微分幾何学

season07001674

2022 年 3 月 21 日 (初版 2019/09/22)

目次

第 I 部
曲線

空間曲線を分類する。

1　曲線の表示

空間曲線を滑らかな関数によって $p(t) = (x(t), y(t), z(t))$ と表す。$p(t)$ が動かなければ尖った部分ができてしまうので、$p'(t) \neq 0$ と仮定する。ここで弧長パラメータ s を導入する。時刻が 0 から t まで動いたときの曲線の長さは、

$$s(t) = \int_0^t |p'(t')| dt'$$

で与えられる。s は t の単調関数なので逆関数 $t(s)$ が存在し、代入することで $p(s)$ のように書くことができる。

2　Frenet-Serret の公式

曲線上を一定の速さで移動することを考える。進行方向の単位ベクトルを e_1 とすると、$|p'(s)| = 1$ より $e_1 = p'(s)$ である。また

$$p'(s) \cdot p'(s) = 1$$

の両辺を微分すると

$$p'(s) \cdot p''(s) = 0$$

だから加速度ベクトル $p''(s)$ は速度ベクトルと直交する。直感的には速度ベクトルが単位球面上を移動する様子を表している。点 p が加速する方向を主法線方向と呼び、単位ベクトルを e_2 とする。そして $e_3 = e_1 \times e_2$ の方向を従法線方向と呼ぶ。(e_1, e_2, e_3) は正規直交基底になっており、Frenet-Serret 標構と呼ばれる。

(e_1', e_2', e_3') と (e_1, e_2, e_3) の関係式を導く。まず $|p''(s)| = \kappa(s)(> 0)$ とすれば

$$e_1' = p''(s) = \kappa(s) e_2$$

である。$|e_2| = 1$ なので、e_1 と同様に e_2 と e_2' は直交する。つまり、e_2' は e_1, e_3 のなす平面上にある。$e_2' = k(s)e_1 + \tau(s)e_3$ とおく。$e_1 \cdot e_2 = 0$ の両辺を微分して

$$\begin{aligned} e_1' \cdot e_2 + e_1 \cdot e_2' &= 0 \\ \kappa e_2 \cdot e_2 + e_1 \cdot (k e_1 + \tau e_3) &= 0 \\ \kappa + k &= 0 \end{aligned}$$

よって $k = -\kappa$ である。また $e_3 = e_1 \times e_2$ の両辺を微分して

$$\begin{aligned} e_3' &= e_1' \times e_2 + e_1 \times e_2' \\ &= \kappa e_2 \times e_2 + e_1 \times (-\kappa e_1 + \tau e_3) \\ &= \tau e_1 \times e_3 \\ &= -\tau e_2 \end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned} e_1' &= \quad\quad\;\; \kappa e_2 \\ e_2' &= -\kappa e_1 \quad\quad\;\; + \tau e_3 \\ e_3' &= \quad\quad -\tau e_2 \end{aligned}$$

が成立する。これを Frenet-Serret の公式という。κ を曲率、τ を捩率 (第二曲率) と呼ぶ。曲率と捩率はパラメータの始点と曲線の向きに依存する。つまり$\kappa(s), \tau(s)$ に対して $\kappa(\pm s - c), \tau(\pm s - c)$ も同じ曲線を表す。

定理 1 (空間曲線の基本定理)**.** 曲率 $\kappa(s)(> 0)$ と捩率 $\tau(s)$ が与えられたとき $p(s)$ が合同変換を除いて一意に存在する。

証明. 常微分方程式の解の一意性より従う。 □

第 II 部
曲面

1　曲面の表示

曲面を滑らかな関数によって

$$D \ni (u, v) \mapsto p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S$$

と表す。また便宜上 (u, v) を (u_1, u_2)、(x, y, z) を (x_1, x_2, x_3) と表すことがある。この曲面が点や曲線に退化しないでかつ、特異点を持たないよう以下の条件を設ける。以下の 5 つの条件は全て同値である。

1. D 上に任意の曲線 $s(t) = (u(t), v(t))$ を与えると、$s'(t) \neq 0$ ならば、$\frac{d}{dt}p(s(t)) \neq 0$ である。つまり D 上の曲線の像は S 上の曲線となる。
2. S の点 p における接ベクトル全体は平面をなす。これを接平面という。
3. x, y, z の内、任意の二つを x_i, x_j とすると、ヤコビアン
$$\left| \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0$$
である。このとき十分小さい D で、写像
$$(u, v) \mapsto (x_i, x_j)$$
は全単射で、逆写像も滑らかである (陰関数定理)。
4. x, y, z の内、任意の二つを x_i, x_j とすると、
$$dx_i \wedge dx_j \neq 0$$
5. ベクトル $\frac{\partial p}{\partial u}$ と $\frac{\partial p}{\partial v}$ は線形独立。

曲面を表示するに当たって、正規直交枠とガウス枠を導入する。曲面上の点 p を原点とし、その点ににおける法線方向を z 軸とする直交座標系を (x, y, z) とする。それぞれの単位ベクトルを e_1, e_2, e_3 とする。e_3 は p が

曲面上を移動するとき、一定の向きを持つように決める。e_1, e_2 は $e_1 \times e_2 = e_3$ となるようにとる。また、x 軸と y 軸は回転の分の自由度を残しておく。$z = f(x, y)$ とすれば、必然的に $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ が成り立つ。(e_1, e_2, e_3) を正規直交枠と呼ぶ。一方 $B_1 = \frac{\partial p}{\partial u}, B_2 = \frac{\partial p}{\partial v}$ で、n を $B_1 \times B_2$ の方向の単位法線ベクトルとしたとき、(B_1, B_2, n) をガウス枠と呼ぶ。

2　曲面の基本量

2.1　第一基本形式

曲面上における二点間の微小長さは、

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= dp^2 \\
&= \left(\frac{\partial p}{\partial u} du + \frac{\partial p}{\partial v} dv \right)^2 \\
&= p_u^2 du^2 + 2 p_u p_v du dv + p_v^2 dv^2
\end{aligned}
$$

で与えられる。$g_{ij} = \frac{\partial p}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial p}{\partial u_j}$ とおいて

$$
ds^2 = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2
$$

$$
I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}
$$

これを第一基本形式という。また I をリーマン計量 (計量テンソル) と呼ぶ。曲面上の計量をユークリッド計量によって定義する。

2.2　第二基本形式

曲面上の点 $p(u, v)$ とその接平面を考える。点 $p(u + du, v + dv)$ と接平面の距離は

$$
dz = (p(u + du, v + dv) - p(u, v)) \cdot n
$$

二次の項までテイラー展開すると、

$$
= \left(\frac{\partial p}{\partial u} du + \frac{\partial p}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} du dv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} dv^2 \right) \cdot n
$$

$p_u, p_v \perp n$ であることに注意すると、

$$
dz = \left(\frac{1}{2} p_{uu} du^2 + p_{uv} du dv + \frac{1}{2} p_{vv} dv^2 \right) \cdot n
$$

となる。$h_{ij} = \frac{\partial^2 [}{\partial p \partial]} u_i v_i$ とおいて

$$
2dz = h_{11} du^2 + 2 h_{12} du dv + h_{22} dv^2
$$

$$
II = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}
$$

これを第二基本形式という。

第一基本形式は曲面における計量を表すという意味で内在的であり、第二基本形式は曲面の外部の空間への入り方を表しているという意味で外在的である。

3 曲面の曲率

3.1 測地的曲率と法曲率

曲面上の曲線を弧長パラメータによって $p(u,v)=p(u(s),v(s))$ と表す。これに正規直交枠 (e_1,e_2,e_3) を導入する。e_1 を曲線の接線方向、e_3 を曲面の法線方向の単位ベクトルとすると、$p''(s)=e_1'=k_g e_2+k_n e_3$ と表すことができる。このとき k_g,k_n をそれぞれ測地的曲率、法曲率という。$|p''|$ は空間曲線としての曲率 $k(s)$ である。ここで、

$$
\begin{aligned}
p' &= p_u\frac{du}{ds}+p_v\frac{dv}{ds}\\
p'' &= \frac{dp_u}{ds}\frac{du}{ds}+p_u\frac{d^2u}{ds^2}+\frac{dp_v}{ds}\frac{dv}{ds}+p_v\frac{d^2v}{ds^2}\\
&= p_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2p_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+p_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+p_u\frac{d^2u}{ds^2}+p_v\frac{d^2v}{ds^2}
\end{aligned}
$$

なので $p_u\cdot e_3=p_v\cdot e_3=0$ より、

$$
\begin{aligned}
k_n &= p''\cdot e_3\\
&= (p_{uu}\cdot e_3)\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2(p_{uv}\cdot e_3)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+(p_{vv}\cdot e_3)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\\
&= h_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2h_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+h_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\\
&= \frac{h_{11}du^2+2h_{12}dudv+h_{22}dv^2}{g_{11}du^2+2g_{12}dudv+g_{22}dv^2}
\end{aligned}
$$

となる。つまり曲線上の点 p における法曲率は $\lambda=dv/du$ のみに依存する。

3.2 主曲率

曲面上の点において、法線ベクトルを含む平面と曲面が交わってできる曲線を法切断または直截線という。点 p における法切断の測地的曲率は 0 なので、曲率は法曲率に等しい。法切断の曲率が最大値最小値をとるとき、その曲率 k_1,k_2 を主曲率、接ベクトルを主方向 X_1,X_2 と呼ぶ。法曲率が k となる条件は、

$$
k=\frac{h_{11}+2h_{12}\lambda+h_{22}\lambda^2}{g_{11}+2g_{12}\lambda+g_{22}\lambda^2}
$$
$$
(h_{22}-kg_{22})\lambda^2+2(h_{12}-kg_{12})\lambda+(h_{11}-kg_{11})=0
$$

の解が存在することであり、この二次方程式の判別式 D が 0 以上になることである。

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{4} &= (h_{12}-kg_{12})^2-(h_{11}-kg_{11})(h_{22}-kg_{22})\\
&= (g_{12}^2-g_{11}g_{22})k^2+(g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11})k+(h_{12}^2-h_{11}h_{22})\geq 0
\end{aligned}
$$

g は正定値行列なので $g_{12}^2 - g_{11}g_{22} < 0$ である。よって k が極値を取るのは $D = 0$ のときである。

$$
\begin{aligned}
(h_{11} - kg_{11})(h_{22} - kg_{22}) - (h_{12} - kg_{12})(h_{21} - kg_{21}) = 0 \\
\det(II - kI) = 0 \\
\det(I^{-1}II - kE) = 0
\end{aligned}
$$

となる。これは $I^{-1}II$ の固有方程式である。$S = I^{-1}II$ をシェイプ作用素という。つまり二つの主曲率はシェイプ作用素の固有値である。

一般の方向における法切断の曲率を求める。

補題 1. 平面曲線 $y = y(x)$ で $y'(0) = 0$ のとき、原点における曲率は、$y''(0)$ である (平面曲線の場合、曲率に符号を付ける)。

証明. $p = (x, y)$、弧長パラメータを s とすれば曲率は $\frac{dp}{ds}$ である。

$$\frac{dp}{dx} = (1, y'), \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$$

より、

$$
\begin{aligned}
\frac{dp}{ds} &= \frac{(1, y')}{\sqrt{1 + y'^2}} \\
\frac{d}{dx}\frac{dp}{ds} &= \frac{(0, y'')\sqrt{1 + y'^2} - (1, y')y'y''/\sqrt{1 + y'^2}}{1 + y'^2}
\end{aligned}
$$

$y'(0) = 0$ なので

$$\frac{dp}{ds} = \frac{(0, y'')(1 + y'^2) - (1, y')y'y''}{(1 + y'^2)^2} = (0, y'')$$

よって原点における曲率は y'' となる。 □

定理 2. オイラーの定理 *(微分幾何)* 二つの主方向は直交し、更に X_1 に対して角 θ をなす法切断の曲率を k_θ とすれば、

$$k_\theta = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

である。

証明. 曲面上に正規直交枠をとる。補題より、x, y 軸の法切断の曲率は偏微分となり $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ である。x 軸と角 θ をなす方向を $v = (\cos\theta, \sin\theta)$ とすれば、曲率 k_θ は方向微分となり、

$$
\begin{aligned}
k_\theta &= \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial v}(z_x \cos\theta + z_y \sin\theta) \\
&= (z_{xx}\cos\theta + z_{xy}\sin\theta, z_{xy}\cos\theta + z_{yy}\sin\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) \\
&= z_{xx}\cos^2\theta + 2z_{xy}\sin\theta\cos\theta + z_{yy}\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

この二次形式の最大値と最小値は行列 $\begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix}$ の固有値であり、主方向はそれぞれの固有値の固有ベクトルである。対称行列の固有ベクトルは直交するので主方向も直交する。この固有ベクトルで主軸変換を行えば、主方向との成す角を新たに θ とおいて

$$k_\theta = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$$

□

3.3 ガウス曲率と平均曲率

二つの主曲率 k_1, k_2 の積をガウス曲率 K、平均を平均曲率 H という。主曲率の満たす二次方程式の解と係数の関係より、

$$K = k_1 k_2 = \det S = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$
$$2H = k_1 + k_2 = \mathrm{tr} S = \frac{g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

となる。ガウス曲率が正の点を楕円点、負の点を双曲点という。また 0 の点を放物点と呼ぶこともある。

4 曲面の方程式 (ガウス枠)

まずクリストッフェル記号を導入する。

$$[jk, l] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\right)$$
$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ih}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{kh}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^h}\right)$$

ここで $[jk, l] = g_{il}\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\} = g^{ih}[jk, h]$ が成り立っている。$[jk, l], \left\{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \right\}$ をそれぞれ第一種及び第二種のクリストッフェル記号という。

4.1 ガウス=ワインガルテンの公式

曲線におけるフレネ=セレの公式に当たるものを導出する。

ガウス枠 $\{B_1, B_2, n\}$ をとる。ここで

$$n = \frac{B_1 \times B_2}{|B_1 \times B_2|} = \frac{B_1 \times B_2}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}$$

である。三つのベクトルは線形独立なので、

$$\frac{\partial B_j}{\partial u^k} = \Gamma^i_{jk} B_i + h_{jk} n$$

と書ける。$h_{jk} = \frac{\partial B_j}{\partial u^k} \cdot n$ は定義より第二基本量である。また $g_{ij} = B_i \cdot B_j$ を微分した $\frac{\partial B_i}{\partial u^k} \cdot B_j + B_i \cdot \frac{\partial B_j}{\partial u^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$ に代入して、

$$\Gamma^h_{ik} g_{hj} + \Gamma^h_{jk} g_{ih} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

を得る。$\Gamma_{jk|i} = \Gamma^h_{jk} g_{ih}$ と置けば、

$$\Gamma_{ik|j} + \Gamma_{jk|i} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$$

となる。$\frac{\partial B_j}{\partial u^k} = \frac{\partial^2 p}{\partial u^j \partial u^k}$ より j, k に関して対称である。そこで上の式の添え字を循環的に入れ替えて、$\Gamma_{jk|i}$ に関する連立方程式とみれば、

$$\Gamma_{jk|i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right) = [jk, i]$$
$$\Gamma^i_{jk} = g^{ih}\Gamma_{jk|h} = \left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\}$$

となることが分かる。次に $n \cdot n = 1$ を微分すると $\frac{\partial n}{\partial u^j} \cdot n = 0$ だから

$$\frac{\partial n}{\partial u^k} = r^h_k B_h$$

となる r^h_j が決まる。$B_i \cdot n = 0$ を微分した $\frac{\partial B_i}{\partial u^k} \cdot n + B_i \cdot \frac{\partial n}{\partial u^k} = 0$ に先程の式と代入して、

$$h_{ij} + r^h_j g_{ih} = 0$$

これは行列の積を成分ごとに表したものなので、両辺に右から g の逆行列をかけて、

$$r^i_k = -h_{kl} g^{li}$$

二つを合わせて

$$\frac{\partial B_j}{\partial u^k} = \left\{\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right\} B_i + h_{jk} n \qquad \text{(ガウスの公式)}$$
$$\frac{\partial n}{\partial u^k} = -h_{kl} g^{li} B_i \qquad \text{(ワインガルテンの公式)}$$

4.2 ガウス=コダッチの方程式

ガウス=ワインガルテンの公式の係数は第一及び第二基本量から求められる。この方程式を解くことで求められたガウス枠 $\{B_1, B_2, n\}$ が実際の曲面と矛盾しないためには以下の条件が必要となる。

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial}{\partial p} u^i u^j$$
$$\frac{\partial^2 B_i}{\partial u^k \partial u^j} = \frac{\partial}{\partial B_i} u^j u^k$$
$$\frac{\partial^2 n}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial^2 n}{\partial u^i \partial u^j}$$

である。第一式に関しては既に成り立っている。なぜなら

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial B_i}{\partial u^j} = \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} B_h + h_{ij} n$$

は i,j に関して対称だからである。次に第二式の条件を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B_i}{\partial u^k \partial u^j} &= \frac{\partial}{\partial u^k}\left(\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} B_h + h_{ij} n\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} B_h + \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} \frac{\partial B_h}{\partial u^k} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} n + h_{ij} \frac{\partial n}{\partial u^k} \\ &= \sum_h \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} B_h + \sum_{h,l} \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} l \\ hk \end{matrix}\right\} B_l + \sum_h \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} h_{hk} n \\ &\quad + \frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} n + h_{ij} \sum_{l,h} (-h_{kl} g^{lh} B_h)\end{aligned}$$

第二項で添え字 h,l を入れ替えると

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} h \\ kl \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} l \\ ij \end{matrix}\right\} - h_{ij} h_{kl} g^{lh}\right] B_h \\ &\quad + \left[\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} + \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} h_{hk}\right] n\end{aligned}$$

となる。これが j,k に関して対称となる。B_h, n は線形独立なので、

$$R^h_{ijk} = h_{ik} h_{jl} g^{lh} - h_{ij} h_{kl} g^{lh} \qquad \text{(ガウスの方程式)}$$

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} + \left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} h_{hk} - \left\{\begin{matrix} h \\ ik \end{matrix}\right\} h_{hj} = 0 \qquad \text{(コダッチの方程式)}$$

となる。ただし

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^j}\left\{\begin{matrix} h \\ ik \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} l \\ ik \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h \\ jl \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} l \\ ij \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h \\ kl \end{matrix}\right\}$$

である。また両辺に g^{hl} をかけて縮約を取ったものを、

$$R_{lijk} = g^{hl} R^h_{ijk} = \frac{\partial}{\partial u^j}\left\{\begin{matrix} h \\ ik \end{matrix}\right\} g^{hl} - \frac{\partial}{\partial u^k}\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\} g^{hl} + \left\{\begin{matrix} a \\ ik \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h \\ ja \end{matrix}\right\} g^{hl} - \left\{\begin{matrix} a \\ ij \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} h \\ ka \end{matrix}\right\} g^{hl}$$

これらをリーマン曲率テンソルと呼ぶ。リーマン曲率テンソルを用いてガウスの方程式を表すと、

$$\begin{aligned}g^{ha} R^h_{ijk} &= h_{ik} h_{ja} g^{ah} g^{hl} - h_{ij} h_{ka} g^{ah} g^{hl} \\ R_{lijk} &= h_{ik} h_{ja} \delta^a_l - h_{ij} h_{ka} \delta^a_l \\ &= h_{ik} h_{jl} - h_{ij} h_{kl}\end{aligned}$$

また第三式については、コダッチの方程式と同じものが導かれるため、条件はこれで十分である。よって次の定理が成り立つ。

定理 3. 曲面論の基本定理対称テンソル g_{ij}, h_{ij} が与えられ、g_{ij} は正定値であるとする。これらがガウス=コダッチの方程式を満たすとき、これらを第一及び第二基本量とする曲面 $p(u,v)$ が剛体運動を除いて一意的に存在する。

4.3　驚異の定理

上の式は右辺が第二基本量のみに依存している。元々リーマン曲率テンソル及びその定義に含まれるクリストッフェル記号は第一基本量のみから求めることができた。つまり第一基本テンソルと第二基本テンソルは独立ではない。特に

$$R_{1212} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$

である。これを用いると、

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

となる。曲面のガウス曲率を第一基本テンソルだけから求めることができる。これを驚異の定理 (Theorem Egregium) という。元々外在的な量から定義されたガウス曲率が、内在的な量のみから決定できることが示された。外界の情報を用いることなく空間の曲がり方を考察することができることを示唆している。

■等長写像　二つの曲面が距離を保ったまま変形できるとき、等長的であると言い、そのような写像を等長写像という。等長的な二つの曲面は、伸縮せずに折り曲げることで変形できる。折り紙は平面と等長的な曲面 (可展面) を作る遊びである (ウェットフォールディングをする場合はこの限りではない)。等長変換によって第一基本形式およびガウス曲率は不変である。対偶を取ると、ガウス曲率の一致しない曲面は等長的でない。平面のガウス曲率は任意の点で 0 であり、半径 r の球面では $\frac{1}{r^2}$ なので、球面を歪ませることなく平面に展開することはできない。つまり地球の正確な平面図を作成することは不可能である。

■共形写像　始点が同じ任意の二つのベクトルの成す角を保存する写像を共形写像 (等角写像) という。

■等温座標　パラメータ (u,v) から平面への共形写像が存在するとき、(u,v) を等温座標という。これは第一基本形式が $ds^2 = E(du^2 + dv^2)$ となることと同値である。複素数 $z = u + iv$ を使えば、$ds^2 = E|dz|^2$ とも書ける。曲面上の任意の点で局所的には等温座標が存在することが証明できる。ここで、

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$
$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

とするとガウス曲率は、

$$K = -\frac{2\partial\overline{\partial}\log E}{E} = -\frac{\Delta \log E}{2E}$$

となる。

5　曲面の方程式 (正規直交枠)

5.1　構造方程式

正規直交枠 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を取る。ただし e_3 を法線ベクトルとして、$e_1 \times e_2 = e_3$ となるように取る。$\{e_1, e_2\}$ は接平面の基底なので

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial u} &= a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 \\
\frac{\partial p}{\partial v} &= a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2
\end{aligned}
$$

と書ける。係数行列の行列式は非零である。

$$
\theta^1 = a_1^1 du + a_2^1 dv, \theta^2 = a_1^2 du + a_2^2 dv
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
dp &= \frac{\partial p}{\partial u} du + \frac{\partial p}{\partial v} dv \\
&= (a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2) du + (a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2) dv \\
&= (a_1^1 du + a_2^1 dv) e_1 + (a_1^2 du + a_2^2 dv) e_2 \\
&= \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2
\end{aligned}
$$

となる。第一基本形式は

$$
I = dp \cdot dp = \theta^1 \theta^1 + \theta^2 \theta^2
$$

と表すことができる。

正規直交枠 $\{e_1, e_2, e_3\}$ と第一基本形式 $I = \theta^1 \theta^1 + \theta^2 \theta^2$ が与えらえているとする。ここで

$$
\begin{aligned}
de_1 &= \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\
de_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\
de_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3
\end{aligned}
$$

と表すことができる。ω_j^i は 1 次微分形式である。$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ を微分して

$$
de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = 0
$$

なので $\omega_j^i + \omega_i^j = 0$ であり、特に $\omega_i^i = 0$ である。これを用いると第二基本形式は

$$
\begin{aligned}
II &= -dp \cdot de_3 \\
&= -(\theta^1 e_1 + \theta^2 e_2) \cdot (\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2) \\
&= -\theta^1 \omega_3^1 - \theta^2 \omega_3^2 \\
&= \theta^1 \omega_1^3 + \theta^2 \omega_2^3
\end{aligned}
$$

ω_j^i は θ^1, θ^2 の線形結合だから、

$$\begin{aligned}\omega_1^3 &= b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2 \\ \omega_2^3 &= b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2\end{aligned}$$

となるので結局

$$II = b_{11}\theta^1\theta^1 + b_{12}\theta^1\theta^2 + b_{21}\theta^2\theta^1 + b_{22}\theta^2\theta^2$$

対称行列 B の固有値は主曲率となる。つまりガウス曲率と平均曲率は

$$\begin{aligned}K &= \det B = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \\ 2H &= \mathrm{tr}B = b_{11} + b_{22}\end{aligned}$$

$$dp = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$$

の両辺の外微分を取ると

$$\begin{aligned}ddp &= d\theta^1 e_1 - \theta^1 \wedge de_1 + d\theta^2 e_2 - \theta^2 \wedge de_2 \\ 0 &= d\theta^1 e_1 - \theta^1 \wedge \sum_i \omega_1^i e_i + d\theta^2 e_2 - \theta^2 \wedge \sum_i \omega_2^i e_i \\ &= (d\theta^1 - \theta^2 \wedge \omega_2^1)e_1 + (d\theta^2 - \theta^1 \wedge \omega_1^2)e_2 - (\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3)e_3\end{aligned}$$

成分ごとに比較すれば

$$\begin{aligned}d\theta^1 &= \theta^2 \wedge \omega_2^1 \\ d\theta^2 &= \theta^1 \wedge \omega_1^2 \\ 0 &= \theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3\end{aligned}$$

これを第一構造式という。

$$de_i = \sum_j \omega_i^j e_j$$

の両辺の外微分を取ると

$$\begin{aligned}dde_i &= \sum_j d\omega_i^j e_j - \omega_i^j \wedge de_j \\ 0 &= \sum_j d\omega_i^j e_j - \omega_i^j \wedge \sum_k \omega_j^k e_k \\ &= (d\omega_i^1 - \sum_j \omega_i^j \wedge \omega_j^1)e_1 + (d\omega_i^2 - \sum_j \omega_i^j \wedge \omega_j^2)e_2 + (d\omega_i^3 - \sum_j \omega_i^j \wedge \omega_j^3)e_3\end{aligned}$$

成分ごとに比較すると

$$d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j$$

である。これを構造方程式という。$d\omega_2^1$ は

$$
\begin{aligned}
d\omega_2^1 &= \sum_k \omega_2^k \wedge \omega_k^1 \\
&= \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 \\
&= (b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \wedge -(b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) \\
&= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \\
&= K\theta^1 \wedge \theta^2
\end{aligned}
$$

K は基底に依らないことが分かるので、第一基本形式のみに依存する。

5.2 ガウス=ボネの定理

平面の領域 D 上の正規直交基底を $\{e_1, e_2\}$、双対基底を $\{\theta^1, \theta^2\}$ とする。第一基本形式 $I = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2$ が与えられている。構造方程式

$$
d\theta 1 = -\omega_2^1 \wedge \theta^2, d\theta^2 = -\omega_1^2 \wedge \theta^1 \ d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2
$$

$A \subset D$ を考える。∂A は滑らかな曲線 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を繋いだものであり、α_i から α_{i+1} に移るときの内角と外角を $\tau_i, \epsilon_i(\tau_i + \epsilon_i = \pi)$ とする。∂A を弧長パラメータを用いて $\alpha(s)$ と表すことにする。

$$
\frac{\alpha'(s)}{|\alpha'(s)|} = \cos\phi(s)e_1 + \sin\phi(s)e_2
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
\alpha''(s) &= \frac{d}{ds}(\cos\phi(s)e_1 + \sin\phi(s)e_2) \\
&= -\sin\phi(s)\phi'(s)e_1 + \cos\phi(s)\frac{de_1}{ds} + \cos\phi(s)\phi'(s)e_2 + \sin\phi(s)\frac{de_2}{ds} \\
&= -\sin\phi(s)\phi'(s)e_1 + \cos\phi(s)\frac{\omega_1^2}{ds}e_2 + \cos\phi(s)\phi'(s)e_2 + \sin\phi(s)\frac{\omega_2^1}{ds}e_1 \\
&= \sin\phi(s)\left(-\frac{d\phi}{ds} + \frac{\omega_2^1}{ds}\right)e_1 + \cos\phi(s)\left(\frac{d\phi}{ds} + \frac{\omega_1^2}{ds}\right)e_2
\end{aligned}
$$

測地的曲率 k_g は

$$
\begin{aligned}
k_g = |\alpha''(s)| &= \sqrt{\sin^2\phi(s)\left(\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - 2\frac{d\phi}{ds}\frac{\omega_2^1}{ds} + \left(\frac{\omega_2^1}{ds}\right)^2\right) + \cos^2\phi(s)\left(\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + 2\frac{d\phi}{ds}\frac{\omega_1^2}{ds} + \left(\frac{\omega_1^2}{ds}\right)^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - 2\frac{d\phi}{ds}\frac{\omega_2^1}{ds} + \left(\frac{\omega_2^1}{ds}\right)^2} \\
&= \frac{d\phi}{ds} - \frac{\omega_2^1}{ds}
\end{aligned}
$$

$$
k_g ds = d\phi - \omega_2^1
$$

曲線に沿って一周積分すると

$$\int_{\partial A} \omega_2^1 + \int_{\partial A} k_g ds = \int_{\partial A} d\phi = 2\pi - \sum_i \epsilon$$

ストークスの定理より

$$\int_{\partial A} \omega_2^1 = \int_A d\omega_2^1 = \int_A K\theta^1 \wedge \theta^2$$

だから

$$\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial A} k_g ds = 2\pi - \sum_i \epsilon$$

となる。A が 3 つの滑らかな曲線からなる場合は

$$\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 + \int_{\partial A} k_g ds = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \pi$$

特に測地三角形の場合は

$$\int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \pi$$

つまりガウス曲率 K の符号によって三角形の内角の和と π の大小が決まる。

向き付け可能な閉曲面 S について考える。ここで三角形分割を、三角形を敷き詰めたものであって、

1. 点 p がある三角形の面上にあり辺上にないとき、p を含む三角形は 1 つ。
2. 点 p がある三角形の辺上にあり頂点でないとき、p を含む三角形は 2 つ。
3. 点 p がある三角形の頂点であるとき、p を含む三角形は有限個。

を満たすものとする。曲面を必ずこのように三角形分割することができる。閉曲面を三角形分割したとき、頂点の数を v、辺の数を e、面の数を f とすると、

$$\sum_i \int_{T_i} K\theta^1 \wedge \theta^2 + \sum_i \int_{\partial T_i} k_g ds = \sum_i \tau_{i1} + \tau_{i2} + \tau_{i3} - \pi$$

$$\int_S K\theta^1 \wedge \theta^2 = (2v - f)\pi$$

ここで $2e = 3f$ だから、$2v - f = 2v - 3f + 2f = 2(v - e + f)$ より

$$\int_S K\theta^1 \wedge \theta^2 = 2\pi(v - e + f)$$

となる。これをガウス=ボネの定理という。閉曲面 S が与えられたとき、左辺はリーマン計量のみに依存し、右辺は三角形分割のみに依存する。よって両辺ともにリーマン計量にも三角形分割にも依存しない。特に右辺に関して、$\chi(S) = v - e + f$ と書くことができる。これを曲面のオイラー標数という。

6 測地線

曲面上の二点を結ぶ曲線のうち、最も短いものを最短線という。曲線が最短線となる必要条件を考える。助変数を $(u_1(t), u_2(t))(a \leq t \leq b)$ とし、対応する端点を A, B とする。すると AB の長さは汎関数

$$s[r(t)] = \int_a^b F(u(t), \dot{u}(t))dt$$

で与えられる。ただし $F(u(t), \dot{u}(t)) = \sqrt{g_{ij}(u)\dot{u}^i\dot{u}^j}$ である。また $ds = Fdt$ である。汎関数 $s[r(t)]$ が極値をとる条件は F が Euler-Lagrange 方程式を満たすことである。そのような曲線を測地線と呼ぶ。最短線は測地線だが測地線は最短線ではない。まず Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^i} - \frac{\partial F}{\partial u^i} = 0$$

で表される。第一項は、

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^l} = \frac{1}{2F}g_{jk}\left\{\frac{\partial \dot{u}^j}{\partial \dot{u}^l}\dot{u}^k + \dot{u}^j\frac{\partial \dot{u}^k}{\partial \dot{u}^l}\right\}$$

$\frac{\partial \dot{u}^j}{\partial \dot{u}^l}$ は $j = l$ のときに限り 1 なので、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2F}\left(\sum_k g_{lk}\dot{u}^k + \sum_j g_{jl}\dot{u}^j\right) \\ &= \frac{1}{F}g_{il}\dot{u}^i = g_{il}\frac{du^i}{ds} \end{aligned}$$

従って

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^l}\right) = \left(\sum_i g_{il}\frac{d^2u^i}{ds^2} + \sum_{j,k}\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\frac{ds}{dt}$$

$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^k} = [jk, l] + [lk, j]$ より、

$$= \left[g_{il}\frac{du^i}{ds} + ([jk, l] + [lk, j])\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right]\frac{ds}{dt}$$

そして第二項は、

$$\frac{\partial F}{\partial u^l} = \frac{1}{2F}\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l}\dot{u}^j\dot{u}^k$$

$[jk, l] = [kj, l]$, $\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} = [jl, k] + [kl, j]$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2F}([jl, k] + [kl, j])\dot{u}^j\dot{u}^k \\ &= \frac{1}{F}[kl, j]\dot{u}^j\dot{u}^k \\ &= [kl, j]\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{u}^l}-\frac{\partial F}{\partial u^l}&=\left(g_{il}\frac{d^2u^i}{ds^2}+[jk,l]\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\\&=g_{il}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}\right)\frac{ds}{dt}\\&=0\end{aligned}$$

$\det g_{il}\neq 0, ds/dt=F\neq 0$ であるので、

$$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0\quad(i=1,2,...,n)$$

これを測地線の方程式という。またこれを

$$\begin{aligned}\frac{du^i}{ds}&=v^i\\\frac{dv^i}{ds}&=-\left\{\begin{matrix}i\\jk\end{matrix}\right\}v^jv^k\end{aligned}$$

と書き換えると、1 階の連立常微分方程式となるので、次の定理が導かれる。

定理 4. 測地線リーマン多様体 M の任意の点で任意の方向にただ *1* 本の測地線が引ける。

6.1 Weierstrass の表現

二次元リーマン多様体、つまり曲面の場合を考える。このとき $k>0$ として $F(u,v,k\dot{u},k\dot{v})=kF(u,v,\dot{u},\dot{v})$ となって F は $\dot{u},\dot{v}$ について正斉次である。この式を k で微分し、$k=1$ とすると、

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\dot{u}+\frac{\partial F}{\partial \dot{v}}\dot{v}=F$$

となる。両辺を $\dot{u^i}$ で微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}\dot{u}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{v}\partial \dot{u}}\dot{v}=0\\\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial \dot{v}}\dot{u}+\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{v}^2}\dot{v}=0\end{aligned}$$

が導かれ、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}:\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial \dot{v}}:\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{v}^2}=\dot{v}^2:-\dot{u}\dot{v}:\dot{u}^2$$

となる。比例因子を c として

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}^2}&=c\dot{v}^2\\\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{u}\partial \dot{v}}&=-c\dot{u}\dot{v}\\\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{v}^2}&=c\dot{u}^2\end{aligned}$$

また

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = \frac{g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v}}{F}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \dot{v}} = \frac{g_{21}\dot{u} + g_{22}\dot{v}}{F}$$

なので

$$\begin{aligned} c &= \frac{F_{\dot{u}\dot{u}}}{\dot{v}^2} \\ &= \frac{1}{\dot{v}^2}\frac{g_{11}F - (g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v})F_{\dot{u}}}{F^2} \\ &= \frac{1}{\dot{v}^2}\frac{g_{11}F^2 - (g_{11}\dot{u} + g_{12}\dot{v})^2}{F^3} \\ &= \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{F^3} \end{aligned}$$

これを Euler-Lagrange 方程式に代入すると

$$F_u - \frac{d}{dt}F\dot{u} = \dot{v}TF_v - \frac{d}{dt}F\dot{v} = -\dot{u}T$$

ただし

$$T = F_{u\dot{v}} - F_{\dot{u}v} + c(\dot{u}\ddot{v} - \dot{v}\ddot{u})$$

従って曲面の場合、測地線の方程式は $T = 0$ と同値である。これを Weierstrass の表現という。

7　極小曲面

第 III 部
接続

1　接続

定義 1. 接続主ファイバー束 $P(M, G)$ の点 u における接空間を $T_u(P)$、u を通るファイバー G_u に接する接ベクトルの作る部分空間を $\mathfrak{g}$ とする。T_u の部分空間 H_u が

1. $T_u = \mathfrak{g} + H_u$
2. $u \in P, a \in G, R_a : u \mapsto ua$ に対して $H_{ua} = R_a(H_u)$
3. $u \mapsto S_u$ は微分可能

を満たすとき対応 $\Gamma : u \mapsto H_u$ を P の接続という。

k 次微分形式 $\alpha : P \to V$ に対して共変外微分を

$$D\alpha(X_1, \ldots, X_{k+1}) = (d\alpha)(hX_1, \ldots, hX_{k+1})$$

と定義する。共変外微分について

$$D(fv) = v \otimes df + fDv$$
$$D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta$$

が成り立つ。

2　接続形式

$$L_a : x \mapsto ax$$

を左移動という。G 上のベクトル場 X が任意の $a, x \in G$ に対して $L_a X_x = X_{ax}$ を満たすとき、左不変と呼ぶ。G 上の左不変なベクトル場全体 $\mathfrak{g}$ をリー環と呼ぶ。任意の $A \in T_e(G)$ に対して

$$X_x = dL_x(A)$$

と定義すると、$X \in \mathfrak{g}$ となる。

A の局所 1 パラメータ変換群 $\{\phi_t\}$ に対して $a_t = \phi_t(e) = \exp tX$ とおく。$R_{a_t} : u \mapsto ua_t$ が引き起こすベクトル場を基本ベクトル場 $A*$ という。$a \in G$ に対して

$$ad(a) : x \in \mathfrak{g} \mapsto axa^{-1} \in \mathfrak{g}$$

を随伴表現という。

定義 2. 接続形式 *1* 次微分形式 $\omega : T_u(P) \to \mathfrak{g}$ であって、

1. $\omega(A*) = A$
2. $\omega(dR_a(X)) = ad(a^{-1})(\omega(X))$

を満たすものを接続形式 *(connection form)* と呼ぶ。

定義 3. 曲率形式接続形式 ω に対して、その共変外微分

$$\Omega = D\omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

で定義される *2* 次微分形式 $\Omega : T_u(P) \times T_u(P) \to \mathfrak{g}$ を曲率形式 *(curvature form)* と呼ぶ。

第 IV 部
アフィン接続

1　アフィン接続

定義 4. 接 n 枠束 *(frame bundle)* n 次元多様体 M の点 p における接 n 枠とは、接空間 $T_p(M)$ の基底のことである。M の全ての点における接 n 枠の全体を $L(M)$ と書く。点 p における接 n 枠を $u = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ としたとき、射影を

$$\pi : u \in L(M) \mapsto p \in M$$

によって定義する。$a \in GL(n, \mathbb{R})$ に対して

$$ua = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$
$$Y_i = \sum_j a_i^j X_j$$

とすると $L(M)$ は主ファイバー束となる。また u を線形同型写像 $u : (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n \in T_p(M)$ と考えることもできる。

$p \in M$ のファイバーは $T_p(M)$ の基底全体の集合となる。

n 次元多様体 M、構造群 $GL(n, \mathbb{R})$、主ファイバー束として接 n 枠束 $L(M)$ を考える。主ファイバー束 $P = L(M)$ の接続をアフィン接続という。

2 共変微分

ユークリッド空間の点 p において、$X(p)$ に沿ったベクトル場 Y の方向微分とは

$$D_XY(p) = \lim_{t \to 0} \frac{Y(p + X(p)t) - Y(p)}{t}$$

である。$X(c(t)) = \dot{c}(t)$ なる M 上の曲線 $c(t)(a \leq t \leq b)$ が存在し、この曲線上において方向微分が常に 0 となるとき、ベクトル場 Y は曲線に沿って平行であるという。座標に依存しない形式で方向微分を拡張し、平行を定義する。一般に二点における接ベクトルが平行かどうかは経路に依存する。

定義 5. 共変微分写像 $\nabla : (X, Y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \mapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}$ が以下の条件を満たすとき共変微分という。

1. $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
2. $\nabla_{X_1 + X_2}(Y) = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
4. $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

ただし $f \in \mathfrak{X}(M)$ である。

定理 5. 多様体 M と上の条件を満たす写像 ∇ が与えられているとき、これを共変微分とするアフィン接続が存在する。

つまり共変微分を与えることでアフィン接続を考えることができる。

座標系 $\{x^i\}$ を定めたとき $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y$ を単に $\nabla_i Y$ と書く。

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

となる Γ_{ij}^k を座標系 $\{x^i\}$ に関する接続係数またはクリストッフェル記号という。$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y =$

$\sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ のとき

$$
\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_i X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,j} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\
&= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \sum_k \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}
\end{aligned}
$$

可微分写像 $f : M_1 \to M_2$ に対して、可微分写像

$$X : p \in M_1 \mapsto X_p \in T(M_2)$$

であって、

$$\pi(X_p) = f(p)$$

を満たすようなものを f に沿うベクトル場という。f に沿うベクトル場全体を $\mathfrak{X}_f$ で表す。

M がアフィン接続を持ち、共変微分 ∇ が与えられているとする。写像

$$(X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}_f \mapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}$$

で

1. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
2. $\nabla_{\phi X} Y = \phi \nabla_X Y$
3. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
4. $\nabla_X \phi Y = (X\phi) Y + \phi \nabla_X Y$

を満たすものがただ一つ存在する。これを f に沿う共変微分という。

3 曲率と捩率

定義 6. 標準形式 *1* 次微分形式 $\theta : T_u(P) \to \mathbb{R}^n$ であって、$u \in P, X \in T_u(P)$ に対して

$$\theta(X) = u^{-1}(d\pi(X))$$

となるものを標準形式 *(solder form)* と呼ぶ。

定義 7. 捩率形式標準形式の共変外微分

$$\Theta = D\theta = d\theta + \omega \wedge \theta$$

で定義される *2* 次微分形式 $\Theta : T_u(P) \times T_u(P) \to \mathbb{R}^n$ を捩率形式 *(torsion form)* と呼ぶ。

アフィン接続の不変量として曲率と捩率がある。

定義 8. 曲率テンソル $u \in P$、ベクトル場 X, Y, Z に対して $(1,3)$ 型テンソル場

$$R(X,Y)Z = u(2\Omega(\pi^{-1}(X), \pi^{-1}(Y))(u^{-1}(Z)))$$

を曲率テンソル場という。曲率テンソルまたは単に曲率ともいう。

となる。実際

$$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_[fX, Y]Z \\ &= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y(f\nabla_X Z) - \nabla_[fXY - Y(fX)]Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - Yf\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_[fXY - YfX - fYX]Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - Yf\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_[XY - YX]Z + Yf\nabla_X Z \\ &= fR(X,Y)Z \end{aligned}$$

同様に

$$R(X, fY)Z = fR(X,Y)Z$$

また

$$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ) &= \nabla_X\nabla_Y(fZ) - \nabla_Y\nabla_X(fZ) - \nabla_[X, Y](fZ) \\ &= \nabla_X(YfZ + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y(XfZ + f\nabla_X Z) - ([X,Y]fZ + f\nabla_[X, Y]Z) \\ &= (XYfZ + Yf\nabla_X Z + Xf\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z) - (YXfZ + Xf\nabla_Y Z + Yf\nabla_X Z + f\nabla_Y\nabla_X Z) - ([X,Y]fZ \\ &= fR(X,Y)Z \end{aligned}$$

だから、$R(X,Y)Z$ は多重線形写像つまりテンソルである。

定義 9. 捩率テンソル $u \in P$、ベクトル場 X, Y に対して $(1,2)$ 型テンソル場

$$T(X,Y)_u = u(2\Theta_u(\pi^{-1}(X), \pi^{-1}(Y)))$$

を捩率テンソル場という。捩率テンソルまたは単に捩率ともいう。

共変微分を用いて表すと

$$\begin{aligned} 2\Theta(X*, Y*) &= 2d\theta(X*, Y*) = X * \theta(Y*) - Y * \theta(X*) - \theta([X*, Y*]) \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - \theta([X,Y]*) \\ T(X,Y)_u &= u(2\Theta_u(\pi^{-1}(X), \pi^{-1}(Y))) \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

となる。実際

$$\begin{aligned} T(fX,Y) &= (\nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX)) - (fXY - YfX) \\ &= (f\nabla_X Y - ((Yf)X + f\nabla_Y X)) - (fXY - ((Yf)X + fYX)) \\ &= f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - f(XY - YX) \\ &= fT(X,Y) \end{aligned}$$

同様に

$$T(X, fY) = fT(X, Y)$$

だから、$T(X,Y)$ は双線形写像つまりテンソルである。

R, T の成分を接続係数を用いて表す。

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_l R^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\sum_l \Gamma^l_{jk}\frac{\partial}{\partial x^l} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\sum_l \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l} - \nabla_0 Z \\
&= \sum_l \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^l_{jk}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) - \sum_l \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
&= \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^l_{jk}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^l} - \sum_l \frac{\partial \Gamma^l ik}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^l_{ik}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^l_{jk}\sum_m \Gamma^m_{il}\frac{\partial}{\partial x^m} - \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma^l_{ik}\sum_m \Gamma^m_{jl}\frac{\partial}{\partial x^m} \\
&= \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_l\sum_m \Gamma^l_{jk}\Gamma^m_{il}\frac{\partial}{\partial x^m} - \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l} - \sum_l\sum_m \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{jl}\frac{\partial}{\partial x^m}
\end{aligned}$$

第二項と第四項で添え字 l, m を入れ替える。

$$\begin{aligned}
&= \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^l} + \sum_l\sum_m \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}\frac{\partial}{\partial x^l} - \sum_l \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^l} - \sum_l\sum_m \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\frac{\partial}{\partial x^l} \\
&= \sum_l \left(\frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \sum_m \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}\right)\frac{\partial}{\partial x^l} \\
R^l_{kij} &= \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \sum_m \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}
\end{aligned}$$

となる。$R^l_{kij} = -R^l_{kji}$ が成り立つ。また

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_k T^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} - 0 \\
&= \sum_k \left(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \\
T^k_{ij} &= \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}
\end{aligned}$$

となる。$T^k_{ij} = -T^k_{ji}$ が成り立つ。

4　ビアンキの恒等式

$K(X,Y,Z)$ の巡回和を

$$\mathfrak{S}K(X,Y,Z) = K(X,Y,Z) + K(Y,Z,X) + K(Z,X,Y)$$

とすると以下の定理が成り立つ。

定理 6. ビアンキの恒等式任意のベクトル場 X, Y, Z に対して

$$\mathfrak{S}R(X,Y)Z = \mathfrak{S}T(T(X,Y),Z) + \mathfrak{S}(\nabla_X T)(Y,Z)$$
$$\mathfrak{S}(\nabla_Z R)(X,Y) + R(T(X,Y),Z) = 0$$

が成り立つ。

第 V 部
リーマン幾何学

リーマン多様体または擬リーマン多様体に関する微分幾何学をリーマン幾何学という。

1　リーマン計量

定義 10. リーマン計量 n 次元可微分多様体 M に関して、$(0,2)$ 型テンソル

$$g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{F}$$

が

対称性　$g(X,Y) = g(Y,X)$
正値性　$g(X,X) \geq 0, g(X,X) = 0 \leftrightarrow X = 0$

を満たすとき M のリーマン計量という。

余接束の双対基底 $\{dx^1, dx^2, \ldots, dx^n\}$ を用いて

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

と書くこともできる。つまり

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$$

である。また内積を持つベクトル空間 V に対して

$$X \wedge Y : Z \in V \mapsto g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \in V$$

と定義する。

定義 11. リーマン多様体 (M, g) をリーマン多様体と呼ぶ。

定義 12. 等長写像リーマン多様体 $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ の間の写像 $f : M_1 \to M_2$ であって

$$g_1(X, Y) = g_2(df(X), df(Y))$$

を満たすものを等長写像という。全単射な等長写像を等長変換という。

2 レヴィ=チヴィタ接続

定義 13. レヴィ=チヴィタ接続 *(*リーマン接続*)*, リーマン幾何学の基本定理リーマン多様体 (M, g) について、捩れのない計量接続 *(*計量テンソルを保存する接続*)* がただ一つ存在する。これをレヴィ=チヴィタ接続またはリーマン接続という。

1. $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$
2. $\nabla_X g(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$

レヴィ=チヴィタ接続の条件より、接続係数をリーマン計量で表すことができる。第一式の成分表示より

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

第二式で $X = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ として

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - g\left(\sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \sum_l \Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\
&= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk} - \sum_l \Gamma^l_{ik} g_{jl} = 0
\end{aligned}$$

添え字を巡回的に入れ替えることで同様に

$$\begin{aligned}
\sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \sum_l \Gamma^l_{ik} g_{jl} &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \\
\sum_l \Gamma^l_{jk} g_{li} + \sum_l \Gamma^l_{ji} g_{kl} &= \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \\
\sum_l \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \sum_l \Gamma^l_{kj} g_{il} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}
\end{aligned}$$

第一式 + 第二式 − 第三式 を計算する。$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, g_{ij} = g_{ji}$ であることに注意すると

$$2\sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

g_{ij} の逆行列の成分を g^{ij} とおく。両辺に g^{mk} を掛けて k について和を取ると

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2}\sum_k g^{mk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

となる。

3　曲率

3.1　リーマン曲率

アフィン接続における曲率テンソル R^l_{kij} 及び、計量テンソルを掛けて和を取った

$$R_{ijkl} = g_{ih} R^h_{jkl}$$

をリーマン曲率テンソルという。

リッチテンソル $Ric(X, Y)$ を線形変換 $V \mapsto R(V, X)Y$ のトレースとして定義する。

$$Ric = \sum_{i,j} R_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

とおくと

$$R_{ij} = \sum_k R^k_{ikj}$$

また Ric のトレースをリッチスカラー (スカラー曲率)R と呼ぶ。

3.2　ビアンキの恒等式

アフィン接続におけるビアンキの恒等式で $T = 0$ とすると

$$\mathfrak{S} R(X, Y)Z = 0$$
$$\mathfrak{S} (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$$

これをさらに局所座標の成分で書くと

$$R^l_{ijk} + R^l_{jki} + R^l_{kij} = 0$$
$$\nabla_m R^i jkl + \nabla_k R^i_{jlm} + \nabla_l R^i_{jmk} = 0$$

となる。

ビアンキの第二恒等式を変形する。

$$\nabla_k R^h_{ilj} - \nabla_j R^h_{ilk} + \nabla_l R^h_{ijk} = 0$$

$h = l$ として縮約し、第三項を書き換える。

$$\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R^h_{ik} + \nabla_l g^{ih} R_{hijk} = 0$$

両辺に g^{ij} を掛ける。計量条件より共変微分の中に入れることができて、

$$\begin{aligned} \nabla_k R - \nabla_j R^j_k - \nabla_l g^{ih} R^j_{hjk} &= \nabla_k R - \nabla_j R^j_k - \nabla_l R^i_k \\ &= \nabla_k R - 2\nabla_j R^j_k \end{aligned}$$

第一項を書き換えて、

$$= \nabla_j(\delta_k^j R) - 2\nabla_j R_k^j = 0$$

となる。

$$G_k^j = R_k^j - \frac{1}{2}\delta_k^j R$$

とおく。これをアインシュタインテンソルという。添え字を上げて二階の反変テンソルにすれば、

$$G^{ij} = g^{ik}G_k^j = R^{ij} - \frac{1}{2}Rg^{ij}$$

計量条件より

$$\nabla_j G^{ij} = 0$$

である。

3.3 断面曲率

$T_p(M)$ の 2 次元部分空間 σ を平面または平面切り口という。σ の基底 $\{X, Y\}$ を取ると、シュワルツの不等式より $g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 > 0$ となる。そこで σ の断面曲率を

$$K(\sigma) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

と定義する。正規直交基底 $\{X, Y\}$ を取れば

$$K(\sigma) = g(R(X,Y)Y,X)$$

である。

定理 7. $p \in M$ について以下は同値である。

- $T_p(M)$ の任意の平面 σ に対して $K(\sigma) = c$
- $R(X,Y) = cX \wedge Y$

定理 8. シューアの定理 $n(\geq 3)$ 次元の連結リーマン多様体 M の各点で $K(\sigma)$ が定数なら、M 全体で $K(\sigma)$ は定数

$T_p(M)$ の正規直交基底を $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ とする。$X_1, X_i (i \geq 2)$ で張られる平面を σ_i とすると、リッチテンソルは

$$\begin{aligned} Ric(X,X) &= \sum_{i=1}^{n} g(R(X_i,X)X,X_i) \\ &= \sum_{i=2}^{n} g(R(X_i,X)X,X_i) \\ &= \sum_{i=2} K(\sigma_i) \end{aligned}$$

4　ユークリッド空間内の超曲面

4.1　基本テンソルとガウス=ワインガルテンの公式

n 次元多様体 M とユークリッド空間 E^{n+1} へのはめ込み f が与えられている。$p \in M$ に対して M 上のリーマン計量を E^{n+1} 内の通常の内積を用いて

$$g_p(X,Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle$$

と定義する。これを M の第一基本形式または誘導されたリーマン計量という。M の局所座標を $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$、$E^{n+1}$ のユークリッド座標を $\{y^1, y^2, \ldots, y^{n+1}\}$ とすると

$$f * \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

なので

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \langle \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial f^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^k} \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial f^k}{\partial x^j} \end{aligned}$$

となる。

E^{n+1} の通常の共変微分を D とおく。$(D_X df(Y))_p$ を M に接する成分と垂直な成分に分解すると

$$(D_X df(Y))_p = df(\nabla_X Y)_p + \alpha_p(X,Y)$$

となる。α_p は単位法ベクトル場 $\xi \in \mathfrak{X}(E^{n+1})(\langle \xi, df(X) \rangle = 0, \langle \xi, \xi \rangle = 1$ を用いて

$$\alpha_p(X,Y) = h(X,Y)\xi_p$$

と書くことができる。$h(X,Y)$ は双線形写像であり、第二基本形式と呼ぶ。また $\xi \in \mathfrak{X}_f$ とすると

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle &= 1 \\ \langle D_X \xi, \xi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

より $D_X \xi$ は M に接しており、$X \mapsto D_X \xi$ は線形写像であるから

$$D_X \xi = -df(SX)$$

となる $(1,1)$ 型テンソル場 S が存在する。これをシェイプ (Shape) 作用素と呼ぶ。シェイプ作用素は曲面の外界への入り方を表す外在的な量である。まとめると

$$D_X df(Y) = df(\nabla_X Y) + h(X,Y)\xi \qquad \text{(ガウスの公式)}$$

$$D_X \xi = -df(SX) \qquad \text{(ワインガルテンの公式)}$$

それぞれの公式は M 上を移動したときの接ベクトル、法ベクトルの変化率を与えるもので、M 上のベクトルと E^{n+1} 上のベクトルの関係を表す。

4.2 ガウス=コダッチ方程式

$$\begin{aligned}\langle df(Y),\xi\rangle &= 0\\ \langle D_X df(Y),\xi\rangle + \langle df(Y), D_X\xi\rangle &= 0\\ h(X,Y) + \langle df(Y), -df(SX)\rangle &= 0\\ h(X,Y) - g(SX,Y) &= 0\end{aligned}$$

ガウス=ワインガルテンの公式を満たす超曲面が存在するためにシェイプ作用素が満たすべき条件を求める。E^{n+1} の共変微分 D が満たす性質を M の共変微分 ∇ を用いて書き換える。D は曲率テンソル、捩率テンソルが共に 0 で、ユークリッド計量に対して計量的である。つまり

$$D_X D_Y df(Z) - D_Y D_X df(Z) - D_[X,Y]df(Z) = 0$$
$$D_X df(Y) - D_Y df(X) - df([X,Y]) = 0$$
$$X\langle df(Y), df(Z)\rangle - \langle D_X df(Y), df(Z)\rangle - \langle df(Y), D_X df(Z)\rangle = 0$$

捩率テンソルの式にガウスの公式を適用すると

$$(df(\nabla_X Y) + h(X,Y)\xi) - (df(\nabla_Y X) + h(Y,X)\xi) - df([X,Y]) = 0$$

M に接する成分と垂直な成分に分解すると

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$$
$$h(X,Y) = h(Y,X)$$

つまり ∇ の捩率テンソルも 0 になる。また $h(X,Y), S$ が対称線形であることが分かる。

次に計量条件の式を書き換える

$$\begin{aligned}Xg(Y,Z) - \langle df(\nabla_X Y), df(Z)\rangle - \langle df(Y), df(\nabla_X Z)\rangle &= 0\\ Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) &= 0\end{aligned}$$

つまり ∇ も計量的である。捩率テンソルが 0 でかつ計量的なので ∇ はレヴィ=チヴィタ接続である必要がある。

曲率テンソルの式にガウス=ワインガルテンの公式を適用すると

$$\begin{aligned}D_X D_Y df(Z) &= D_X(df(\nabla_Y Z) + h(Y,Z)\xi)\\ &= df(\nabla_X\nabla_Y Z) + h(X,\nabla_Y Z)\xi + X(h(Y,Z))\xi + h(Y,Z)D_X\xi\\ &= df(\nabla_X\nabla_Y Z - h(Y,Z)SX) + (h(X,\nabla_Y Z) + X(h(Y,Z)))\xi\end{aligned}$$

同様に

$$D_Y D_X df(Z) = df(\nabla_Y\nabla_X Z - h(X,Z)SY) + (h(Y,\nabla_X Z) + Y(h(X,Z)))\xi$$

であり、また

$$D_[X,Y]df(Z) = df(\nabla_[X,Y]Z) + h([X,Y],Z)\xi$$

より

$$\{df(\nabla_X\nabla_Y Z - h(Y,Z)SX) - df(\nabla_Y\nabla_X Z - h(X,Z)SY) - df(\nabla_{[}X,Y]Z)\} + \{(h(X,\nabla_Y Z) + X(h(Y,Z)))\xi - (h(Y,\nabla_X Z$$

M に接する成分と垂直な成分に分解する。接する成分は

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[}X,Y]Z &= h(Y,Z)SX - h(X,Z)SY\\ R(X,Y)Z &= g(SY,Z)SX - g(SX,Z)SY R(X,Y) \qquad &= SX \wedge SX\end{aligned}$$

垂直な成分は

$$\begin{aligned}X(h(Y,Z)) - Y(h(X,Z)) + h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) - h([X,Y],Z) &= 0\\ X(h(Y,Z)) - Y(h(X,Z)) + h(X,\nabla_Y Z) - h(Y,\nabla_X Z) + h(\nabla_Y X,Z) - h(\nabla_X Y,Z) &= 0\\ \nabla_X h(Y,Z) &= \nabla_Y h(X,Z)\\ \nabla_X S(Y) &= \nabla_Y S(X)\end{aligned}$$

まとめると

$$R(X,Y) = SX \wedge SX \qquad \text{(ガウスの方程式)}$$
$$\nabla_X S(Y) = \nabla_Y S(X) \qquad \text{(コダッチの方程式)}$$

ガウス=コダッチの方程式はリーマン計量によって定まる曲率テンソルとシェイプ作用素が満足すべき条件を示す。実際次の定理が成り立つ。

定理 9. 超曲面の基本定理単連結なリーマン多様体 (M,g) 上で $(1,1)$ 型テンソル場 S が g のレヴィ=チヴィタ接続に関してコダッチの方程式を満たすとき、M から E^{n+1} への等長的なはめ込みが合同変換を除いて一意的に存在する。

4.3 驚異の定理

M が E^3 の 2 次元リーマン多様体つまり曲面のときを考える。S の固有値を λ_1, λ_2、それに対応する単位固有ベクトルを X_1, X_2 とおく。ここで S は対称変換である。つまり

$$\begin{aligned}h(X_1,X_2) &= g(AX_1,X_2) = \lambda_1 g(X_1,X_2)\\ h(X_1,X_2) &= g(X_1,AX_2) = \lambda_2 g(X_1,X_2)\\ (\lambda_2-\lambda_1)g(X_1,X_2) &= 0\end{aligned}$$

なので、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。固有値が縮退する場合も直交する固有ベクトルを取ることができる。つまり $g(X_1,X_1) = g(X_2,X_2) = 1, g(X_1,X_2) = 0$ である。$K = \lambda_1\lambda_2 = \det S$ をガウス曲率という。ガウスの方程式より

$$\begin{aligned}R(X_1,X_2) &= SX_1 \wedge SX_2 = \lambda_1 X_1 \wedge \lambda_2 X_2\\ &= KX_1 \wedge X_2\end{aligned}$$

断面曲率は

$$\begin{aligned}K(\sigma) &= g(R(X_1, X_2)X_2, X_1) \\ &= g(K(X_1 \wedge X_2)X_2, X_1) \\ &= g(Kg(X_2, X_2)X_1, X_1) \\ &= Kg(X_1, X_1)g(X_2, X_2) = K\end{aligned}$$

となりガウス曲率に一致する。断面曲率は基底に依らないので、ガウス曲率はリーマン計量によって完全に決定する。

5　定曲率空間

断面曲率が一定のリーマン多様体を定曲率空間という。

5.1　n 次元球面

E^{n+1} 内の半径 r の n 次元球面を

$$S^n(r) = x \in E^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = r^2$$

と定義する。また n 次元単位球面を単に $S^n = S^n(1)$ と書く。点 p における接ベクトル $X \in T_p(S^n(r))$、単位法ベクトル $\xi = -p/r$ に対して

$$D_X\xi = -\frac{X}{r}$$

よりシェイプ作用素は

$$S = \frac{1}{r}I$$

となる。ガウスの方程式より

$$\begin{aligned}R(X, Y) &= \frac{1}{r^2}X \wedge Y \\ K(\sigma) &= \frac{1}{r^2}\end{aligned}$$

となる。

5.2　双曲空間

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i - x^{n+1}y^{n+1}$$

をローレンツ内積と呼ぶ。R^{n+1} にローレンツ内積が定義された空間を $n+1$ 次元ローレンツ空間 L^{n+1} と呼ぶ。

$$x \in L^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = -r^2$$

は $x^{n+1} > 0$ と $x^{n+1} < 0$ の二つの連結成分を持つ。そこで n 次元双曲空間を

$$H^n(r) = x \in L^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -r^2, x^{n+1} > 0$$

と定義する。点 p における接ベクトル $X \in T_p(H^n(r))$、単位法ベクトル $\xi = -p/r$ に対して

$$D_X \xi = -\frac{X}{r}$$

よりシェイプ作用素は

$$S = \frac{1}{r} I$$

ガウスの方程式より

$$R(X, Y) = -\frac{1}{r^2} X \wedge Y$$
$$K(\sigma) = -\frac{1}{r^2}$$

となる。

定理 10. M_1, M_2 が同じ曲率を持つ n 次元定曲率空間であるとする。$x_0 \in M_1$ と $T_{x_0}(M_1)$ の正規直交基底 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$、$y_0 \in M_2$ と $T_{y_0}(M_2)$ の正規直交基底 $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ に対して、x_0 の近傍から y_0 の近傍への等長変換 f で

$$f(x_0) = y_0, df(X_i) = Y_i$$

となるものが存在する。

定理 11. n 次元局所対称的リーマン多様体 M_1, M_2 に対して、$x_0 \in M_1$ の近傍から $y_0 \in M_2$ の近傍への等長変換 f で

$$f(x_0) = y_0, df(R_1(X, Y)Z) = R_2(df(X), df(Y))df(Z)$$

となるものが存在する。

系 1. 一定曲率 c を持つ n 次元リーマン多様体は

$$\begin{cases} E^n & (c = 0) \\ S^n(r) & (c > 0, r = \frac{1}{\sqrt{c}}) \\ H^n(r) & (c < 0, r = \frac{1}{-\sqrt{c}}) \end{cases}$$

のいずれかと局所等長的である。

系 2. n 次元定曲率空間の 2 点 x, y とその正規直交基底 $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ に対して、局所等長写像

$$f(x) = y, df(X_i) = Y_i$$

が存在する。

系 3. 局所対称的リーマン多様体の 2 点 x, y に対して、x の近傍から y の近傍への等長変換が存在する。

参考文献

[1] 小林昭七. **曲線と曲面の微分幾何** *(***基礎数学選書** *17)*. 裳華房, 1977.

[2] 野水克己. **現代微分幾何入門** *(***基礎数学選書** *25)*. 裳華房, 1988.