天体力学

season07001674

2021 年 8 月 15 日 (初版 2021/08/15)

目次

第 I 部
天文学史

1 古代の天文学

初めて地球の大きさを測ろうと試みたのはエラトステネスだった。またアリスタルコス (B.C.310-230 頃) は半月になったときの太陽、地球、月の位置関係から太陽と地球の距離が地球と月の距離の 18-20 倍であると推測している。数値は大きく違うが方法自体は正しい。一方で天体間の絶対的な距離を測定するには地球上の二点から三角測量する必要があるが、当時の観測技術ではまともな数値は得られなかった。ニュートンの時代までは基本的に天体間の相対的な距離のみを用いて計算が行われていた。

円錐曲線論で有名なアポロニウス (B.C.250-200 頃) は周転円を導入し、惑星の順行・逆行及びそのときの明るさの変化、惑星の運行の不規則性を説明した。ヒッパルコスは離心円の導入や周転円を重ねることで惑星の軌道をより正確に近似した。プトレマイオス (トレミー) は『アルマゲスト』において、天動説を含めた当時の天文学を体系的に解説している。プトレマイオスは、惑星の不規則な運行の説明として、周転円と離心円に加え、円の中心からずれた点からの角速度が一定になるような運行を考えた。このずれた点のことをエカントという。彼はさらに出差 (月の軌道の摂動・歪み) を発見し、周転円と離心円によって説明した。天動説ではそれぞれの惑星の軌道半径を決定できず任意に拡大縮小できる。『アルマゲスト』においては、基本的に恒星に対して一周する時間の短い順に月、水星、金星、太陽、木星、土星の順に並べられた。水星、金星、太陽は恒星に対して一周する時間がほぼ一年と明確な違いはないが、最も支持されたのがこの配列であった。また星の見かけの明るさ (相対等級) を目に見える一番明るい星と一番暗い星の間の 6 段階に分けている。プトレマイオス以後の天文学は周転円・離心円・エカントをさらに複雑に組み合わせたモデルが考えられたが、惑星

の運行と正確に一致するようなものは得られなかった。

2 近代の宇宙観

地動説を提唱したコペルニクスは地球の運動を除いては基本的に伝統的な宇宙観を受け継いでいる。『天体の回転について』の形式はプトレマイオスの『アルマゲスト』を踏襲している。コペルニクスによれば、地球は太陽を中心とする回転する天球に固定されており、そのままでは公転とともに地軸も回転してしまう。実際には北極星は動かず地軸は回転していないので、公転と逆向きの円錐運動を考えて地軸の回転を相殺している。コペルニクスの体系では周転円を用いずに惑星の逆行を説明できる。惑星が逆行するときは惑星が地球に最も接近するときであり、必然的に明るさも最大となる。特に外惑星が逆行するときは太陽と反対側の位置にある。プトレマイオスの体系では外惑星の逆行時に太陽の反対側に来るようにするには導円と周転円が連動して動く必要があった。またコペルニクスの体系は内惑星の運行を自然に説明できる。水星や金星はその他の惑星と違い、太陽から一定以上離れることがない。プトレマイオスの体系ではそのために地球と太陽を結ぶ直線状に惑星の周転円の中心を置く必要があった。しかしコペルニクスの体系では、水星と金星は地球より内側の軌道を回っているとすれば太陽から最大離角以上離れることはない。惑星の公転周期は逆行の周期から算出できる。また惑星の軌道半径の比も決定することができる。よって少なくとも定性的にはコペルニクスの体系はプトレマイオスの体系より自然に惑星の運行を説明することができる。しかし惑星の運動をより正確に説明ために結局は周転円や離心円をプトレマイオスの体系の半分程度導入することとなった。一方で正確さはプトレマイオスの体系と比べてあまり違いはなかった。また地動説の証拠である年周視差は当時の技術では観測できず、1838 年のベッセルの観測まで待たねばならなかった。
ティコ・ブラーエ (1546-1601) は年周視差を観測できなかったことからコペルニクスの体系を受け入れることはなかったが、その代わりに独自の体系を提案した。ティコの体系では地球は宇宙の中心に静止しており、太陽と月は地球の周りを回っているが、それ以外の惑星は全て太陽の周りを回っている。ティコの体系はコペルニクスの体系と完全に数学的に同等であり、地球の静止以外の全ての性質を受け継いでいる。その損なわれた対称性のために多くのコペルニクス主義者には支持されなかった代わりに、多くの非コペルニクス主義者の支持を集めた。

3 暦

太陽暦が初めて使われたのは古代エジプトとされている。エジプトでは夏季モンスーンによって一年に一度ナイル川が氾濫していた。氾濫の時期がシリウスが日の出直前に上ってくる時期と一致していたことから、彼らは星を観察することで氾濫の時期を予測した (シリウス暦)。彼らは一年が 365.25 日であることを知っており、4 年に一度余分な日を設けた。
ヒッパルコス (B.C.190-125 頃) はロードス島に天文台を建設し、地球の歳差運動を発見した。地軸は黄道面に対して傾いており、トルクが発生し赤道が移動する。これを赤道の歳差という。また他の惑星の引力の影響から公転面つまり黄道が傾く。これを黄道の歳差という。これらを合わせたものを一般歳差という。黄道の歳差は赤道の歳差に比べて無視できるほど小さい。歳差によって地軸は公転と逆方向に 25772 年かけて一周することになる。地軸の回転に伴って春分点や北極星などは徐々に移動する。
時間の単位である秒・分・時は天体の運動に依らず厳密に定められている。しかし日・月・年などの回転の周期にはどの星を基準に取るかによって違いがある。

地球の自転周期の場合、太陽に対して一周する時間 (正午から次の正午) を太陽日と言い約 24 時間、恒星に対して一周する時間 (春分点の南中から次の南中) を恒星日と言い約 23 時間 56 分 4 秒である。歳差・章動によって恒星の一周する時間は恒星によって異なるので春分点を用いる。地球の公転は一日約 1 度で、公転と自転は同じ向きだから太陽日は恒星日より、24h/360°　= 4m ほど長い。地球の自転は潮汐力の影響で遅くなっており、自転周期が伸びている。地球の公転周期の場合、太陽に対して再び同じ面を向けるまでの時間 (分点・至点から次の分点・至点) を太陽年 (回帰年) と言い約 365.2422 太陽日、軌道上を恒星に対して一周する時間を恒星年と言い約 365.2564 太陽日である。地球の公転と歳差運動は逆方向だから太陽年は恒星年より 360°　/25772*4 = 20 分 24 秒ほど短い。暦においては生活上重要な日照や季節を考え、太陽日・太陽年を使う。月に関しては、公転と自転が同期している。月が太陽に対して一周する時間を朔望月と言い約 29.5 太陽日、恒星に対して一周する時間を恒星月と言い約 27.3 太陽日である。地球と月の公転の向きが同じなので、30 日*30°　/360°　= 2 日ほど長い

第 II 部
万有引力の法則

1　球殻の重力場 (ニュートンの球殻定理)

「万有引力」とは地上でも天上でも同じ形式の引力が働いていることを意味する。『プリンキピア』では地上における物体の運動についても論じているが、地上では地球を質点とみなせることは明らかではないので、球体の重力場を厳密に計算する必要があった。

一様な半径 a の球殻を考え、球殻の中心から r 離れた質点にかかる重力を求める。クーロンポテンシャルと同様ガウスの定理を使って計算することができるが、ベクトル解析がなかった当時のニュートンは『プリンキピア』において幾何学的な証明を与えている。ここでは積分を用いる。対称性より球殻の中心方向の力だけ考えれば良い。

$$\begin{aligned} dF &= \frac{G\cdot\frac{M}{4\pi a^2}\cdot 2\pi a\sin\theta\cdot a\mathrm{d}\theta\cdot m}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}(r-a\cos\theta) \\ &= \frac{GMm}{2(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}(r-a\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

である。

(1)$r \neq a$ のとき

$x = r - a\cos\theta$ とおくと $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = a\sin\theta$ だから、

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^\pi \frac{GMm}{2(a^2+r^2-2ar\cos\theta)^{3/2}}(r-a\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{r-a}^{r+a} \frac{GMm}{2a(a^2-x^2+2rx)^{3/2}}x\mathrm{d}x \\
&= \frac{GMm}{2ar}\left[\frac{(a^2-r^2+2rx)^{1/2}}{r} - \frac{x}{(a^2-r^2+2rx)^{1/2}}\right]_{r-a}^{r-a} \\
&= \frac{GMm}{2ar}\left\{\left(\frac{|r+a|}{r} - \frac{r+a}{|r+a|}\right) - \left(\frac{|r-a|}{r} - \frac{r-a}{|r-a|}\right)\right\} \\
&= \frac{GMm}{2ar}\left\{\frac{a}{r} - \left(\frac{|r-a|}{r} - \frac{r-a}{|r-a|}\right)\right\} \\
&= \begin{cases} \frac{GMm}{r^2} & (r>a) \\ 0 & (r<a) \end{cases}
\end{aligned}
$$

(2)$r = a$ のとき

$r = a$ を代入して

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{GMm}{4\sqrt{2}r^2}\int_0^\pi \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos\theta}}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{GMm}{4\sqrt{2}r^2}\left[2\sqrt{1-\cos\theta}\right]_0^\pi \\
&= \frac{GMm}{4\sqrt{2}r^2}(2\sqrt{2}-0) = \frac{GMm}{2r^2}
\end{aligned}
$$

となり、$r \to +a, r \to -a$ の場合の平均に等しい。

一様な球体の重力は球殻による重力の和なので、中心からの距離が r のとき、球体のうち半径 r 以下の領域の質量が質点に集まったときの重力と等しい。

2 ケプラー問題

ヨハネス・ケプラー (1571-1630) は師匠であるブラーエの火星の観測記録から惑星の軌道が楕円であると考えるようになった。実際、地球の軌道はほぼ真円だが、火星の離心率は約 0.09 と比較的扁平である。ケプラーは惑星の運行に関する三つの法則を発見し、『新天文学』(1609) で第一、第二法則を、『宇宙の調和』(1619) で第三法則を発表した。

第一法則 (楕円軌道の法則)　惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く。

第二法則 (面積速度一定の法則)　太陽を惑星を結ぶ線分が単位時間当たりに掃く面積は一定。

第三法則 (調和の法則)　惑星の公転周期の二乗は軌道長半径の三乗に比例する。

アイザック・ニュートン (1642-1727) は『プリンキピア』(1687) において、万有引力の法則とケプラーの法則が同値であることを証明した。『プリンキピア』の形式はユークリッドの『原論』を踏襲している。以下では万有引力の法則からケプラーの法則を導出する。太陽は静止しているとする。

まず惑星の角運動量 L は、

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = r \times F = 0$$

である。つまり万有引力は中心力なので角運動量は保存する。これは惑星の軌道が同一平面上にあることも示している。また時刻 t までに太陽と惑星を結ぶ線分が掃く面積を $S(t)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}|r \times \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}| \\
&= \frac{|L|}{2m}
\end{aligned}
$$

よって面積速度は一定である。

中心力場において惑星は同一平面上を動くので平面極座標で表すことができる。太陽と惑星の質量を M, m、太陽と惑星の距離を r とおくと、運動方程式は

$$
m\left\{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = -F(r)
$$

$$
\frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = 0
$$

第二式より $r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ は一定となり、これを h と置く。ここで $h = 2S = \frac{|L|}{m}$ であるからこの式は角運動量保存則を表す。次に、第一式に $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}r$ を掛けて積分すると、

$$
m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t - r\left(\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}r = -F(r)\mathrm{d}r
$$

左辺第二項は第二式を使って書き換える。中心力は保存力でありポテンシャル $V(r)$ が存在する。積分定数を E とおくと

$$
\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{h^2}{r^3}\mathrm{d}r = -V(r)
$$

ここで

$$
-\frac{h^2}{r^3}\mathrm{d}r = \frac{h^2}{r^2} = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2
$$

だから

$$
\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} + V(r) = E
$$

左辺第一項は運動エネルギーの極座標表示だからこれはエネルギー保存則を表す。E は全エネルギーを意味する。よって中心力場の下での方程式は

$$
\frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} = E - V(r)
$$

$$
r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = h
$$

となる。第一式はエネルギー保存則を、第二式は角運動量保存則を表す。第一式を第二式の二乗で割ると、

$$
\frac{1}{2}mh^2\left\{\frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = E - V(r)
$$

$u = \frac{1}{r}$ とおけば

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

なので

$$\frac{1}{2}mh^2\left\{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right\} = E - V(u^{-1})$$

両辺を θ で微分すると

$$\frac{1}{2}mh^2\left\{2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right\} = -\frac{\mathrm{d}V(u^{-1})}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{F(u^{-1})}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

両辺を $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ で割れば

$$mh^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right) = \frac{F(u^{-1})}{u^2}$$

が得られる。これをビネ方程式[*1]という。中心力が万有引力なら右辺は $-GMm$ だから、この微分方程式の解は

$$u = \frac{GM}{h^2} + k\cos(\theta - \alpha)$$

となる。$l = \frac{h^2}{GM}, e = \frac{kh^2}{GM}$ とおけば

$$r = \frac{l}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}$$

である。これは二次曲線を表す。l は半直弦、e は離心率と呼ばれる。$\alpha = 0$ とすれば

$$\begin{gathered} r + er\cos\theta = l \\ x^2 + y^2 = (l - ex)^2 = l^2 - 2elx + e^2x^2 \\ (1 - e^2)x^2 + 2elx + y^2 = l^2 \end{gathered}$$

(1)$e \neq 1$ のとき

$$\left(x + \frac{el}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{l^2}{1 - e^2} + \frac{e^2l^2}{(1 - e^2)^2} = \left(\frac{l}{1 - e^2}\right)^2$$

(2)$e = 1$ のとき

$$y^2 = l^2 - 2lx$$

従って惑星の軌道は、

$e = 0$ **のとき**　円
$0 < e < 1$ **のとき**　楕円
$e = 1$ **のとき**　放物線
$1 < e$ **のとき**　双曲線

[*1] ジャック・フィリップ・マリー・ビネ (1786-1856) が導出。

となる。$e < 1$ のとき周期 T は楕円の面積を面積速度で割ったものなので、

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\pi a \cdot a\sqrt{1-e^2}}{\frac{h}{2}} = \frac{2\pi a^{3/2}\sqrt{l}}{h} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2} \\
\frac{a^3}{T^2} &= \frac{GM}{4\pi^2}
\end{aligned}
$$

よって周期の二乗は軌道長半径の三乗に比例する。

3　軌道要素

軌道を決定する 6 個の変数軌道長半径 a, 離心率 e, 軌道傾斜角 I, 昇降点経度 Ω, 近点引数 ω, 近点通過時刻 t_0 を軌道要素という。元期平均近点角 σ、近点経度 $\omega = \omega + \Omega$、元記平均経度 $\epsilon = \sigma + \omega + \Omega$、近点距離 $q = a(1-e)$ が使われることもある。

4　軌道の保存量

エネルギーと角運動量を楕円の要素で表すことを考える。まず角運動量は

$$
\begin{aligned}
|L| &= 2m\frac{S(T)}{T} \\
&= 2m\frac{\pi a \cdot a\sqrt{1-e^2}}{\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2}} \\
&= \sqrt{GM}m\sqrt{a(1-e^2)} = m\sqrt{GMl}
\end{aligned}
$$

エネルギーは、

$$
E = \frac{1}{2}mh^2\left\{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right\} - GMmu
$$

$h^2 = GMl$ より

$$
E = \frac{1}{2}GMml\left\{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right\} - GMmu
$$

ここで $u = \frac{1+e\cos(\theta-\alpha)}{l}$ だから、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} - \frac{e}{l}\sin(\theta-\alpha) \\
&= -\frac{e}{l}\cos(\theta-\alpha) \\
\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 &= \frac{e^2}{l^2}\cos^2(\theta-\alpha) + \frac{1+2e\cos(\theta-\alpha)+e^2\cos^2(\theta-\alpha)}{l^2} \\
&= \frac{1+e^2+2e\cos(\theta-\alpha)}{l^2}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}GMml\frac{1+e^2+2e\cos(\theta-\alpha)}{l^2} - GMm\frac{1+e\cos(\theta-\alpha)}{l} \\
&= GMm\frac{-1+e^2}{2l} = -\frac{GMm}{2a}
\end{aligned}
$$

となる。エネルギーと角運動量は軌道を表すパラメータのうち軌道面及び、軌道長半径 a と離心率 e を表す。この二つの量だけでは楕円の平面上での向きつまり近日点の位置 α を決定できない。従ってこれを表すような保存量が存在するはずである。近日点において $\frac{\mathbf{r}}{r} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ である。そこで $\frac{r}{|r|}$ の時間微分を考える。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathbf{r}}{r} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}r - \mathbf{r}\dot{r}}{r^2} = \frac{(\dot{r}\cdot\dot{r})\dot{\mathbf{r}} - (\dot{r}\cdot r)\mathbf{r}}{r^3} \\
&= \frac{(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\times\mathbf{r}}{r^3} \\
&= \frac{L}{m}\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}
\end{aligned}
$$

運動方程式 $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathbf{r}}{r} &= -\frac{L}{m}\times\frac{\ddot{r}}{GM} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v\times L}{m} - GM\frac{\mathbf{r}}{r}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

よって左辺の括弧内は保存量であり、近日点において第一項、第二項共に近日点の方向を向いている。これに質量を掛けた

$$
A = v\times L - GMm\frac{\mathbf{r}}{r}
$$

をルンゲ＝レンツベクトルという。

5　観測技術の発展

ニュートンが万有引力の考えに到達したのは 1665 年だが、当時は天体の大きさや天体間の距離について正確は値は知られていなかった。ジャン・ピカール (1620-1682) は 1669 年に三角測量を行い、緯度一度の子午線弧を誤差約 0.3% で測量した (1615 年のスネルの観測では誤差 3%)。1675 年、ジョン・フラムスティード (1646-1720) の勧告により、後に経度の基準となるグリニッジ天文台が建設され、初代天文台長兼王室天文官にフラムスティードが就任した。フラムスティードは観測機器を改良し、精度を 1 秒にまで引き上げた。フラムスティードは月や彗星の観測データをニュートンに渡している。ニュートンは『プリンキピア』出版に当たって、これらの観測結果に基づいて月の自由落下の加速度や地上における重力加速度を計算し直した。

月や惑星の位置の他にフラムスティードは恒星の赤経と北極距離、黄経・黄緯を載せた目録を作っている。当時は大航海時代であり、海上で船の位置を決定する技術が必要とされていた。緯度を知るには星の高度を観測すれば良く (例えば北極星の高度がそのまま高度になる)、経度を割り出すには星の位置と時刻を知る必要があった。

エドモンド・ハレー (1656-1742) は 1676 年にセントヘレナ島を訪れ南半球から見える星の詳細な観測を行った。ハレーは過去の彗星の記録を整理し、その中のいくつかが同一のものであることを示し、周期を 75,6 年と予測した。この彗星の次の回帰年を予測し実際に観測されたため、ハレー彗星と呼ばれることになった。また金星の太陽面通過を利用して太陽視差を正確に測定できることを指摘している。ハレーは 1720 年に二代目王室天文官となっている。

1675 年にはレーマーが、木星の衛星の合と衝の時間差が光速が有限であることに起因するとして、光速を計算した。地動説が予測する恒星の年周視差は当時まだ観測されていなかったが、三代目王室天文官であるジェームズ・ブラッドレー (1693-1762) は年周視差観測の試みの中で 1728 年に光行差を、1748 年に章動 (歳差の微小成分) を発見した (年周視差の観測には至らなかった)。光行差は光速が有限であることと地球の公転運動を要請しており、思いがけず地動説の証明となった。古代に発見された歳差や章動の問題は翌年の 1749 年にダランベールによって解かれた。

ニュートンはまた回転体の形状について論じている。当時地球の形状が赤道方向に膨らんでいるのか南北方向に膨らんでいるのかについて、激しい論争が起こっていた。1735 年のフランス科学アカデミーによる測地遠征の結果から、地球は赤道方向に膨らんでいる回転楕円体であることが立証された。

6 二体問題

二つの質点系について考える。運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} = -Gm_2\frac{r_1 - r_2}{r_{12}^3}$$
$$\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} = -Gm_1\frac{r_2 - r_1}{r_{12}^3}$$

第ニ式 - 第一式より

$$\frac{\mathrm{d}(r_2 - r_1)}{\mathrm{d}t} = G(m_1 + m_2)\frac{r_2 - r_1}{r_{12}^3}$$

つまり質点 1 に対する質点 2 の相対運動は、質量 $m_1 + m_2$ の固定された質点に対する運動に等しい。一方、重心 $r_G = \frac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}$ は等速直線運動をする。$r_1 - r_2 = \frac{m_1+m_2}{m_2}(r_1 - r_G)$ なので、

$$\frac{\mathrm{d}(r_1 - r_G)}{\mathrm{d}t} = -G\frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}\frac{r_1 - r_G}{|r_1 - r_G|^3}$$

つまり重心周りの質点 1 の運動は、質量 $\frac{m_2^3}{m_1(m_1+m_2)^2}$ の固定された質点に対する運動に等しい。

第 III 部

軌道計算

1 ケプラー方程式

ケプラーは万有引力の法則が発見される前『新天文学』(1609) において、ケプラーの第一及び第二法則から惑星の軌道上の位置を決定する方程式を求めている。

原点を中心とし、焦点が x 軸上にあるような楕円軌道を考え、離心近点角を E とする。惑星の x,y 座標を考えると、

$$
\begin{aligned}
ae + r\cos\theta &= a\cos E \\
r\sin\theta &= a\sqrt{1-e^2}\sin E
\end{aligned}
$$

両辺を t で微分すると

$$
\begin{aligned}
\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta &= -a\dot{E}\sin E \\
\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta &= a\sqrt{1-e^2}\dot{E}\cos E
\end{aligned}
$$

第二式 $\times r\cos\theta$ - 第一式 $\times r\sin\theta$ より

$$
\begin{aligned}
r^2\dot{\theta} &= a\dot{E}(\sqrt{1-e^2}\cos E\cdot r\cos\theta + \sin E\cdot r\sin\theta) \\
&= a\dot{E}\{\sqrt{1-e^2}\cos E(a\cos E - ae) + \sin E(a\sqrt{1-e^2}\sin E)\} \\
&= a^2\sqrt{1-e^2}\dot{E}(1-e\cos E)
\end{aligned}
$$

面積速度の関係

$$
\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\dot{E}(1-e\cos E) &= \frac{r^2\dot{\theta}}{a^2\sqrt{1-e^2}} \\
&= \frac{2\pi}{T} = n
\end{aligned}
$$

両辺を積分して

$$
E - e\sin E = n(t-t_0) = M
$$

となる。n は平均角速度、t_0 は積分定数で近点通過時刻である。M は平均近点角と呼ばれる。

2　ケプラー方程式の解

2.1　ラグランジュの方法

2.2　ベッセル関数による方法

$e\sin E$ は M の周期関数かつ奇関数だから以下のようにフーリエ展開できる。

$$
e\sin E = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nM
$$

係数は

$$
A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e\sin E\sin nM\mathrm{d}M
$$

部分積分して

$$A_n = -\frac{2}{n\pi}[e\sin E\cos nM]_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}(e\sin E)}{\mathrm{d}M}\cos nM\mathrm{d}M$$
$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}(M+E)}{\mathrm{d}M}\cos nM\mathrm{d}M$$
$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos nM\mathrm{d}M + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos nM\mathrm{d}E$$

第一項は cos の周期性により消える。

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos n(E + e\sin E)\mathrm{d}E$$

E は積分変数だから係数が求められたことになる。n 次のベッセル関数[*2]

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\cos\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta$$

を用いると $\frac{2}{\pi}J_n(-ne)$ に等しいので、

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}J_n(-ne)\sin nM$$

2.3 コーシーの第一定理

平均近点角 M についての周期 2π の周期関数 $S(M)$ の複素フーリエ展開

$$S(M) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikM)$$

を考える。$s = \exp(iE) = \cos E + i\sin E$ とおくと、

$$\exp(iM) = \exp(i(E + e\sin E)) = \exp(iE)\exp(e\cdot i\sin E)$$
$$= s\exp\left(-e\cdot\frac{s - s^{-1}}{2}\right) = s\exp\left(-\frac{e(s - s^{-1})}{2}\right)$$

となる。ここで周期関数 $U(M) = \frac{r}{a}\exp\left(\frac{e(s-s^{-1})}{2}\right)S(M)$ の離心近点角に関する複素フーリエ展開を

$$U(E) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k \exp(ikE)$$

[*2] ベッセル関数はフリードリヒ・ヴィルヘルム・ベッセル (1784-1846) がケプラー方程式の解析解を導出する際に導入された。

とすると

$$\begin{aligned}
c'_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(E)\exp(-ikE)\mathrm{d}E \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{a}\exp(k\frac{e(s-s^{-1})}{2})S(M)\exp(-ikE)\mathrm{d}E \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r}{a}\exp(k\frac{e(s-s^{-1})}{2})S(M)\exp(-ikE)\mathrm{d}E \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(M)\frac{\exp(iE)}{\exp(iM)}^k\exp(-ikE)\frac{r}{a}\mathrm{d}E \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(M)\exp(ikM)\frac{r}{a}\mathrm{d}E
\end{aligned}$$

$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}E} = 1 + e\cos E = \frac{r}{a}$ より

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(M)\exp(ikM)\mathrm{d}M = c_k$$

となる。
$S = \frac{a}{r}$ のとき $U = \exp\left(i\frac{e(s-s^{-1})}{2}\right)$ はベッセル関数の母関数であり

$$U = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(ke)s^k$$

なので

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty} J_i(ie)\cos iM$$

2.4 逐次近似

離心近点角を以下の漸化式で近似的に求める。

$$E_0 = M, E_{n+1} = M - e\sin E_n$$

第 n 項の誤差 $\epsilon_n = E_n - E$ を評価する。

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n+1} &= E_{n+1} - E = M - e\sin E_n - E \\
&= e\sin E - e\sin(E+\epsilon_n) \\
&= -e(\sin E - \sin E\cos\epsilon_n - \cos E\sin\epsilon_n) \\
&= e\cos E\sin\epsilon_n - e\sin E(1-\cos\epsilon_n) \\
&= e\cos E\epsilon_n + O(\epsilon_n^2)
\end{aligned}$$

より E_n は E に収束する。離心率が小さいほど収束は速い。

2.5 ニュートン・ラプソン法

$f(x)=0$ の近似値を

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

によって求める。ニュートン・ラプソン法は二次収束であり、x_n が x に収束するときの誤差は

$$\epsilon_{n+1} = -\frac{f''(x)}{2f'(x)}\epsilon_n^2$$

となる。$f(E) = E + e\sin E - M$ とおけば

$$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n + e\sin E_n - M}{1 - e\cos E_n}$$
$$\epsilon_{n+1} = -\frac{e\sin E}{2(1-e\cos E)}\epsilon_n^2$$

となる。離心率が大きい場合にはこちらの方が収束が速い。

第 IV 部
三体問題

1 潮汐力

三質点 P_1, P_2, P_3 を考え、それぞれの位置ベクトルを r_1, r_2, r_3、質量を m_1, m_2, m_3 とする。P_1 から P_2 を見たときの運動は、

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_1}{\mathrm{d}t^2} = Gm_2\frac{r_2 - r_1}{r_{12}^3} + Gm_3\frac{r_3 - r_1}{r_{13}^3}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 r_2}{\mathrm{d}t^2} = Gm_1\frac{r_1 - r_2}{r_{21}^3} + Gm_3\frac{r_3 - r_2}{r_{23}^3}$$

より

$$\frac{\mathrm{d}^2 (r_2 - r_1)}{\mathrm{d}t^2} = -G(m_1+m_2)\frac{r_2 - r_1}{r_{12}^3} + Gm_3\left(-\frac{r_3 - r_1}{r_{13}^3} + \frac{r_3 - r_2}{r_{23}^3}\right)$$

となる。第一項のみであれば二体問題の式と等しい。第二項の摂動を潮汐力という。三質点が一直線上にあるとき、第二項は P_1 から P_3 へ向かう単位ベクトルを e として、

$$Gm_3\left(\frac{1}{r_{23}^2} - \frac{1}{r_{13}^2}\right)e$$

P_1, P_2, P_3 が地球、月、太陽の位置関係にあるとする。新月のとき潮汐力は太陽の方向、満月のとき潮汐力は太陽と反対方向となる。P_1, P_2, P_3 を地球、海水、月とすれば、月と同じ側と反対側で満潮となる。

ベクトルポテンシャル

$$V(r_{12}) = Gm_3\left(\frac{1}{r_{23}} - \frac{r_{12}\cdot r_{13}}{r_{13}^3}\right)$$
$$= Gm_3\left(\frac{1}{\sqrt{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}\cdot r_{13}}} - \frac{r_{12}\cdot r_{13}}{r_{13}^3}\right)$$

を使うと潮汐力は

$$R = \frac{\partial V}{\partial r_{12}} = Gm_3\left(\frac{2r_{12} - 2r_{13}}{-2\sqrt{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}\cdot r_{13}}^3} - \frac{r_{13}}{r_{13}^3}\right)$$
$$= Gm_3\left(\frac{r_{23}}{r_{23}^3} - \frac{r_{13}}{r_{13}^3}\right)$$

と書ける。V を潮汐ポテンシャルと呼ぶ。$r_{12} \ll r_{13}$ として、潮汐ポテンシャルの第一項をルジャンドル多項式[*3]を用いて展開する

$$\frac{1}{r_{23}} = \frac{1}{\sqrt{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}}}$$
$$= \frac{1}{r_{13}}\left\{1 + \left(\frac{r_{12}}{r_{13}}\right)^2 - 2\frac{r_{12}}{r_{13}}\cos\theta\right\}^{-1/2}$$
$$= \frac{1}{r_{13}}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{r_{12}}{r_{13}}\right)^i P_i(\cos\theta)$$

第一項は r_{23} と独立。第二項は

$$\frac{r_{12}}{r_{13}^2}\cos\theta = \frac{r_{12}r_{13}}{r_{13}^3}\cos\theta$$

より R の第二項と相殺する。よって第三項のみを考えると、

$$V = Gm_3\frac{r_{12}^2}{r_{13}^3}P_2(\cos\theta)$$
$$= Gm_3\frac{r_{12}^2}{r_{13}^3}\frac{1}{2}(3\cos\theta^2 - 1)$$
$$= \frac{Gm_3}{2r_{13}^3}(3r_{12}^2\cos\theta^2 - r_{12}^2)$$

[*3] ルジャンドル多項式は 1782 年、アドリアン=マリ・ルジャンドル (1752-1833) がニュートンポテンシャルの展開係数として導入した。

$r_{12} = (x, y, z), r_{13} = (x', y', z')$ とすると

$$\begin{aligned}
V &= \frac{Gm_3}{2r_{13}^3}\left\{\frac{3}{r_{13}^2}(xx' + yy' + zz')^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right\} \\
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{Gm_3}{2r_{13}^3}\left\{\frac{6x'}{r_{13}^2}(xx' + yy' + zz') - 2x\right\} \\
&= \frac{Gm_3}{r_{13}^3}\left\{\frac{3x'}{r_{13}^2}(xx' + yy' + zz') - x\right\} \\
&= \frac{Gm_3}{r_{13}^3}\left\{\frac{3x' r_{12}}{r_{13}}\cos\theta - x\right\}
\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \\
&= \frac{Gm_3}{r_{13}^3}\sqrt{\frac{9r_{12}^2\cos^2\theta}{r_{13}^2}r_{13}^2 - \frac{6r_{12}\cos\theta}{r_{13}}r_{12}r_{13}\cos\theta + r_{12}^2} \\
&= \frac{Gm_3}{r_{13}^3}\sqrt{9r_{12}^2\cos^2\theta - 6r_{12}^2\cos^2\theta + r_{12}^2} \\
&= \frac{Gm_3 r_{12}}{r_{13}^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

2　制限三体問題

二体に比べて第三の物体が無視できるほど小さい場合、制限三体問題という。このとき二体はケプラー運動をする。円運動するものを円制限三体問題という。

質点 P_1, P_2 は有限質量を持ち、P_3 の質量が無視できるほど小さいとする。P_1, P_2, P_3 の位置をそれぞれ r_1, r_2, r と置く。また二体のケプラー運動の軌道長半径を $a = |r_2 - r_1|$ とする。P_1, P_2 の重心を原点にとり軌道面を xy 平面にとると、第三の質点の運動方程式は

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{\partial U}{\partial r} \\
U(r) &= -\frac{Gm_1}{|r - r_1|} - \frac{Gm_2}{|r - r_2|}
\end{aligned}$$

二体の円運動の角速度を n とするとケプラーの第三法則より

$$n^2 a^3 = G(m_1 + m_2)$$

である。P_1, P_2 を固定した座標 (X, Y, Z) で考える。最初、二体は x 軸上にあるとすると、

$$\begin{aligned}
x &= X\cos nt - Y\sin nt \\
y &= X\sin nt + Y\cos nt \\
z &= Z
\end{aligned}$$

である。$R_1 = \left(-\frac{m_2}{m_1+m_2}a, 0\right), R_2 = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}a, 0\right)$ だから運動方程式は

$$\begin{aligned}
\ddot{X} - 2n\dot{Y} - n^2 X &= -\frac{\partial U}{\partial X} \\
\ddot{Y} + 2n\dot{X} - n^2 Y &= -\frac{\partial U}{\partial Y} \\
\ddot{Z} &= -\frac{\partial U}{\partial Z} \\
U(R) &= -\frac{Gm_1}{|R-R_1|} - \frac{Gm_2}{|R-R_2|}
\end{aligned}$$

となる。左辺第二項はコリオリ力、第三項は遠心力を表す。遠心力の項を左辺に移項すると

$$\begin{aligned}
\ddot{X} - 2n\dot{Y} &= -\frac{\partial U'}{\partial X} \\
\ddot{Y} + 2n\dot{X} &= -\frac{\partial U'}{\partial Y} \\
\ddot{Z} &= -\frac{\partial U}{\partial Z}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$U'(R) = U(R) - \frac{1}{2}n^2(X^2+Y^2) \tag{2}$$

$$= -\frac{Gm_1}{|R-R_1|} - \frac{Gm_2}{|R-R_2|} - \frac{1}{2}n^2(X^2+Y^2) \tag{3}$$

上の三式にそれぞれ $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ を掛けて時間積分すると

$$\frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + U'(R) = \mathrm{const}$$

となる。符号を逆にした

$$\begin{aligned}
C_J &= \frac{Gm_1}{|R-R_1|} + \frac{Gm_2}{|R-R_2|} + \frac{1}{2}n^2(X^2+Y^2) - \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) \\
&= \frac{Gm_1}{|r-r_1|} + \frac{Gm_2}{|r-r_2|} + n(x\dot{y} - \dot{x}y) - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)
\end{aligned}$$

はヤコビ積分と呼ばれ、円制限三体問題の保存量である。

2.1 ラグランジュ点

三体の相対的な位置が不変であるような点を平衡点と言い、制限三体問題の平衡点をラグランジュ点という。ラグランジュ点は 5 個あり、L_1-L_5 と記号が付けられている。$\dot{R} = \ddot{R} = 0$ であるような点を求めれば良

いので式 (1) より $-\frac{\partial U'}{\partial R}=0$ だから、

$$
\begin{aligned}
|R-R_1| &= \sqrt{\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}a\right)^2+Y^2+Z^2} \\
|R-R_1| &= \sqrt{\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}a\right)^2+Y^2+Z^2} \\
U'(R) &= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{G(m_1+m_2)}{|R-R_1|}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{G(m_1+m_2)}{|R-R_2|}-\frac{1}{2}n^2(X^2+Y^2) \\
&= -\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_1|}n^2-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_2|}n^2-\frac{1}{2}n^2(X^2+Y^2)
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial U'}{\partial X} &= n^2X-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_1|^3}n^2\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}a\right)-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_2|^3}n^2\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}a\right)=0 \\
&\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_1|^3}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_2|^3}\right)X+\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(\frac{a^4}{|R-R_2|^3}-\frac{a^4}{|R-R_1|^3}\right)=0
\end{aligned}
$$

同様に

$$
\begin{aligned}
\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_1|^3}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_2|^3}\right)Y=0 \\
-\frac{\partial U'}{\partial Z}=n^2Z=0 \\
Z=0
\end{aligned}
$$

結局

$$
\begin{gathered}
\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_1|^3}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_2|^3}\right)X+\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(\frac{a^4}{|R-R_2|^3}-\frac{a^4}{|R-R_1|^3}\right)=0 \\
-\left(1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_1|^3}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{a^3}{|R-R_2|^3}\right)Y=0 \\
Z=0
\end{gathered}
$$

を満たす。

(a) 直線解

$$
1-\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{r_{12}^3}{|R-R_1|^3}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{r_{12}^3}{|R-R_2|^3}\neq 0
$$

のとき $Y=0$ より

$$
\begin{aligned}
|R-R_1| &= |X+\frac{m_2}{m_1+m_2}d| \\
|R-R_2| &= |X-\frac{m_1}{m_1+m_2}d|
\end{aligned}
$$

$\alpha = \frac{m_1}{m_1+m_2}, \beta = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ と置くと、

$$X/d - \alpha\frac{X/d+\beta}{|X/d+\beta|^3} - \beta\frac{X/d-\alpha}{|X/d-\alpha|^3} = 0$$

$m_1 \geq m_2$ とすれば $1 > \alpha \geq \frac{1}{2} \geq \beta > 0$ となる。

$(1) L_3 : X/d < -\beta$

$$X/d + \frac{\alpha}{(X/d+\beta)^2} + \frac{\beta}{(X/d-\alpha)^2} = 0$$

$(2) L_1 : -\beta < X/d < \alpha$

$$X/d - \frac{\alpha}{(X/d+\beta)^2} + \frac{\beta}{(X/d-\alpha)^2} = 0$$

$(3) L_2 : \alpha < X/d$

$$X/d - \frac{\alpha}{(X/d+\beta)^2} - \frac{\beta}{(X/d-\alpha)^2} = 0$$

これらは二体から受ける重力と遠心力が釣り合っている点である。その合力は区間 $(-\infty, -\beta), (-\beta, \alpha), (\alpha, \infty)$ において単調増加でかつ端点での極限が $-\infty, \infty$ に発散する。よってそれぞれの区間で解をただ一つ持つ。また極値を持たないのでいずれも不安定である。

(b) 三角解

$$1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{d^3}{r_{13}^3} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\frac{d^3}{r_{23}^3} = 0$$
$$\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\left(\frac{d^4}{r_{23}^2} - \frac{d^4}{r_{13}^2}\right) = 0$$

第二式より $r_{13} = r_{23}$、さらに第一式より $r_{13} = r_{23} = r_{12}$ となる。つまり三体 P_1, P_2, P_3 は正三角形をなす。よって P_3 の座標は

$$X = \frac{m_1 - m_2}{m_1+m_2}d, Y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}d$$

Y が正の解を L_4、負の解を L_5 と呼ぶ。太陽-木星系の L_4, L_5 近傍には数千個の小惑星が発見されており、トロヤ群と呼ばれている。

2.2 平衡解の安定性

平衡点 $(X_i, Y_i, Z_i = 0)$ からの微小変位を (x, y, z) とする。

$$\mathrm{d}U(X,Y,Z) = \frac{\partial U}{\partial X_i}x + \frac{\partial U}{\partial Y_i}y + \frac{\partial U}{\partial Z_i}z$$

と近似すると運動方程式は、

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} + \frac{\partial^2 U'}{\partial X_i^2}x + \frac{\partial^2 U'}{\partial X_i Y_i}y + \frac{\partial^2 U'}{\partial X_i Z_i}z = 0$$
$$\ddot{y} + 2n\dot{x} + \frac{\partial^2 U'}{\partial Y_i X_i}x + \frac{\partial^2 U'}{\partial Y_i^2}y + \frac{\partial^2 U'}{\partial Y_i Z_i}z = 0$$
$$\ddot{z} + \frac{\partial^2 U'}{\partial Z_i X_i}x + \frac{\partial^2 U'}{\partial Z_i Y_i}y + \frac{\partial^2 U'}{\partial Z_i^2}z = 0$$

$Z_i = 0$ より $\frac{\partial^2 U'}{\partial Z_i X_i} = \frac{\partial^2 U'}{\partial Z_i Y_i} = 0$ なので

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} + Ax + By = 0 \tag{4}$$
$$\ddot{y} + 2n\dot{x} + Bx + Cy = 0 \tag{5}$$
$$\ddot{z} + Dz = 0 \tag{6}$$
$$A = \frac{\partial^2 U'}{\partial X_i^2}, B = \frac{\partial^2 U'}{\partial X_i Y_i}, C = \frac{\partial^2 U'}{\partial Y_i^2}, D = \frac{\partial^2 U'}{\partial Z_i^2} \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

XY 平面内の運動と Z 軸方向の運動は独立である。

(a)XY 平面内の運動

式 (4)(5) は定数係数線形微分方程式なので、

$$x = k_1 e^{\lambda t}, y = k_2 e^{\lambda t}$$

となる。代入すると

$$\begin{cases} (\lambda^2 + A)k_1 + (-2n\lambda + B)k_2 = 0 \\ (2n\lambda + B)k_1 + (\lambda^2 + C)k_2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + A & -2n\lambda + B \\ 2n\lambda + B & \lambda^2 + C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列の行列式が非零のとき $k_1 = k_2 = 0$ となり平衡解そのものである。よって行列式が 0 となる。

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda^2 + A & -2n\lambda + B \\ 2n\lambda + B & \lambda^2 + C \end{vmatrix} &= (\lambda^2 + A)(\lambda^2 + C) - (-2n\lambda + B)(2n\lambda + B) \\ &= (\lambda^4 + (A + C)\lambda^2 + AC) - (-4n^2\lambda^2 + B^2) \\ &= \lambda^4 + (4n^2 + A + C)\lambda^2 + (AC - B^2) = 0 \end{aligned}$$

この方程式は天体力学で永年方程式と呼ばれる。

(b)Z 軸方向の運動

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial^2 U'}{\partial Z_i^2} \\ &= \left\{ \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left(\frac{a}{|R - R_1|} \right)^3 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{a}{|R - R_2|} \right)^3 \right\} n^2 \end{aligned}$$

いずれの場合も $D > 0$ なので調和振動となる。

2.3 ヒル圏

速度 0 の曲面をゼロ速度曲面という。また $Z = 0$ のときはゼロ速度曲線と呼ばれる。

$$\frac{Gm_1}{\sqrt{\left(X + \frac{m_2}{m_1+m_2}d\right)^2 + Y^2}} + \frac{Gm_2}{\sqrt{\left(X - \frac{m_1}{m_1+m_2}d\right)^2 + Y^2}} + \frac{1}{2}n^2(X^2 + Y^2) = C_J$$

P_1 近傍では第一項、P_2 近傍では第二項、P_1, P_2 から十分離れた地点では第三項が支配的となる。

$$
\begin{aligned}
\frac{Gm_1}{\sqrt{\left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}d\right)^2+Y^2}} &= C_J \\
\therefore \left(X+\frac{m_2}{m_1+m_2}d\right)^2+Y^2 &= \left(\frac{Gm_2}{C_J}\right)^2 \\
\frac{Gm_2}{\sqrt{\left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}d\right)^2+Y^2}} &= C_J \\
\therefore \left(X-\frac{m_1}{m_1+m_2}d\right)^2+Y^2 &= \left(\frac{Gm_1}{C_J}\right)^2 \\
\frac{1}{2}n^2(X^2+Y^2) &= C_J \\
\therefore X^2+Y^2 &= \frac{2C_J}{n^2}
\end{aligned}
$$

より近似的には P_1 を中心とする半径 $\frac{Gm_2}{C_J}$ の円、P_2 を中心とする半径 $\frac{Gm_1}{C_J}$ の円、原点を中心とする半径 $\frac{\sqrt{2C_J}}{n}$ の円となる。P_1 近傍と P_2 近傍が丁度接するとき P_2 近傍をヒル圏という。

第 V 部
摂動論

1 定数変化法

一体問題に摂動が働く場合を考える。変数を $(x_1, x_2, x_3), (v_1, v_2, v_3)$ と置く。摂動を X_i とすると運動方程式は

$$
\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = -m\frac{r}{|r|^3} + X_i
$$

一階連立の方程式に書き換えると

$$
\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = v_i \tag{9}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = -m\frac{x}{r^3} + X_i \tag{10}
$$

摂動がないとき $(X_i = 0)$ の解は 6 個の積分定数を用いて

$$
x_i = f_i(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t), v_i = g_i(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \tag{11}
$$

$$
\frac{\partial f_i}{\partial t} = g_i, \frac{\partial g_i}{\partial t} = -\frac{m}{r^3}f_i \tag{12}
$$

$$
\tag{13}
$$

と書ける。摂動のある場合はこの積分定数を t の関数とする。これらは接触要素、特に積分定数が軌道要素のときは接触軌道要素と呼ばれる。式 (9)(10) に代入すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_i}{\partial t} + \Sigma_j \frac{\partial f_i}{\partial c_j}\frac{\partial c_j}{\partial t} &= g_i \\
\frac{\partial g_i}{\partial t} + \Sigma_j \frac{\partial g_i}{\partial c_j}\frac{\partial c_j}{\partial t} &= -\frac{m}{r^3} f_i + X_i
\end{aligned}
$$

式 (11)(12) より

$$
\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial c_j}\frac{\partial c_j}{\partial t} = 0 \tag{14}
$$

$$
\sum_j \frac{\partial g_i}{\partial c_j}\frac{\partial c_j}{\partial t} = X_i \tag{15}
$$

$$
\tag{16}
$$

$k = 1, 2, ..., 6$ について、14 に $-\frac{\partial g_i}{\partial c_k}$ を掛け、15 に $\frac{\partial f_i}{\partial c_k}$ を掛けて足すと

$$
\sum_j [c_k, c_j] \frac{\mathrm{d}c_j}{\mathrm{d}t} = \sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial c_k}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
[c_k, c_j] &= \sum_i \left(\frac{\partial f_i}{\partial c_k}\frac{\partial g_i}{\partial c_j} - \frac{\partial f_i}{\partial c_j}\frac{\partial g_i}{\partial c_k} \right) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial c_k}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_j} - \frac{\partial x_i}{\partial c_j}\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial c_k} \right) \\
&= \sum_i \frac{\partial (x_i, \dot{x}_i)}{\partial (c_k, c_j)}
\end{aligned}
$$

はラグランジュ括弧式と呼ばれる。

1.1 ラグランジュの惑星方程式

摂動力が摂動関数 $R(x_i)$ を用いて

$$
X_i = \frac{\partial R}{\partial x_i}
$$

と書けるとき、方程式 1 は

$$
\sum_j [c_k, c_j] \frac{\mathrm{d}c_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial R}{\partial x_i}
$$

となる。積分定数としてケプラー要素 $a, e, I, \sigma, \omega, \Omega$ を用いる。ラグランジュ括弧式を計算すると

$$
\begin{aligned}
[\sigma, a] &= \frac{1}{2} na \\
[\omega, a] &= \frac{1}{2} na\eta \\
[\omega, e] &= -\frac{na^2 e}{\eta} \\
[\Omega, a] &= \frac{1}{2} na\eta \cos I \\
[\Omega, e] &= -\frac{na^2 e \cos I}{\eta} \\
[\Omega, I] &= -na^2 \eta \sin I
\end{aligned}
$$

方程式は

$$
\begin{aligned}
[\sigma, a]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial R}{\partial \sigma} \\
[\omega, a]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + [\omega, e]\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
[\Omega, a]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + [\Omega, e]\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + [\Omega, I]\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
[a, \sigma]\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + [a, \omega]\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + [a, \Omega]\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial R}{\partial a} \\
[e, \omega]\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + [e, \Omega]\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial R}{\partial e} \\
[I, \Omega]\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial R}{\partial I}
\end{aligned}
$$

$\frac{\mathrm{d}c_k}{\mathrm{d}t}$ について解くと、

$$
\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial t} \tag{17}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \sigma} - \frac{\eta}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial \omega} \tag{18}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{na^2\eta \tan I}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\eta \sin I}\frac{\partial R}{\partial \Omega} \tag{19}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} - \frac{\eta^2}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} \tag{20}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta}{na^2 e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{1}{na^2\eta \tan I}\frac{\partial R}{\partial I} \tag{21}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{na^2\eta \sin I}\frac{\partial R}{\partial I} \tag{22}
$$

ここで $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ である。式 (17) には分母に $e, \sin I$ が表れる。$e = 0, I = 0$ は近点や昇降点が定義できないことによる見かけの特異点である。数学的に問題はないが、数値計算の際は e, I が小さいときに桁落ちが

発生するので次の変数が使われることがある。

$$h = e\sin\tilde{\omega}, k = e\cos\tilde{\omega}$$
$$p = \sin\frac{I}{2}\sin\Omega, q = \sin\frac{I}{2}\cos\Omega$$

1.2 ガウスの惑星方程式

数値計算の際には摂動力を直接用いる方が計算量が少ない。
摂動力を以下のように互いに直交する方向に分解する。

1. 動径方向 R + 軌道面内で動径に垂直方向 S + 軌道面に垂直方向 W
2. 接線方向 T + 軌道面内で接線に垂直方向 N + 軌道面に垂直方向 W

ただしこの順番に右手系であるとする。$X = R + S + W$ に分解したときの方程式は

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{na}\left(\frac{ae\sin f}{\eta}R + \frac{a^2\eta}{r}S\right) \tag{23}$$
$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta}{na}\sin fR + (\cos f + \cos u)S \tag{24}$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{na^2\eta}\cos(f+\omega)W \tag{25}$$
$$\frac{\mathrm{d}\sigma^I}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} - \frac{\eta^2}{e}\cos f\right)R - \frac{\eta^2\sin f}{nae}\left(1+\frac{r}{p}\right)S \tag{26}$$
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta}{nae}\left\{-\cos fR + \sin f\left(1+\frac{r}{p}\right)S\right\} - \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\eta\tan I}W \tag{27}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\eta\sin I}W \tag{28}$$
$$\tag{29}$$

となる。動径ベクトルと速度ベクトルのなす角を θ とおくと

$$R = T\cos\theta - N\sin\theta$$
$$S = T\sin\theta + N\cos\theta$$

なので $X = T + N + W$ に分解したときの方程式は式 (23) に代入すれば良い。

参考文献

[1] P・ホームズ F・ディアク. **天体力学のパイオニアたち カオスと安定性をめぐる人物史 *(上)***.
[2] トーマス・クーン. **コペルニクス革命 科学思想史序説**. 紀伊國屋書店, 1976. 常石敬一 訳.
[3] 永田一清. **基礎力学 *(ライブラリ工学基礎物理学 1)***. サイエンス社, 2016.
[4] 桜井邦朋. **天文学史**. 朝倉書店, 1990.
[5] 木下宙. **天体と軌道の力学**. 東京大学出版会, 2007.
[6] 和田純夫. **プリンキピアを読む**. 講談社, 2009.