fiche 1 : notions de base sur les fonctions

Étude de la continuité

Exercice 1. Donner le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{\ln(1-x^2)}$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $]0,+2\pi[$ par $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$

1. définir f en language python.
2. écrire un script faisant afficher la représentation graphique de f. Graphiquement, peut-on dir que f est continue sur $]0,+2\pi[$? Dérivable sur $]0,+2\pi[$?
3. Justifier que f est continue sur $]0,+2\pi[$.

Exercice 3. La fonction g est définie par $\forall x < 1$, $g(x) = \exp\left(\sqrt{1-x}\right)$ et $\forall x \leq 1$, $g(x) = 0$.
On propose l'argument suivant pour montrer que g est continue.

– *sur l'intervalle* $]-\infty,1[$, *f est donnée par* $x \mapsto \sqrt{1-x}$. *L'application définie sur* $]-\infty,1[$ *par* $x \mapsto 1-x$ *est continue et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$. *De plus* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$ *donc* $x \mapsto \left(\sqrt{1-x}\right)$ *est continue sur* $]-\infty,1[$. *donc f est continue sur* $]-\infty,1[$.
– *f est constante sur l'intervalle* $[1,+\infty[$ *donc f est continue sur* $[1,+\infty[$.
– *f est continue sur* $]-\infty,1[$ *et sur* $[1,+\infty[$ *donc f est continue sur* $\mathbb{R}$.

Qu'en pensez vous?

Rappels pour le paragraphe

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (et dans ce cas on a forcément $\ell = f(x_0)$).

Theorem 1. *Soit f une fonction définie sur un ensemble D et I un intervalle* **ouvert** *tel que $f_{|I}$ est continue sur I alors f est continue sur I.*

Theorem 2. *Soit I un intervalle.*

1. *La somme, le produit de deux fonctions continues sur I sont continue sur I.*
2. *Soit f et g deux fonctions définies et continues sur I et telles que g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.*
3. *Soit f et g définie respectivement sur I et J telles que g est continue sur J, f est continue sur I et $g(J) \subset I$ alors $f \circ g$ est continue sur J.*

Python 1.

– avec import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(X,Y) avec $X = [x_0,\cdots,x_{n-1}]$ et $Y = [y_0,\cdots,y_{n-1}]$ crée un graphique formés des n points $M_0(x_0,y_0)$, $\cdots$, $M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$ reliés successivement (dans cet ordre) par des segments . On fait apparaitre le graphique avec plt.show()
– avec import numpy as np, np.linspace(a,b,N) donne un tableau de N nombres délimitant une subdivision régulière de $[a,b]$. Par exemple np.linspace(0,1,5) donne array([0,0.25,0.5,0.75,1].

Dérivabilité - fonctions de classe C^1

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}^*$
2. Montrer que f est continue en 0.
3. Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[1$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.
4. Montrer f dérivable en 0 et donner $f'(0)$

5. Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. on reprend la fonction f définie sur $]0,+2\pi[$ par $x \mapsto \sqrt{1+\sin(x)}$ dont on a montré la continuité.

1. Justifier que f est de classe C^1 sauf en un point x_0 que l'on précisera.
2. Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais dérivable à gauche et à droite. On précisera la dérivée à gauche et à droite.

Définition 2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable en x_0 si la limite suivante existe et appartient à $\mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

On appelle nombre dérivé de f en x_0 le nombre $f'(x_0)$.

Remarque 1. En posant $x = x_0 + h$ on peut écrire également $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Définition 3. Une fonction f définie sur I est dérivable si elle est dérivable en tout point de I. L'application définie sur I par $x \mapsto f'(x)$ est appelée (fonction) dérivée de f.

Définition 4. Si f est dérivable sur I et que f' est continue sur I, on dit que f est de classe C^1 sur I. On note $C^1(I)$ l'ensemble des fonctions de classes C^1 sur I.

Theorem 3. *Les théorèmes 1 et 2 restent valables si on remplace continue par dérivable ou "de classe C^1".*

Propriété 1.

1. $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$
2. $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$
3. $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$
4. $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$

Pour s'entrainer

Exercice 6. On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .
3. f est-elle dérivable en 0? Si oui, préciser $f'(0)$.
   Calculer $f'(x)$ sur D puis prouver que f est de classe C^1 sur D'.
4. Etudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
   On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

Questions de cours à l'oral

1. Allure de la représentation graphique des fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto |x+1|$
2. Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan.
3. Si f est une fonction définie sur un intervalle I ,$a \in I$, définition de la continuité de f en a.
4. Dérivée d'une composée $g \circ f$ de fonctions dérivables.
5. Développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction sinus.
6. Développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction cosinus.
7. Si f est la fonction définie sur]0,1[par $f(x) = \sqrt{1+x}$ déterminer l'expression de sa dérivée f'.
8. Allure des représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(x+1)$.
9. Allure des représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto |\ln(x)|$.
10. Allure des représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme népérien.
11. Énoncer le théorème de Rolle.
12. Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.
13. Donner la définition de la partie entière d'un réel.

Corrigé

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1. Par opérations, f est définie en x tel que $x \neq 0$ et $1+x>0$, donc sur $\boxed{]-1,0[\cup]1,+\infty[}$
2. On a $\ln(1+x) =_0 x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ et comme, pour $x \neq 0$:
$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x) \underset{0}{\rightarrow} 1$$
alors f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0)=1$. $D' =]-1,+\infty[$ est le nouvel ensemble de définition de f.
3. Pour $x \neq 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{=} \dfrac{1-\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)-1}{x} \underset{0}{=} \dfrac{-1}{2} + \mathrm{o}(1) \rightarrow \dfrac{-1}{2}$
4.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def f(x):
if x==0:
return 1
return np.log(1+x)/x

T=np.linspace(0,10,1001)
Y=[f(t) for t in T]

plt.plot(T,Y) plt.show()
```

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \dfrac{-1}{2}}$

Sur $]-1,0[\cup]1,+\infty[$, f est C^1 comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas (on pourrait montrer soigneusement que $x \mapsto \ln(1+x)$ est effectivement de classe C^1 sur cet intervalle par composition).

Pour $x \in]-1,0[\cup]1,+\infty[$, $\boxed{f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}}$

Reste à montrer que f est C^1 en 0 :

$$f'(x) \underset{0}{=} \frac{x-(1+x)\left(x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)}{x^2(1+x)} \underset{0}{=} \frac{x^2\left(-1+\frac{1}{2}\right)+\mathrm{o}\left(x^2\right)}{x^2(1+x)} \underset{0}{=} \frac{-\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)}{1+x} \rightarrow \frac{-1}{2}$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-1,0[\cup]1,+\infty[\text{ et en } 0 \text{ donc sur } D' \text{ et } f'(0) = \dfrac{-1}{2}}$

5. Pour $x > 0$ soit $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$ alors k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et
$k'(x) = 1 - \ln(1+x) - \dfrac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x)$ avec $\ln(1+x) > 0 \Longleftrightarrow 1+x > 1 \Longleftrightarrow x > 0$

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(1+x)$		$-$	0	$+$	
$k'(x)$		$+$	0	$-$	
$k(x)$		$\nearrow -$	0	$\searrow -$	
$f'(x)$		$-$	$-\dfrac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

En -1^+ : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) \to -\infty}{x \to -1} \to +\infty$

En $+\infty$: $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(x(1+1/x))}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(1+1/x)}{x} \to 0$ par C.C.