Devoir Libre 7
Lignes sur un paraboloïde

0 Questions préliminaires

1. (a) Soit $\omega_0 = 1 + i2\sqrt{2} \in \mathbb{C}$. Restons en écriture algébrique.
Soit $Z = x + iy$ tel que $Z^2 = \omega_0$.

$$Z^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2ixy - y^2 & = & 1 + i2\sqrt{2} \\ |Z^2| & = & |1 + i2\sqrt{2}| \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 & = & 1 \\ 2xy & = & 2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 & = & 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 & = & 2 \\ y^2 & = & 1 \\ xy & = & \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x & = & \sqrt{2} & ET & y & = & 1 \\ x & = & -\sqrt{2} & ET & y & = & -1 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\begin{cases} \omega_1 & = & \sqrt{2} + i \\ \omega_2 & = & -\sqrt{2} - i \end{cases}}$$

(b) Soit $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$
Passons en complexe, et à l'aide des formules d'Euler $cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, déterminons $arccos$ et $arctan$ en complexe.

2. (a) Une matrice carrée Q othogonale est une matrice de taille $n \times n$ avec $n \in \mathbb{N}$, et telle que ses colonnes soient toutes de normes 1, et toutes othogonales entre elles.
i.e.

$$\boxed{QQ^T = I_n}$$

(b) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Si Q est othogonale alors son endomorphisme canoniquement associé peut être :
{une isométrie positiveune isométrie négative
Il faut regarder $det(Q)$ pour différencier le type d'isométrie. Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} det(Q) = 1 & \Rightarrow & \text{isométrie positive} \\ det(Q) = -1 & \Rightarrow & \text{isométrie négative} \end{cases}}$$

1 Deux surfaces

1. (a) Soit $\alpha \in R$

$$\begin{cases} z & = & (y - 2\sqrt{2}x)y \\ y & = & \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad z \quad = \quad (\alpha - 2\sqrt{2}x)\alpha$$

On reconnaît l'équation d'une droite. Notons-la D_α. Alors $S = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha$. Par propriété, S est une surface réglée. Ainsi :

$$\boxed{\text{L'intersection de } S \text{ avec un plan d'éqation } y = \alpha \text{ est une droite. Alors } S \text{ est une surface réglée.}}$$

(b) Soit $\beta \in \mathbb{R}$, soit $P : x = \beta$, $C = S \bigcap P$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z & = & (y - 2\sqrt{2}x)y \\ x & = & \beta \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cccc} \Rightarrow & z & = & (y - 2\sqrt{2}\beta)y \\ \Rightarrow & z & = & y^2 - 2\sqrt{2}\beta y \end{array}$$

On reconnaît l'équation d'une parabole. Cherchon le point où la courbure est maximale. i.e. $\gamma(t)$ maximale. Passons en équation paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & t \\ z & = & t^2 - 2\sqrt{2}\beta t \end{array} \right.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons :

$$f(t) = \left(\begin{array}{c} t \\ t^2 - 2\sqrt{2}\beta t \end{array} \right) \Rightarrow f'(t) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2(t - 2\sqrt{2}\beta) \end{array} \right)$$

Définissons l'angle de relèvement α :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t) = \arctan\left(\frac{z'(t)}{y'(t)}\right)$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t) = \arctan\left(2(t - \sqrt{2}\beta)\right)$$

Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|f'(t)\|}$$

De plus, α est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha'(t) = \frac{2}{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2}$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{2}{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2}}$$

Ainsi, γ est maximal pour $(1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2)^{3/2}$ minimal i.e. $t = \sqrt{2}\beta$
Ainsi, la courbure γ est maximale au point $A(\sqrt{2}\beta, -2\beta^2)$ En conclusion :

La nature de C est une **parabole**. Le point de C où la courbure est maximale est $\boldsymbol{A(\sqrt{2}\beta, -2\beta^2)}$

(c) i. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z & = & (y - 2\sqrt{2}x)y \\ z & = & \gamma \end{array} \right. \iff \gamma = (y - 2\sqrt{2}x)y$$

On reconnaît alors l'équation d'une conique. On va réduire la conique pour reconnaître une forme canonique et en déduire la nature de Λ_γ. Il est probable[1] que la disjonction de cas se fasse dans la partie 3 de la réduction, donnant alors différentes natures de Λ_γ

❏ Étape 1 : réduction de la conique

Partie quadratique de la conique : $0 \times x^2 + 2 \times (-\sqrt{2})xy + 1 \times y^2$
On pose la matrice associée $A = \left(\begin{array}{cc} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{array} \right)$ telle que :

$$-2\sqrt{2}xy + y^2 = \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)^T A \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right)^T$$

A est symétrique donc diagonalisable dans une base othonormée d'après le théorème spectral. Son polynôme caractéristique est :

$$x(x-1) = 2 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -1 \\ x & = & 2 \end{array} \right.$$

1. le *probable* est ici hypocrite : j'ai regardé sur Geogebra... ☹

D'où $Sp = \{-1; 2\}$. On pose ainsi $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On détermine la matrice de passage othogonale $P = \underset{C,B}{mat}(Id)$.

On détermine les espaces propres pour chaque valeur propre.

- $\lambda = -1$:

  $E_{(-1)} = ker(A + Id) = ker \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$

  Or

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}L_1}{\underset{\mathcal{L}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Remarque : On sait que la matrice est inversible donc on sait que les lignes L_1 et L_2 sont liées, on n'est donc pas obligé de faire cette étape, mais ça m'a permis de faire des équivalents par ligne sur LATEX !

  Donc

$$E_{(-1)} = Vect \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  Or on veut un vecteur normé. Donc :

$$E_{(-1)} = Vect \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\varepsilon_1} \right\}$$

- $\lambda = 2$:

  De manière équivalente on trouve :

$$E_2 = Vect \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \vec{\varepsilon_2} \right\}$$

On vérifie rapidement $\vec{\varepsilon_1}.\vec{\varepsilon_2} = 0$.

On a alors $P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = P^T = P$. On trouve finalement :

$$-2\sqrt{2}xy + y^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T PDP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$$

- <u>Étape 2 : Changement de base</u>

  Soit $M(x, y) \in \Lambda_\gamma$.

  On a alors : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec donc (X, Y) les coordonnées de M dans la base $\mathcal{C} = (\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2})$.

  Ainsi, l'équation de la partie quadratique de la conique Λ_γ devient :

$$-2\sqrt{2}xy + y^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T PDP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} X \\ T \end{pmatrix}^T P^T PDP^T P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T = -X^2 + 2Y^2$$

- <u>Étape 3 : Forme canonique</u>

$$\Lambda_\gamma : -2\sqrt{2}xy + y^2 = \gamma$$

  Comme on a $\alpha\beta \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}X + Y) \\ y & = & \frac{1}{\sqrt{3}}(X - \sqrt{2}Y) \end{array} \right.$$

  D'où :

$$\Lambda_\gamma : 2Y^2 - X^2 = \gamma$$

  Nous avons ainsi notre forme canonique de Λ_γ, et c'est ici qu'apparaît la disjonction de cas sur γ :

- ❏ $\gamma = 0$

$$2Y^2 = X^2 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} X & = & \sqrt{2}Y \\ X & = & 0 \end{array} \right.$$

On reconnaît alors deux droites.

- ❏ $\gamma \neq 0$

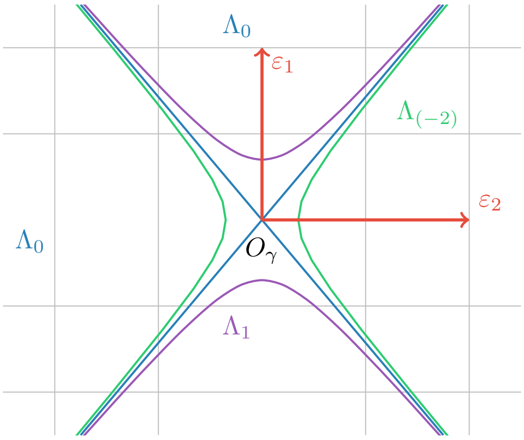
$$2Y^2 - X^2 = \gamma \iff \frac{2}{\gamma}Y^2 - \frac{X^2}{\gamma} = 1$$

On reconnaît alors une hyperbole.

Ainsi :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} \gamma = 0 & \rightarrow & \Lambda_\gamma \text{ est la réunion de 2 droites} \\ \gamma \neq 0 & \rightarrow & \Lambda_\gamma \text{ est une hyperbole} \end{array} \right.}$$

ii. Voici le graphe :



Et bien c'était long à tracer tout ça !
P.S. Je l'avais tracé au brouillon avant, sans aide numérique !
P.S.S. J'ai tout tracé dans la base C pour que ça soit plus simple...

(d) Soit $\Omega_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathcal{P}$ le plan tangent à S en Ω_0.

Soit $H(x,y,z) \in \mathcal{P}$. Alors $\overrightarrow{\Omega_0 H}.\overrightarrow{\nabla} f(\Omega_0) = 0$ avec $\overrightarrow{\nabla} f(\Omega_0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y_0 \\ 2y_0 - 2\sqrt{2}x_0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y_0 \\ 2y_0 - 2\sqrt{2}x_0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -2\sqrt{2}y_0(x - x_0) + 2(y - y_0)(y_0 - \sqrt{2}x_0) - (z - z_0)0$$

Or $z_0 = y_0^2 - 2\sqrt{2}x_0y_0$ car $\Omega_0 \in S$

Donc

$$\iff 2\sqrt{2}y_0x + 2(\sqrt{2}x_0 - y_0)y + z = 2\sqrt{2}x_0y_0 - y_0^2$$

Donc

$$\boxed{\text{L'équation du plan tangeant à } S \text{ en } \Omega_0 \text{ est : } \mathbf{2\sqrt{2}y_0x + 2(\sqrt{2}x_0 - y_0)y + z = 2\sqrt{2}x_0y_0 - y_0^2}}$$

(e) Si $\Omega_0 = O$ alors l'équation devient : $z = 0$ Calculons la matrice hessienne en $O(0,0,0)$:

$$H_f(O) = H_f((x,y,z)) = A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\overrightarrow{\nabla} f(O) = 0$ donc $O(0,0,0)$ est un point critique. De plus, $H_f(O)$ est inversible et ses valeurs propres sont $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$. Ainsi $\alpha \times \beta < 0$. Par théorème, O est un point Col. De plus par propriété :

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ traverse } S \text{ en } O}$$

(a) Soit $M(x,y,z) \in \Sigma$. Montrons que $M \in S$

$$M(x,y,z) \in \Sigma \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r \times \cos(\theta) \\ y & = & r \times \sin(\theta) \\ z & = & 3r^2 \sin(\theta) \times \sin(\theta - \varphi) \end{array} \right.$$

Or, on remarque que

$$\begin{array}{lcl} (y - 2\sqrt{2}x)y & = & r\sin(\theta)(r\sin(\theta) - 2\sqrt{2}r\cos(\theta)) \\ & = & r^2 \sin(\theta)(\sin(\theta) - 2\sqrt{2}\cos(\theta)) \end{array}$$

Or $\varphi = arctan(2\sqrt{2}) \iff \tan(\varphi) = 2\sqrt{2}$ D'où :

$$\begin{array}{lcl} (y - 2\sqrt{2}x)y & = & r^2 \sin(\theta)(\sin(\theta) - \tan(\varphi)\cos(\theta)) \\ & = & r^2 \sin(\theta)(\sin(\theta) - \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\cos(\theta)) \\ & = & r^2 \sin(\theta)\frac{1}{\cos(\varphi)}(\sin(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\theta)) \\ & = & 3r^2 \sin(\theta)\sin(\theta - \varphi) \\ & = & z \end{array}$$

Ainsi $M \in S$. Ceci étant vrai pour tout $M \in \Sigma$:

$$\boxed{\Sigma \subset S}$$

(b) Soit $M(x,y,z) \in S$. Montrons que $M \in \Sigma$
On sait que S est une surface réglée donc :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(\lambda,t) & = & \alpha(t) + \lambda a(t) \\ y(\lambda,t) & = & \beta(t) + \lambda b(t) \\ z(\lambda,t) & = & \gamma(t) + \lambda c(t) \end{array} \right.$$

On injecte cela dans l'équation $z = (y - 2\sqrt{2}x)$ et on doit pouvoir retrouver les équations paramétriques de Σ avec $\lambda = r, t = \theta$, sauf qu'on a du r^2 dans z...On prouverait alors que $S = \Sigma$.

(a) Soit $M(r_0, \theta_0 \in \Sigma$. M est régulier si le vecteur normal au plan tangent à Σ en M est non nul. Calculons $\overrightarrow{n}$ en M :

$$\overrightarrow{n} = \frac{\partial f}{\partial r}(r_0,\theta_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \theta}(r_0,\theta_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r_0,\theta_0) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \\ 6\sin(\theta_0)\sin(\theta_0 - \varphi)r_0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r_0,\theta_0) = \begin{pmatrix} -r_0\sin(\theta_0) \\ r_0\cos(\theta_0) \\ 3r_0^2(\cos(\theta_0)\sin(\theta_0 - \varphi) + \sin(\theta_0)\cos(\theta_0 - \varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_0\sin(\theta_0) \\ r_0\cos(\theta_0) \\ 3r_0^2\sin(2\theta_0 - \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 3r_0^2\sin(2\theta_0 - \varphi)\sin(\theta_0) - 6\sin(\theta_0)\sin(\theta_0 - \varphi)r_0 \times r_0\cos(\theta_0) \\ 6\sin(\theta_0)\sin(\theta_0 - \varphi)r_0 \times r_0\sin(\theta_0) + r_0\cos(\theta_0)3r_0^2\sin(2\theta_0 - \varphi) \\ r_0\cos^2(\theta_0) + r_0\sin^2(\theta_0) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n} = r_0^2 \begin{pmatrix} 3\sin(\theta_0)\left[\sin(2\theta_0 - \varphi) - 2\sin(\theta_0 - \varphi)\cos(\theta_0)\right] \\ 3\left[2\sin^2(\theta_0)\sin(\theta_0 - \varphi) + \cos(\theta_0)\sin(2\theta_0 - \varphi)\right] \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $\overrightarrow{n} = 0$ pour $r = 0$ Ainsi le seul point non régulier de Σ est O.

$$\boxed{\text{L'ensemble des points non réguliers de } \Sigma \text{ est le point } O(0,0,0)}$$

(b) Soit $M(r,\theta) \in \Sigma$. Soit $H(x,y,z) \in \mathcal{P}$ avec $\mathcal{P}$ le plan tangent à Σ en M. Alors, $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{n} = 0$:

$$\iff r^2 \begin{pmatrix} 3\sin(\theta_0)\left[\sin(2\theta_0 - \varphi) - 2\sin(\theta_0 - \varphi)\cos(\theta_0)\right] \\ 3\left[2\sin^2(\theta_0)\sin(\theta_0 - \varphi) + \cos(\theta_0)\sin(2\theta_0 - \varphi)\right] \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - r\cos(\theta) \\ y - r\sin(\theta) \\ z - r^2\sin(\theta)\sin(\theta - \varphi) \end{pmatrix} = 0$$

On trouve alors :

$$\boxed{\textit{Développer les calculs...}}$$

2 Crête et talweg sur Σ

1. On reprend l'équation paramétrique de Σ. Soit $\theta \in [0, \pi[$:

$$\boxed{\Gamma_\theta : \left\{ \begin{array}{lcl} x(r) & = & r \times \cos(\theta) \\ y(r) & = & r \times \sin(\theta) \\ z(r) & = & 3r^2 \sin(\theta) \sin(\theta - \varphi) \end{array} \right.}$$

2. On a deux vecteurs directeurs de P_θ :

$$\overrightarrow{\delta_\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} et\, \overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors : $\Gamma_\theta : r(\overrightarrow{\delta_\theta} + 3r \sin(\theta) \sin(\theta - \varphi) \overrightarrow{k})$. Donc $\Gamma_\theta \subset P_\theta$.

3. Dans le repère $(O, \overrightarrow{\delta_\theta}, overrightarrowk)$:

$$y = x^2 \times sin(\theta) sin(\theta - \varphi)$$

Ainsi Γ_θ est une parabole si $sin(\theta) sin(\theta - \varphi) \neq 0$.

$$\boxed{\Gamma_\theta \text{ est une parabole si } \theta \neq 0 \text{ et } \theta \neq \varphi.}$$

4. (a) On a, d'après la partie 1 :

$$\overrightarrow{n} = \iff r^2 \begin{pmatrix} 3\sin(\theta_0)\left[\sin(2\theta_0 - \varphi) - 2\sin(\theta_0 - \varphi)\cos(\theta_0)\right] \\ 3\left[2\sin^2(\theta_0)\sin(\theta_0 - \varphi) + \cos(\theta_0)\sin(2\theta_0 - \varphi)\right] \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Calculer l'intersection des deux : $P\theta$ et $\mathcal{N}_\theta(r)$

   (c) $2\theta = arctan(2\sqrt{2}) = \varphi$ ou $2\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\alpha = \frac{\varphi}{2} \text{ et } \beta = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

5. *Pas de question 5...*

6. (a) On a $x = 0$ d'où :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & rsin(\theta) \\ z & = & 3rsin(\theta)sin(\theta - \varphi) \end{array} \right.}$$

   De plus on a $f(y, z) = f(-y, z)$ donc

$$\boxed{\text{L'axe } (O, z) \text{ est un axe de symétrie.}}$$

   (b) On calcule la f' en 0 et on trouve :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} z & = & -y \\ z & = & y \end{array} \right.}$$

7. (a) Il faut trouver pour quels $\theta, z'(\theta) = 0$ sur $[0, 2\pi[$

3 Système différentiel et courbe particulière Γ_ψ

0. Je n'ai pas eu le temps de faire plus... Je m'en excuse. Il est vrai que tout taper en LaTeXest assez long ! ! Je continuerai à la main...