電磁気学

高校 3 年 season07001674

2020/04/10

目次

第 I 部
真空中のマクスウェル方程式

電気に関するのクーロンの法則 $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{r^2}$ から静電場 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$ を定義する。電荷の間に働く力には線形性が成り立つ。即ち複数の電場の影響は重ね合わせで計算できる。

1　ガウスの法則

電荷を閉曲面で覆い、曲面に垂直な方向の電場を積分する。するとこれは領域の形に依らない。閉曲面を S、球面の一部を S' として、

$$\begin{aligned}\int E \cdot n\ dS &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|r|^3}\int |r||n|\cos\theta\ dS' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|r|^2}\int dS' \\ &= \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$q = \int \rho dV$ なのでガウスの定理より、

$$\begin{aligned}\int E \cdot n\ dS = \int \mathrm{div} E dV &= \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho dV \\ \mathrm{div} E &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

■帯電球の静電場　ガウスの法則から半径 a の帯電球の電場を求める。電荷密度は一定であると仮定する。
$r \leq a$ の場合、

$$\begin{aligned}4\pi r^2 \cdot E &= \frac{r^3}{a^3}\cdot\frac{q}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qr}{a^3}\end{aligned}$$

$r > a$ の場合、

$$\begin{aligned}4\pi r^2 \cdot E &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\end{aligned}$$

よって

$$E = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qr}{a^3} & (r \leq a) \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} & (r > a) \end{cases}$$

2　ファラデーの法則

静電場中を閉曲線に沿って移動することを考える。エネルギー保存則より、F の線積分は 0 となる。つまり E の線積分は 0 になる。ストークスの定理より、

$$\begin{aligned}\oint E \cdot ds = \int \mathrm{rot} E \cdot n dS &= 0 \\ \mathrm{rot} E &= 0\end{aligned}$$

ファラデーの電磁誘導の法則より、コイルに発生する起電力 V はコイルを貫く磁束 Φ の変化に比例する。

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

ここにおける起電力は回路で測られるものであるが、近接作用の立場からはコイルの有無に関わらず電場が存在していると考えるべきである。起電力は回路に沿って電場を線積分したものなので、

$$\int E \cdot ds = -\frac{d}{dt}\int B \cdot dS$$

左辺にストークスの定理を適用して、

$$\int \left(\mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t}\right) \cdot dS = 0$$
$$\mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

■ポアソン方程式　ガウスの法則とファラデーの法則から静電場の式が導けることを確認する。静電場 E は静電ポテンシャル ϕ を使って

$$E = -\mathrm{grad}\phi = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

と表せる。既にファラデーの法則を満たしているので、ガウスの法則に当てはめると、

$$-\mathrm{divgrad}\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

この方程式をポアソン方程式と呼ぶ。ラプラシアン Δ は極座標では、

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

電荷は球対称に分布していると仮定すると静電場の方程式は、

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ここから先程と同じ式が導ける。

3　磁束保存の法則

ビオ＝サバールの法則

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ids \times r}{|r|^3}$$

を拡張し、

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} dr'$$

とする。ここでベクトルポテンシャル

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i(r')}{|r - r'|} dr'$$

を導入すると、$B = \mathrm{rot}A$ と表せるので、

$$\mathrm{div}B = \mathrm{divrot}A = 0$$

4　アンペールの法則

アンペールの法則は、

$$\mathrm{rot}B = \mu_0 i$$

これの両辺の div をとると、

$$\mu_0 \mathrm{div} i = 0$$

となる。これは電荷の保存則 $\mathrm{div} i = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$ に反しているので、これを満たすように書き換える。$\mathrm{div} E = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ より、アンペールの法則に付け加えると、

$$\mathrm{rot}B - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 i$$

となる。左辺第二項を移行して、

$$\mathrm{rot}B = \mu_0\left(i + \epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

とする。右辺第二項の $\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$ を変位電流と呼ぶ。変位電流は電荷の移動を伴わない。

5　ローレンツ力

平行に流れる二つの電流間には引力が働き、アンペールの力という。その大きさは、

$$|F| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{r}$$

である。ここで実際は電流の間に直接力が働くのではなく、一方の電流が作った磁場によってもう一方の電荷が力を受けるのだと解釈する。力の方向も考慮すれば、

$$dF = Ids \times B$$

となる。1m あたり n 個の電荷があるとすれば、$I = qnv$ と表せるので、

$$dF = qnvds \times B$$

nds は微小長さあたりの電荷の個数を表すので、電荷一つあたりの力は、

$$F = qv \times B$$

電場による力と合わせて、

$$F = q(E + v \times B)$$

となる。これをローレンツ力という。

第 II 部

物質中の電磁場

1 電気双極子モーメント

大きさの等しい正と負の電荷が少しの距離を置いて存在している系を電気双極子と呼ぶ。電荷をそれぞれ $+q, -q$ とする。負電荷の位置から正電荷の位置に引いたベクトルを s として、電気双極子モーメント p を次のように定義する。

$$p = qs$$

電気双極子が一様な電場中に置かれているとする。この電気双極子の位置エネルギーは電場の方向となす角度によって変わる。電気双極子モーメントが電場と垂直な向きを基準とすると、

$$\begin{aligned} U &= -\left[q\frac{s}{2}|E|\cos\theta + (-q)\left(-\frac{s}{2}\right)|E|\cos\theta\right] \\ &= -p \cdot E \end{aligned}$$

次に電位を求める。電気双極子の中心を原点として、正電荷と負電荷をそれぞれ $(-\frac{s}{2}, 0), (+\frac{s}{2}, 0)$ の位置に置く。$r = (x, y, z)$ における電位は、

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\ r_1 &= \sqrt{r^2 + (s/2)^2 - rs\cos\theta} \\ r_2 &= \sqrt{r^2 + (s/2)^2 + rs\cos\theta} \end{aligned}$$

ここで $s \ll r$ として近似すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (s/2)^2 - rs\cos\theta}} \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + \left(\frac{s}{2r}\right)^2 - \frac{s}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\fallingdotseq \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{s}{2r}\right)^2 - \frac{s}{r}\cos\theta\right]\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(1 - \frac{s^2}{8r^2} + \frac{s}{2r}\cos\theta\right) \end{aligned}$$

同様に、

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{s^2}{8r^2} - \frac{s}{2r}\cos\theta\right)$$

よって、

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{s}{r^2}\cos\theta \\ &= \frac{p \cdot r}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

次に電場を求める。$E(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$ なので、

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{p_x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - (p_x x + p_y y + p_z z)(\frac{3}{2})(x^2+y^2+z^2)^{5/2}(2x)\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{p_x}{r^3} - \frac{3x(p\cdot r)}{r^5}\right]
\end{aligned}
$$

y, z も同様なので、結局

$$
E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{p}{r^3} - \frac{3r(p\cdot r)}{r^5}\right]
$$

となる。

2　磁気モーメント

モノポールが存在するとして、等しい大きさの N と S の磁荷を少しの距離を置いて配置したものを磁気双極子という。磁荷をそれぞれ $+q_m(N), -q_m(S)$ とする。単位は Wb で、$F = q_m H$ が成り立つ。S 極から N 極へ向かうベクトルを s として、磁気双極子モーメントと次のように定義する。

$$
m = q_m s
$$

電気双極子と同じように、エネルギーと磁場はそれぞれ、

$$
\begin{gathered}
U = -m\cdot H \\
H(r) = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\frac{m}{r^3} - \frac{3r(m\cdot r)}{r^5}\right]
\end{gathered}
$$

となる。

ところが現代では、モノポールは存在しないとするのが主流であるので、その代わりに微小な円形電流を考える。するとこの円形電流の作る磁場は十分遠方では磁気双極子が作るものと同じと見なせる。磁気モーメント m' を、

$$
U = -m'\cdot B
$$

が成り立つようにすると、$m' = m/\mu_0$ とすれば良いことがわかる。すると磁束密度は、

$$
B(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{m'}{r^3} - \frac{3r(m'\cdot r)}{r^5}\right]
$$

となる。

真空中のマクスウェル方程式には電場 E と磁束密度 B が登場した。物質中に電場や磁場が存在するとそれに応じて物質内部の電荷や電流が誘起され、電磁場も変化する。もちろんその場にある電荷や電流を考慮すればマクスウェル方程式は満たされるが、それらは意図的に用意したものではなく、表に出てこないような形式にできれば便利である。変化するのは電荷と電流なので真空中のマクスウェル方程式のうち変更すべきなのは次の二つである。

$$
\begin{gathered}
\mathrm{div}E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\mathrm{rot}B - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 i
\end{gathered}
$$

3　誘電体と電束密度

導体に電場をかけると電流が流れるが、絶縁体 (不導体) に電場をかけると内部の電荷がその方向に偏る。これを分極という。絶縁体をそのように見たときこれを誘電体という。外部の電場によって誘電体が分極すると、全体的に電荷が弱まる。そのとき単位面積あたりに通過した正電荷の量と方向を分極ベクトル P と呼ぶ。この時積分形のガウスの法則は、

$$\int \epsilon_0 E \cdot dS = q - \int P \cdot dS$$

第二項は

$$-\int P \cdot dS = -\int \mathrm{div} P dV$$

と書き換えることができる。誘起された電荷密度 $-\mathrm{div}P$ を分極電荷という。

$$\int (\epsilon_0 E + P) \cdot dS = q$$

ここで

$$D = \epsilon_0 E + P$$

と置くと、

$$\mathrm{div} D = \rho$$

となる。D を電束密度という。多くの物質では $P = \chi E$ という関係が近似的に成り立つ。χ は電気感受率と呼ばれる。丁度ばねにおけるフックの法則と同じようなもので、比較的弱い電場では電場に比例して分極を起こすが、ばねを伸ばしすぎると壊れるように、大きい電場をかけると絶縁破壊が起きて電気が流れてしまう。$\epsilon = \epsilon_0 + \chi$ と置くと、$D = \epsilon E$ と表せる。ϵ を物質の誘電率という。常に $\chi > 0$ なので $\epsilon > \epsilon_0$ である。また $\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ を比誘電率という。

4　磁性体と磁場

磁気モノポールは存在しないため、磁場の起源はすべて電流である。特に永久磁石などの磁場の元は主に電子が作る分子電流である。物質内部の分子電流は普段は別々の方向を向いているが、磁場がかかると一つの向きに揃う。これを磁化という。物質を磁場に対する性質から見たとき、これを磁性体と呼ぶ。外部の磁場と同じ向きに磁場が誘起されるとき常磁性、逆向きのとき反磁性という。誘電体中に磁場がかかると、分子電流が向きを揃え、結果的に電流も変化する。この時増加した磁気モーメントを磁化ベクトルと呼び J で表すと、誘起される電流密度は、

$$\mathrm{rot} J = \mu_0 i_m$$

また、分極ベクトルの時間変化によっても電流が発生する。密度 ρ の電荷が u だけ変位したとき、発生する電流は

$$i_p = \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}B - \epsilon\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0(i + i_m)$$

i_p を分極電流と呼ぶ。したがってアンペールの法則は、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}B - \epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} &= i + i_m + i_p \\
&= i + \mathrm{rot}J + \frac{\partial P}{\partial t} \\
\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}(B - J) - \frac{\partial \epsilon E + P}{\partial t} = i
\end{aligned}$$

ここで、

$$H = \frac{1}{\mu_0}(B - J)$$

と置くと、

$$\mathrm{rot}H - \frac{\partial D}{\partial t} = i$$

となる。多くの物質では $J = \chi_m H$ という関係が近似的に成り立つ。χ_m は磁化率と呼ばれる。磁場が一定以上強くなると、分子電流の向きがすべてそろい、それ以上磁化ベクトルが大きくならないため、この比例関係は崩れる。$\mu = \mu_0 + \chi_m$ と置くと、$B = \mu H$ と表せる。μ を物質の透磁率という。磁性体の場合は μ が正にも負にもなりうる。また $\frac{\mu}{\mu_0}$ を比透磁率という。
よって以下が物質中のマクスウェル方程式である。

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}D &= \rho \\
\mathrm{div}B &= 0 \\
\mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\
\mathrm{rot}H - \frac{\partial D}{\partial t} &= i
\end{aligned}$$

第 III 部
電磁ポテンシャル

1　電磁ポテンシャル

スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル A のことを電磁ポテンシャルと呼ぶ。この二つを使って電場と磁場を

$$\begin{aligned}
E &= -\mathrm{rot}\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \\
B &= \mathrm{rot}A
\end{aligned}$$

と表せば、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} &= \mathrm{rot}E + \frac{\partial(\mathrm{rot}A)}{\partial t} \\
&= \mathrm{rot}\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) \\
&= -\mathrm{rotgrad}\phi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{div}B = \mathrm{divrot}A = 0
$$

となって、ファラデーの法則と磁束保存の法則は自動的に満たされることになる。

2　ゲージ変換

ところで電場と磁場が与えられたとき、それを満たす電磁ポテンシャルは一意には決まらない。ある程度の自由度がある。微分可能な任意の関数 χ を導入して、

$$
\begin{aligned}
\phi &\to \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \\
A &\to A + \mathrm{grad}\chi
\end{aligned}
$$

としても電磁場の形は変わらない。この変換をゲージ変換という。

3　ローレンツゲージにおけるマクスウェル方程式

残ったマクスウェル方程式は、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\mathrm{rot}B - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} &= \mu_0 i
\end{aligned}
$$

である。これらを電磁ポテンシャルで書き換えてやると次のような形になる。

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi + \mathrm{div}\frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\left(\Delta - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A - \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}A + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= -\mu_0 i
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\mathrm{div}A + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0(\text{ローレンツ条件})
$$

が成り立っているとすると、

$$
\begin{aligned}
\left(\Delta - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\left(\Delta - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A &= -\mu_0 i
\end{aligned}
$$

となる。与えられた電磁場を満たす電磁ポテンシャル ϕ, A を適当に選ぶ。そしてゲージ変換によってローレンツ条件を満たすような χ は次の微分方程式を満たす。

$$\left(\Delta - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\chi = -\mathrm{div}A + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

この方程式の解は必ず存在する。つまりローレンツ条件は与えられた電磁場に対する電磁ポテンシャルを一意に決定する。以下をローレンツゲージにおけるマクスウェル方程式と呼ぶ。

$$\left(\Delta - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$\left(\Delta - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)A = -\mu_0 i$$
$$\mathrm{div}A + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

4　荷電粒子のラグランジアン

ローレンツ力を電磁ポテンシャルを使って表すと、

$$F = q(E + v\times B) = q\{-\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} + v\times(\nabla\times A)\}$$

である。これをオイラー・ラグランジュ方程式に合うように変形していく。

$$\nabla(v\cdot A) = (v\cdot\nabla)A + v\times(\nabla\times A)$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (v\cdot\nabla)A$$

より、

$$F = -q\left\{\nabla(\phi - v\cdot A) + \frac{dA}{dt}\right\}$$
$$F_i = q\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial(\phi - v\cdot A)}{\partial v_i} - \frac{\partial(\phi - v\cdot A)}{\partial x_i}\right\}$$

したがって、荷電粒子のラグランジアンは、

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q(\phi - v\cdot A)$$

である。

5　電磁場のラグランジアン

第 IV 部
マクスウェル方程式の解

1　電磁波

1.1　波動方程式

真空中の電磁波について考える。よって電荷密度及び電流密度は 0 である。つまり、

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0 \\ \mathrm{rot}B - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t} &= 0 \\ \mathrm{div}E &= 0 \\ \mathrm{div}B &= 0 \end{aligned}$$

一番目の式の両辺の rot を計算してやると、

$$\mathrm{rotrot}E + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}B) = 0$$

第一項に $\mathrm{rotrot}X = \mathrm{graddiv}X - \Delta X$ という公式を使えば、

$$\begin{aligned} \mathrm{graddiv}E - \Delta E + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}B) &= 0 \\ \left(\Delta - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E &= 0 \end{aligned}$$

二番目の式も同様に

$$\left(\Delta - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)B = 0$$

となる。この形の微分方程式は波動方程式と呼ばれている。そして、波動の速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

となる。この値が当時の光速の測定値と一致したことは、光が電磁波であることの有力な証拠となった。波動方程式の一般解は、ダランベールの式を 3 次元に拡張して、

$$E = F(e\cdot r - ct) + G(e\cdot r + ct)$$

と表される。e は電磁波の進行方向を表す単位ベクトルである。

1.2 電磁波の性質

一般解をガウスの法則に代入すると、

$$\mathrm{div}E = 0$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}F(e\cdot r - ct) + G(e\cdot r + ct)\\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial x}(F_x + G_x) + \frac{\partial}{\partial y}(F_y + G_y) + \frac{\partial}{\partial z}(F_z + G_z)\\
&\qquad = e_x(F'_x + G'_x) + e_y(F'_y + G'_y) + e_z(F'_z + G'_z)\\
&\qquad = e\cdot(F' + G') = 0
\end{aligned}$$

これはつまり、電場は電磁波の進行方向に対しては変化しないことを意味する。言い換えれば電磁波は横波ということであり、光が電磁波であることのもう一つの有力な証拠となった。
電場と磁場の関係を導く。計算を簡単にするために電磁波の進行方向を z 軸に取る。すると電場の成分は次のように表される。

$$(E_x, E_y, E_z) = (F(z-ct) + G(z+ct), 0, 0)$$

ファラデーの法則に代入すると、

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t}\right) = (0, -F'(z-ct) - G'(z+ct), 0)$$

両辺を積分してやれば磁場の形が求められる。このときに現れる積分定数は、静磁場が重なっていても構わないことを示しているので省略する。よって、

$$(B_x, B_y, B_z) = (0, -\frac{1}{c}F(z-ct) - \frac{1}{c}G(z+ct), 0)$$

つまり電場と磁場は互いに垂直な方向に存在し、全く同じ形で伝わっていくことになる。

2 遅延ポテンシャル

ローレンツゲージにおけるマクスウェル方程式を以下の仮定の下で解いた厳密解を遅延ポテンシャルという。

- 電荷密度 ρ と電流密度 i が r, t のみに依存する。
- 電磁場の原因は電荷と電流のみである。
- ρ, i は無限の過去で 0 に収束する。
- ρ, i は無限遠で 0 に収束する。
- 自由空間
- 時空因果律が成り立つ。

これらの仮定により、最初から電磁波が存在している場合や領域の外部から意図しない電磁場が侵入する可能性を排除している。マクスウェル方程式に異なる二つの解があった場合、それらの差は電磁波の解を表すので、最初の仮定だけを考慮したときの一般解は、遅延ポテンシャルに任意の電磁波を重ね合わせたものにな

る。遅延ポテンシャルは $t_r = t - \frac{|r-r'|}{c}$ として、

$$\phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(r',t_r)}{|r-r'|}dr'$$
$$A(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i(r',t_r)}{|r-r'|}dr'$$

で与えられる。電荷密度や電流密度の変化はその地点から光速で伝わっていくので、時間変化しない電磁ポテンシャルの解からのずれを考慮した形となっている。遅延ポテンシャルはローレンツ条件を満たしている。ちなみに、遅延ポテンシャルの $t_r = t - \frac{|r-r'|}{c}$ の代わりに $t_r = t + \frac{|r-r'|}{c}$ としたものは、先進ポテンシャル或いは先進波と呼ばれている。先進ポテンシャルは時間反転に対して対称であることを意味しているが、因果律に反しているため、物理的ではない。遅延ポテンシャルを電磁場の式に代入したものは、$R = r - r'$ として、

$$E(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \left[\frac{\rho(r',t_r)R}{|R|^3} + \frac{\rho(r',t_r)R}{c|R|^2} - \frac{i(r',t_r)R}{c^2|R|^2}\right]dr'$$
$$B(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \left[\frac{i(r',t_r)R}{|R|^3} + \frac{i(r',t_r)R}{c|R|^2}\right]dr'$$

となる。これは同じ条件におけるマクスウェル方程式の厳密解であり、ジェフィメンコ方程式と呼ばれている。第一項は近接項で、静電場と同じ形をしている。第二項は放射項で、電磁波による効果を表している。ジェフィメンコ方程式は電荷の保存則を満たすとは限らない。

3 リエナール・ヴィーヘルト・ポテンシャル

遅延ポテンシャルから運動する点電荷の作る電磁場を求める。点電荷の軌道を $s(t)$ とすると、電荷密度と電流密度はそれぞれ次のように表せる。

$$\rho(r,t) = q\delta(r - s(t))$$
$$i(r,t) = q\dot{s}(t)\delta(r - s(t))$$

これを先程の遅延ポテンシャルに代入すれば求められる。結果だけ書くと、

$$\phi(r,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|r - s(t_r)| - \beta(t_r)\cdot(r - s(t_r))}$$
$$A(r,t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\dot{s}(t_r)}{|r - s(t_r)| - \beta(t_r)\cdot(r - s(t_r))}$$

ただし、

$$t_r = t - \frac{|r - s(t)|}{c}$$
$$\beta(t_r) = \frac{\dot{s}(t_r)}{c}$$

である。これをリエナール・ヴィーヘルト・ポテンシャルという。

4　等速運動する点電荷

リエナール・ヴィーヘルト・ポテンシャルを使って、等速運動する点電荷の作る電磁ポテンシャルを求める。点電荷が x 軸上を速度 v で進んでおり、時刻 $t=0$ に原点を通過したとする。その時の電磁ポテンシャルは、

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)}}$$
$$A = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{v}{\sqrt{(x-vt)^2+(1-\frac{v^2}{c^2})(y^2+z^2)}}$$

となる。点電荷から見た観測点の座標は $(x-vt,y,z)$ だから、x 軸から離れた所では、静止したときよりもポテンシャルが強くなっていることがわかる。等しいポテンシャルの面を考えると、yz 方向に引き伸ばされた回転楕円体となる。
つまり、点電荷の立場から見れば、電磁場は同じ形を保ったまま電磁波を発生させることなく移動していく。力学のときと同じように、等速運動するのにエネルギーは必要ないことがわかる。

5　加速運動する点電荷

次に点電荷が加速する場合に、放射される電磁波を求める。点電荷の位置を $s(t)$、観測者の位置を r とする。$R=|r-s(r)|, n=(r-s(r))/|r-s(r)|$ とすれば、ポインティングベクトルは、

$$S(r,t) = \frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0 c}\frac{n}{(1-n\cdot v)^6R^2}[n\times\{(n-v)\times\dot{v}\}]^2$$

である。出ていく電磁場の方向と強度は、速度と加速度に依存する。
1911 年、ラザフォードが原子の中では原子核の周りを電子が回っているという説を提唱した。しかしもしそうだとすると、円軌道を描いて回っている電子からは電磁波が放射され、エネルギーを失って原子核に落ちてしまうであろう。この問題を解決するには量子力学の登場を待たねばならなかった。20 世紀初頭に発表されたこのモデルは歴史が浅いにも関わらず、単純で扱いやすいということで化学などでは現在でも利用されている。

第 V 部

電磁場の力と保存量

1　電磁場のエネルギー

1.1　静電場のエネルギー

電荷というのは同種の電気が一か所に集まっているので、反発力に逆らって存在していることになる。つまり電荷は運動していなくてもエネルギーを持っている。このときのエネルギーというのはポテンシャルエネルギーである。しかし場の理論では、エネルギーは物質ではなく空間に蓄えられていると解釈する。つまり、全宇宙のエネルギーは、物質の運動エネルギーと場のエネルギーの総和である。

電荷の位置エネルギーを電場の関数で表すために、まず帯電した金属球のエネルギーを求める。半径を r、電荷を q とする。金属球が帯電していない状態から始めて、無限遠から微小電荷を近づけることを考える。なぜこのようなことを考えるかというと、電荷を近づける際の金属球の反動を無視するためである。電荷が q' のときの金属表面の電位 ϕ は静電場の式 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q'}{r^2}$ を積分して、無限遠で 0 になるように調整してやると、

$$\phi = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r}$$

これに微小電荷 dq' をかけて積分してやれば、

$$\begin{aligned} U(r) &= \int_0^q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r} \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

ところで球殻の外側の電場は半径に依らず一定である。よって、半径 $r, r+dr$ の金属球のエネルギーの差をとると、幅 dr の球殻内の電場は一定とみなせるので、そのエネルギー密度を $u(E)$ と置くと、

$$\begin{aligned} U(r+dr) - U(r) &= -u(E)\cdot 4\pi r^2 dr \\ \frac{U(r+dr) - U(r)}{dr} &= -u(E)\cdot 4\pi r^2 \end{aligned}$$

微分の定義より、

$$\begin{aligned} u(E) &= -\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dU}{dr} \\ &= -\frac{1}{4\pi r^2}\cdot -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \end{aligned}$$

1.2 静磁場のエネルギー

1.3 電磁場のエネルギー

運動方程式を変形し、電磁場のエネルギーと同じ形式を作り出す。

$$m\frac{dv}{dt} = q(E(r) + v\times B(r))$$

の両辺と v との内積を計算し、

$$\begin{aligned} mv\cdot\frac{dv}{dt} &= E(r)\cdot(qv) + qv\cdot(v\times B(r)) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= E(r)\cdot i(r) \end{aligned}$$

ここで $qv = i(r)$ である。また、v と $v\times B(r)$ は垂直なので、$v\cdot(v\times B(r)) = 0$ となる。更に多粒子系に拡張すれば、

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{1}{2}m_j v_j^2\right) = E\cdot i$$

右辺はジュール熱を意味する。電場 E に距離をかけたものが電圧であり、電流密度 i に面積をかけたものが電流だからである。つまりジュール熱の正体は荷電粒子の運動エネルギーである。右辺を変形していく。

$$
\begin{aligned}
i &= \mathrm{rot}H - \frac{\partial D}{\partial t} \\
E \cdot (\nabla \times H) &= H \cdot (\nabla \times E) - \nabla \cdot (E \times H) \\
&= -H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - \nabla \cdot (E \times H)
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
E \cdot i &= E \cdot \left(\mathrm{rot}H - \frac{\partial D}{\partial t} \right) \\
&= -E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} - H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} - \nabla \cdot (E \times H) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} E \cdot D + \frac{1}{2} H \cdot B \right) - \nabla \cdot (E \times H)
\end{aligned}
$$

エネルギー密度 $u = \frac{1}{2}(E \cdot D + H \cdot B)$、$S = E \times H$ とすれば、

$$
-\frac{\partial u}{\partial t} = E \cdot i + \mathrm{div}S
$$

この式はポインティング (Poynting) の定理と呼ばれている。右辺第二項はポインティングベクトルと呼ばれていて、電磁場のエネルギー流の密度を表している。電磁波の場合はその進行方向を指す。

2 マクスウェルの応力

領域 V 内にある電荷がその外側から受ける力を考える。点電荷の場合のローレンツ力の式を少し変えると、単位体積あたりの力は $dF = \rho(r)E(r) + i(r) \times B(r)$ で表される。また領域内の電磁場は領域内の電荷が作るものと領域外部のものとに分けられるが、自己場は作用反作用の法則で打ち消しあうので、電磁場をそのまま計算に入れて構わない。

$$
F = \int_V \rho(r)E(r) + i(r) \times B(r) dV
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}D &= \rho \\
\mathrm{rot}H - \frac{\partial D}{\partial t} &= i
\end{aligned}
$$

を代入すれば、

$$
\begin{aligned}
F &= \int \left[E\mathrm{div}D + \left(\mathrm{rot}H - \frac{\partial D}{\partial t} \right) \times B \right] dV \\
&= \int \left[E\mathrm{div}D - B \times \mathrm{rot}H - \frac{\partial D}{\partial t} \times B \right] dV
\end{aligned}
$$

第三項は、

$$
-\frac{\partial D}{\partial t} \times B = -D \times \mathrm{rot}E - \frac{d}{dt}(D \times B)
$$

と変形できるので、

$$= \int \left(\epsilon_0 E \mathrm{div} E - \frac{1}{\mu_0} B \times \mathrm{rot} B - \epsilon_0 E \times \mathrm{rot} E - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}(E \times H) \right) dV$$

$\mathrm{div} B = 0$ なので、対称性を保つために $B \mathrm{div} B$ という項を書き加えると、

$$\begin{aligned} = \int \left[\epsilon_0 (E \mathrm{div} E - E \times \mathrm{rot} E) + \frac{1}{\mu_0} (B \mathrm{div} B - B \times \mathrm{rot} B) \right] dV \\ - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\int (E \times H) dV \right) \end{aligned}$$

積分の第二項の $E \times H$ はポインティングベクトルである。符号がマイナスになっているのは、電磁波が出て行ったことによる反作用を表している。ここで第一項の積分を面積分に変換するために、$E \mathrm{div} E - E \times \mathrm{rot} E$ という量に着目する。そうすることで、荷電粒子の間に直接力が働くのではなく、空間の場を通して力が伝わるという解釈が可能になるのだ。x 成分だけを取り出せば、

$$\begin{aligned} (E \mathrm{div} E - E \times \mathrm{rot} E)_x &= E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &\quad - E_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \\ &\quad + E_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ &\quad + E_x \frac{\partial E_y}{\partial y} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ &\quad + E_x \frac{\partial E_z}{\partial z} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial E_x^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_y^2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial E_z^2}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial (E_x E_y)}{\partial y} + \frac{\partial (E_x E_z)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial (E_x^2 - \frac{1}{2} E^2)}{\partial x} + \frac{\partial (E_x E_y)}{\partial y} + \frac{\partial (E_x E_z)}{\partial z} \end{aligned}$$

よって領域内の力は、

$$\begin{aligned} T &= T_e + T_m \\ T_e &= \epsilon_0 \begin{bmatrix} E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_x E_y & E_x E_z \\ E_y E_x & E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 & E_y E_z \\ E_z E_x & E_z E_y & E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \end{bmatrix} \\ T_m &= \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} B_x^2 - \frac{1}{2} B^2 & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & B_y^2 - \frac{1}{2} B^2 & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & B_z^2 - \frac{1}{2} B^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

として、

$$\begin{aligned} F &= \int \mathrm{div} T dV - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int S dV \\ &= \int T \cdot dS - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int S dV \end{aligned}$$

と表される。この T をマクスウェルの応力テンソルという。

3　電磁場の運動量

質量 m、電荷 q の粒子の運動方程式は、

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=\int\left[q\delta(r-r')E+q\delta(r-r')\frac{dr}{dt}\times B\right]dr'$$

である。多粒子系に拡張すれば、

$$\sum_i m_i\frac{d^2r_i}{dt^2}=\int\left[q_i\delta(r_i-r')E+q_i\delta(r_i-r')\frac{dr_i}{dt}\times B\right]dr'$$

と表せる。ここで、

$$\mathrm{div}D=\sum_i q_i\delta(r_i-r')$$
$$\mathrm{rot}H-\frac{\partial D}{\partial t}=\sum_i q_i\delta(r_i-r')\frac{dr_i}{dt}$$

を代入すれば、右辺は領域 V 内に働く電磁場による力と等しいので、マクスウェルの応力を利用すると、

$$\sum_i m_i\frac{d^2r_i}{dt^2}=\int T\cdot dS-\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int(E\times H)dV$$
$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i m_i\frac{dr_i}{dt}+\frac{1}{c^2}\int(E\times H)dV\right]=\int T\cdot dS$$

となる。左辺第二項が電磁場の運動量であると解釈できる。

第 VI 部
波動光学

1　電磁場の境界条件

以上は一定の誘電率と透磁率を持つ物質中での電磁場を想定していたが、実際には場所によって誘電率や透磁率は異なる。ここでは異なる物質の境界での電磁場について考察する。二つの物質が平面を境に接しているとする。二つの物質にまたがる境界に垂直な長方形の周にファラデーの法則を適用して、

$$\int(E_1-E_2)\cdot ds+\int\frac{\partial B}{\partial t}dS=0$$

長方形を小さくしていけば、第二項は 0 に近づくので、

$$E_1\cdot ds=E_2\cdot ds$$

同じ領域にアンペールの法則を適用する。電流密度は 0 として、

$$\int(H_1-H_2)\cdot ds-\int\frac{\partial D}{\partial t}dS=0$$
$$H_1\cdot ds=H_2\cdot ds$$

次に境界面の一部を覆うような直方体にガウスの法則を適用する。直方体内の電荷を 0 として、

$$\int (D_1 - D_2) \cdot n = 0$$
$$D_1 \cdot n = D_2 \cdot n$$

同じ領域に磁場に関するガウスの法則を適用すると、

$$\int (B_1 - B_2) \cdot n = 0$$
$$B_1 \cdot n = B_2 \cdot n$$

となる。よって電磁場の境界条件は、

- 境界面に平行な電場は連続
- 境界面に平行な磁場は連続
- 境界面に垂直な電束密度は連続
- 境界面に垂直な磁束密度は連続

である。

2　ローレンツ振動子モデル

物質中を電磁波が入射したときのことを考える。原子核は重いのでほとんど動かないとしてよい。分子の中の電子の運動は量子力学の効果を考慮する必要があるが、今回は分子に拘束された電子を、抵抗を受けながら振動する調和振動子とみなす。これをローレンツ振動子モデルという。電子の変位を u とすると、固有振動数が ω_0 であるときの運動方程式は、

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \gamma\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{eE}{m}$$

である。電場が角振動数 ω で振動すれば、電子もそれに追随して動く。振動する変数の問題を解くときは、それを複素数で表すと便利である。これをフェーザ表示という。

$$E(t) = E_0 \sin(\omega t + \alpha) = \mathrm{Im}(E_0 e^{i\alpha} e^{i\omega t})$$
$$u(t) = u_0 \sin(\omega t + \beta) = \mathrm{Im}(u_0 e^{i\beta} e^{i\omega t})$$

と置く。相殺される $e^{i\omega t}$ は無視して、$E = E_0 e^{i\alpha}, u = u_0 e^{i\beta}$ とする。分極ベクトルと電束密度も同様に定義すると、先程の運動方程式は、

$$-\omega^2 u + i\gamma\omega u + \omega_0^2 u = \frac{eE}{m}$$
$$u = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

各分子に分極を起こす電子が z 個あり、単位体積中の分子数を n とすれば分極ベクトルは、

$$P = nzeu = \frac{nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} E$$

一般に分子レベルのミクロな電場と我々が観測するマクロな電場は同じではない。しかしその差が無視できるとすれば、複素電気感受率と複素誘電率は、

$$\chi(\omega) = \frac{nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$
$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{nze^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

となる。実際には、複数の固有振動数と減衰係数について足し合わせたものとなる。電場、電束密度、分極ベクトルは、その複素数表示の虚数部を見ればよいが、誘電率はそうでなはいことに注意しよう。複素電気感受率 $\chi = \chi_1 + i\chi_2$ の実部と虚部は、

$$\chi_1 = \frac{nze^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$
$$\chi_2 = -\frac{nze^2}{m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

となる。電場が電子に対してする仕事を考える。まず分極ベクトルは、

$$\begin{aligned} P(t) &= \mathrm{Im}(\chi(\omega)E(t)) \\ &= \mathrm{Im}((\chi_1(\omega) + i\chi_2(\omega))E_0 e^{i(\omega t + \alpha)}) \\ &= \chi_1(\omega)E_0 \sin(\omega t + \alpha) + \chi_2(\omega)E_0 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

より変位電流は、

$$i_p(t) = \frac{\partial P}{\partial t} = \omega\chi_1(\omega)E_0 \cos(\omega t + \alpha) - \omega\chi_2(\omega)E_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

なので、電場が単位体積単位時間当たりに電子に行う仕事を周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ について平均すると、

$$\begin{aligned} W &= \oint E(t) i_p(t) dt \\ &= \omega E_0^2 \oint \chi_1(\omega) \sin(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \alpha) - \chi_2(\omega) \sin^2(\omega t + \alpha) dt \end{aligned}$$

第一項は周積分で消える。よって

$$= -\frac{1}{2}\omega\chi_2(\omega)E_0^2$$

となる。$\chi_2(\omega)$ は負なので、電場は常に正の仕事をする。これは電場のエネルギーが誘電体に吸収されることを意味している。分子内で加速された電子の運動エネルギーが熱として失われる。

$$\frac{1}{\omega\chi_2(\omega)} \propto \frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}{\omega^2}$$

より吸収は共鳴点 $\omega=\omega_0$ で最も大きくなり、低周波や高周波の振動電場は誘電体との相互作用が弱く、ほとんど通り抜ける。また、振動数が小さい場合には $\omega=0$ に近づくので静電場に対する誘電率で近似できる。磁性体の磁化率や透磁率も振動する磁場に対しては振動数に依存するが、強磁性体以外の普通の物質では、χ_m は μ_0 に比べて非常に小さく、物質の電磁気的な性質にはほとんど影響を与えない。

3　誘電体中の電磁波

物質中のマクスウェル方程式は真空中と全く同じ形をしているので、電磁波の速さも真空中の誘電率と透磁率を物質中のものに変えるだけで良い。真空中同様、電荷密度と電流密度を 0 とすると波動方程式は、

$$\Delta E-\epsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$$

となるので物質中の光速は、

$$v=\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$\epsilon>\epsilon_0$ で μ は物質によって μ_0 より大きくなったり小さくなったりするが、結果的には物質中では光速は遅くなる。真空中との光速の比

$$n=\frac{c}{v}$$

をその物質の絶対屈折率という。電磁場の振動が速くなると、誘電率の振動数依存性が顕著になってくる。エネルギーの吸収を無視すれば、

$$\Delta E_\omega-\epsilon(\omega)\mu\frac{\partial E_\omega}{\partial t}=0$$
$$v_\omega=\frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)\mu}}$$

となる。振動数によって速さが異なるため、電磁波は時間とともに位相がずれて波の形が変わる。これを波の分散という。速さが異なれば屈折率も当然異なるので、異なる物質の境界面で分光する。これも分散と呼ばれる。

4　導体中の電磁波

導体中は自由電子があるため、振動電場による分極電流が無視できない。それに伴いエネルギーの吸収も大きく、電磁波の減衰も激しい。電場が x 方向、磁場が y 方向、z 方向に伝播する電磁波を考える。導体中に振動する電場が入射すると電子の動きに遅れが生じ、電場は相殺されないので、誘電率を考えることができる。

同様に透磁率も考えられる。電磁場は z, t のみに依存するとして、

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial t} &= 0\\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} - \epsilon\mu\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \mu i_x\end{aligned}$$

電場が振動する際は、導電率も振動数に依存する。しかし低周波の場合はほぼ一定とみなすことができるので、

$$i_x = \sigma E_x$$

と表せる。先程の第一式を z で、第二式を t で偏微分して辺々足すと、磁場の項が消えて、

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \epsilon\mu\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$$

となる。ここで振動電場を先程を同じように複素数で表す。

$$E_x(z,t) = E(z)\sin(\omega t + \alpha) = \mathrm{Im}(E(z)e^{i(\omega t+\alpha)})$$

これを代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= i\omega E_x\\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= -\omega^2 E_x\end{aligned}$$

なので共通の $e^{i(\omega t+\alpha)}$ を落とすと、

$$\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} + (\epsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega)E_x(z) = 0$$

これは単振動の微分方程式なので、$E(z) = E_0 e^{-ikz}$ と置くと、

$$\begin{gathered}[-k^2 + (\epsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega)]E_0 e^{-ikz} = 0\\ k^2 = \epsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega\end{gathered}$$

となる。ここで低周波の場合は第一項を無視できる。実際、普通の金属の導電率は $\sigma \simeq 10^7\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$、誘電率は $\epsilon \simeq \epsilon_0 \simeq 10^{-11}\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{N}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-2}$ として、

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon} \simeq 10^{18}\mathrm{s}^{-1}$$

となり、普通の電波 $(\omega \simeq 10^4 - 10^{10})$ や可視光 $(\omega \simeq 10^{14})$ では第二項だけで十分近似できる。この時波数は複号を選択して、

$$k = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu\sigma\omega} = \frac{1-i}{l}$$

なので電場は、

$$E_0 e^{i(\omega t - kz)} = E_0 e^{-z/l}\sin\left(\omega t - \frac{z}{l}\right)$$

となる。これは平らな導体の表面に平面波の電磁波が入射したときの様子を表している。$z = 0$ が導体の表面だとすると、$t = 0$ における導体内部の電場の様子は図のようになる。電場は導体に入った途端急激に減衰し、l の数倍の距離を進むとほとんど消えてしまう。侵入できる深さは先程の近似が成り立つ範囲で振動数が高いほど短い。$\omega = 10^{10}\mathrm{s}^{-1}$ の場合、

$$l \simeq \left(\frac{2}{4 \times 3.14 \times 10^{-7} \times 10^{7} \times 10^{10}} \right)^{1/2} \simeq 10^{-6}$$

となるので、電磁波は導体中にほとんど侵入できない。