

1. Donner les fonctions $\text{espe}(X)$ et $\text{varia}(X)$ qui donnent l'espérance et la variance d'une liste X donnant la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}
2. Tester vos fonctions avec la loi d'un dé.
3. Soit S_d la variable aléatoire donnant la loi de la somme de d dés, montrer que :

$$P(S_d = k) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 P(S_{d-1} = k - j)$$

4. Construire la fonction `def tcheb(d,p)` : qui renvoie les lois de la somme de i dés avec $1 \leq i \leq d$ sous forme de tableau T tel que $T[i, k] = P(S_i = k)$

Construire `def tcheb(d,p)` : par récursivité en s'inspirant de la construction du triangle de pascal :

```
def pascal(n,p) :  
    if n==0:  
        return [[1]+[0]*p]  
    t=pascal(n-1,p)  
    newline=[1]+[t[-1][k]+t[-1][k-1] for k in range(1,p+1)]  
    t.append(newline)  
    return t
```

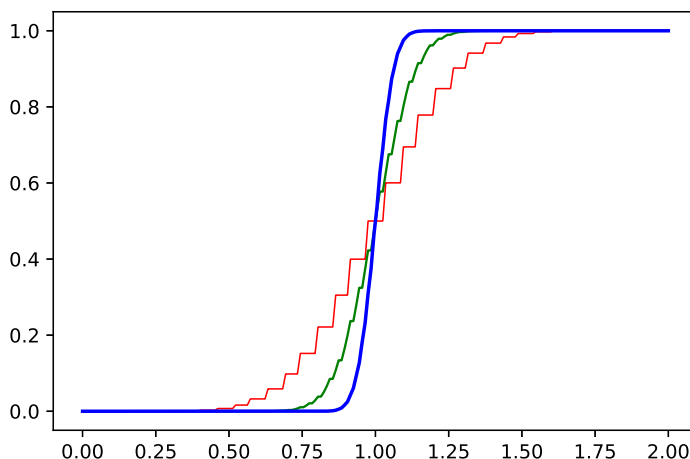
5. Construire alors `def S(d)` : renvoyant la loi de la somme de d dés. Vérifier ainsi les valeurs de l'espérance et de la variance de la liste $S(d)$
6. Tracer les graphes des **trois fonctions de répartitions** des variables

$$X_d = \frac{S(d)}{\text{espe}(S(d))}$$

pour $d = 5$ en rouge, $d = 20$ en vert et $d = 100$ en bleu.

(Sur le graphe du plus fin $d = 5$ au plus épais $d = 100$)

- (a) Que va devenir la fonction de répartition pour un grand nombre de dés ?
- (b) Expliquer ce résultat avec la variance et l'inégalité de Bienaymé Tchebychev



7. On s'intéresse à la loi expérimentale de la somme de trois dés.

Construire une fonction `def Des_3(N)` qui donne expérimentalement la loi de la somme de trois dés lorsqu'on lance N fois de suite trois dés ensemble. On pourra utiliser la fonction `randint(a,b)` de la bibliothèque `random`

Pour $N = 8000$ lancers de trois dés, vérifier que la loi expérimentale présente une erreur d'environ 5% par rapport au maximum de la loi théorique.

```

!/usr/bin/python3.4
loi de la somme de plusieurs dés .
1--> import matplotlib.pyplot as plt
2--> import numpy as np
1) Fonction espérance et variance
3--> def espe(X) :
4-->     """ espérance de X """
5-->     n=len(X)
6-->     E=0
7-->     for k in range(1,n):
8-->         E +=X[k]*k
9-->     return E
10--> def varia(X) :
11-->     """ variance de X """
12-->     moy=espe(X)
13-->     n=len(X)
14-->     V=0
15-->     for k in range(n):
16-->         V +=X[k]*k**2
17-->     return V - moy**2
18--> X=[0]+[1/6]*6
19--> print("loi d'un de" , X ,"esperance",espe(X),"=",7/2,"variance",varia(X),"=",35/12)
4-5) Loi de la somme de "d" dés
20--> def tcheb(d,p) :
21-->     """ Donne la loi de la somme de d dés par recursivite comme pascal """
22-->     if d==1 :
23-->         return [[0]+[1/6]*6 + [0]*(p-7)] # Somme de 1 de
24-->         t=tcheb(d-1,p) # Appel récursif
25-->         newline=[0]+[ 1/6*sum(t[-1][max(0,k-6):k]) for k in range(1,p)]
26-->         t.append(newline)
27-->         return t
28--> def S(d):
29-->     return tcheb(d,6*d+1)[-1]
30--> d=3 ;print(d,"des : ", "esperance",espe(S(d)),"=",d*7/2,"variance",varia(S(d)),"=",d*35/12)
6) Dessin des trois fonctions de répartition  $P(X/E(X) \leq t)$  pour  $d=5$  , 20, 100
31--> def FRC(L,t) :
32-->     q=min(len(L),int(t*espe(L))+1)
33-->     return sum(L[:q])
34--> T=np.linspace(0,2,200)
35--> plt.figure('Somme-des') # Debut figure
36--> option=[[ 'red',0.8],[ 'green',1.2],[ 'blue',1.8]]
37--> c=0
38--> for d in [5,20,100] :
39-->     L=S(d)
40-->     plt.plot(T,[FRC(L,t) for t in T],color=option[c][0],linewidth=option[c][1])
41-->     c+=1
42--> plt.savefig("somme-des.eps")
43--> plt.show() # Affichage et remise à zéro
7) Vérification expérimentale de la somme de 3 dés :
44--> import random as rd
45--> U=np.array(S(3))
46--> def Des_3(N) :
47-->     """ loi expérimentale  $P(X=k)=(\text{nbre de cas obtenus})/(\text{nbre d'expériences})$  """
48-->     X=[0]*(6*3+1) # initialisation de la loi somme des trois dés
49-->     for i in range(N) :
50-->         des=[ rd.randint(1,6) for k in range(3) ] # on lance les trois dés
51-->         k=sum(des) # On calcule la somme des trois dés
52-->         X[k]+=1/N # On rajoute 1/N à la case  $P(X=k)$ 
53-->     return X
Graphe de la moyenne pour 50 expériences aléatoires avec 8000 lancers de dés
54--> T=[k for k in range(1,51)]
55--> Y=[]
56--> for k in range(1,51) :
57-->     erreur=[] # erreur en pourcentage
58-->     V=np.array(Des_3(8000))
59-->     Delta=np.abs(V-U)
60-->     erreur.append(max(Delta)/max(U))
61-->     moyenne=sum(erreur)/len(erreur)
62-->     Y.append(moyenne) # On trouve une moyenne inférieure à 0.050
63--> plt.figure('verification espé loi trois dés')
64--> plt.plot(T,Y)

```