

Devoir Libre 9

Exercice 1: Développement Eulérien et Fonction périodique

Partie 1: Etude de φ

1. Symétrie et période

(a) $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ Pour $x \in D$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Soit x un réel.

Pour que $\varphi(x)$ soit définie sur D , il faut que $\forall x \in D$, $\varphi(x)$ converge. Décomposons $\varphi(x)$ en deux :

$$\varphi(-x) = \underbrace{\frac{1}{-x}}_{A(x)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}}_{B(x)}$$

□ $A(x)$ existe pour $x \neq 0$.

□ $B(x)$ n'existe pas si $x = n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $x \in D$, on a :

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $B(x)$ a même nature que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Or, la série de référence de Riemann $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Alors $B(x)$ converge.

D'où, φ bien définie sur D .

De plus, pour $x \in D$:

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-x)}{n^2 - x^2} \\ \Leftrightarrow \varphi(-x) &= -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \\ \Leftrightarrow \varphi(-x) &= -\left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\right) \\ \Leftrightarrow \varphi(-x) &= -\varphi(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

φ est bien définie sur D et φ est **impaire**.

(b) Soit $x \in D$. D'après l'énoncé, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x}\right)}_{A(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x}\right)}_{B(x)}$$

Ces séries $A(x)$ et $B(x)$ sont divergentes, passons donc par des somme partielles puis faisons tendre la borne N vers $+\infty$. ☺

Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $\varphi_N(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} \right)$. Calculons $\varphi_N(x+1)$:

$$\varphi_N(x+1) = \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-1-x} \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1+x} \right)$$

$$\iff \varphi_N(x+1) = \frac{1}{x+1} - \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{n-x} \right) + \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{n+x} \right)$$

$$\iff \varphi_N(x+1) = \frac{1}{x+1} - \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n-x} \right) + \frac{1}{-x} - \frac{1}{N-x} \right) + \left(\sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{1}{n+x} \right) - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{N+1+x} \right)$$

$$\iff \varphi_N(x+1) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) + \underbrace{\frac{1}{N+1+x} + \frac{1}{N-x}}_{\epsilon(x)}$$

$$\iff \varphi_N(x+1) = \varphi_N(x) + \epsilon(x)$$

Or

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Ainsi :

φ est 1-périodique.

Remarques :

- j'ai noté "1-périodique" comme on note " π -périodique" \rightarrow vous m'avez déjà répondu en cours.
- j'ai utilisé les sommes partielles parce que vous nous l'avez dit en cours, je n'avais pas vu de problème à utiliser des séries qui divergent...

- (c) D n'est pas un intervalle mais une union infinie d'intervalles ouverts. De plus, φ est une somme infinie de fonctions continues, donc je ne pense pas que l'argument "en tant que somme de fonctions continues" marche ici.

2. Continuité

- (a) Je n'avais pas réussi cette question. J'ai compris avec le corrigé, mais franchement je ne pense pas que j'aurai trouvé sans y passer beaucoup de temps... Concrètement en DS/concours j'aurai sauté la question !

Par contre dans le corrigé il n'y aurait pas une erreur ? à la ligne :

$$\text{Mais on a } x+h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \text{ donc } \begin{cases} x+h \leq \frac{3}{2} \Rightarrow n-(x+h) \geq n-\frac{3}{2} \\ x+h \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow n+(x+h) \geq n-\frac{1}{2} \end{cases}$$

- (b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right| \leq C$$

avec $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$ Or, $\frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})} \sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}$, donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, C converge.

$g \in \mathcal{C}([0, 1])$

- (c) Soit $x \in]0, 1[$.

$$\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2}}_{\in \mathcal{C}(]0,1[)} - \underbrace{g(x)}_{\in \mathcal{C}([0,1])}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{C}(]0, 1[)$. De plus, comme φ est 1-périodique :

$\varphi \in \mathcal{C}(D)$

(d) Je suppose qu'ici c'est le piège d'inverser limite et somme infinie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \right) \underset{\text{pas forcément}}{=} 0$$

Ha oui mais non car ici $g(0)$ existe d'après la question 2.(b). Donc on peut le calculer directement, sans faire de limite ?

$g(0) = 0$ et

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2} - g(x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

De plus, comme φ est 1-périodique, φ aura le même équivalent en 0 qu'en $0 + 1$

D'où

$$\begin{cases} \varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \\ \varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x} \end{cases}$$

Partie 2: Etude d'un endomorphisme de E

1. Bon comme je ne me suis pas bouché les oreilles, je sais qu'il faut faire attention à l'**endo** plus qu'au *morphisme* !

Soit $f \in E \iff f \in \mathcal{C}([0, 1])$

□ Montrons que T est une application linéaire.

Soit $(f, i) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} T(\mu f + \lambda i)(x) &= (\mu f + \lambda i)\left(\frac{x}{2}\right) + (\mu f + \lambda i)\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \mu f\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda i\left(\frac{x}{2}\right) + \mu f\left(\frac{x+1}{2}\right) + \lambda i\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \mu T(f)(x) + \lambda T(i)(x) \end{aligned}$$

Donc T est linéaire.

□ Montrons que $T : E \rightarrow E$ $x \in [0, 1] \rightarrow \frac{x}{2} \in [0, 1]$ et $\frac{x+1}{2} \in [0, 1]$. Donc :

$$T(f)(x) = \underbrace{f\left(\frac{x}{2}\right)}_{\in E} + \underbrace{f\left(\frac{x+1}{2}\right)}_{\in E}$$

Ainsi, T est un endomorphisme.

□ Montrons que F_n est stable par T

i.e. montrons que $T(F_n) = F_n$ avec :

Pour $x \in [0, 1]$, $F_n = Vect\{\underbrace{(x \mapsto 1)}_{e_0}, \underbrace{(x \mapsto x)}_{e_1}, \underbrace{(x \mapsto x^2)}_{e_2}, \underbrace{(x \mapsto x^3)}_{e_3}, \dots, \underbrace{(x \mapsto x^n)}_{e_n}\}$

$$f \in F_n \Rightarrow f = \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k$$

$$\Rightarrow T(f)(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k T(e_k)(x)$$

$$\Rightarrow T(f)(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{x^k + (x+1)^k}{2^k}$$

$$\Rightarrow T(f)(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k (x^k + (x+1)^k)$$

On retrouve une combinaison linéaire des e_k . Donc $T(f) = \sum_{k=0}^n \alpha'_k e_k$.

Ainsi

T est un endomorphisme de E et F_n est stable par T .

2. On a donc ; $T_n : F_n \rightarrow F_n$. Les fonctions sont donc maintenant uniquement des polynômes. Montrons que T_n est diagonalisable. Notons d'abord que \mathcal{B}_n est une base car une famille de degré échelonnée donc libre et génératrice de F_n car $\mathcal{B}_n = \text{Vect}\{F_n\}$. Ecrivons la matrice associée à T_n dans la base \mathcal{B}_n . On a :

$$\begin{aligned} T_n(e_j) &= x \mapsto \frac{x^j}{2^j} + \frac{(x+1)^j}{2^j} \\ &= x \mapsto \frac{x^j}{2^j} + \frac{1}{2^j} \times \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_n}(T_n) = A = \begin{pmatrix} T_n(e_1) & T_n(e_2) & \dots & T_n(e_j) & \dots & T_n(e_n) \\ 2 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2^{1-i} & & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{1-n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

On remarque donc que A est triangulaire supérieure, et donc, par propriété son déterminant est le produit des coefficients de la diagonale. On en déduit son polynôme caractéristique :

$$\chi(x) = \prod_{k=0}^n \left(x - \frac{1}{2^{k-1}} \right)$$

χ est donc scindé à racines simples dans \mathbb{R} , par théorème, A est diagonalisable, d'où :

T_n est diagonalisable.

3. Etude de l'espace propre de T associé à 2

- (a) Comme on l'a montré précédemment, $\chi(x) = \prod_{k=0}^n (x - \frac{1}{2^{k-1}})$. 2 est racine du polynôme, donc 2 est valeur propre de T_n . Ainsi

$$2 \in \text{Sp}(T)$$

- (b) On a :
 — $[0, 1]$ est un intervalle
 — $f \in \mathcal{C}([0, 1])$

Par le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes. D'où :

$$\exists (x_0, x_1) \in [0, 1] / (m, M) = (f(x_0), f(x_1))$$

- (c) On a $f \in \text{Ker}(T - 2\text{Id}_E)$, donc f est vecteur propre de T associé à la valeur propre 2, d'où :

$$\begin{aligned} T(f) &= 2f \\ \Rightarrow T(f)(x_0) &= 2f(x_0) \\ \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) + \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\geq m} &= 2m \\ \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) &\leq m \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_0}{2}\right) &= 2f(x_0) - \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\geq m} \\ \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) &\geq 2f(x_0) - m \\ \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) &\geq m \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit " $P(n) : f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$ ".

□ Initialisation : pour $n = 0$

$f(x_0) = m$: OK d'après la question 3.(b)

□ Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $P(n)$ vraie, montrons que $P(n+1)$ l'est aussi. On a, d'après le raisonnement précédent :

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = m$$

D'où $P(n+1)$ vraie.

□ Conclusion : On a montré l'initialisation et l'hérédité de P . Par le principe de démonstration par récurrence, on a montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$$

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$$

$$\Rightarrow f(0) = m$$

Donc

$$f(0) = m$$

(e) Par exactement le même raisonnement que pour les 3 relations précédentes :

$$M = f(0)$$

(f) On a montré que pour f quelconque appartenant à $\text{Ker}(T - 2\text{Id}_E)$:

$$\inf_{x \in [0,1]} f(x) = \sup_{x \in [0,1]} f(x) = f(0)$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1], f(x) = f(0)$$

Donc

$$\text{Ker}(T - 2\text{Id}_E) = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) / \forall x \in [0,1], f(x) = f(0)\}$$

Partie 3: Etude de \cotan

1. $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection écrit dans mon cours de PTSI :

Si :

— f est strictement monotone sur I

— f est continue sur I

Alors :

— f réalise une bijection de I sur $f(I)$

— f et f^{-1} ont la même monotonie

— f^{-1} est continue

□ Continuité : \cotan est continue sur $]0, \pi[$ car \sin s'annule en 0 et π .

□ Monotonie : Calculons la dérivée.

\cotan est donc dérivable sur $]0, \pi[$ et :

$$\forall x \in]0, \pi[, \cotan'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} \text{ Ainsi, } \cotan \text{ est strictement décroissante sur }]0, \pi[.$$

Par théorème :

f réalise une bijection de $I =]0, \pi[$ sur $f(I) = \mathbb{R}$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On cherche $x \in I$ tel que $y = \cotan(x)$

$$\begin{aligned} \iff y &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \iff y &= \frac{1}{\tan(x)} \\ \iff x &= \arctan\left(\frac{1}{y}\right) \\ \iff & \end{aligned}$$

Or, on a la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. D'où

$$\iff x = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{arccot}(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan(y)$$

3. Pour $x \in I$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \pi \cotan(\pi x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \\ \iff \psi(x) &= \frac{\pi}{0} \left(\frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)}{\pi x} \right) \\ \iff \psi(x) &= \frac{1}{0} x - \frac{\pi^2}{2} x + o(x) \end{aligned}$$

Remarque : Comme je ne trouve pas pareil je suppose que je ne suis pas allé assez loin dans mon DL, et qu'il est donc incomplet ? Ce qui explique qu'il manque $-\frac{\pi^2}{6}$ devant le coefficient de x .

$$\begin{aligned} \iff \psi(x) &= \frac{\pi}{0} \left(\frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)}{\pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)} \right) \\ \iff \psi(x) &= \frac{1}{0} \left[\frac{1}{x} \right] \left[1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2) \right] \underbrace{\left[\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)} \right]}_{=1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)} \\ \iff \psi(x) &= \frac{1}{0} \left[\frac{1}{x} \right] \left[1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2) \right] \left[1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2) \right] \\ \iff \psi(x) &= \frac{1}{0} x - \frac{\pi^2}{3} x + o(x) \end{aligned}$$

D'où :

$$\psi(x) = \frac{1}{0} x - \frac{\pi^2}{3} x + o(x)$$

4. Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \left[\cotan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cotan\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) \right] \\ &= \pi \left[\cotan(X) + \cotan\left(X + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \pi \left[\cotan(X) + \tan(X) \right] \\ &= \pi \left[\frac{\cos^2(X) + \sin^2(X)}{\sin(X)\cos(X)} \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{\cos(2X)}{\sin(2X)} \right] \\ &= 2\pi \cotan(\pi x) \\ &= 2\psi(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in D, \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\psi(x)$$

5. ψ ne peut pas être vecteur propre de T car $\psi \notin E$ car ψ non continue en 0 et 1.

Partie 4: Développement eulérien

1. question 1
2. question 2
3. question 3
4. **Application et généralisation**
 - (a) question a
 - (b) question b
 - (c) question c

Partie 5: Calcul d'un intégrale à paramètre

1. (a) question a
 - (b) question b
 - (c) question c
2. question 2
3. question 3
4. question 4
5. question 5
6. question 6

Exercice 2: Temps d'attente d'une séquence dans un automate

Partie 1: Etude d'un cas simple

1. question 1
2. question 2
3. question 3
4. question 4

Partie 2: Etude d'un cas intermédiaire

1. question a
2. question a
3. question a
4. question a
5. question a
6. question a
7. question a
8. question a
9. question a
10. question a
11. question a