Devoir Libre 9

Exercice 1: Développement Eulérien et Fonction périodique

Partie 1: Etude de φ

1. **Symétrie et prériode**
   (a) $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ Pour $x \in D$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Soit x un réel.
Pour que $\varphi(x)$ soit définie sur D, il faut que $\forall x \in D$, $\varphi(x)$ converge. Décomposons $\varphi(x)$ en deux :

$$\varphi(-x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{A(x)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}}_{B(x)}$$

- ❏ $A(x)$ existe pour $x \neq 0$.
- ❏ $B(x)$ n'existe pas si $x = n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $x \in D$, on a :

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, par le théorème de compraison des séries à termes positifs, $B(x)$ a même nature que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Or, la série de référence de Riemann $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Alors $B(x)$ converge.

D'où, φ bien définie sur D.
De plus, pour $x \in D$:

$$\begin{aligned}
& \varphi(-x) &=& \tfrac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{2(-x)}{n^2 - x^2} \\
\iff & \varphi(-x) &=& -\tfrac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{2x}{n^2 - x^2} \\
\iff & \varphi(-x) &=& -\left(\tfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{2x}{n^2 - x^2}\right) \\
\iff & \varphi(-x) &=& -\varphi(x)
\end{aligned}$$

Ainsi :

φ est bien définie sur D et φ est **impaire**.

   (b) Soit $x \in D$. D'après l'ennoncé, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x}\right)}_{A(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n + x}\right)}_{B(x)}$$

Ces séries $A(x)$ et $B(x)$ sont divergentes, passons donc par des somme partielles puis faisons tendre la borne N vers $+\infty$. ☺

Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $\varphi_N(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}\right)$. Calculons $\varphi_N(x+1)$:

$$\begin{aligned}
& \varphi_N(x+1) &=& \tfrac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{N}\left(\tfrac{1}{n-1-x}\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\tfrac{1}{n+1+x}\right) \\
\iff & \varphi_N(x+1) &=& \tfrac{1}{x+1} - \sum_{n=0}^{N-1}\left(\tfrac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=2}^{N+1}\left(\tfrac{1}{n+x}\right) \\
\iff & \varphi_N(x+1) &=& \tfrac{1}{x+1} - \left(\sum_{n=1}^{N-1}\left(\tfrac{1}{n-x}\right) + \tfrac{1}{-x} - \tfrac{1}{N-x}\right) + \left(\sum_{n=1}^{N+1}\left(\tfrac{1}{n+x}\right) - \tfrac{1}{1+x} + \tfrac{1}{N+1+x}\right) \\
\iff & \varphi_N(x+1) &=& \tfrac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N}\left(\tfrac{1}{n-x} - \tfrac{1}{n+x}\right) + \underbrace{\frac{1}{N+1+x} + \frac{1}{N-x}}_{\epsilon(x)} \\
\iff & \varphi_N(x+1) &=& \varphi_N(x) + \epsilon(x)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \underset{N\to+\infty}{lim}\ \epsilon(x) &=& 0 \\
\Rightarrow & \varphi(x+1) &=& \varphi(x)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est 1-préiodique.}}$$

Remarques :

— *j'ai noté "1-périodique" comme on note "π-périodique" → vous m'avez déjà répondu en cours.*

— *j'ai utilisé les sommes partielles parce que vous nous l'avez dit en cours, je n'avais pas vu de problème à utiliser des séries qui divergent...*

(c) D n'est pas un intervalle mais une union infinie d'intervalles ouverts. De plus, φ est une somme infinie de fonctions continues, donc je ne pense pas que l'argument "en tant que somme de fonctions continues" marche ici.

2. **Continuité**

(a) Je n'avais pas réussi cette question. J'ai compris avec le corrigé, mais franchement je ne pense pas que j'aurai trouvé sans y passer beaucoup de temps... Concrètement en DS/concours j'aurai sauté la question !

Par contre dans le corrigé il n'y aurait pas une erreur ? à la ligne :

$$\text{Mais on a } x+h \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \text{ donc } \begin{cases} x+h \leq \frac{3}{2} \Rightarrow n-(x+h) \geq n - \frac{3}{2} \\ x+h \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow n+(x+h) \geq n - \frac{1}{2} \end{cases}$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0,1], \left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| \leq C$$

avec $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$ Or, $\frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$, donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, C converge.

$$\boxed{g \in \mathcal{C}([0,1])}$$

(c) Soit $x \in]0,1[$.

$$\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2}}_{\in\mathcal{C}(]0,1[)} - \underbrace{g(x)}_{\in\mathcal{C}([0,1])}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{C}(]0,1[)$. De plus, comme φ est 1-périodique :

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{C}(D)}$$

(d) Je suppose qu'ici c'est le piège d'inverser limite et somme infinie :

$$\underset{x\to 0}{lim}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}\right)\underset{\text{pas forcément}}{=}0$$

Ha oui mais non car ici $g(0)$ existe d'après la question 2.(b). Donc on peut le calculer directement, sans faire de limite ?
$g(0)=0$ et

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}+\frac{2x}{1-x^2}-g(x)$$

$$\Rightarrow\quad \varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}$$

De plus, comme φ est 1-périodique, φ aura le même équivalent en 0 qu'en $0+1$
D'où

$$\boxed{\begin{cases}\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}\\ \varphi(x)\underset{x\to 1}{\sim}\frac{1}{x}\end{cases}}$$

Partie 2: Etude d'un endomorphisme de E

1. Bon comme je ne me suis pas bouché les oreilles, je sais qu'il faut faire attention à l'***endo*** plus qu'au *morphisme* !

Soit $f\in E \iff f\in\mathcal{C}([0,1])$

- ❏ Montrons que T est une application linéaire.
  Soit $(f,i)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}T(\mu f+\lambda i)(x) &= (\mu f+\lambda i)\left(\tfrac{x}{2}\right)+(\mu f+\lambda i)\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\\ &= \mu f\left(\tfrac{x}{2}\right)+\lambda i\left(\tfrac{x}{2}\right)+\mu f\left(\tfrac{x+1}{2}\right)+\lambda i\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\\ &= \mu T(f)(x)+\lambda T(i)(x)\end{aligned}$$

  Donc T est linéaire.
- ❏ Montrons que $T:E\to E$ $x\in[0,1]\to\frac{x}{2}\in[0,1]$ et $\frac{x+1}{2}\in[0,1]$. Donc :

$$T(f)(x)=\underbrace{f\left(\frac{x}{2}\right)}_{\in E}+\underbrace{f\left(\frac{x+1}{2}\right)}_{\in E}$$

  Ainsi, T est un endomorphisme.
- ❏ Montrons que F_n est stable par T
  i.e. montrons que $T(F_n)=F_n$ avec :
  Pour $x\in[0,1]$, $F_n=Vect\{(\underbrace{x\mapsto 1}_{e_0},\underbrace{x\mapsto x}_{e_1},\underbrace{x\mapsto x^2}_{e_2},\underbrace{x\mapsto x^3}_{e_3},...,\underbrace{x\mapsto x^n}_{e_n})\}$

$$\begin{aligned}f\in F_n &\Rightarrow f=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e_k\\ &\Rightarrow T(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k T(e_k)(x)\\ &\Rightarrow T(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\frac{x^k+(x+1)^k}{2^k}\\ &\Rightarrow T(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k\left(x^k+(x+1)^k\right)\end{aligned}$$

  On retrouve une combinaison linéaire des e_k. Donc $T(f)=\sum_{k=0}^{n}\alpha'_k e_k$.

Ainsi

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E \text{ et } F_n \text{ est stable par } T.}$$

2. On a donc ; $T_n : F_n \to F_n$. *Les fonctions sont donc maintenant uniquement des polynômes*
Montrons que T_n est diagonalisable. Notons d'abord que $\mathcal{B}_n$ est une base car une famille de degré échelonnée donc libre et génératrice de F_n car $\mathcal{B}_n = Vect\{F_n\}$. Ecrivons la matrice associée à T_n dans la base $\mathcal{B}_n$. On a :

$$\begin{aligned} T_n(e_j) &= x \mapsto \frac{x^j}{2^j} + \frac{(x+1)^j}{2^j} \\ &= x \mapsto \frac{x^j}{2^j} + \frac{1}{2^j} \times \sum_{k=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} x^k \end{aligned}$$

Donc :

$$\underset{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}{mat}(T_n) = A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T_n(e_1) & T_n(e_2) & \dots & T_n(e_j) & \dots & T_n(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2^{1-i} & & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{1-n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array}$$

On remarque donc que A est triangulaire supérieure, et donc, par propriété son déterminant est le produit des coefficients de la diagnoale. On en déduit son polynôme caractéristique :

$$\chi(x) = \prod_{k=0}^{n} \left(x - \frac{1}{2^{k-1}} \right)$$

χ est donc scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, par théorème, A est diagonalisable, d'où :

$$\boxed{T_n \text{ est diagonalisable.}}$$

3. **Etude de l'espace propre de T associé à 2**
 (a) Comme on l'a montré précédemment, $\chi(x) = \prod_{k=0}^{n} \left(x - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$. 2 est racine du polynôme, donc 2 est valeur propre de T_n. Ainsi

$$\boxed{2 \in Sp(T)}$$

 (b) On a :
 — $[0,1]$ est un intervalle
 — $f \in \mathcal{C}([0,1])$
 Par le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes. D'où :

$$\boxed{\exists (x_0, x_1) \in [0,1] / (m, M) = (f(x_0), f(x_1))}$$

 (c) On a $f \in Ker(T - 2Id_E)$, donc f est vecteur propre de T associé à la valeur propre 2, d'où :

$$\begin{aligned} & T(f) = 2f \\ \Rightarrow\ & T(f)(x_0) = 2f(x_0) \\ \Rightarrow\ & f\left(\tfrac{x_0}{2}\right) + \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\geq m} = 2m \\ \Rightarrow\ & f\left(\tfrac{x_0}{2}\right) \leq m \end{aligned}$$

 De même :

$$f\left(\tfrac{x_0}{2}\right) = 2f(x_0) - \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\geq m}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & f\left(\tfrac{x_0}{2}\right) \geq 2f(x_0) - m \\ \Rightarrow\ & f\left(\tfrac{x_0}{2}\right) \geq m \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m}$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit "$P(n) : f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$".

- ❏ Initialisation : pour $n = 0$
  $f(x_0) = m$: OK d'après la question 3.(b)
- ❏ Heredite : pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $P(n)$ vraie, montrons que $P(n+1)$ l'est aussi. On a, d'après le raisonnement précédent :
  $$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = m$$
  D'où $P(n+1)$ vraie.
- ❏ Conclusion : On a montré l'initialisation et l'hérédité de P. Par le principe de démonstration par récurrence, on a montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m}$$

De plus :

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$$

$$\Rightarrow \quad f(0) = m$$

Donc

$$\boxed{f(0) = m}$$

(e) Par exactement le même raisonnement que pour les 3 relations précédentes :

$$\boxed{M = f(0)}$$

(f) On a montré que pour f quelconque appartenant à $Ker(T - 2Id_E)$:

$$\inf_{x \in [0,1]} f(x) = \sup_{x \in [0,1]} f(x) = f(0)$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in [0,1], f(x) = f(0)$$

Donc

$$\boxed{Ker(T - 2Id_E) = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) / \forall x \in [0,1], f(x) = f(0)\}}$$

Partie 3: Etude de *cotan*

1. $cotan(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$
   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   D'après le théorème de la bijection écrit dans mon cours de PTSI :
   Si :
   — f est strictement monotone sur I
   — f et continue sur I
   Alors :
   — f réalise une bijection de I sur $f(I)$
   — f et f^{-1} ont la même monotonie
   — f^{-1} est continue

   - ❏ Continuité : *cotan* est continue sur $]0, \pi[$ car *sin* s'annule en 0 et π.
   - ❏ Monotonie : Calculons la dérivée.
     cotan est donc dérivable sur $]0, \pi[$ et :
     $\forall x \in]0, \pi[, cotan'(x) = \frac{-sin^2(x) - cos^2(x)}{sin^2(x)} = -\frac{1}{sin^2(x)}$ Ainsi, *cotan* est strictement décroissante sur $]0, \pi[$.

Par théorème :

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } I =]0,\pi[\text{ sur } f(I) = \mathbb{R}}$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On cherche $x \in I$ tel que $y = cotan(x)$

$$\begin{aligned} \iff & \quad y = \tfrac{cos(x)}{sin(x)} \\ \iff & \quad y = \tfrac{1}{tan(x)} \\ \iff & \quad x = arctan\left(\tfrac{1}{y}\right) \\ \iff & \end{aligned}$$

Or, on a la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. D'où

$$\iff \quad x = \tfrac{\pi}{2} - arctan(x)$$

Donc :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, arccotan(y) = \tfrac{\pi}{2} - arctan(y)}$$

3. Pour $x \in I$

$$\begin{aligned} & \psi(x) = \pi cotan(\pi x) = \pi \tfrac{cos(\pi x)}{sin(\pi x} \\ \iff & \quad \psi(x) \underset{0}{=} \pi \left(\tfrac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)}{\pi x} \right) \\ \iff & \quad \psi(x) \underset{0}{=} \tfrac{1}{x} - \tfrac{\pi^2}{2} x + o(x) \end{aligned}$$

Remarque : Comme je ne trouve pas pareil je suppose que je ne suis pas allé assez loin dans mon DL, et qu'il est donc incomplet ? Ce qui explique qu'il manque $-\frac{\pi^2}{6}$ devant le coefficient de x.

$$\begin{aligned} \iff & \quad \psi(x) \underset{0}{=} \pi \left(\tfrac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)}{\pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)} \right) \\ \iff & \quad \psi(x) \underset{0}{=} \left[\tfrac{1}{x}\right] \left[1 - \tfrac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)\right] \underbrace{\left[\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)}\right]}_{\underset{0}{=} 1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)} \\ \iff & \quad \psi(x) \underset{0}{=} \left[\tfrac{1}{x}\right] \left[1 - \tfrac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)\right] \left[1 + \tfrac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)\right] \\ \iff & \quad \psi(x) \underset{0}{=} \tfrac{1}{x} - \tfrac{\pi^2}{3} x + o(x) \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\psi(x) \underset{0}{=} \tfrac{1}{x} - \tfrac{\pi^2}{3} x + o(x)}$$

4. Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \psi\left(\tfrac{x}{2}\right) + \psi\left(\tfrac{x+1}{2}\right) &= \pi \left[cotan\left(\tfrac{\pi x}{2}\right) + cotan\left(\tfrac{\pi(x+1)}{2}\right)\right] \\ &= \pi \left[cotan(X) + cotan\left(X + \tfrac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \pi \left[cotan(X) + tan(X)\right] \\ &= \pi \left[\tfrac{cos^2(X) + sin^2(X)}{sin(X)cos(X)}\right] \\ &= 2\pi \left[\tfrac{cos(2X)}{sin(2X)}\right] \\ &= 2\pi cotan(\pi x) \\ &= 2\psi(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in D, \psi\left(\tfrac{x}{2}\right) + \psi\left(\tfrac{x+1}{2}\right) = 2\psi(x)}$$

5. ψ ne peut pas être vecteur propre de T car $\psi \notin E$ car ψ non continue en 0 et 1.

Partie 4: Développement eulérien

1. Passons par les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \varphi_N\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{2n-x}\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{2}{2n+x}\right) \\ &= 2\left[\frac{1}{x} - \sum_{n=2}^{2N}\left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=2}^{2N}\left(\frac{1}{n+x}\right)\right] \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{cases} \sum_{n=2}^{2N}\left(\frac{1}{n-x}\right) = -\frac{1}{1-x} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\frac{1}{n-x}\right) \\ \sum_{n=2}^{2N}\left(\frac{1}{n+x}\right) = -\frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+x}\right) + \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\frac{1}{n+x}\right) \end{cases}$$

De même :

$$\begin{aligned} \varphi_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= 2\left[\frac{1}{x+1} - \sum_{n=2}^{2N}\left(\frac{1}{n-x-1}\right) + \sum_{n=2}^{2N}\left(\frac{1}{n+x+1}\right)\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{2N-1}\left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=3}^{2N+1}\left(\frac{1}{n+x}\right)\right] \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N-1}\left(\frac{1}{n-x}\right) = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2N-x} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\frac{1}{n-x}\right) \\ \sum_{n=3}^{2N+1}\left(\frac{1}{n+x}\right) = -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2N-x} + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+x}\right) + \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\frac{1}{n+x}\right) \end{cases}$$

En sommant tous les termes, on trouve :

$$\varphi_N\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi_N(x) + \frac{2}{2N-x}$$

Donc, lorsque $N \to +\infty$:

$$\boxed{\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)}$$

2. On a déjà $\varphi - \psi$ continue sur $]0,1[$.
Calculons, si elle existe, la limite en 0 de $\varphi - \psi$. Comme ψ et φ sont 1-périodiques, elles auront la même limite en 1. On a déjà calculé les DL en 0 de ψ et φ, d'où :

$$\begin{aligned} \varphi - \psi &\underset{0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\pi^2}{3}x + o(x) \\ &\underset{0}{=} \frac{\pi^2}{3}x + o(x) \\ \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}(\varphi - \psi) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi - \psi \text{ se prolonge par continuité en 0 et 1, et } (\varphi-\psi)(0) = (\varphi-\psi)(1) = 0}$$

3. Pour un peu plus de clareté, notons $\Psi = \varphi - \psi$.
$\Psi \in \mathcal{C}([0,1]) \Rightarrow \Psi \in E$. On peut donc appliquer T à Ψ.

Notons de plus que, grâce aux questions III 4. et IV 1., on peut écrire :

$$\begin{aligned} & T(\Psi) = 2\Psi \\ \Rightarrow\ & \Psi \in Ker(T - 2Id_E) \\ \Rightarrow\ & \forall x \in [0,1], \Psi(x) = \Psi(0) = 0 \\ \Rightarrow\ & \varphi = \psi \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{\varphi = \psi}$$

4. **Application et généralisation**

(a) On remarque que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9n^2-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\times\frac{1}{3}}{n^2-\frac{1}{3}}\\ &= 3-\psi\left(\frac{1}{3}\right)\\ &= 3-\pi cotan\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 3-\pi\frac{1}{\sqrt{3}}\\ &= 1-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{9n^2-1}=1-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

(b) Je suppose que ce n'est pas $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ mais $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

On a :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-x^2} &&= \frac{1}{2x}(2-\varphi)\\ & &&= \frac{1}{2x}(2-\psi)\\ \text{Or}\quad & \frac{1}{2x}(2-\psi) &&\underset{0}{\sim} \frac{1}{2x}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{\pi^2}{3}x+o(x)\right)\\ & &&\underset{0}{\sim} \frac{\pi^2}{6}+o(1)\\ \text{Donc}\quad & \lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-x^2} &&= \frac{\pi^2}{6}\\ \Rightarrow\quad & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &&= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Remarques :
— *je ne pense pas avoir bien rédiger...*
— *il me semble qu'en cours on avait vu la fonction zeta de Riemann, et :*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$$

(c)

$$(\mathcal{R}_0'):\forall x\in\mathbb{C}-\mathbb{Z},\pi cotan(\pi x)=\frac{1}{x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}$$

Passons sous forme exponentielle

$$\begin{aligned} & cotan(x) &&= \frac{cos(x)}{sin(x)}\\ \Rightarrow\quad & cotan(x) &&= i\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}\\ \Rightarrow\quad & cotan(x) &&= -i\frac{cosh(x)}{sinh(x)}\end{aligned}$$

Donc, pour $y \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{array}{rcl}
-\pi\frac{cosh(\pi y)}{sinh(\pi x)} & = & \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-x^2} & = & \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x} + \pi\frac{cosh(\pi x)}{sinh(\pi x)}\right) \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-x^2} & = & \frac{1}{2x^2}\left(1 + \pi x\frac{cosh(\pi x)}{sinh(\pi x)}\right) \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-x^2} & = & \frac{1}{2x^2}\left(1 + \pi x\frac{cosh(\pi x)}{sinh(\pi x)}\right) \\
\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & iy \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2} & = & -\frac{1}{2y^2}\left(1 + \pi\frac{cosh(\pi iy)}{sinh(\pi iy)}\right) \end{array}\right. & & \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2} & = & \frac{1}{2y^2}\left(-\pi\frac{cosh(\pi iy)}{sinh(\pi iy)} - 1\right) \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2} & = & \frac{1}{2y^2}\left(\pi\frac{cosh(\pi y)}{sinh(\pi y)} - 1\right)
\end{array}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+y^2} = \frac{1}{2y^2}\left(\pi\frac{cosh(\pi y)}{sinh(\pi y)} - 1\right)}$$

Partie 5: Calcul d'un intégrale à paramètre

1. (a) Soit $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$

$$\begin{array}{rl}
 & |sin(xt)| \leq |x|t \\
\Rightarrow & |h(x,t)| \leq 1 \times \frac{|x|t}{e^t-1} \\
\Rightarrow & M = 1
\end{array}$$

Donc :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}/\forall(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, |h(x,t)| \leq M|x|\frac{t}{e^t-1}}$$

(b) Γ est une intégrale à paramètre, appliquons le théorème du cours :
On a :

- Regularite selon $x \in \mathbb{R}$:
  $\forall t \in]0,+\infty[, h(\blacksquare,t) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x,t) \end{array}$ continue sur $\mathbb{R}$
- Regularite selon $t \in]0,+\infty[$:
  $\forall x \in \mathbb{R}, h(x,\blacksquare) : \begin{array}{l}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto h(x,t) \end{array}$ continue sur $]0,+\infty[$ car $\forall t > 0, (e^t - 1) > 0$
- Domination :
  D'après la question précédente :

$$\exists M \in \mathbb{R}/\forall(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, |h(x,t)| \leq M|x|\underbrace{\frac{t}{e^t-1}}_{\varphi(t)}$$

Or,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} e^t - 1 & \underset{+\infty}{\sim} & e^t \\ t & \underset{+\infty}{=} & o(e^{t/2}) \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcll} \Rightarrow & \frac{t}{e^t} & \underset{+\infty}{=} & o(e^{-t/2}) \\ \Rightarrow & \varphi(t) & \underset{+\infty}{=} & o(e^{-t/2}) \end{array}$$

Or, $e^{-t/2}$ est intégrale sur $[0, +\infty$ en tant qu'intégrale de référence. Par le théorème de comparaison des fonctions positives, $\varphi(t)$ est intégrale sur $[0, +\infty[$.

Par théorème :

$$\boxed{\Gamma \text{ continue sur } \mathbb{R}}$$

(c) On a déjà presque tout dit, mais il faut tout recommencer, alors qu'on aurait pu tout faire en une question... (Heureusement qu'il y a le copier-coller !)

- Regularite selon $x \in \mathbb{R}$:
  $\forall t \in]0, +\infty[, h(\blacksquare, t) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x, t) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
- Regularite selon $t \in]0, +\infty[$:
  $\forall x \in \mathbb{R}$,
  - $h(x, \blacksquare) : \begin{array}{l}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto h(x, t) \end{array}$ continue et intégrable sur $]0, +\infty[$
  - $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \blacksquare) : \begin{array}{l}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \end{array}$ continue $]0, +\infty[$
- Domination :
  D'après la question précédente :

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, |h(x, t)| \leq M|x| \underbrace{\frac{t}{e^t - 1}}_{\varphi(t)}$$

Avec $\varphi(t)$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par théorème :

$$\boxed{\Gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \ \mathbb{R}}$$

2. Soit $(x, t, N) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{N}$.
   On a :

$$\begin{array}{rrcl} & h(x, t) & = & \frac{sin(xt)}{e^t - 1} \\ \Rightarrow & h(x, t) & = & e^{-t} sin(xt) \frac{1}{e^{-t}(e^t - 1)} \\ \Rightarrow & h(x, t) & = & e^{-t} sin(xt) \frac{1}{1 - e^{-t}} \end{array}$$

De plus, $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1$:

$$\begin{array}{rrcl} & \sum_{k=0}^{N} q^k & = & \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \\ \Rightarrow & \sum_{k=0}^{N} q^k & = & \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{N+1}}{1 - q} \\ \Rightarrow & \frac{1}{1 - q} & = & \sum_{k=0}^{N} q^k + \frac{q^{N+1}}{1 - q} \end{array}$$

Or, $\forall t > 0, |e^{-t}| < 1$, la relation précédente est donc valable pour $q = e^{-t}$.
D'où :

$$h(x, t) = e^{-t} sin(xt) \left(\sum_{k=0}^{N} e^{-tk} + \frac{e^{-t(N+1)}}{1 - e^{-t}} \right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} sin(xt) \left(\sum_{k=0}^{N} e^{-tk} + \frac{e^{-t(N+1)}}{1-e^{-t}} \right) dt}$$

3. Soit $(x, t, N) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[\times\mathbb{N}$.
   On a :

$$\begin{array}{rrcl} & |h(x,t)| & \leq & M|x|\frac{t}{e^t-1} \\ \Rightarrow & |h(x,t)|e^{-(N+1)t} & \leq & M|x|\frac{te^{-(N+1)t}}{e^t-1} \end{array}$$

   Or, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} & e^t - 1 & \underset{+\infty}{\sim} & e^t \\ \text{et} & t & = & o(e^t) \\ \Rightarrow & \frac{te^{-(N+1)t}}{e^t-1} & = & o(e^{-(N+1)t}) \\ \Rightarrow & \frac{te^{-(N+1)t}}{e^t-1} & = & o(e^{-(N+1)t}) \end{array}$$

   Ainsi :

$$\begin{array}{rrcl} & |h(x,t)|e^{-(N+1)t} & \leq & M|x|e^{-(N+1)t} \\ \Rightarrow & \int_0^{+\infty} |h(x,t)|e^{-(N+1)t}dt & \leq & M|x| \int_0^{+\infty} e^{-(N+1)t}dt \\ \Rightarrow & \left| \int_0^{+\infty} h(x,t)e^{-(N+1)t}dt \right| & \leq & M|x| \int_0^{+\infty} e^{-(N+1)t}dt \\ \Rightarrow & \left| \int_0^{+\infty} h(x,t)e^{-(N+1)t}dt \right| & \leq & \frac{M|x|}{(N+1)} \end{array}$$

   Par le théorème de l'encadrement, on a alors :

$$\boxed{\underset{N\to+\infty}{lim} R_n(x) = 0}$$

4. Soit $(x, t, k) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[\times\mathbb{N}$.
   Utilisons la formule d'Euler :

$$sin(xt) = \text{Im}\left(e^{ixt}\right)$$

$$\begin{array}{rrcl} & J_{k_{Im}}(x) & = & \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(1+k-ix)}dt \\ \Rightarrow & J_{k_{Im}}(x) & = & \frac{1}{1+k-ix} \\ \Rightarrow & J_{k_{Im}}(x) & = & \frac{1+k+ix}{(1+k)^2+x^2} \\ \Rightarrow & J_k(x) & = & \frac{x}{(1+k)^2+x^2} \end{array}$$

   Donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, J_k(x) = \frac{x}{(1+k)^2+x^2}}$$

5. Soit $(x, t, N) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[\times\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \Gamma(x) & = & \int_0^{+\infty} e^{-t} sin(xt) \left(\sum_{k=0}^{N} e^{-tk} + \frac{e^{-t(N+1)}}{1-e^{-t}} \right) dt \\
\Rightarrow & \Gamma(x) & = & \int_0^{+\infty} e^{-t} sin(xt) \sum_{k=0}^{N} e^{-tk} dt + R_N(x) \\
\Rightarrow & \Gamma(x) & = & \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{N} e^{-t} sin(xt) e^{-tk} dt + R_N(x) \\
\Rightarrow & \Gamma(x) & = & \sum_{k=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{-t} sin(xt) e^{-tk} dt + R_N(x) \\
\Rightarrow & \Gamma(x) & = & \sum_{k=0}^{N} \frac{x}{(1+k)^2+x^2} + R_N(x) \\
\Rightarrow & \Gamma(x) & = & x \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2+x^2} + R_N(x)
\end{array}$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, et en utilisant $\mathcal{R}_1$:

$$\boxed{\forall x \neq 0, \Gamma(x) = \frac{1}{2x} \left(\pi x \frac{cosh(\pi x)}{sinh(\pi x)} - 1 \right)}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rccc}
 & \frac{cosh(\pi x)}{sinh(\pi x)} & = & \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} \\
\Rightarrow & \frac{cosh(\pi x)}{sinh(\pi x)} & \underset{+\infty}{\sim} & \frac{1+\frac{\pi^2 x^2}{2}+o(x^2)}{\pi x+\frac{\pi^3 x^3}{6}+o(x^3)} \\
\Rightarrow & \frac{1}{2x} \left(\pi x \frac{cosh(\pi x)}{sinh(\pi x)} - 1 \right) & \underset{+\infty}{\sim} & \frac{\pi^2}{6} x + o(x)
\end{array}$$

On remarque que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 4} dt = \Gamma'(0)$$

D'où :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-4} dt = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice 2: Temps d'attente d'une séquence dans un automate

Partie 1: Etude d'un cas simple

1. On reconnait une loi géométrique de paramètre q.

$$Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$$

D'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = (1-q)^{n-1} q}$$

2. Redémontrons la formule de la série génératrice d'une loi géométrique. On se souvient de bien faire attention aux indices, le seul piège.

$$\begin{array}{rrcl} & G_y(t) & = & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(Y=n)t^n \\ \Rightarrow & G_y(t) & = & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (1-q)^{n-1} q t^n \\ \Rightarrow & G_y(t) & = & \frac{q}{p} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (pt)^n \\ \Rightarrow & G_y(t) & = & \frac{q}{p} pt \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (pt)^{n-1} \\ \Rightarrow & G_y(t) & = & qt \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (pt)^n \\ \Rightarrow & G_y(t) & = & qt \frac{1}{1-pt} \\ \Rightarrow & G_y(t) & = & \frac{qt}{1-pt} \end{array}$$

De plus : $G_y(t) = \frac{q}{p} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (pt)^n$ converge pour $|pt| < 1 \Rightarrow |t| < \frac{1}{p}$. Donc le rayon de convergence est $R_y = \frac{1}{p}$ avec $p \in]0,1[$.
Ainsi :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} R_y & = & \frac{1}{p} > 1 \\ \forall t \in]-R_y, R_y[, G_y(t) & = & \frac{qt}{1-pt} \end{array} \right.}$$

3. $1 \in]-R_Y, R_Y[$ et G_Y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R_Y, R_Y[$ en tant que fonction décompsable en série entière, donc G_Y est deux fois dérivable en 1. De plus, $\forall t \in]-R_Y, R_Y[$:

$$\begin{array}{rrclcl} & G_y(t) & = & \frac{qt}{1-pt} & & \\ \Rightarrow & G'_y(t) & = & \frac{q(1-pt)+qpt}{(1-pt)^2} & = & \frac{q}{(1-pt)^2} \\ \Rightarrow & G''_y(t) & = & q - \frac{-2p(1-pt)}{(1-pt)^4} & = & \frac{2pq}{(1-pt)^3} \end{array}$$

Donc :

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rclcl} G'_y(1) & = & \frac{q}{(1-p)^2} & = & \frac{1}{q} \\ G''_y(1) & = & \frac{2pq}{q^3} & = & \frac{2p}{q^2} \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\boxed{G_Y \text{ deux fois dérivables et } \left\{ \begin{array}{rcl} G'_y(1) & = & \frac{1}{q} \\ G''_y(1) & = & \frac{2p}{q^2} \end{array} \right.}$$

4. Par propriété :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E(Y) & = & G'_Y(1) \\ V(Y) & = & G'_Y(1) + G''_Y(1) - G'_Y(1)^2 \end{array} \right.$$

D'où :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} E(Y) & = & \frac{1}{q} \\ V(Y) & = & \frac{p}{q^2} \end{array} \right.}$$

Partie 2: Etude d'un cas intermédiaire

1. On a :

$$\boxed{\begin{cases} p_1 &= 0 \\ p_2 &= q^2 \\ p_3 &= pq^2 \end{cases}}$$

2. Pour que ce système soit un système complet d'évenements, il faut que les évenements soient deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = 0$), et que la réunion des évenements forme Ω. Ici les évènements ne peux pas se produire en même temps, donc sont incompatbles. Deplus les 3 évenements couvrent toutes les possibilités. Ainsi :

$$\boxed{(P_1, C_1 \cup P_2, C_1 \cup C_2) \text{ forme un système complet d'évenements.}}$$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$\underbrace{P(Z=n)}_{p_n} = P(Z=n|P_1)P(P_1) + P(Z=n|C_1 \cap P_2)P(C_1 \cap P_2) + P(Z=n|C_1 \cap C_2)P(C_1 \cap C_2)$$

❑ $\underline{P(Z=n|P_1)P(P_1)\ :}$
— $\boxed{P(P_1) = p}$
— Puisque l'évenement P_1 vient d'être réalisé, on retourne à l'état initial, donc il ne reste plus que $n-1$ tirages possibles, d'où $\boxed{P(Z=n|P_1) = p_{n-1}}$

❑ $\underline{P(Z=n|C_1 \cap P_2)P(C_1 \cap P_2)\ :}$
— $\boxed{P(C_1 \cap P_2) = pq}$
— Par le même raisonnement : $\boxed{P(Z=n|C_1 \cap P_2) = p_{n-2}}$

❑ $\underline{P(Z=n|C_1 \cap C_2)P(C_1 \cap C_2)\ :}$
— $\boxed{P(C_1 \cap C_2) = q^2}$
— Pour $n > 2$, l'évenement $(Z = n|C_1 \cap C_2)$ n'est pas possible car une fois que l'on atteint C_2 l'expérience s'arrête, d'où $\boxed{P(Z=n|C_1 \cap C_2) = 0}$

D'où

$$\boxed{p_n = pp_{n-1} + pqp_{n-2}}$$

4. Soit $t \in]-R_Z, R_Z[$.

$$\begin{array}{rrcl} & G_Z(t) &=& \sum p_n t^n \\ \Rightarrow & G_Z(t) &=& \sum (p_{n-1} + qp_{n-2})pt^n \\ \Rightarrow & G_Z(t) &=& p\sum p_{n-1}t^n + pq\sum p_{n-2}t^n \\ \Rightarrow & G_Z(t) &=& pt\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n}_{G_Z(t)} + pqt^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n}_{G_Z(t)} + p_2 t^2 \\ \Rightarrow & G_Z(t)(1-pt-pqt^2) &=& q^2t^2 \end{array}$$

On a donc bien :

$$\boxed{G_Z(t)(1-pt-pqt^2) = q^2t^2}$$

5. $Q(t)$ est un polynôme de degré 2, il peut donc se mettre sous la forme : $Q(t) = \alpha(t-r_1)(t-r_2)$ avec r_1 et r_2 les racines de Q et α le coefficient dominant. D'où :

$$\boxed{Q(t) = -pt(t-a)(t-b)}$$

6. J'étais parti sur de longues inégalités avec les formules de a et b. J'ai vu le corrigé, c'est super malin !
7. $$f(t)=\frac{q^2t^2}{1-pt-pqt^2}=-\frac{qt^2}{p(t-a)(t-b)}=-\frac{q}{p}t^2\frac{1}{(a-t)}\frac{1}{(b-t)}=-\frac{qt^2}{pab}\frac{1}{(1-\frac{t}{a})}\frac{1}{(1-\frac{t}{b})}$$
   Or $\frac{1}{(1-\frac{t}{a})}$ et $\frac{1}{(1-\frac{t}{b})}$ sont décompsables en séries entières de rayon respectifs $|a|$ et $|b|$. Comme il y a produit de 2 DSE, c'est le plus petit rayon des deux qui compte, ici $|a|$, donc $R\leq|a|$, mais f n'existe pas en $t=a$ donc $R=|a|$.
   Donc :
   $$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ est développable en série entière}\\ \forall t\in]-a,a[, f(t)=G_Z(t)\\ R_Z=|a|\end{array}}$$
8. On calcule le produit de Cauchy pour trouver G_z sous forme d'une seule somme, puis on identifie :
   Soit $t\in]-a,a[$
   $$\begin{array}{rrcl} & G_Z(t) & = & -\frac{qt^2}{pab}\frac{1}{(1-\frac{t}{a})}\frac{1}{(1-\frac{t}{b})}\\ \Rightarrow & G_Z(t) & = & -\frac{qt^2}{pab}\sum\left(\frac{t}{a}\right)^n\sum\left(\frac{t}{b}\right)^n\\ \Rightarrow & G_Z(t) & = & -\frac{qt^2}{pab}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{t^n}{a^kb^{n-k}}\\ \Rightarrow & G_Z(t) & = & \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left[-\frac{q}{pab^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k\right]}_{P(Z=n+2)}t^{n+2}\end{array}$$
   Or :
   $$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{b}{a}\right)^k=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^{n+1}(a-b)}$$
   Donc
   $$p_{n+2} = -\frac{q}{p(ab)^{n+1}}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$
   D'où :
   $$\boxed{p_n=\frac{q}{p(ab)^{n-1}}\frac{b^{n-1}-a^{n-1}}{a-b}}$$
9. $G_Z(t)$ est une série entière, par propriété elle est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-a,a[$.
   Or $1\in]-a,a[$, donc $G'_Z(1)$ et $G''_Z(1)$ existent.
   Par propriété :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} E(Z) & = & G'_Z(1)\\ V(Z) & = & G'_Z(1)+G''_Z(1)-G'_Z(1)^2\end{array}\right.$$
   De plus, en reprenant la formule : $G_Z(t)(1-pt-pqt^2)=q^2t^2$, on trouve :
   $$\begin{array}{rrcl} & G'_Z(t) & = & \frac{2tq^2(1-pt-pqt^2)-t^2q^2(-p-2pqt)}{(1-pt-pqt^2)^2}\\ \Rightarrow & G'_Z(1) & = & \frac{2q^2(1-p-pq)-q^2(-p-2pq)}{(1-p-pq)^2}\\ \Rightarrow & G'_Z(1) & = & \frac{2q^2(q^2)-q^2(-p-2pq)}{(q^2)^2}\\ \Rightarrow & G'_Z(1) & = & \frac{2q^2+p+2pq}{q^2}\\ \Rightarrow & G'_Z(1) & = & 2+\frac{1-q}{q^2}+2\frac{1-q}{q}\\ \Rightarrow & G'_Z(1) & = & \frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}\end{array}$$

D'où

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}}$$

10.

$$\begin{array}{rrcl} & E(Z) & \geq & E(Y)+1 \\ \Rightarrow & \frac{1}{q}+\frac{1}{q^2} & \geq & \frac{1}{q}+1 \\ \Rightarrow & \frac{1+q}{q^2} & \geq & \frac{1+q}{q} \\ \Rightarrow & 1 & \leq & \frac{1}{q} \end{array}$$

Dernière égalité vraie car $q \in]0,1[$ D'où :

$$\boxed{E(Z) \geq E(Y) + 1}$$

11. Oui car $Z \geq Y + 1$.