

Devoir Libre 8 : Courbes paramétrées

Exercice 1: Deltoïde

1. Enveloppe d'une famille de droites

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{u}_t = \begin{pmatrix} \cos(2t) + \cos(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, \vec{u}_t dérivable.

$$\Rightarrow \vec{u}_t' = \begin{pmatrix} -2\sin(2t) - \sin(t) \\ 2\cos(2t) - \cos(t) \end{pmatrix}$$

Question : Un vecteur n'est pas une matrice, or là j'ai écrit les coordonnées du vecteur en colonne. Est-ce faux ?

D'où

$$\begin{aligned} \det(\vec{u}_t, \vec{u}_t') &= \begin{vmatrix} \cos(2t) + \cos(t) & -2\sin(2t) - \sin(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) & 2\cos(2t) - \cos(t) \end{vmatrix} \\ &= [\cos(2t) + \cos(t)] \times [2\cos(2t) - \cos(t)] + [\sin(2t) - \sin(t)] \times [2\sin(2t) + \sin(t)] \\ &= 2 \underbrace{(\cos^2(2t) + \sin^2(2t))}_1 + \underbrace{\cos(2t)\cos(t) - \sin(2t)\sin(t)}_{\cos(3t)} - \underbrace{(\cos^2(t) + \sin^2(t))}_1 \\ &= \cos(3t) + 1 \end{aligned}$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \det(\vec{u}_t, \vec{u}_t') = \cos(3t) + 1$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. $D_t = (P_t Q_t) = P_t + \text{Vect} \underbrace{\left\{ \overrightarrow{P_t Q_t} \right\}}_{\vec{u}_t}$.

On a : P_t, \vec{u}_t de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et : $\exists t \in \mathbb{R}, \det(\vec{u}_t, \vec{u}_t') \neq 0$. Donc, par propriété, l'enveloppe des droites D_t , nommée Γ , existe.

Paramétrons Γ par : $\vec{f}(t) = \overrightarrow{OC}(t)$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ l'inconnue.

Par définition de l'enveloppe, Γ doit respecter deux conditions.

1. Intersection de Γ avec D_t :

$$\vec{f}(t) = P_t + \lambda(t)\vec{u}_t$$

2. D_t tangente à Γ en C :

$$\begin{aligned} \text{i.e. } & \det(\vec{f}'(t), \vec{u}_t) = 0 \\ \iff & \det(P_t' + \lambda'(t)\vec{u}_t + \lambda(t)\vec{u}_t', \vec{u}_t) = 0 \\ \iff & \det(P_t' + \lambda(t)\vec{u}_t', \vec{u}_t) + \lambda'(t) \underbrace{\det(\vec{u}_t, \vec{u}_t)}_0 = 0 \\ \iff & \det(P_t', \vec{u}_t) + \lambda(t)\det(\vec{u}_t', \vec{u}_t) = 0 \\ \iff & \lambda(t) = \frac{\det(P_t', \vec{u}_t)}{\det(\vec{u}_t', \vec{u}_t)} \end{aligned}$$

On remplace :

$$\begin{aligned} P_t' &= \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\ \vec{u}_t &= \begin{pmatrix} \cos(2t) + \cos(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix} \\ \vec{u}_t' &= \begin{pmatrix} -2\sin(2t) - \sin(t) \\ 2\cos(2t) - \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = -\frac{\cos(3t) + 1}{\cos(3t) + 1} = (-1)$$

En reprenant la condition 1. $\vec{f}(t) = P_t + \lambda(t)\vec{u}_t$:

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + (-1) \times \begin{pmatrix} \cos(2t) + \cos(t) \\ \sin(2t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient :

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$M_t \in \Gamma \iff \begin{cases} x(t) &= -2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

CQFD

2. Intervalle d'étude de Γ

Grâce au paramétrage de Γ , on remarque que la courbe est :

1. paire selon les x
2. impaire selon les y
3. 2π périodique

Ainsi, Γ est symétrique par rapport à l'axe des x , et se répète sur elle même sur \mathbb{R} .

Pour tracer Γ à partir de Γ_1 , il suffit de faire une symétrie axiale par rapport à l'axe des x .

3. Etude de Γ

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x(t) &= -2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

x et y sont dérivables sur \mathbb{R} en tant que composition de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x'(t) &= 2\sin(t) + 2\sin(2t) \\ y'(t) &= 2\cos(t) - 2\cos(2t) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x'(t) &= 2[\sin(t) + \sin(2t)] \\ y'(t) &= 2[\cos(t) - 2\cos^2(t) + 1] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x'(t) &= 2\sin(t)[1 + 2\cos(t)] \\ y'(t) &= -4\left[\cos^2(t) - \frac{1}{2} - \frac{\cos(t)}{2}\right] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x'(t) &= 4\sin(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t)\right] \\ y'(t) &= 4\left[-\cos^2(t) + \frac{1}{2} + \cos(t) - \frac{\cos(t)}{2}\right] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x'(t) &= 4\sin(t)\left[\frac{1}{2} + \cos(t)\right] \\ y'(t) &= 4[1 - \cos(t)]\left[\cos(t) + \frac{1}{2}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a bien :

$$y'(t) = 4[1 - \cos(t)]\left[\cos(t) + \frac{1}{2}\right]$$

De plus :

$$\begin{aligned}
 y'(t) &= 4[1 - \cos(t)] \left[\cos(t) + \frac{1}{2} \right] \\
 \Leftrightarrow y'(t) &= 4 \left[2 \underbrace{\left(\frac{1 - \cos(t)}{2} \right)}_{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \left(\underbrace{\frac{1 + \cos(t)}{2}}_{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{\cos(t)}{2} \right) \right] \\
 \Leftrightarrow y'(t) &= 4 \left[2 \left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \right) \left(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{\cos(t)}{2} \right) \right] \\
 \Leftrightarrow y'(t) &= 4 \left[2 \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos\left(\frac{t}{2}\right)} \left(\cos^3\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \underbrace{\frac{\cos(t)}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}_{\frac{\sin(t)}{2}} \right) \right] \\
 \Leftrightarrow y'(t) &= 4 \left[\tan\left(\frac{t}{2}\right) \sin(t) \left(\underbrace{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{\cos(t)}{2}}_{\frac{1 + \cos(t)}{2}} \right) \right] \\
 \Leftrightarrow y'(t) &= \tan\left(\frac{t}{2}\right) \underbrace{4 \sin(t) \left(\cos(t) + \frac{1}{2} \right)}_{x'(t)} \\
 \Leftrightarrow y'(t) &= x'(t) \tan\left(\frac{t}{2}\right)
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} y'(t) = 4[1 - \cos(t)] \left[\cos(t) + \frac{1}{2} \right] \\ y'(t) = x'(t) \tan\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

CQFD

(b) Soit $t \in [0, \pi]$.

$M(t) \in \Gamma_1$ est un point stationnaire si $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin(t) [1 + 2\cos(t)] = 0 \\ 4[1 - \cos(t)] \left[\cos(t) + \frac{1}{2} \right] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \cos(t) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Ainsi :

Γ_1 possède 2 points stationnaires en $t = 0$ et $t = \frac{2\pi}{3}$.

(c) On reprend $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Faisons un DL de f en 0 :

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{f}(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} -2 \left[1 - \frac{t^2}{2} \right] - [1 - 2t^2] + o(t^3) \\ 2 \left[t + \frac{t^3}{3!} \right] - [2t - \frac{4}{3}t^3] + o(t^3) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{f}(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} -3 + 3t^2 + o(t^3) \\ \frac{3}{2}t^3 + o(t^3) \end{pmatrix}$$

On en déduit que " $(p, q) = (2, 3)$ ", puisque la famille $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right)$ n'est pas liée. Ainsi, par propriété :

J est un point de **rebroussement de 1^{ère} espèce**.

Remarque : Je ne vois pas trop comment bien rédiger la fin de cette question : je ne sais pas comment introduire les variables " p " et " q ".

- (d) Faisons de même pour le point I , mais cette fois en dérivant.

On reprant la même fonction \vec{f} .

\vec{f} est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} en tant que composition de fonctions qui le sont.

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= \begin{pmatrix} -2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{f}'(t) &= \begin{pmatrix} 2\sin(t) + 2\sin(2t) \\ 2\cos(t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Or, pour $t = \frac{2\pi}{3}$, $\vec{f}'(t) = (0, 0)$. On continue donc à dériver.

$$\vec{f}''(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 4\cos(2t) \\ -2\sin(t) + 4\sin(2t) \end{pmatrix}$$

Pour $t = \frac{2\pi}{3}$, $\vec{f}''(t) = (-\frac{3}{2}, -3\sqrt{3})$. Voici notre première dérivée non nulle.

$$\vec{f}'''(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) - 8\sin(2t) \\ -2\cos(t) + 8\cos(2t) \end{pmatrix}$$

De même, pour $t = \frac{2\pi}{3}$, $\vec{f}'''(t) = (3\sqrt{3}, -3)$. Voici la seconde.

De plus, on a bien la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ libre car $\det(\mathcal{F}) = 4 \neq 0$.

Ainsi, ici aussi, on a " $(p, q) = (2, 3)$ ". Donc, par propriété :

I est un point de **rebroussement de 1^{ère} espèce**.

Question : Ca peut se noter $\det(\mathcal{F})$ avec \mathcal{F} une famille de vecteurs ?

- (e) On conserve toujours la même fonction \vec{f} .

On a trouvé à la question 3. (d) que le vecteur tangent à Γ_1 en I est : $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}& I + \text{Vect}\{\vec{u}\} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}(1 - \lambda) \\ y = 3\sqrt{3}(\frac{1}{2} - \lambda) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = -\frac{3}{2}x - 1 \\ y = 3\sqrt{3}(\frac{1}{2} - \lambda) \end{cases} \\ &\Rightarrow y = 3\sqrt{3}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + 1) \\ &\Rightarrow y = \frac{9\sqrt{3}}{2}(1 + x)\end{aligned}$$

- (f) Soit $t \in [0, \pi]$

t	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$x'(t)$	0	+	0
$y'(t)$	0	+	0
$x(t)$	-3	\nearrow	1
$y(t)$	0	\nearrow	0

4. Γ et un cercle de courbure(a) Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 M(t) &\in \Gamma \cap \mathcal{C}_0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x(t) &= -2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases} \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &(-2\cos(t) - \cos(2t))^2 + (2\sin(t) - \sin(2t))^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow &4\cos^2(t) + \cos^2(2t) - 4\cos(t)\cos(2t) + 4\sin^2(t) + \sin^2(2t) - 4\sin(t)\sin(2t) = 1 \\
 \Leftrightarrow &4 + 1 - 4\cos(3t) = 1 \\
 \Leftrightarrow &\cos(3t) = 1 \\
 \Leftrightarrow &t = \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

D'où

$$K = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

On cherche maintenant à calculer les vecteurs directeurs des tangentes de \mathcal{C}_0 et Γ en K .□ Tangente à Γ :Tangente dirigée par $\vec{f}'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\mathcal{T} = K + Vect\left\{\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

□ Tangente à \mathcal{C}_0 :Tangente dirigée par $\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ pour $t = \frac{\pi}{3}$

$$\mathcal{T}' = K + Vect\left\{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\} = K + Vect\left\{\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Ainsi :

$$\Gamma \text{ et } \mathcal{C}_0 \text{ sont tangentes en } K.$$

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{f}'(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) + 2\sin(2t) \\ 2\cos(t) - 2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Définissons l'angle de relèvement α :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \alpha(t) = \arctan\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)$$

et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|f'(t)\|}$$

avec :

$$R = \frac{1}{\gamma}$$

$$\alpha = \arctan\left(2 \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{\sin(t) + \sin(2t)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha' = \text{heu ça donne une grosse formule!}$$

Ainsi, pour $t = \frac{\pi}{3}$, $\alpha' = \frac{1}{2}$.De plus, $\|f'(t)\| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$ D'où

$$R = 8$$

