Devoir Libre 9

Exercice 1: Développement Eulérien et Fonction périodique

Partie 1: Etude de φ

1. **Symétrie et prériode**

(a) $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ Pour $x \in D$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Soit x un réel.

Pour que $\varphi(x)$ existe, x doit respecter les conditions : $\begin{cases} x & \neq & 0 \\ x & \neq & \pm n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Autrement dit $x \neq a \in \mathbb{Z} \iff x \in D$ Soit $x \in D$

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(-x) & = & \frac{1}{-x} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-x)}{n^2-x^2} \\ \iff & \varphi(-x) & = & -\frac{1}{x} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} \\ \iff & \varphi(-x) & = & -\left(\frac{1}{x} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}\right) \\ \iff & \varphi(-x) & = & -\varphi(x) \end{array}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } D \text{ et } \varphi \text{ est } \textbf{impaire}.}$$

(b) Soit $x \in D$. Calculons $\varphi(x+1)$:

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-(x+1)} - \frac{1}{n+(x+1)}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1-x}\right) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1+x}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x}\right) + \frac{1}{-x}\right) + \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x} - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \varphi(x) \end{array}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est 1-préiodique.}}$$

Remarque : j'ai noté "1-préiodique" comme on note "π-périodique".

(c) D n'est pas un intervalle mais une union infinie d'intervalles ouverts. De plus, φ est une somme infinie de fonctions continues, donc je ne pense pas que l'argument "en tant que somme de fonctions continues" marche ici.

2. **Continuité**

(a) Soit $x \in [0,1]$
Soit $h \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} \\ \Rightarrow \quad g(x+h)-g(x) &= 2\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x+h}{n^2-(x+h)^2} - \frac{x}{n^2-x^2}\right) \end{aligned}$$

(b) question b

(c) question c

(d) question d

Partie 2: Etude d'un endomorphisme de E

1. question 1
2. question 2
3. **Etude de l'espace propre de T associé à 2**
   (a) question a
   (b) question b
   (c) question c
   (d) question d
   (e) question e
   (f) question f

Partie 3: Etude de *cotan*

1. question 1
2. question 2
3. question 3
4. question 4
5. question 5

Partie 4: Développement eulérien

1. question 1
2. question 2
3. question 3
4. **Application et généralisation**
   (a) question a
   (b) question b
   (c) question c

Partie 5: Calcul d'un intégrale à paramètre

1. (a) question a
   (b) question b
   (c) question c
2. question 2
3. question 3
4. question 4
5. question 5
6. question 6

Exercice 2: Temps d'attente d'une séquence dans un automate

Partie 1: Etude d'un cas simple

1. question 1
2. question 2
3. question 3
4. question 4

Partie 2: Etude d'un cas intermédiaire

1. question a
2. question a
3. question a
4. question a
5. question a
6. question a
7. question a
8. question a
9. question a
10. question a
11. question a