Devoir Libre 8 :
Courbes paramétrées

Exercice 1: Deltoïde

1. **Enveloppe d'une famille de droites**

 (a) Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{pmatrix} cos(2t) + cos(t) \\ sin(2t) - sin(t) \end{pmatrix}$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u_t}$ dérivable.

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_t}' = \begin{pmatrix} -2sin(2t) - sin(t) \\ 2cos(2t) - cos(t) \end{pmatrix}$$

Question : Un vecteur n'est pas un matrice, or là j'ai écrit les coordonnées du vecteur en colonne. Est-ce faux ?

D'où

$$det(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_t}') = \begin{vmatrix} cos(2t) + cos(t) & -2sin(2t) - sin(t) \\ sin(2t) - sin(t) & 2cos(2t) - cos(t) \end{vmatrix}$$

$$= [cos(2t) + cos(t)] \times [2cos(2t) - cos(t)] + [sin(2t) - sin(t)] \times [2sin(2t) + sin(t)]$$

$$= 2\underbrace{\left(cos^2(2t) + sin^2(2t)\right)}_{1} + \underbrace{cos(2t)cos(t) - sin(2t)sin(t)}_{cos(3t)} - \underbrace{\left(cos^2(t) + sin^2(t)\right)}_{1}$$

$$= cos(3t) + 1$$

D'où

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\, det(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_t}') = cos(3t) + 1}$$

 (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. $D_t = (P_tQ_t) = P_t + Vect\underbrace{\left\{\overrightarrow{P_tQ_t}\right\}}_{\overrightarrow{u_t}}$.

On a : $P_t, \overrightarrow{u_t}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\exists t \in \mathbb{R}, det(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_t}') \neq 0$. Donc, par propriété, l'enveloppe des droites D_t, nommée Γ, existe.
Paramétrons Γ par : $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OC}(t)$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ l'inconnue.
Par définition de l'enveloppe, Γ doit respecter deux conditions.

1. Intersection de Γ avec D_t :

$$\overrightarrow{f}(t) = P_t + \lambda(t)\overrightarrow{u_t}$$

2. D_t tangente à Γ en C :

$$\begin{aligned}
\text{i.e.} \quad & det(\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{u_t}) = 0 \\
\iff \quad & det(P_t' + \lambda'(t)\overrightarrow{u_t} + \lambda(t)\overrightarrow{u_t}', \overrightarrow{u_t}) = 0 \\
\iff \quad & det(P_t' + \lambda(t)\overrightarrow{u_t}', \overrightarrow{u_t}) + \lambda'(t)\underbrace{det(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_t})}_{0} = 0 \\
\iff \quad & det(P_t', \overrightarrow{u_t}) + \lambda(t)det(\overrightarrow{u_t}', \overrightarrow{u_t}) = 0 \\
\iff \quad & \lambda(t) = \tfrac{det(P_t', \overrightarrow{u_t})}{det(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_t}')}
\end{aligned}$$

On remplace :

$$\begin{aligned}
P_t' &= \begin{pmatrix} sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{u_t} &= \begin{pmatrix} cos(2t) + cos(t) \\ sin(2t) - sin(t) \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{u_t}' &= \begin{pmatrix} -2sin(2t) - sin(t) \\ 2cos(2t) - cos(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = -\frac{cos(3t) + 1}{cos(3t) + 1} = (-1)$$

En reprenant la condition 1. $\overrightarrow{f}(t) = P_t + \lambda(t)\overrightarrow{u_t}$:

$$\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} -cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix} + (-1) \times \begin{pmatrix} cos(2t) + cos(t) \\ sin(2t) - sin(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient :

$$\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2cos(t) - cos(2t) \\ 2sin(t) - sin(2t) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{M_t \in \Gamma \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & -2cos(t) - cos(2t) \\ y(t) & = & 2sin(t) - sin(2t) \end{array} \right.}$$

CQFD

2. **Intervalle d'étude de Γ**
Grâce au paramétrage de Γ, on remarque que la courbe est :
   1. paire selon les x
   2. impaire selon les y
   3. 2π périodique

   Ainsi, Γ est symétrique par rapport à l'axe des x, et se répète sur elle même sur $\mathbb{R}$.

   Pour tracer Γ à partir de Γ_1, il suffit de faire une symétrie axiale par rapport à l'axe des x.

3. **Etude de Γ**
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & -2cos(t) - cos(2t) \\ y(t) & = & 2sin(t) - sin(2t) \end{array} \right.$$

x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que composition de fonctions qui le sont et :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 2sin(t) + 2sin(2t) \\ y'(t) & = & 2cos(t) - 2cos(2t) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 2\left[sin(t) + sin(2t)\right] \\ y'(t) & = & 2\left[cos(t) - 2cos^2(t) + 1\right] \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 2sin(t)\left[1 + 2cos(t)\right] \\ y'(t) & = & -4\left[cos^2(t) - \frac{1}{2} - \frac{cos(t)}{2}\right] \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 4sin(t)\left[\frac{1}{2} + cos(t)\right] \\ y'(t) & = & 4\left[-cos^2(t) + \frac{1}{2} + cos(t) - \frac{cos(t)}{2}\right] \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 4sin(t)\left[\frac{1}{2} + cos(t)\right] \\ y'(t) & = & 4\left[1 - cos(t)\right]\left[cos(t) + \frac{1}{2}\right] \end{array} \right.$$

Ainsi on a bien :

$$y'(t) = 4\left[1 - cos(t)\right]\left[cos(t) + \frac{1}{2}\right]$$

De plus :

$$
\begin{array}{rrcl}
 & y'(t) & = & 4\left[1-cos(t)\right]\left[cos(t)+\frac{1}{2}\right] \\
\Longleftrightarrow & y'(t) & = & 4\left[2\left(\underbrace{\frac{1-cos(t)}{2}}_{sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\left(\underbrace{\frac{1+cos(t)}{2}}_{cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}+\frac{cos(t)}{2}\right)\right] \\
\Longleftrightarrow & y'(t) & = & 4\left[2\left(sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)\left(cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{cos(t)}{2}\right)\right] \\
\Longleftrightarrow & y'(t) & = & 4\left[2\frac{sin\left(\frac{t}{2}\right)}{cos\left(\frac{t}{2}\right)}\left(cos^3\left(\frac{t}{2}\right)sin\left(\frac{t}{2}\right)+\frac{cos(t)}{2}\underbrace{cos\left(\frac{t}{2}\right)sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{\frac{sin(t)}{2}}\right)\right] \\
\Longleftrightarrow & y'(t) & = & 4\left[tan\left(\frac{t}{2}\right)sin(t)\left(\underbrace{cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}_{\frac{1+cos(t)}{2}}+\frac{cos(t)}{2}\right)\right] \\
\Longleftrightarrow & y'(t) & = & tan\left(\frac{t}{2}\right)\underbrace{4sin(t)\left(cos(t)+\frac{1}{2}\right)}_{x'(t)} \\
\Longleftrightarrow & y'(t) & = & x'(t)tan\left(\frac{t}{2}\right)
\end{array}
$$

D'où :

$$
\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & 4\left[1-cos(t)\right]\left[cos(t)+\frac{1}{2}\right] \\ y'(t) & = & x'(t)tan\left(\frac{t}{2}\right)\end{array}\right.}
$$

CQFD

(b) Soit $t \in [0, \pi]$.
$M(t) \in \Gamma_1$ est un point stationnaire si $\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & 0 \\ y'(t) & = & 0\end{array}\right.$.

$$
\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2sin(t)\left[1+2cos(t)\right] & = & 0 \\ 4\left[1-cos(t)\right]\left[cos(t)+\frac{1}{2}\right] & = & 0\end{array}\right.
$$

$$
\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 0 \\ cos(t) & = & -\frac{1}{2}\end{array}\right.
$$

$$
\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t & = & 0 \\ t & = & \frac{2\pi}{3}\end{array}\right.
$$

Ainsi :

$$
\boxed{\Gamma_1 \text{ possède 2 points stationnaires en } t=0 \text{ et } t=\frac{2\pi}{3}.}
$$

(c) On reprend $\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$
Faisons un DL de f en 0 :

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \overrightarrow{f}(t) & = & \begin{pmatrix} -2cos(t)-cos(2t) \\ 2sin(t)-sin(2t)\end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \overrightarrow{f}(t) & \underset{t\to 0}{=} & \begin{pmatrix} -2\left[1-\frac{t^2}{2}\right]-\left[1-2t^2\right]+o\left(t^3\right) \\ 2\left[t+\frac{t^3}{3!}\right]-\left[2t-\frac{4}{3}t^3\right]+o\left(t^3\right)\end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow & \overrightarrow{f}(t) & \underset{t\to 0}{=} & \begin{pmatrix} -3+3t^2+o\left(t^3\right) \\ \frac{3}{2}t^3+o\left(t^3\right)\end{pmatrix}
\end{array}
$$

On en déduit que "$(p,q) = (2,3)$", puisque la famille $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right)$ n'est pas liée. Ainsi, par propriété :

$$\boxed{J \text{ est un point de } \textbf{rebroussement de 1}^{\textbf{ère}} \textbf{ espèce}.}$$

Remarque : Je ne vois pas trop comment bien rédiger la fin de cette question : je ne sais pas comment introduire les variables "p" et "q"...

(d) Faison de même pour le point I, mais cette fois en dérivant.
On reprant la même fontion $\overrightarrow{f}$.
$\overrightarrow{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que composition de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(t) &= \begin{pmatrix} -2cos(t) - cos(2t) \\ 2sin(t) - sin(2t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \overrightarrow{f}'(t) &= \begin{pmatrix} 2sin(t) + 2sin(2t) \\ 2cos(t) - 2cos(2t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, pour $t = \frac{2\pi}{3}$, $\overrightarrow{f}'(t) = (0,0)$. On continue donc à dériver.

$$\overrightarrow{f}''(t) = \begin{pmatrix} 2cos(t) + 4cos(2t) \\ -2sin(t) + 4sin(2t) \end{pmatrix}$$

Pour $t = \frac{2\pi}{3}$, $\overrightarrow{f}''(t) = \left(-\frac{3}{2}, -3\sqrt{3}\right)$. Voici notre première dérivée non nulle.

$$\overrightarrow{f}'''(t) = \begin{pmatrix} -2sin(t) - 8sin(2t) \\ -2cos(t) + 8cos(2t) \end{pmatrix}$$

De même, pour $t = \frac{2\pi}{3}$, $\overrightarrow{f}'''(t) = \left(3\sqrt{3}, -3\right)$. Voici la seconde.
De plus, on a bien la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ libre car $det(\mathcal{F}) = 4 \neq 0$.
Ainsi, ici aussi, on a "$(p,q) = (2,3)$". Donc, par propiété :

$$\boxed{I \text{ est un point de } \textbf{rebroussement de 1}^{\textbf{ère}} \textbf{ espèce.}}$$

Question : Ca peut se noter $det(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs ?

(e) On conserve toujours la même fonction $\overrightarrow{f}$.
On a trouvé à la question 3. (d) que le vecteur tangent à Γ_1 en I est : $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & I + Vect\left\{\overrightarrow{u}\right\} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + Vect\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\} \\ = & \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}(1-\lambda) \\ y = 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{2}x - 1 \\ y = 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y &= 3\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + 1\right) \\ \Rightarrow \quad y &= \frac{9\sqrt{3}}{2}(1+x) \end{aligned}$$

(f) Soit $t \in [0, \pi]$

t	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$x'(t)$	0	$+$	0	-	0
$y'(t)$	0	$+$	0	-	0
$x(t)$	-3	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

4. **Γ et un cercle de courbure**

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rl} & M(t) \in \Gamma \cap \mathcal{C}_0 \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & -2cos(t) - cos(2t) \\ y(t) & = & 2sin(t) - sin(2t) \end{array} \right. \\ \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{crcl} \Longleftrightarrow & (-2cos(t) - cos(2t))^2 + (2sin(t) - sin(2t))^2 & = & 1 \\ \Longleftrightarrow & 4cos^2(t) + cos^2(2t) - 4cos(t)cos(2t) + 4sin^2(t) + sin^2(2t) - 4sin(t)sin(2t) & = & 1 \\ \Longleftrightarrow & 4 + 1 - 4cos(3t) & = & 1 \\ \Longleftrightarrow & cos(3t) & = & 1 \\ \Longleftrightarrow & t & = & \frac{\pi}{3} \end{array}$$

D'où

$$\boxed{K = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

On cherche maintenant à calculer les vecteurs directeurs des tangentes de $\mathcal{C}_0$ et Γ en K.

- Tangente à Γ :
  Tangente dirigée par $\overrightarrow{f}'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\mathcal{T} = K + Vect\left\{ \begin{array}{c} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{array} \right\}$$

- Tangente à $\mathcal{C}_0$:
  Tangente dirigée par $\begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}$ pour $t = \frac{\pi}{3}$

$$\mathcal{T}' = K + Vect\left\{ \begin{array}{c} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\} = K + Vect\left\{ \begin{array}{c} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{array} \right\}$$

Ainsi :

$$\boxed{\Gamma \text{ et } \mathcal{C}_0 \text{ sont tangentes en K.}}$$

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons :

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 2\sqrt{2}\beta t \end{pmatrix} \Rightarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(t - 2\sqrt{2}\beta) \end{pmatrix}$$

Définissons l'angle de relèvement α :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t) = \arctan\left(\frac{z'(t)}{y'(t)}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t) = \arctan\left(2(t - \sqrt{2}\beta)\right)$$

Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|f'(t)\|}$$

De plus, α est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha'(t) = \frac{2}{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2}$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{2}{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2}}$$

Ainsi, γ est maximal pour $(1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2)^{3/2}$ minimal i.e. $t = \sqrt{2}\beta$

(c) qc

   (d) qd

5. **Autre symétrie de** Γ
   (a) qa
   (b) qb
   (c) qc
   (d) qd
   (e) qe
   (f) qf
6. **Longueur de** Γ
   (a) qa
   (b) qb