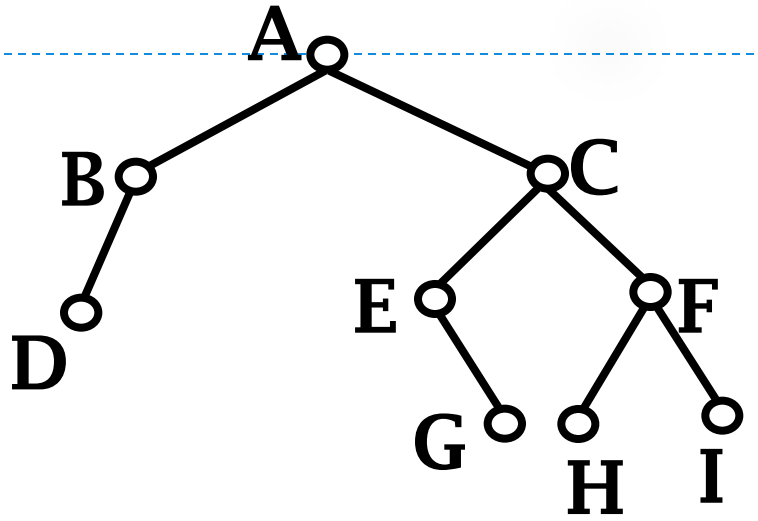
数据结构与算法(五)

张铭 主讲

采用教材：张铭，王腾蛟，赵海燕 编写
高等教育出版社，2008. 6 （“十一五”国家级规划教材）

http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg

第五章 二叉树



- 二叉树的概念
- 二叉树的抽象数据类型
  - 深度优先搜索
  - 宽度优先搜索
- 二叉树的存储结构
- 二叉搜索树
- 堆与优先队列
- Huffman树及其应用

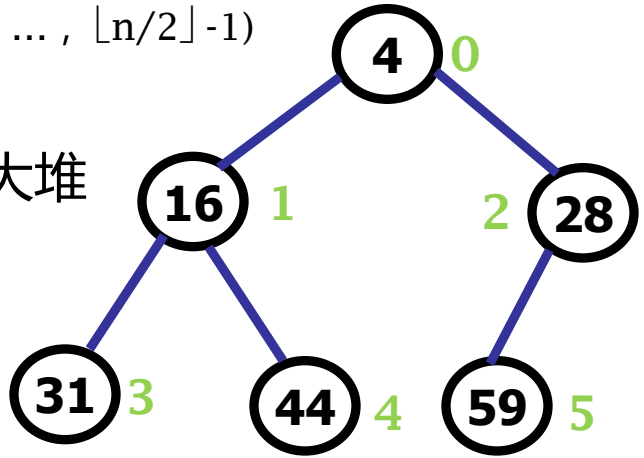
堆的定义及其实现

- 最小堆：最小堆是一个关键码序列

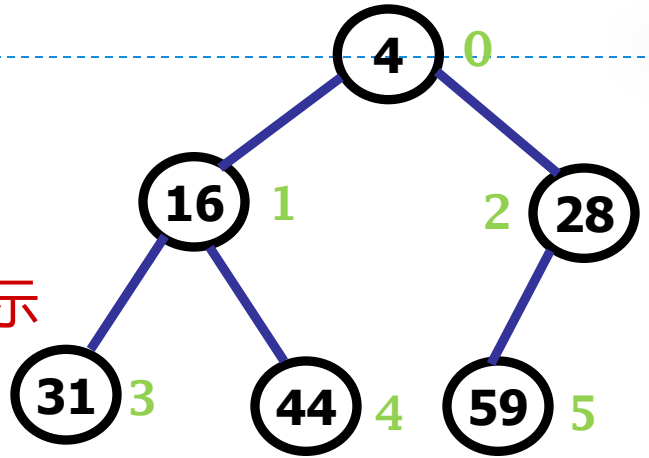
  $\{K_0, K_1, \ldots K_{n-1}\}$，它具有如下特性：

  - $K_i \le K_{2i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor -1)$
  - $K_i \le K_{2i+2}$

- 类似可以定义最大堆



堆的性质



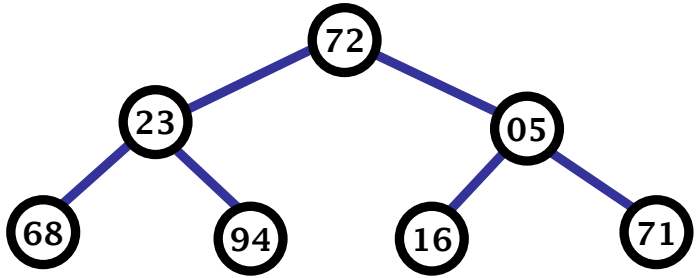
- 完全二叉树的层次序列，可以用数组表示
- 堆中储存的数是局部有序的，堆不唯一
  - 结点的值与其孩子的值之间存在限制
  - 任何一个结点与其兄弟之间都没有直接的限制
- 从逻辑角度看，堆实际上是一种树形结构

堆的类定义

```
template <class T>
class MinHeap  {          // 最小堆ADT定义
private:
   T* heapArray;          // 存放堆数据的数组
   int CurrentSize;       // 当前堆中元素数目
   int MaxSize;           // 堆所能容纳的最大元素数目
   void BuildHeap();      // 建堆
public:
   MinHeap(const int n) ;                    // 构造函数,n为最大元素数目
   virtual ~MinHeap(){delete []heapArray;};  // 析构函数
   bool isLeaf(int pos) const;               // 如果是叶结点，返回TRUE
   int leftchild(int pos) const;             // 返回左孩子位置
   int rightchild(int pos) const;            // 返回右孩子位置
   int parent(int pos) const;                // 返回父结点位置
   bool Remove(int pos, T& node);            // 删除给定下标的元素
   bool Insert(const T& newNode) ;           // 向堆中插入新元素newNode
   T& RemoveMin() ;                          // 从堆顶删除最小值
   void SiftUp(int position);                // 从position向上开始调整，使序列成为堆
   void SiftDown(int left) ;                 // 筛选法函数，参数left表示开始处理的数组下标
}
```

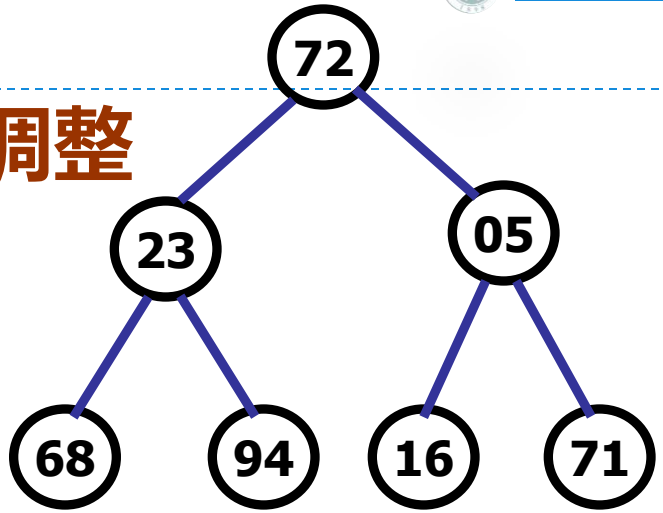
对最小堆用筛选法 SiftDown 调整

```
template <class T>
void MinHeap<T>::SiftDown(int position) {
    int i = position;              // 标识父结点
    int j = 2*i+1;                 // 标识关键值较小的子结点
    Ttemp = heapArray[i];          // 保存父结点
```



对最小堆用筛选法 SiftDown 调整

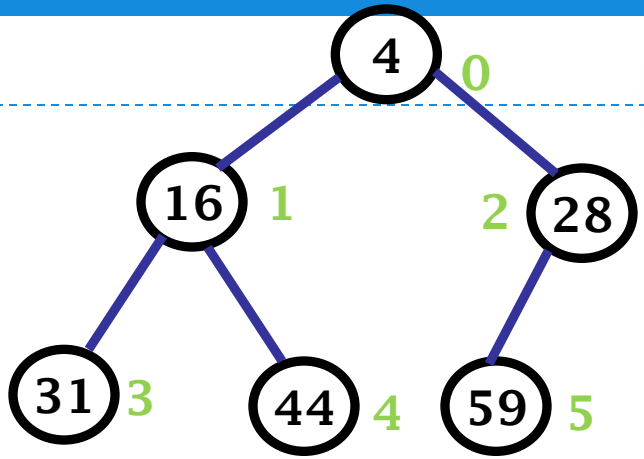
```
while (j < CurrentSize) {
    if((j < CurrentSize-1)&&
            (heapArray[j] > heapArray[j+1]))
        j++;                    // j指向数值较小的子结点
    if (temp > heapArray[j]) {
        heapArray[i] = heapArray[j];
        i = j;
        j = 2*j + 1;            // 向下继续
    }
    else break;
}
heapArray[i]=temp;
}
```



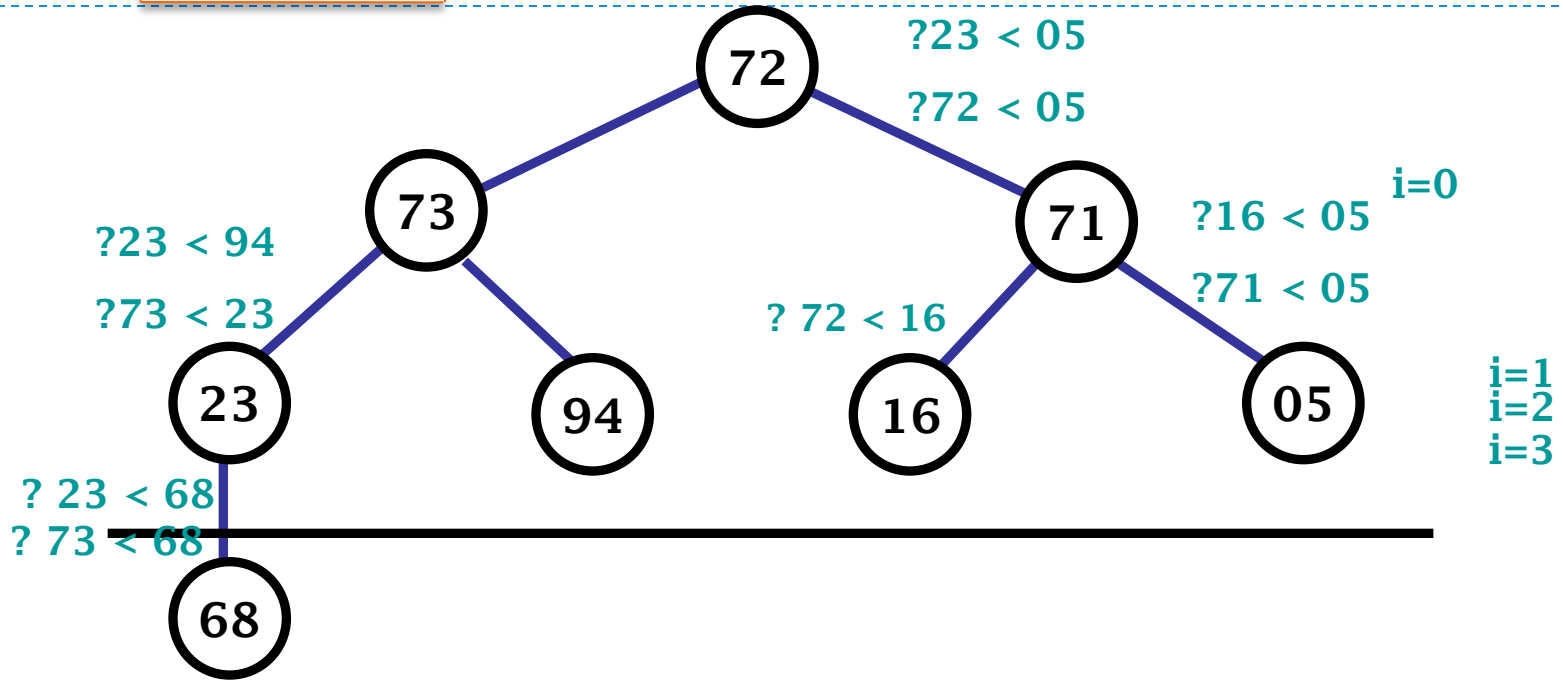
对最小堆用筛选法 SiftUp 向上调整

```
template<class T>
void MinHeap<T>::SiftUp(int position) {
    // 从position向上开始调整，使序列成为堆
    int temppos=position;
    // 不是父子结点直接swap
    T temp=heapArray[temppos];
    while((temppos>0) && (heapArray[parent(temppos)] > temp))   {
            heapArray[temppos]=heapArray[parent(temppos)];
              temppos=parent(temppos);
    }
    heapArray[temppos]=temp;// 找到最终位置
}
```

建最小堆过程



- 首先，将 n 个关键码放到一维数组中
  - 整体不是最小堆
  - 所有叶结点子树本身是堆
    - 当 $i \geq \lfloor n/2 \rfloor$ 时，
      以关键码 K_i 为根的子树已经是堆
- 从倒数第二层，$i = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ 开始
  从右至左依次调整
- 直到整个过程到达树根
  - 整棵完全二叉树就成为一个堆


72
?23 < 05
?72 < 05
73
71
i=0
?23 < 94
?73 < 23
?16 < 05
?71 < 05
? 72 < 16
23
94
16
05
i=1
i=2
i=3
? 23 < 68
? 73 < 68
68

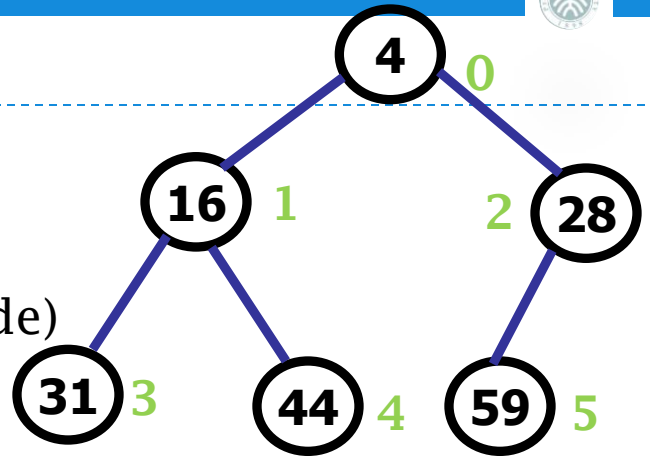
建最小堆过程示意图

建最小堆

从第一个分支结点 heapArray[CurrentSize/2-1]
开始，自底向上逐步把以子树调整成堆

```
template<class T>
void MinHeap<T>::BuildHeap()
{
    // 反复调用筛选函数
    for (int i=CurrentSize/2-1; i>=0; i--)
        SiftDown(i);
}
```

最小堆插入新元素

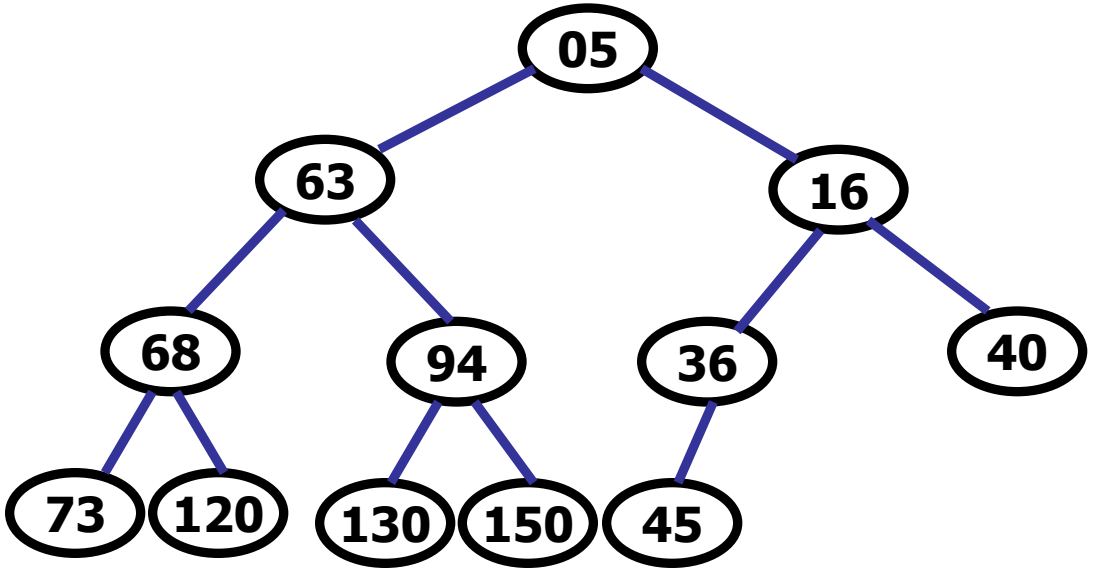



```
template <class T>
bool MinHeap<T>::Insert(const T& newNode)
//向堆中插入新元素newNode
{
    if(CurrentSize==MaxSize)      // 堆空间已经满
        return false;
    heapArray[CurrentSize]=newNode;
    SiftUp(CurrentSize);          // 向上调整
    CurrentSize++;
}
```

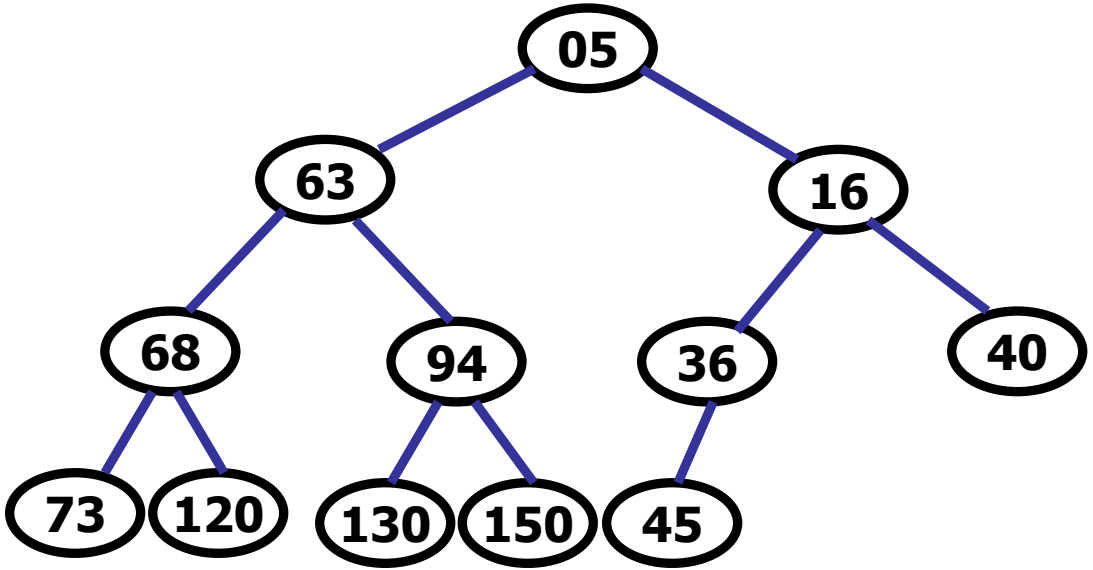
最小堆删除元素操作

```
template<class T>
bool MinHeap<T>::Remove(int pos, T& node) {
    if((pos<0)||(pos>=CurrentSize))
        return false;
    T temp=heapArray[pos];
    heapArray[pos]=heapArray[--CurrentSize];
    if (heapArray[parent(pos)]> heapArray[pos])
        SiftUp(pos);          //上升筛
    else SiftDown(pos);   // 向下筛
    node=temp;
    return true;
}
```

删除68



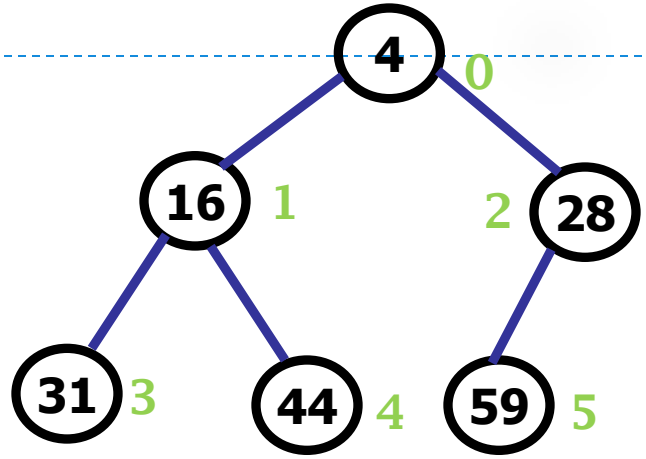
删除16



建堆效率分析

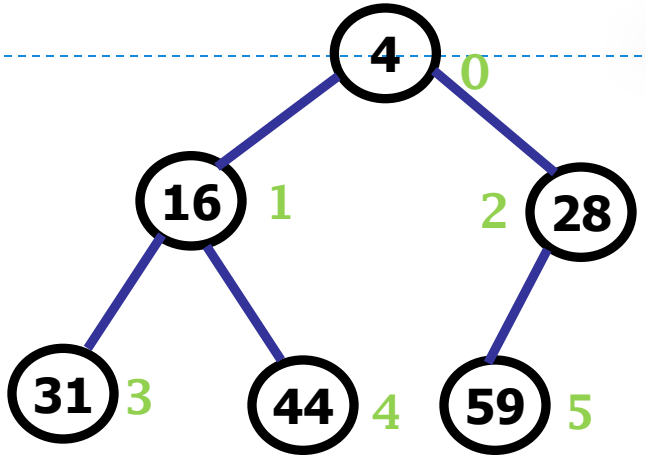
- n 个结点的堆，高度 $d = \lfloor \log_2 n + 1 \rfloor$。根为第 0 层，则第 i 层结点个数为 2^i，
- 考虑一个元素在堆中向下移动的距离。
  - 大约一半的结点深度为 d-1，不移动（叶）。
  - 四分之一的结点深度为 d-2，而它们至多能向下移动一层。
  - 树中每向上一层，结点的数目为前一层的一半，而子树高度加一。因而元素移动的最大距离的总数为

$$\sum_{i=1}^{\log n}(i-1)\frac{n}{2^i}=O(n)$$



最小堆操作效率

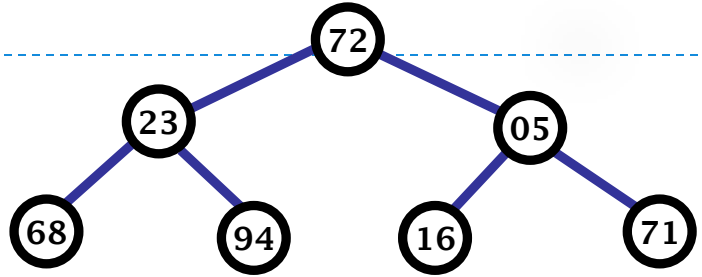
- 建堆算法时间代价为 O(n)
- 堆有 log n 层深
  - 插入结点、删除普通元素和删除最小元素的平均时间代价和最差时间代价都是 O(log n)



优先队列

- 堆可以用于实现优先队列
- 优先队列
  - 根据需要释放具有最小（大）值的对象
  - 最大树、 左高树HBLT、WBLT、MaxWBLT
- 改变已存储于优先队列中对象的优先权
  - 辅助数据结构帮助找到对象

思考



- 在向下筛选SiftDown操作时，若一旦发现逆序对，就交换会怎么样？
- 能否在一个数据结构中同时维护最大值和最小值？（提示：最大最小堆）

数据结构与算法

谢谢聆听

国家精品课“数据结构与算法”
http://www.jpk.pku.edu.cn/pkujpk/course/sjjg/

张铭，王腾蛟，赵海燕
高等教育出版社，2008. 6。“十一五”国家级规划教材