_2, e_3 とする。e_3 は点 p が曲面上を移動するとき、いつも決まった向きを持つように決めておく。e_1, e_2 は $e_1 \times e_2 = e_3$ となるようにとる。また、x 軸と y 軸は回転の分の自由度を残しておく。$z = f(x, y)$ とすれば、必然的に $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ が成り立つ。(e_1, e_2, e_3) を正規直交枠と呼ぶ。一方 $B_1 = \frac{\partial p}{\partial u}, B_2 = \frac{\partial p}{\partial v}$ で、n を $B_1 \times B_2$ の方向をとる単位法線ベクトルとしたとき、(B_1, B_2, n) をガウス標構と呼ぶ。

2　曲面の基本量

2.1　第一基本形式

曲面上における二点間の微小長さは、

$$\begin{aligned} ds^2 &= dp^2 \\ &= \left(\frac{\partial p}{\partial u}du + \frac{\partial p}{\partial v}dv\right)^2 \\ &= p_u^2 du^2 + 2p_u p_v dudv + p_v^2 dv^2 \end{aligned}$$

で与えられる。$g_{ij} = \frac{\partial p}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial p}{\partial u_j}$ とおき、

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2$$

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

これを第一基本形式という。また I をリーマン計量 (計量テンソル) と呼ぶ。曲面上の二点間の距離はもちろんユークリッド距離だが、ここで重要なのはむしろ u, v の方である。距離に合わせて平面を曲げるのではなく、距離に合わせて計量を定義する、というのが曲面の外在的な定義を必要としないリーマン幾何学の特徴である。

2.2　第二基本形式

曲面上の点 $p(u, v)$ とその接平面を考える。$p(u + du, v + dv)$ と接平面の距離は

$$dz = (p(u + du, v + dv) - p(u, v)) \cdot n$$

二次の項までテイラー展開すると、

$$= \left(\frac{\partial p}{\partial u}du + \frac{\partial p}{\partial v}dv + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v}dudv + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}dv^2\right) \cdot n$$

$p_u, p_v \perp n$ であることに注意すると、

$$= \left(\frac{1}{2}p_{uu}du^2 + p_{uv}dudv + \frac{1}{2}p_{vv}dv^2\right) \cdot n$$

となる。$h_{ij} = \frac{\partial^2 p}{\partial u_i \partial u_j} \cdot n$ とおき、

$$2dz = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$$

$$II = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

これを第二基本形式という。
第一基本形式は曲面の計量に関する性質を表すという意味で内在的であり、第二基本形式は凹凸などの空間への入り方を表しているという意味で外在的である。

3　曲面の曲率

3.1　測地的曲率と法曲率

曲面上の曲線を $p(u,v)=p(u(s),v(s))$ とする。s は弧長パラメータである。これに正規直交枠 (e_1,e_2,e_3) を導入する。e_1 を曲線の接線方向、e_3 を曲面の法線方向の単位ベクトルとすると、$p''(s)=e_1'=k_ge_2+k_ne_3$ と表すことができる。この時の k_g,k_n をそれぞれ測地的曲率、法曲率という。つまり $k_g=p''\cdot e_2, k_n=p''\cdot e_3$ である。$|p''|$ は空間曲線としての曲率 $k(s)$ である。ここで、

$$\begin{aligned}
p' &= p_u\frac{du}{ds}+p_v\frac{dv}{ds} \\
p'' &= \frac{dp_u}{ds}\frac{du}{ds}+p_u\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{dp_v}{ds}\frac{dv}{ds}+p_v\frac{d^2v}{ds^2} \\
&= p_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2p_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+p_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+p_u\frac{d^2u}{ds^2}+p_v\frac{d^2v}{ds^2}
\end{aligned}$$

なので $p_u\cdot e_3=p_v\cdot e_3=0$ より、

$$\begin{aligned}
k_n &= p''\cdot e_3 \\
&= (p_{uu}\cdot e_3)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2(p_{uv}\cdot e_3)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+(p_{vv}\cdot e_3)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\
&= h_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2h_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+h_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \\
&= \frac{h_{11}du^2+2h_{12}dudv+h_{22}dv^2}{g_{11}du^2+2g_{12}dudv+g_{22}dv^2}
\end{aligned}$$

となる。曲線上の点 p における法曲率は $\lambda=dv/du$ のみに依存することが分かった。

3.2　主曲率

曲面上の点において、法線ベクトルを含む平面と曲面が交わってできる曲線を法切断または直截線という。点 p における法切断の測地的曲率は 0 なので、曲率は法曲率に等しい。法切断の曲率が最大値最小値をとるとき、その曲率 k_1,k_2 を主曲率、接ベクトルを主方向 X_1,X_2 と呼ぶ。法曲率 k が極値を持つ条件は、

$$k=\frac{h_{11}+2h_{12}\lambda+h_{22}\lambda^2}{g_{11}+2g_{12}\lambda+g_{22}\lambda^2}$$
$$(h_{22}-kg_{22})\lambda^2+2(h_{12}-kg_{12})\lambda+(h_{11}-kg_{11})=0$$

の解が存在することであり、この二次方程式の判別式 D が 0 以上になることである。

$$\begin{aligned}
\frac{D}{4} &= (h_{12}-kg_{12})^2-(h_{11}-kg_{11})(h_{22}-kg_{22}) \\
&= (g_{12}^2-g_{11}g_{22})k^2+(g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11})k+(h_{12}^2-h_{11}h_{22}) \geqq 0
\end{aligned}$$

g は正定値行列なので、$g_{12}^2 - g_{11}g_{22}$ は負の値をとる。$D=0$ になるとき k_n は最大または最小になる。ところで $D=0$ は、

$$(h_{11}-kg_{11})(h_{22}-kg_{22})-(h_{12}-kg_{12})(h_{21}-kg_{21})=0$$

と書ける。これは $II-kI$ の行列式が 0、即ち $I^{-1}II$ の固有方程式を表している。$I^{-1}II$ をシェイプ作用素という。つまり二つの主曲率はシェイプ作用素の固有値である。

3.3 ガウス曲率と平均曲率

二つの主曲率 k_1, k_2 の積をガウス曲率 K、平均を平均曲率 H という。主曲率の満たす二次方程式の解と係数の関係より、

$$K = k_1k_2 = \frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$$
$$2H = k_1+k_2 = \frac{g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$$

となる。ガウス曲率が正の点を楕円点、負の点を双曲点という。また 0 の点を放物点と呼ぶこともある。

3.4 オイラーの定理 (微分幾何)

ここでは微分幾何におけるオイラーの定理を証明する。まず補題を一つ証明する。

補題. 平面曲線 $y=y(x)$ で $y'(0)=0$ のとき、原点における曲率は、$y''(0)$ である (平面曲線の場合、曲率に符号を付ける)。

Proof. $p=(x,y)$、弧長パラメータを s とすれば曲率は $\frac{d^2p}{ds^2}$ である。

$$\frac{dp}{dx}=(1,y'), \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}$$

より、

$$\frac{dp}{ds}=\frac{(1,y')}{\sqrt{1+y'^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\frac{dp}{ds}=\frac{(0,y'')\sqrt{1+y'^2}-(1,y')y'y''/\sqrt{1+y'^2}}{1+y'^2}$$

$y'(0)=0$ なので、

$$\frac{d^2p}{ds^2}=\frac{(0,y'')(1+y'^2)-(1,y')y'y''}{(1+y'^2)^2}=(0,y'')$$

よって原点における曲率は、y'' となる。 □

オイラーの定理 (微分幾何). 二つの主方向は直交し、更に X_1 に対して角 θ をなす法切断の曲率を k_θ とすれば、

$$k_\theta = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$$

である。

Proof. 曲面上に正規直交枠をとる。補題より、x, y 軸の法切断の曲率は偏微分となり $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ である。x 軸と角 θ をなす方向を $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ とすれば、曲率 k_θ は方向微分となり、

$$\begin{aligned} k_\theta &= \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial v}(z_x \cos\theta + z_y \sin\theta) \\ &= (z_{xx}\cos\theta + z_{xy}\sin\theta, z_{xy}\cos\theta + z_{yy}\sin\theta)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) \\ &= z_{xx}\cos^2\theta + 2z_{xy}\sin\theta\cos\theta + z_{yy}\sin^2\theta \end{aligned}$$

この二次形式の最大値と最小値は行列 $\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix}$ の固有値に等しい。また主方向はそれぞれの固有値の固有ベクトルである。対称行列の固有ベクトルは直交するので主方向も直交する。この固有ベクトルで主軸変換を行えば、(主方向との成す角を新たに θ とおいて)

$$k_\theta = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$$

よって示された。 □

4 曲面の分類と驚異の定理

この章では曲線と同じように曲面を分類することを試みる。
まず Christoffel 記号を導入する。

$$\begin{aligned} [jk, l] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right) \\ \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2}g^{ih}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^h}\right) \end{aligned}$$

ここで $[jk, l] = g_{il}\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} = g^{ih}[jk, h]$ が成り立っている。$[jk, l], \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ をそれぞれ第一種及び第二種の Christoffel 記号という。

4.1 Gauss-Weingarden の方程式

曲線論における Frenet-Serret の公式に当たるものを考える。Gauss 標構 $\{B_1, B_2, n\}$ をとる。ここで

$$n = \frac{B_1 \times B_2}{|B_1 \times B_2|} = \frac{B_1 \times B_2}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}$$

である。三つのベクトルは線形独立なので、

$$\frac{\partial B_j}{\partial u^k} = \Gamma^i_{jk}B_i + h_{jk}n$$

となる Γ^i_{jk}, h_{jk} が一意に定まるはずである。$h_{jk} = \frac{\partial B_j}{\partial u^k}\cdot n$ は定義より第二基本量である。また $g_{ij} = B_i \cdot B_j$ を微分した $\frac{\partial B_i}{\partial u^k}\cdot B_j + B_i \cdot \frac{\partial B_j}{\partial u^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$ に代入して、

$$\Gamma^h_{ik}g_{hj} + \Gamma^h_{jk}g_{ih} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

を得る。$\Gamma_{jk|i} = \Gamma^h_{jk} g_{ih}$ と置けば、

$$\Gamma_{ik|j} + \Gamma_{jk|i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

となる。$\frac{\partial B_j}{\partial u^k} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^j \partial u^k}$ より j, k につき対称である。そこで上の式の添え字を循環的に入れ替えて、$\Gamma_{jk|i}$ に関する連立方程式とみれば、

$$\Gamma_{jk|i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right) = [jk, i]$$
$$\Gamma^i_{jk} = g^{ih}\Gamma_{jk|h} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$$

となることが分かる。次に $n \cdot n = 1$ を微分すると $\frac{\partial n}{\partial u^j} \cdot n = 0$ であるので、

$$\frac{\partial n}{\partial u^k} = r^h_k B_h$$

となる r^h_j が一意的に決まる。$B_i \cdot n = 0$ を微分した $\frac{\partial B_i}{\partial u^k} \cdot n + B_i \cdot \frac{\partial n}{\partial u^k} = 0$ に先程の式と代入して、

$$h_{ij} + r^h_j g_{ih} = 0$$

これは行列の積を成分ごとに表したものなので、両辺に右から g の逆行列をかけて、

$$r^i_k = -h_{kl} g^{li}$$

二つを合わせて、

$$\frac{\partial B_j}{\partial u^k} = \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} B_i + h_{jk} n \qquad \text{(Gauss の方程式)}$$
$$\frac{\partial n}{\partial u^k} = -h_{kl} g^{li} B_i \qquad \text{(Weingarten の方程式)}$$

4.2 Gauss-Codazzi の積分可能条件

Frenet-Serret の式と同じように、Gauss-Weingarten の方程式は連立一次偏微分方程式である。係数は第一及び第二基本量から求められ、この方程式を解くことで $\{B_1, B_2, n\}$ を求めることができる。しかしここで $B_j = \frac{\partial p}{\partial u^j}$ なので、求められたガウス標構が実際の曲面と矛盾しないためにはいくつか条件が必要である。具体的には、

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial}{\partial p} u^i u^j$$
$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial u^k \partial u^j} = \frac{\partial}{\partial B_i} u^j u^k$$
$$\frac{\partial^2 n}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^2 n}{\partial u^i \partial u^j}$$

である。第一式に関しては既に成り立っていることがわかる。なぜなら

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial B_i}{\partial u^j} = \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\} B_h + h_{ij} n$$

は i,j に関して対称だからである。次に第二式の条件を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B_i}{\partial u^k \partial u^j} &= \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} B_h + h_{ij} n\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} B_h + \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} \frac{\partial B_h}{\partial u^k} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} n + h_{ij} \frac{\partial n}{\partial u^k}\end{aligned}$$

$\frac{\partial B_h}{\partial u^k}$ と $\frac{\partial n}{\partial u^k}$ にそれぞれ代入し、

$$\begin{aligned}= &\sum_h \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} B_h + \sum_{h,l}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} l \\ hk \end{matrix}\right\} B_l + \sum_h \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} h_{hk} n \\ &+ \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} n + h_{ij} \sum_{l,h}(-h_{kl} g^{lh} B_h)\end{aligned}$$

第二項で添え字 h,l を付け替えると、

$$\begin{aligned}= &\left[\frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} h \\ kl \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} l \\ ij \end{matrix}\right\} - h_{ij} h_{kl} g^{lh}\right] B_h \\ &+ \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} + \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} h_{hk}\right] n\end{aligned}$$

となる。これと j,k を入れ替えたものが等しくなる。また B_h, n は線形独立なので、

$$R^h_{ijk} = h_{ik} h_{jl} g^{lh} - h_{ij} h_{kl} g^{lh} \qquad \text{(Gauss の積分可能条件)}$$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} + \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} h_{hk} - \left\{\begin{matrix} h \\ ik \end{matrix}\right\} h_{hj} = 0 \qquad \text{(Codazzi の積分可能条件)}$$

となる。ただし

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^j}\left\{\begin{matrix} h \\ ik \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} l \\ ik \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h \\ jl \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} l \\ ij \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h \\ kl \end{matrix}\right\}$$

である。また両辺に g^{hl} をかけて縮約を取ったものを、

$$R_{lijk} = g^{hl} R^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^j}\left\{\begin{matrix} h \\ ik \end{matrix}\right\} g^{hl} - \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} g^{hl} + \left\{\begin{matrix} a \\ ik \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h \\ ja \end{matrix}\right\} g^{hl} - \left\{\begin{matrix} a \\ ij \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h \\ ka \end{matrix}\right\} g^{hl}$$

これらをリーマン曲率テンソルと呼ぶ。リーマン曲率テンソルを用いて Gauss の積分可能条件を表すと、

$$\begin{aligned}g^{ha} R^h_{ijk} &= h_{ik} h_{ja} g^{ah} g^{hl} - h_{ij} h_{ka} g^{ah} g^{hl} \\ R_{lijk} &= h_{ik} h_{ja} \delta^a_l - h_{ij} h_{ka} \delta^a_l \\ &= h_{ik} h_{jl} - h_{ij} h_{kl}\end{aligned}$$

また第三式については、Codazzi の積分可能条件と同じものが導かれるので、条件はこれで十分である。よって次の定理が成り立つ。

曲面論の基本定理. 対称テンソル g_{ij}, h_{ij} が与えられ、g_{ij} は正定値であるとする。このとき、これらを第一及び第二基本量とする曲面 $p(u,v)$ が存在するための必要十分条件は、*Gauss-Codazzi* の積分可能条件を満たすことである。またその曲面は、剛体運動を除いてただ一つに決定する。

4.3　驚異の定理

上の式は右辺が第二基本量のみに依存している。さて、元々リーマン曲率テンソル及びその定義に含まれるクリストッフェル記号は第一基本量から求められたのだった。つまり第一基本テンソルと第二基本テンソルは独立ではなく一部依存しているところがあるということである。特に

$$R_{1212} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$

であり、これを用いると、

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

のように曲面のガウス曲率を第一基本テンソルだけから求めることができる。これを驚異の定理 (Theorem Egregium) という。元々外在的な量から定義されたガウス曲率が、内在的な量のみから決定できることは、外の世界についての情報を全く必要とせず、空間の曲がり方を考察することができるという可能性を示唆している。この事実は、第一基本テンソルの等しい多様体を同一視するリーマン幾何学誕生のきっかけとなった。

■等長写像　二点間の距離を保つ写像を等長写像という。二つの曲面が等長写像によって移りあうとき、それらは局所等長的であるという。局所等長的な二つの曲面は、伸縮したりせず連続的に折り曲げるだけで変形させることができる。また等長変換の前後で第一基本形式は変化しない。従ってガウス曲率もそれぞれの点で変化しない。対偶をとれば、ガウス曲率の一致しない曲面は局所等長的ではない。平面のガウス曲率は至る所 0 であり、半径 r の球面では $\frac{1}{r^2}$ なので、球面を歪ませることなく平面に展開することはできない。この事実は地図学にとって重要である。地球の正確な平面図を作成することは不可能であることが示されるからである。また折り紙では、平面を折り曲げるだけで変形可能な曲面を作ることになる。歪みなく平面に展開可能な曲面を可展面というが、目標となる造形をいかに可展面に落とし込むかが重要になってくる。

■共形写像　始点が同じ任意の二つのベクトルの成す角を保存する写像を共形写像 (等角写像) という。

■等温座標　パラメータ (u, v) から平面への共形写像が存在するとき、(u, v) を等温座標という。これは第一基本形式が $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$ となることと同値である。複素数 $z = u + iv$ を使えば、$ds^2 = E|dz|^2$ とも書ける。曲面上の任意の点で局所的には等温座標が存在することが証明できる。ここで、

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$
$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

とするとガウス曲率は、

$$K = -\frac{2\partial\overline{\partial}\log E}{E} = -\frac{\Delta \log E}{2E}$$

となる。

5　測地線と極小曲面

5.1　測地線

曲面上の二点を結ぶ曲線のうち、最も短いものを最短線という。ここでは曲線が最短線となる必要条件を考える。助変数を $(u_1(t), u_2(t))(a \leqq t \leqq b)$ とし、対応する端点を A, B とする。すると A, B の長さは汎関数

$$s[r(t)] = \int_a^b F(u(t), \dot{u}(t))dt$$

で与えられる。ただし $F(u(t), \dot{u}(t)) = \sqrt{g_{ij}(u)\dot{u}^i\dot{u}^j}$ である。また $ds = Fdt$ である。汎関数 $s[r(t)]$ が極値をとる条件は F が Euler-Lagrange 方程式を満たすことである。そしてそのような条件を満たす曲線を測地線と呼ぶ。最短線は測地線だが測地線は最短線ではない。まず Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^i} - \frac{\partial F}{\partial u^i} = 0$$

で表される。第一項は、

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^l} = \frac{1}{2F}g_{jk}\left\{\frac{\partial \dot{u}^j}{\partial \dot{u}^l}\dot{u}^k + \dot{u}^j\frac{\partial \dot{u}^k}{\partial \dot{u}^l}\right\}$$

$\frac{\partial \dot{u}^j}{\partial \dot{u}^l}$ は $j = l$ のときに限り 1 なので、

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2F}\left(\sum_k g_{lk}\dot{u}^k + \sum_j g_{jl}\dot{u}^j\right) \\
&= \frac{1}{F}g_{il}\dot{u}^i = g_{il}\frac{du^i}{ds}
\end{aligned}$$

従って

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^l}\right) = \left(\sum_i g_{il}\frac{d^2u^i}{ds^2} + \sum_{j,k}\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\frac{ds}{dt}$$

$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} = [jk, l] + [lk, j]$ より、

$$= \left[g_{il}\frac{d^2u^i}{ds^2} + ([jk, l] + [lk, j])\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right]\frac{ds}{dt}$$

そして第二項は、

$$\frac{\partial F}{\partial u^l} = \frac{1}{2F}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\dot{u}^j\dot{u}^k$$

$[jk,l]=[kj,l], \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}=[jl,k]+[kl,j]$ であることに注意すれば、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2F}([jl,k]+[kl,j])\dot{u}^j\dot{u}^k \\
&= \frac{1}{F}[kl,j]\dot{u}^j\dot{u}^k \\
&= [kl,j]\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{ds}{dt}
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^l}-\frac{\partial F}{\partial u^l} &= \left(g_{il}\frac{d^2u^i}{ds^2}+[jk,l]\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\frac{ds}{dt} \\
&= g_{il}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\frac{ds}{dt} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\det g_{il}\neq 0, ds/dt=F\neq 0$ であるので、

$$
\frac{d^2u^i}{ds^2}+\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0 \quad (i=1,2,...,n)
$$

これを測地線の方程式という。またこれを

$$
\begin{cases}
\dfrac{du^i}{ds}=v^i \\
\dfrac{dv^i}{ds}=-\left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}v^jv^k
\end{cases}
$$

と書き換えると、1 階の連立常微分方程式となるので、次の定理が導かれる。

定理. *Riemann* 多様体 M の任意の点で任意の方向にただ *1* 本の測地線が引ける。

■Weierstrass の表現　二次元 Reimann 多様体、つまり曲面の場合を考える。このとき $k>0$ として $F(u,v,k\dot{u},k\dot{v})=kF(u,v,\dot{u},\dot{v})$ となって F は $\dot{u},\dot{v}$ について正斉次である。この式を k で微分し、$k=1$ とすると、

$$
\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\dot{u}+\frac{\partial F}{\partial \dot{v}}\dot{v}=F
$$

となる。両辺を $\dot{u^i}$ で微分して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}\dot{u}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{v}\partial \dot{u}}\dot{v}=0 \\
\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial \dot{v}}\dot{u}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{v}^2}\dot{v}=0
\end{aligned}
$$

が導かれ、

$$
\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}:\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial \dot{v}}:\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{v}^2}=\dot{v}^2:-\dot{u}\dot{v}:\dot{u}^2
$$

となる。比例因子を c として、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2} = c\dot{v}^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial \dot{v}} = -c\dot{u}\dot{v}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{v}^2} = c\dot{u}^2$$

また

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = \frac{g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v}}{F}, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{v}} = \frac{g_{21}\dot{u} + g_{22}\dot{v}}{F}$$

なので、

$$\begin{aligned} c =& \frac{F_{\dot{u}\dot{u}}}{\dot{v}^2} \\ =& \frac{1}{\dot{v}^2}\frac{g_{11}F - (g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v})F_{\dot{u}}}{F^2} \\ =& \frac{1}{\dot{v}^2}\frac{g_{11}F^2 - (g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v})^2}{F^3} \\ =& \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{F^3} \end{aligned}$$

これを Euler-Lagrange 方程式に代入すると、

$$F_u - \frac{d}{dt}F\dot{u} = \dot{v}TF_v - \frac{d}{dt}F\dot{v} = -\dot{u}T$$

ただし、

$$T = F_{u\dot{v}} - F_{\dot{u}v} + c(\dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u})$$

である。従って曲面の場合、測地線の方程式は $T = 0$ と同値である。これを Weierstrass の表現という。

6 Gauss-Bonnet の定理

Gauss-Bonnet の定理. M をコンパクトな二次元リーマン多様体とする。K を M のガウス曲率、k_g を ∂M の測地的曲率とすると、

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} k_g ds = 2\pi\chi(M)$$

ただし $\chi(M)$ は M のオイラー標数である。

第 IV 部
リーマン幾何学

1 共変微分

反変ベクトル $A^i(X^j)$ を座標変換したものが $a^i(x^j)$ であるとする。

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^i}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^l}A^l\right) \\ &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial X^l}A^l + \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\frac{\partial A^l}{\partial X^k} \end{aligned}$$

共変ベクトルも同様に、

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_i}{\partial x^j} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial X^l}{\partial x^i}A^l\right)\\ &= \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^i \partial x^j}A_l + \frac{\partial X^l}{\partial x^i}\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\frac{\partial A_l}{\partial X^k}\end{aligned}$$

第二項だけを見ればそれぞれ混合テンソル、共変テンソルのようになっている。

$$\begin{aligned}\nabla_j a^i &= \frac{\partial a^i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial X^l}A^l\\ &= \frac{\partial a^i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial X^l}\frac{\partial X^l}{\partial x^k}a^k\\ \nabla_j a_i &= \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^i \partial x^j}A_l\\ &= \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial X^l}a_k\end{aligned}$$

とすれば X と x の二つの座標系間の変換で不変となる。これを共変微分という。第二項の a^k, a_k の係数は接続係数またはアフィン係数と呼ばれる。このままでは他の座標系に依存してしまうので X をデカルト座標で固定する。しかし、曲がった空間ではデカルト座標との関係が不定であり、そもそも存在を前提とするわけにはいかないので、計量を使って書き直す。ユークリッド計量を δ_{ij}(クロネッカーのデルタ) とすると、

$$g_{ij} = \frac{\partial X^m}{\partial x^i}\frac{\partial X^n}{\partial x^j}\delta_{mn}$$

これを微分して、

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \delta_{mn}\left(\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial X^n}{\partial x^j} + \frac{\partial X^m}{\partial x^i}\frac{\partial^2 X^n}{\partial x^j \partial x^k}\right)$$

計量は対称テンソルなので、添え字を巡回的に入れ替えて足し引きする。

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = \delta_{mn}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial X^n}{\partial x^k}$$

とすると左辺は第一種クリストッフェル記号そのものであり Γ_{kij} と書く。第二種クリストッフェル記号を Γ^l_{ij} と書き、

$$\begin{aligned}\Gamma^l_{ij} &= g^{lk}\Gamma_{kij}\\ &= g^{lk}\delta_{mn}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial X^n}{\partial x^k}\\ &= \frac{\partial x^l}{\partial X^u}\frac{\partial x^k}{\partial X^v}\delta^{uv}\delta_{mn}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial X^n}{\partial x^k}\end{aligned}$$

$\delta^{ij}, \delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ なので

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial x^l}{\partial X^u}\frac{\partial x^k}{\partial X^u}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial X^m}{\partial x^k}\\ &= \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial x^l}{\partial X^u}\frac{\partial X^m}{\partial X^u}\end{aligned}$$

$\frac{\partial X^m}{\partial X^u} = \delta^m_u$ より

$$= \frac{\partial^2 X^m}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^l}{\partial X^m}$$

となって共変ベクトルの共変微分の接続係数となる。一方、反変ベクトルの共変微分の接続係数は、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial X^l} \frac{\partial X^l}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^l}\right)\frac{\partial X^l}{\partial x^k} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial X^l}\frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial x^i}{\partial X^l}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial X^l}{\partial x^k} \\
&= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 X^l}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial X^l} \\
&= -\Gamma^i_{jk}
\end{aligned}$$

となる。つまり接続係数はどちらもクリストッフェル記号で表すことができる。共変微分の定義を書き直すと、

$$\nabla_j a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} a^k$$
$$\nabla_j a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} a_k$$

となる。一般のテンソルに対しても同様に定義することができる。二階のテンソルの場合は、

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km} T^{mj} + \Gamma^j_{km} T^{mj}$$
$$\nabla_k T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km} T^m_j - \Gamma^m_{jk} T^i_m$$
$$\nabla_k T_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ik} T_{mj} - \Gamma^m_{jk} T_{im}$$

となる。
以下に共変微分の公式を書いておく。ただし添え字は省略する。

共変微分の公式

$$\begin{aligned}
\nabla_i(T_1 + T_2) &= \nabla_i T_1 + \nabla_i T_2 \\
\nabla_i(kT) &= k\nabla_i T \ (k\ \text{はスカラー}) \\
\nabla_i(T_1 T_2) &= (\nabla_i T_1)T_2 + T_1(\nabla_i T_2)
\end{aligned}$$

■計量条件　計量テンソルを共変微分すると、デカルト座標で考えることにより、

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k \delta_{ij} = 0$$

となる。これを計量条件という。反変の計量テンソルについても同様に 0 となる。

2　曲率

共変微分の交換は、

$$
\begin{aligned}
[\nabla_l, \nabla_k]A_j &= \nabla_l \nabla_k A_j - \nabla_k \nabla_l A_j \\
&= [\partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_i \Gamma^l_{jk} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}]A_i
\end{aligned}
$$

である。係数は一階反変三階共変のテンソルであり、

$$
R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{lm}
$$

及びこれを縮約した

$$
R_{ijkl} = g_{ih} R^h_{jkl}
$$

をリーマン曲率テンソルと呼ぶ。さらに

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= R^k_{ikj} \\
R &= g^{ij} R_{ij}
\end{aligned}
$$

をそれぞれリッチテンソル、リッチスカラー (スカラー曲率) という。

3　ビアンキの恒等式

共変微分の交換関係より、$\nabla_j A_i = a_j b_i$ と書けるので

$$
\begin{aligned}
[\nabla_k, \nabla_l]\nabla_j A_i &= (\nabla_l \nabla_k - \nabla_k \nabla_l)(a_j b_i) \\
&= \nabla_l \left[(\nabla_k a_j) b_i + a_j (\nabla_k b_i)\right] - \nabla_k \left[(\nabla_l a_j) b_i + a_j (\nabla_l b_i)\right] \\
&= ([\nabla_k, \nabla_l] a_j) b_i + a_j ([\nabla_k, \nabla_l] b_i) \\
&= R^h_{jkl} a_h b_i + R^h_{ikl} a_j b_h \\
&= R^h_{jkl} \nabla_h A_i + R^h_{ikl} \nabla_j A_h
\end{aligned}
$$

また、

$$
\begin{aligned}
\nabla_j [\nabla_k, \nabla_l] A_i &= \nabla_j (R^h_{ikl} A_h) \\
&= \nabla_j R^h_{ikl} A_h + R^h_{ikl} \nabla_j A_h
\end{aligned}
$$

辺々引けば、

$$
[\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_l]] A_i = R^h_{jkl} \nabla_h A_i - \nabla_j R^h_{ikl} A_h
$$

となる。添え字を循環的に入れ替えて足すと、左辺はヤコビの恒等式と呼ばれるものになり、恒等的に 0 である。つまり、

$$
(R^h_{jkl} + R^h_{klj} + R^h_{ljk}) \nabla_h A_i - (R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k}) A_h = 0
$$

任意の A_i についてこれが成り立つので、

$$
\begin{aligned}
R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} &= 0 \\
R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} &= 0
\end{aligned}
$$

である。これをそれぞれビアンキの第一及び第二恒等式という。
ビアンキの第二恒等式を変形する。

$$\nabla_k R^h_{ilj} - \nabla_j R^h_{ilk} + \nabla_l R^h_{ijk} = 0$$

$h = l$ として縮約し、第三項を書き換える。

$$\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R^h_{ik} + \nabla_l g^{ih} R_{hijk} = 0$$

両辺に g^{ij} を掛ける。計量条件より共変微分の中に入れることができて、

$$\begin{aligned}\nabla_k R - \nabla_j R^j_k - \nabla_l g^{ih} R^j_{hjk} &= \nabla_k R - \nabla_j R^j_k - \nabla_l R^i_k \\ &= \nabla_k R - 2\nabla_j R^j_k\end{aligned}$$

第一項を書き換えて、

$$= \nabla_j(\delta^j_k R) - 2\nabla_j R^j_k = 0$$

となる。

$$G^j_k = R^j_k - \frac{1}{2}\delta^j_k R$$

と置く。これをアインシュタインテンソルという。添え字を上げて二階の反変テンソルにすれば、

$$G^{ij} = g^{ik} G^j_k = R^{ij} - \frac{1}{2} R g^{ij}$$

計量条件より、

$$\nabla_j G^{ij} = 0$$

である。