

Devoir Libre 7

Lignes sur un paraboloïde

0 Questions préliminaires

1. (a) Soit $\omega_0 = 1 + i2\sqrt{2} \in \mathbb{C}$. Restons en écriture algébrique.

Soit $Z = x + iy$ tel que $Z^2 = \omega_0$.

$$\begin{aligned} Z^2 &= x^2 + 2ixy - y^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2ixy - y^2 &= 1 + i2\sqrt{2} \\ |Z^2| &= |1 + i2\sqrt{2}| \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 &= 1 \\ 2xy &= 2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 &= 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 &= 2 \\ y^2 &= 1 \\ xy &= \sqrt{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x &= \sqrt{2} & ET & y &= 1 \\ x &= -\sqrt{2} & ET & y &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} \omega_1 &= \sqrt{2} + i \\ \omega_2 &= -\sqrt{2} - i \end{cases}$$

- (b) Soit $\varphi = \arccos(\frac{1}{3})$

Passons en complexe, et à l'aide des formules d'Euler $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, déterminons \arccos et \arctan en complexe.

2. (a) Une matrice carrée Q orthogonale est une matrice de taille $n \times n$ avec $n \in \mathbb{N}$, et telle que ses colonnes soient toutes de normes 1, et toutes orthogonales entre elles.
i.e.

$$QQ^T = I_n$$

- (b) Soit $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Si Q est orthogonale alors son endomorphisme canoniquement associé peut être :

{une isométrie positive une isométrie négative

Il faut regarder $\det(Q)$ pour différencier le type d'isométrie. Ainsi :

$$\begin{cases} \det(Q) = 1 &\Rightarrow \text{isométrie positive} \\ \det(Q) = -1 &\Rightarrow \text{isométrie négative} \end{cases}$$

1 Deux surfaces

1. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} z &= (y - 2\sqrt{2}x)y \\ y &= \alpha \end{cases} \\ \Rightarrow z &= (\alpha - 2\sqrt{2}x)\alpha \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation d'une droite. Notons-la D_α . Alors $S = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} D_\alpha$. Par propriété, S est une surface réglée. Ainsi :

L'intersection de S avec un plan d'équation $y = \alpha$ est une droite. Alors S est une surface réglée.

(b) Soit $\beta \in \mathbb{R}$, soit $P : x = \beta$, $C = S \cap P$. On a alors :

$$\begin{cases} z &= (y - 2\sqrt{2}x)y \\ x &= \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = (y - 2\sqrt{2}\beta)y$$

$$\Rightarrow z = y^2 - 2\sqrt{2}\beta y$$

On reconnaît l'équation d'une parabole. Cherchons le point où la courbure est maximale. i.e. $\gamma(t)$ maximale. Passons en équation paramétrique :

$$\begin{cases} y &= t \\ z &= t^2 - 2\sqrt{2}\beta t \end{cases}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, posons :

$$f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - 2\sqrt{2}\beta t \end{pmatrix} \Rightarrow f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(t - \sqrt{2}\beta) \end{pmatrix}$$

Définissons l'angle de relèvement α :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t) = \arctan\left(\frac{z'(t)}{y'(t)}\right)$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t) = \arctan(2(t - \sqrt{2}\beta))$$

Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|f'(t)\|}$$

De plus, α est dérivable sur \mathbb{R} :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha'(t) = \frac{2}{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2}$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{2}{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2}}$$

Ainsi, γ est maximal pour $(1 + 4(t - \sqrt{2}\beta)^2)^{3/2}$ minimal i.e. $t = \sqrt{2}\beta$

Ainsi, la courbure γ est maximale au point $A(\sqrt{2}\beta, -2\beta^2)$ En conclusion :

La nature de C est une **parabole**. Le point de C où la courbure est maximale est $A(\sqrt{2}\beta, -2\beta^2)$

(c) i. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{cases} z &= (y - 2\sqrt{2}x)y \\ z &= \gamma \end{cases} \iff \gamma = (y - 2\sqrt{2}x)y$$

On reconnaît alors l'équation d'une conique. On va réduire la conique pour reconnaître une forme canonique et en déduire la nature de Λ_γ . Il est probable¹ que la disjonction de cas se fasse dans la partie 3 de la réduction, donnant alors différentes natures de Λ_γ

□ Étape 1 : réduction de la conique

Partie quadratique de la conique : $0 \times x^2 + 2 \times (-\sqrt{2})xy + 1 \times y^2$

On pose la matrice associée $A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ telle que :

$$-2\sqrt{2}xy + y^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$$

A est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée d'après le théorème spectral. Son polynôme caractéristique est :

$$x(x - 1) = 2 \iff \begin{cases} x &= -1 \\ x &= 2 \end{cases}$$

1. le *probable* est ici hypocrite : j'ai regardé sur Geogebra... ©

D'où $Sp = \{-1; 2\}$. On pose ainsi $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
 On détermine la matrice de passage orthogonale $P = \underset{C,B}{mat}(Id)$.
 On détermine les espaces propres pour chaque valeur propre.

□ $\lambda = -1$:

$$E_{(-1)} = \ker(A + Id) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{2}L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : On sait que la matrice est inversible donc on sait que les lignes L_1 et L_2 sont liées, on n'est donc pas obligé de faire cette étape, mais ça m'a permis de faire des équivalents par ligne sur LATEX !

Donc

$$E_{(-1)} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Or on veut un vecteur normé. Donc :

$$E_{(-1)} = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\varepsilon}_1 \right\}$$

□ $\lambda = 2$:

De manière équivalente on trouve :

$$E_2 = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \vec{\varepsilon}_2 \right\}$$

On vérifie rapidement $\vec{\varepsilon}_1 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0$.

On a alors $P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = P^T = P$. On trouve finalement :

$$-2\sqrt{2}xy + y^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T PDP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$$

□ Étape 2 : Changement de base

Soit $M(x, y) \in \Lambda_\gamma$.

On a alors : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec donc (X, Y) les coordonnées de M dans la base $\mathcal{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$.

Ainsi, l'équation de la partie quadratique de la conique Λ_γ devient :

$$-2\sqrt{2}xy + y^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T PDP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T P^T PDP P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}^T = -X^2 + 2Y^2$$

□ Étape 3 : Forme canonique

$$\Lambda_\gamma : -2\sqrt{2}xy + y^2 = \gamma$$

Comme on a $\alpha\beta \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}X + Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}(X - \sqrt{2}Y) \end{cases}$$

D'où :

$$\Lambda_\gamma : 2Y^2 - X^2 = \gamma$$

Nous avons ainsi notre forme canonique de Λ_γ , et c'est ici qu'apparaît la disjonction de cas sur γ :

□ $\gamma = 0$

$$2Y^2 = X^2 \iff \begin{cases} X = \sqrt{2}Y \\ X = 0 \end{cases}$$

On reconnaît alors deux droites.

□ $\gamma \neq 0$

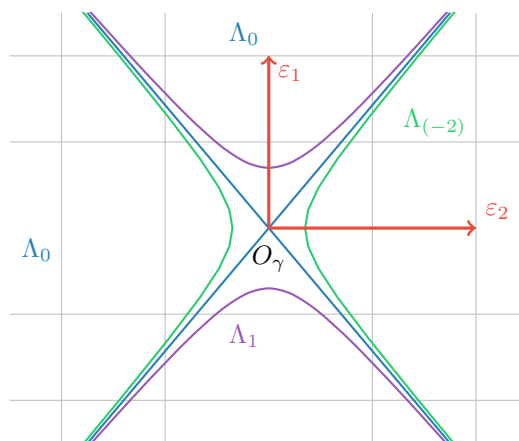
$$2Y^2 - X^2 = \gamma \iff \frac{2}{\gamma}Y^2 - \frac{X^2}{\gamma} = 1$$

On reconnaît alors une hyperbole.

Ainsi :

$$\begin{cases} \gamma = 0 & \rightarrow \Lambda_\gamma \text{ est la réunion de 2 droites} \\ \gamma \neq 0 & \rightarrow \Lambda_\gamma \text{ est une hyperbole} \end{cases}$$

ii. Voici le graphe :



Et bien c'était long à tracer tout ça !

P.S. Je l'avais tracé au brouillon avant, sans aide numérique !

P.S.S. J'ai tout tracé dans la base C pour que ça soit plus simple...

(d) Soit $\Omega_0(x_0, y_0, z_0)$, \mathcal{P} le plan tangent à S en Ω_0 .

Soit $H(x, y, z) \in \mathcal{P}$. Alors $\overrightarrow{\Omega_0 H} \cdot \vec{\nabla} f(\Omega_0) = 0$ avec $\vec{\nabla} f(\Omega_0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y_0 \\ 2y_0 - 2\sqrt{2}x_0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}y_0 \\ 2y_0 - 2\sqrt{2}x_0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -2\sqrt{2}y_0(x - x_0) + 2(y - y_0)(y_0 - \sqrt{2}x_0) - (z - z_0)0$$

Or $z_0 = y_0^2 - 2\sqrt{2}x_0y_0$ car $\Omega_0 \in S$

Donc

$$\iff 2\sqrt{2}y_0x + 2(\sqrt{2}x_0 - y_0)y + z = 2\sqrt{2}x_0y_0 - y_0^2$$

Donc

L'équation du plan tangent à S en Ω_0 est : $2\sqrt{2}y_0x + 2(\sqrt{2}x_0 - y_0)y + z = 2\sqrt{2}x_0y_0 - y_0^2$

(e) Si $\Omega_0 = O$ alors l'équation devient : $z = 0$ Calculons la matrice hessienne en $O(0, 0, 0)$:

$$H_f(O) = H_f((x, y, z)) = A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\vec{\nabla} f(O) = 0$ donc $O(0, 0, 0)$ est un point critique. De plus, $H_f(O)$ est inversible et ses valeurs propres sont $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$. Ainsi $\alpha \times \beta < 0$. Par théorème, O est un point Col. De plus par propriété :

\mathcal{P} traverse S en O

- (a) Soit
- $M(x, y, z) \in \Sigma$
- . Montrons que
- $M \in S$

$$M(x, y, z) \in \Sigma \Rightarrow \begin{cases} x &= r \times \cos(\theta) \\ y &= r \times \sin(\theta) \\ z &= 3r^2 \sin(\theta) \times \sin(\theta - \varphi) \end{cases}$$

Or, on remarque que

$$\begin{aligned} (y - 2\sqrt{2}x)y &= r \sin(\theta)(r \sin(\theta) - 2\sqrt{2}r \cos(\theta)) \\ &= r^2 \sin(\theta)(\sin(\theta) - 2\sqrt{2} \cos(\theta)) \end{aligned}$$

Or $\varphi = \arctan(2\sqrt{2}) \iff \tan(\varphi) = 2\sqrt{2}$ D'où :

$$\begin{aligned} (y - 2\sqrt{2}x)y &= r^2 \sin(\theta)(\sin(\theta) - \tan(\varphi) \cos(\theta)) \\ &= r^2 \sin(\theta)(\sin(\theta) - \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \cos(\theta)) \\ &= r^2 \sin(\theta) \frac{1}{\cos(\varphi)} (\sin(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cos(\theta)) \\ &= 3r^2 \sin(\theta) \sin(\theta - \varphi) \\ &= z \end{aligned}$$

Ainsi $M \in S$. Ceci étant vrai pour tout $M \in \Sigma$:

$$\Sigma \subset S$$

- (b) Soit
- $M(x, y, z) \in S$
- . Montrons que
- $M \in \Sigma$

On sait que S est une surface réglée donc :

$$\begin{cases} x(\lambda, t) &= \alpha(t) + \lambda a(t) \\ y(\lambda, t) &= \beta(t) + \lambda b(t) \\ z(\lambda, t) &= \gamma(t) + \lambda c(t) \end{cases}$$

On injecte cela dans l'équation $z = (y - 2\sqrt{2}x)y$ et on doit pouvoir retrouver les équations paramétriques de Σ avec $\lambda = r, t = \theta$, sauf qu'on a du r^2 dans z ... On prouverait alors que $S = \Sigma$.

- (a) Soit
- $M(r_0, \theta_0) \in \Sigma$
- .
- M
- est régulier si le vecteur normal au plan tangent à
- Σ
- en
- M
- est non nul. Calculons
- \vec{n}
- en
- M
- :

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\partial f}{\partial r}(r_0, \theta_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \\ \frac{\partial f}{\partial r}(r_0, \theta_0) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \\ 6 \sin(\theta_0) \sin(\theta_0 - \varphi) r_0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) &= \begin{pmatrix} -r_0 \sin(\theta_0) \\ r_0 \cos(\theta_0) \\ 3r_0^2 (\cos(\theta_0) \sin(\theta_0 - \varphi) + \sin(\theta_0) \cos(\theta_0 - \varphi)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_0 \sin(\theta_0) \\ r_0 \cos(\theta_0) \\ 3r_0^2 \sin(2\theta_0 - \varphi) \end{pmatrix} \\ \vec{n} &= \begin{pmatrix} 3r_0^2 \sin(2\theta_0 - \varphi) \sin(\theta_0) - 6 \sin(\theta_0) \sin(\theta_0 - \varphi) r_0 \times r_0 \cos(\theta_0) \\ 6 \sin(\theta_0) \sin(\theta_0 - \varphi) r_0 \times r_0 \sin(\theta_0) + r_0 \cos(\theta_0) 3r_0^2 \sin(2\theta_0 - \varphi) \\ r_0 \cos^2(\theta_0) + r_0 \sin^2(\theta_0) \end{pmatrix} \\ \vec{n} &= r_0^2 \begin{pmatrix} 3 \sin(\theta_0) [\sin(2\theta_0 - \varphi) - 2 \sin(\theta_0 - \varphi) \cos(\theta_0)] \\ 3 [2 \sin^2(\theta_0) \sin(\theta_0 - \varphi) + \cos(\theta_0) \sin(2\theta_0 - \varphi)] \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors $\vec{n} = 0$ pour $r = 0$ Ainsi le seul point non régulier de Σ est O .

L'ensemble des points non réguliers de Σ est le point $O(0, 0, 0)$

- (b) Soit
- $M(r, \theta) \in \Sigma$
- . Soit
- $H(x, y, z) \in \mathcal{P}$
- avec
- \mathcal{P}
- le plan tangent à
- Σ
- en
- M
- . Alors,
- $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n} = 0$
- :

$$\iff r^2 \begin{pmatrix} 3 \sin(\theta_0) [\sin(2\theta_0 - \varphi) - 2 \sin(\theta_0 - \varphi) \cos(\theta_0)] \\ 3 [2 \sin^2(\theta_0) \sin(\theta_0 - \varphi) + \cos(\theta_0) \sin(2\theta_0 - \varphi)] \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - r \cos(\theta) \\ y - r \sin(\theta) \\ z - r^2 \sin(\theta) \sin(\theta - \varphi) \end{pmatrix} = 0$$

On trouve alors :

Développer les calculs...

2 Crête et talweg sur Σ

1. On reprend l'équation paramétrique de Σ . Soit $\theta \in [0, \pi[$:

$$\Gamma_\theta : \begin{cases} x(r) &= r \times \cos(\theta) \\ y(r) &= r \times \sin(\theta) \\ z(r) &= 3r^2 \sin(\theta) \sin(\theta - \varphi) \end{cases}$$

2. On a deux vecteurs directeurs de P_θ :

$$\vec{\delta}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors : $\Gamma_\theta : r(\vec{\delta}_\theta + 3r \sin(\theta) \sin(\theta - \varphi) \vec{k})$. Donc $\Gamma_\theta \subset P_\theta$.

3. Dans le repère $(O, \vec{\delta}_\theta, \vec{k})$:

$$y = x^2 \times \sin(\theta) \sin(\theta - \varphi)$$

Ainsi Γ_θ est une parabole si $\sin(\theta) \sin(\theta - \varphi) \neq 0$.

Γ_θ est une parabole si $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \varphi$.

4. (a) On a, d'après la partie 1 :

$$\vec{n} = \iff r^2 \begin{pmatrix} 3 \sin(\theta_0) [\sin(2\theta_0 - \varphi) - 2 \sin(\theta_0 - \varphi) \cos(\theta_0)] \\ 3 [2 \sin^2(\theta_0) \sin(\theta_0 - \varphi) + \cos(\theta_0) \sin(2\theta_0 - \varphi)] \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Calculer l'intersection des deux : P_θ et $\mathcal{N}_\theta(r)$

- (c) $2\theta = \arctan(2\sqrt{2}) = \varphi$ ou $2\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$$\alpha = \frac{\varphi}{2} \text{ et } \beta = \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

5. Pas de question 5...

6. (a) On a $x = 0$ d'où :

$$\begin{cases} y &= r \sin(\theta) \\ z &= 3r \sin(\theta) \sin(\theta - \varphi) \end{cases}$$

De plus on a $f(y, z) = f(-y, z)$ donc

L'axe (O, z) est un axe de symétrie.

- (b) On calcule la f' en 0 et on trouve :

$$\begin{cases} z &= -y \\ z &= y \end{cases}$$

7. (a) Il faut trouver pour quels $\theta, z'(\theta) = 0$ sur $[0, 2\pi[$

3 Système différentiel et courbe particulière Γ_ψ

0. Je n'ai pas eu le temps de faire plus... Je m'en excuse. Il est vrai que tout taper en \LaTeX est assez long!!
Je continuerai à la main...