

Entrega: 20/10/2014, antes de las 17:00 impreso y 23:55 en moodle.

Aplicación de Integración Numérica

El Cálculo Fraccional trata del estudio de los llamados operadores de derivación e integración de orden fraccionario sobre dominios reales o complejos y sus aplicaciones. En realidad dichos operadores surgen con el objetivo de generalizar los conceptos de integración y de derivada para valores no enteros.

Una forma de obtener derivadas fraccionarias es a través de la llamada *Caputo's fractional derivate*, que se define como:

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(y)}{(t-y)^\alpha} dy$$

Donde $0 < \alpha < 1$ y Γ es la función Gamma.

Ejercicios

- Realice un cambio de variable a la *Caputo's fractional derivate* de tal forma que la integral sea entre -1 y 1. Simplifique lo más posible la integral obtenida.
- Desarrolle un código en donde se pueda aproximar $\int_a^b f(t)dt$ mediante: Regla de Simpson, Regla de Punto Medio, Regla del Trapecio y Cuadratura de Gaussiana (Los tres primeros en su forma compuesta). Estime el costo computacional de cada algoritmo.
- Considere $g(t) = \frac{d^{0.5}u(t)}{dt^{0.5}}$. Utilizando los algoritmos implementados obtenga $g(t)$ para $u(t) = 1, t, t^2$ y t^3 para $t \in [0, 2\pi]$, con al menos 8 dígitos de precisión (o los que logre). Analice sus resultados. *Si piensa que algún método no es factible de utilizar, justifique su afirmación.*
- Considere $u(t) = \sin(t)$. Utilice los algoritmos implementados para obtener la función $z(t, \alpha) = \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha}$, con al menos 8 dígitos de precisión (o los que logre), para muchos valores en el intervalo $0 < \alpha < 1$ y $0 < t < 2\pi$. Analicen sus resultados. *Si piensa que algún método no es factible de utilizar, justifique su afirmación.*
- Grafique las superficies obtenidas en el punto anterior, ¿Qué puede decir de $z(t, \alpha)$ si la compara con las funciones $\sin(t)$ y $\cos(t)$?

En todos los casos anteriores queda a su criterio elegir el tamaño de los subintervalos h para cada método. Indique de forma breve tal criterio.

Aplicación de Problemas de Valor Inicial

Modelamiento

En esta sección modelamos el comportamiento de grupos de agentes interactuantes (enjambres, cardúmenes, muchedumbres, etc) por medio de un problema de valor inicial. Cada agente se ubica en un punto en el espacio y ejercen una influencia sobre el resto de los agentes del grupo, conformando un sistema dinámico. Dependiendo de como es la influencia que ejerce un agente sobre el resto, el problema puede ser muy complejo. Para simplificar el modelo se toma en cuenta lo siguiente:

- El agente i -ésimo se encuentra en el plano xy ocupando la posición (x_i, y_i)
- El agente i -ésimo tiene un peso p_i , que es una cantidad proporcional a la influencia que ejerce este agente al resto del grupo.
- El agente i -ésimo puede ejercer dos tipos de influencia sobre otro agente x_j dependiendo de la distancia se encuentren. Si la distancia entre dichos agentes d_{ij} cumple $d_{ij} < R_i$ existe rechazo y si $d_{ij} \geq R_i$ existe atracción. R_i corresponde a la distancia crítica (medida desde el centro del agente i -ésimo) que separa a las dos zonas de influencia.

La influencia que ejerce el agente i -ésimo ubicado en (x_i, y_i) , **sobre** el agente j -ésimo ubicado en (x_j, y_j) viene dada por

$$\vec{I}_{ij} = \begin{cases} k \frac{p_i p_j}{R_i} \frac{1}{r_{ij}} \hat{r}_i & r_{ij} < R_i \\ k p_i p_j \frac{1}{r_{ij}^2} \cdot -\hat{r}_i & r_{ij} \geq R_i \end{cases} \quad (1)$$

Donde $k = e \approx 2,7183$ es una constante universal, r_{ij} es la distancia entre los agentes y \hat{r}_i es un vector unitario que apunta del centro del agente i -ésimo al centro del agente j -ésimo.

Por último, la ecuación diferencial que rige el movimiento del agente i -ésimo es

$$p_i \ddot{x}_i = \sum_{\forall j \neq i} I_{ji_x} \quad p_i \ddot{y}_i = \sum_{\forall j \neq i} I_{ji_y} \quad (2)$$

1. Obtenga expresiones para los componentes I_{ij_x} y I_{ij_y} .
2. Como puede ver, a medida que el sistema evoluciona las ODE's para el agente i -ésimo van cambiando. Describa un pseudo código para determinar las ODE's en un instante dado.
3. Las ODE's en (2) son de segundo orden. Transformarlas en un sistema de ODE's de primer orden.

Simulación

En esta sección ocuparemos los métodos de Euler y RK4 para poder resolver nuestro sistema de ODE's y poder gráficamente la evolución del sistema.

1. Desarrolle un código que reciba los parámetros R_i , p_i junto a las condiciones iniciales (x_i, y_i) y (v_{i_x}, v_{i_y}) de cada agente y el tiempo final t_f de simulación. Su código debe resolver el sistema con todas las ODE's del grupo de agentes, con el método de Euler y RK4.
2. Implemente en el código anterior la simulación gráfica de los agentes, que permita visualizar la evolución del grupo en el tiempo.
3. Considere $R_i = 2$, $p_i = 5$, $v_{i_x} = 0$, $v_{i_y} = 0 \forall i$ y los agentes en los puntos $(2, 2)$ $(-2, 2)$ $(-2, -2)$ $(2, -2)$. Realice la simulación con su implementación de ambos métodos. Muestre imágenes y describa lo que sucede.

4. Considere $R_i = 2$, $p_i = 5$, $v_{i_x} = 0$, $v_{i_y} = 0 \forall i$ y los agentes en los puntos $(0, 0)$ $(4, 1)$ $(4, 3)$ $(1, 4)$ $(-3, 1)$ $(-3, 4)$ $(2, -1)$ $(5, -3)$ $(-4, -1)$ $(-2, -2)$ $(-2, -4)$. Realice la simulación con su implementación de ambos métodos. Muestre imágenes y describa lo que sucede.
5. Realice la misma simulación del ítem anterior pero al agente del punto $(0, 0)$ con un peso $p = 5000$. Muestre imágenes y describa lo que sucede.
6. Realice 3 simulaciones más variando parámetros y condiciones iniciales a gusto para encontrar situaciones ‘interesantes’.

En todos los casos anteriores seleccione el tiempo final t_f de manera que se pueda ver la evolución del sistema de forma adecuada. Así mismo, dependiendo del t_f seleccionado queda a su criterio elegir el tamaño de los subintervalos de tiempo h para cada simulación.

Instrucciones:

- (a) El laboratorio puede ser realizado en Python o Matlab.
- (b) El laboratorio debe ser entregado en \LaTeX o publicado en Matlab.
- (c) La estructura del laboratorio es la siguiente:
 - a) Título, nombre del estudiante, email y rol.
 - b) Una pequeña descripción de los experimentos y suposiciones consideradas.
 - c) Desarrollo y análisis de resultados.
 - d) Conclusiones.
 - e) Referencias.
 - f) Anexo con el código utilizado.
- (d) Si el código utilizado en los experimentos no es el mismo código entregado se evaluará el laboratorio con un 0.
- (e) El trabajo es personal o en grupos de a 2, no se permite compartir código, pero se sugiere discutir aspectos generales con sus compañeros.
- (f) La entrega digital debe ser un archivo labX-rol1-rol2.zip, Donde rol1 y rol2 son los roles de los integrantes (sin dígito verificador) y X es el número del laboratorio. En este debe estar el informe en formato digital (incluir .tex), los códigos y todos los archivos solicitados.
- (g) Si no se siguen estas instrucciones, el laboratorio será evaluado con un 0.

Consideraciones:

Para todos los laboratorios del semestre se debe tener en cuenta, al momento de realizar el informe, lo siguiente:

- Introducción y conclusión: Que sea pertinente al laboratorio. No escriba cosas como “la historia de la Computación Científica...”, ni “aprendí mucho”. Sea más objetivo. Una buena idea sería plantear brevemente el problema o situación a analizar, objetivos generales y particulares, la estructura del informe y también, si ya tiene conocimiento de lo que se debe hacer, podría realizar una estimación. MÁXIMO: 5 líneas.
- Desarrollo y análisis: Incluya todos los supuestos, fórmulas, algoritmos, desarrollos matemáticos, etc. No ponga “se ve en el código” porque eso es aparte. Incluya gráficos, resultados, cuadros comparativos, y cualquier cosa que le permita realizar un análisis más exacto. Recuerden que los análisis son distintos de las conclusiones, explique a qué se debe las diferencias entre algoritmos. Cuantifique y fundamente sus respuestas, evite el exceso de adjetivos. Sea creativos, existen muchos criterios para comparar y analizar.
- Ortografía: Se descontarán 5 puntos, por cada 5 faltas ortográficas.
- Precisión: Calidad antes que cantidad, no se de vuelta en la misma idea. No deje tanto espacio en blanco e imprima, en lo posible, ambas caras de una hoja.
- Código: En \LaTeX hay distintas formas de adjuntar o presentar un código. Una imagen NO es una de ellas.
- Ponderaciones: El código vale el 30 % y el informe un 70 %. Se evalúa también orden y redacción.