I Présentation

Les machines à mesurer tridimensionnelle (MMT) sont des instruments utilisés en métrologie dimensionnelle.

Elles permettent d'obtenir les coordonnées des points mesurés (palpés) sur une pièce mécanique. Ces coordonnées permettent de vérifier la validité dimensionnelle de la pièce, de vérifier que les cotes sont respectées. L'obtention de différentes coordonnées des points d'une pièce n'est pas très utile en soi. Une MMT est donc connectée à un ordinateur disposant d'un logiciel d'interprétation des coordonnées. Ce type de logiciel calcule les formes géométriques idéales aux points palpés sur les surface de la pièce à mesurer, ce qui autorise le calcul rapide d'un défaut de tolérance géométrique (forme, localisation, parallélisme, coaxialité…). Leur précision de mesure peut atteindre quelques nanomètres pour un volume de travail respectable d'une dizaine de centimètre de côté.

On se propose dans cet exercice de déterminer le cercle qui ‘passe au mieux ‘ par un ensemble de points palpés situés dans un même plan , de manière à déterminer le défaut de circularité constaté .

Le cercle passant au mieux aura comme paramètres :

- son centre C de coordonnées (x_C, y_C)
- son rayon R

Les n points palpés M_i ont pour coordonnées (x_i, y_i)
La détermination des paramètres du cercle sera réalisée en utilisant la méthode d’interpolation par les moindres carrés appliquée à la minimalisation de la fonction écart donnée par la relation:

$$Ec = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\left\| \overrightarrow{CM_i} \right\|^2 - R^2 \right)^2$$

II Importation des données

Les données palpées sont stockées dans un fichier nommé *« Fichier_point.csv »*.

Question 1 : *En vous inspirant du document « Fichiers csv », importer dans deux listes X et Y les données issues de la MMT. On prendra soin de ne laisser dans ces listes que les données, c’est-à-dire que les titres seront retirés.*

Question 2 : *Dans la mesure où on veut utiliser Numpy pour travailler les tableaux, transformer ces listes en tableau ‘numpy.ndarray’*

III Méthode des moindres carrés

La fonction écart donnée par la relation:

$$Ec=\sum_{i=0}^{i=n-1}\left(\left\|\overrightarrow{CM_i}\right\|^2-R^2\right)^2$$

Soit, en fonction de x_C, y_C, x_i, y_i, R :

$$Ec=\sum_{i=0}^{i=n-1}\left(\left(x_i-x_C\right)^2+\left(y_i-y_C\right)^2-R^2\right)^2$$

En dérivant l'écart Ec par rapport à x_C, y_C, R, le minimum de la fonction est obtenu pour :

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\left(\left(x_i-x_C\right)^2+\left(y_i-y_C\right)^2-R^2\right).\left(x_i-x_C\right)=0$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\left(\left(x_i-x_C\right)^2+\left(y_i-y_C\right)^2-R^2\right).\left(y_i-y_C\right)=0$$

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\left(\left(x_i-x_C\right)^2+\left(y_i-y_C\right)^2-R^2\right)=0$$

Soit : $x_C^2+y_C^2-R^2=\dfrac{1}{n}.\left(\sum_{i=0}x_i^2+\sum_{i=0}y_i^2-2.x_C.\sum_{i=0}x_i-2.y_C.\sum_{i=0}y_i\right)$

En combinant ces relations, on obtient :

$$x_C=\frac{c.d-b.e}{a.c-b^2}$$

$$y_C=\frac{a.e-b.d}{a.c-b^2}$$

$$R^2=\frac{1}{n}.\left(\sum_i x_i^2+\sum_i y_i^2-2.\left(x_C\sum_i x_i+y_C\sum_i y_i\right)\right)+x_C^2+y_C^2$$

Avec :

$$a=\sum_i x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)^2$$

$$b=\sum_i x_i.y_i-\frac{1}{n}.\sum_i x_i.\sum_i y_i$$

$$c=\sum_i y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_i y_i\right)^2$$

$$d=\frac{1}{2}.\left(\sum_i x_i^3+\sum_i x_i.y_i^2-\frac{1}{n}.\sum_i x_i.\left(\sum_i x_i^2+\sum_i y_i^2\right)\right)$$

$$e=\frac{1}{2}.\left(\sum_i y_i^3+\sum_i x_i^2.y_i-\frac{1}{n}.\sum_i y_i.\left(\sum_i x_i^2+\sum_i y_i^2\right)\right)$$

Dans le script python, on adoptera les variables suivantes :

$\sum_i x_i$	$\sum_i y_i$	$\sum_i x_i.y_i$	$\sum_i x_i^2$	$\sum_i y_i^2$	$\sum_i x_i.y_i^2$	$\sum_i x_i^2.y_i$	$\sum_i x_i^3$	$\sum_i y_i^3$	Nbre de points
Sxi	Syi	Sxiyi	Sxi2	Syi2	Sxiyi2	Sxi2yi	Sxi3	Syi3	n

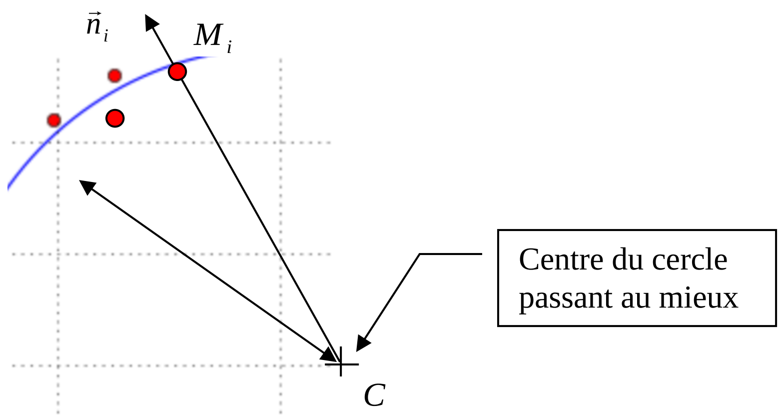
L'utilisation de Numpi pour les questions suivantes sera bien-sûr à privilégier.

Question 3 : *Ecrire une fonction* `'S (X,Y)'` *qui prends en argument les données issues de la MMT et qui retourne un vecteur* `'Som'` *dans lequel seront rangées les valeurs Sxi, Syi, Sxiyi, Sxi2, Syi2, Sxiyi2, Sxi2yi, Sxi3, Syi3, n.*

Question 4 : *Ecrire une fonction* `'cercle (X,Y)'` *qui prend en argument les données issues de la MMT et qui retourne* `Xc` *et* `Yc` *les coordonnées du centre du cercle et* `R` *le rayon du cercle passant au mieux.*

Question 5 : *Compléter le script de manière à afficher sur une même figure la position des points (cercle rouge) mesurés ainsi que le cercle qui passe au mieux (défini par la méthode des moindres carrés).*
Le rayon moyen sera affiché sur la figure.

Question 6 : *Ecrire une fonction* `'circularite (Xc,Yc,R,X,Y)'` *prenant en arguments les paramètres du cercle 'qui passe au mieux' ainsi que les deux tableaux de coordonnées des points mesurés et qui retourne* `dc` *le défaut de circularité constaté ainsi que les distances des points les plus éloignés (*`Emax` *: extérieurement et* `Emin` *: intérieurement) au cercle* C.



Question 7 : *Faire afficher sur le graphe précédent :*

- *Le cercle* C_{max} *concentrique à* C *de diamètre le plus petit qui englobe tous les points* M_i *(en vert)*
- *Le cercle* C_{min} *concentrique à* C *de diamètre le plus grand qui ne contient aucun point* M_i *(en vert)*

Le défaut de circularité `dc` *sera affiché sur la figure*