

Devoir Libre 9

Exercice 1: Développement Eulérien et Fonction périodique

Partie 1: Etude de φ

1. Symétrie et période

(a) $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ Pour $x \in D$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Soit x un réel.

Pour que $\varphi(x)$ soit définie sur D , il faut que $\forall x \in D$, $\varphi(x)$ converge. Décomposons $\varphi(x)$ en deux :

$$\varphi(-x) = \underbrace{\frac{1}{-x}}_{A(x)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}}_{B(x)}$$

□ $A(x)$ existe pour $x \neq 0$.

□ $B(x)$ n'existe pas si $x = n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $x \in D$, on a :

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $B(x)$ a même nature que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Or, la série de référence de Riemann $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Alors $B(x)$ converge.

D'où, φ bien définie sur D .

De plus, pour $x \in D$:

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-x)}{n^2 - x^2} \\ \Leftrightarrow \varphi(-x) &= -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \\ \Leftrightarrow \varphi(-x) &= -\left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\right) \\ \Leftrightarrow \varphi(-x) &= -\varphi(x) \end{aligned}$$

Ainsi :

φ est bien définie sur D et φ est **impaire**.

(b) Soit $x \in D$. D'après l'énoncé, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x}\right)}_{A(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x}\right)}_{B(x)}$$

Ces séries $A(x)$ et $B(x)$ sont divergentes, passons donc par des somme partielles puis faisons tendre la borne N vers $+\infty$. ☺

Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $\varphi_N(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} \right)$. Calculons $\varphi_N(x+1)$:

$$\varphi_N(x+1) = \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-1-x} \right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+1+x} \right)$$

$$\iff \varphi_N(x+1) = \frac{1}{x+1} - \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{n-x} \right) + \sum_{n=2}^{N+1} \left(\frac{1}{n+x} \right)$$

$$\iff \varphi_N(x+1) = \frac{1}{x+1} - \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n-x} \right) + \frac{1}{-x} - \frac{1}{N-x} \right) + \left(\sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{1}{n+x} \right) - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{N+1+x} \right)$$

$$\iff \varphi_N(x+1) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) + \underbrace{\frac{1}{N+1+x} + \frac{1}{N-x}}_{\epsilon(x)}$$

$$\iff \varphi_N(x+1) = \varphi_N(x) + \epsilon(x)$$

Or

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \epsilon(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Ainsi :

φ est 1-périodique.

Remarques :

- j'ai noté "1-périodique" comme on note " π -périodique" \rightarrow vous m'avez déjà répondu en cours.
- j'ai utilisé les sommes partielles parce que vous nous l'avez dit en cours, je n'avais pas vu de problème à utiliser des séries qui divergent...

- (c) D n'est pas un intervalle mais une union infinie d'intervalles ouverts. De plus, φ est une somme infinie de fonctions continues, donc je ne pense pas que l'argument "en tant que somme de fonctions continues" marche ici.

2. Continuité

- (a) Je n'avais pas réussi cette question. J'ai compris avec le corrigé, mais franchement je ne pense pas que j'aurai trouvé sans y passer beaucoup de temps... Concrètement en DS/concours j'aurai sauté la question !

Par contre dans le corrigé il n'y aurait pas une erreur ? à la ligne :

$$\text{Mais on a } x+h \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \text{ donc } \begin{cases} x+h \leq \frac{3}{2} \Rightarrow n-(x+h) \geq n-\frac{3}{2} \\ x+h \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow n+(x+h) \geq n-\frac{1}{2} \end{cases}$$

- (b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0, 1], \left| \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right| \leq C$$

avec $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$ Or, $\frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})} \sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}$, donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, C converge.

$g \in \mathcal{C}([0, 1])$

- (c) Soit $x \in]0, 1[$.

$$\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2}}_{\in \mathcal{C}(]0,1[)} - \underbrace{g(x)}_{\in \mathcal{C}([0,1])}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{C}(]0, 1[)$. De plus, comme φ est 1-périodique :

$\varphi \in \mathcal{C}(D)$

(d) Je suppose qu'ici c'est le piège d'inverser limite et somme infinie :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \right) \underset{\text{pas forcément}}{=} 0$$

Ha oui mais non car ici $g(0)$ existe d'après la question 2.(b). Donc on peut le calculer directement, sans faire de limite ?

$g(0) = 0$ et

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2} - g(x)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

De plus, comme φ est 1-périodique, φ aura le même équivalent en 0 qu'en $0+1$

D'où

$$\begin{cases} \varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \\ \varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x} \end{cases}$$

Partie 2: Etude d'un endomorphisme de E

1. Bon comme je ne me suis pas bouché les oreilles, je sais qu'il faut faire attention à l'**endo** plus qu'au *morphisme* !

Soit $f \in E \iff f \in \mathcal{C}([0, 1])$

□ Montrons que T est une application linéaire.

Soit $(f, i) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} T(\mu f + \lambda i)(x) &= (\mu f + \lambda i)\left(\frac{x}{2}\right) + (\mu f + \lambda i)\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \mu f\left(\frac{x}{2}\right) + \lambda i\left(\frac{x}{2}\right) + \mu f\left(\frac{x+1}{2}\right) + \lambda i\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &= \mu T(f)(x) + \lambda T(i)(x) \end{aligned}$$

Donc T est linéaire.

□ Montrons que $T : E \rightarrow E$ $x \in [0, 1] \rightarrow \frac{x}{2} \in [0, 1]$ et $\frac{x+1}{2} \in [0, 1]$. Donc :

$$T(f)(x) = \underbrace{f\left(\frac{x}{2}\right)}_{\in E} + \underbrace{f\left(\frac{x+1}{2}\right)}_{\in E}$$

Ainsi, T est un endomorphisme.

□ Montrons que F_n est stable par T

i.e. montrons que $T(F_n) = F_n$ avec :

Pour $x \in [0, 1]$, $F_n = Vect\{\underbrace{(x \mapsto 1)}_{e_0}, \underbrace{(x \mapsto x)}_{e_1}, \underbrace{(x \mapsto x^2)}_{e_2}, \underbrace{(x \mapsto x^3)}_{e_3}, \dots, \underbrace{(x \mapsto x^n)}_{e_n}\}$

$$f \in F_n \Rightarrow f = \sum_{k=0}^n \alpha_k e_k$$

$$\Rightarrow T(f)(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k T(e_k)(x)$$

$$\Rightarrow T(f)(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{x^k + (x+1)^k}{2^k}$$

$$\Rightarrow T(f)(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k (x^k + (x+1)^k)$$

On retrouve une combinaison linéaire des e_k . Donc $T(f) = \sum_{k=0}^n \alpha'_k e_k$.

Ainsi

T est un endomorphisme de E et F_n est stable par T .

2. On a donc ; $T_n : F_n \rightarrow F_n$. Les fonctions sont donc maintenant uniquement des polynômes. Montrons que T_n est diagonalisable. Notons d'abord que \mathcal{B}_n est une base car une famille de degré échelonnée donc libre et génératrice de F_n car $\mathcal{B}_n = \text{Vect}\{F_n\}$. Ecrivons la matrice associée à T_n dans la base \mathcal{B}_n . On a :

$$\begin{aligned} T_n(e_j) &= x \mapsto \frac{x^j}{2^j} + \frac{(x+1)^j}{2^j} \\ &= x \mapsto \frac{x^j}{2^j} + \frac{1}{2^j} \times \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_n}(T_n) = A = \begin{pmatrix} T_n(e_1) & T_n(e_2) & \dots & T_n(e_j) & \dots & T_n(e_n) \\ 2 & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2^{1-i} & & a_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2^{1-n} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix}$$

On remarque donc que A est triangulaire supérieure, et donc, par propriété son déterminant est le produit des coefficients de la diagonale. On en déduit son polynôme caractéristique :

$$\chi(x) = \prod_{k=0}^n \left(x - \frac{1}{2^{k-1}} \right)$$

χ est donc scindé à racines simples dans \mathbb{R} , par théorème, A est diagonalisable, d'où :

T_n est diagonalisable.

3. Etude de l'espace propre de T associé à 2

- (a) Comme on l'a montré précédemment, $\chi(x) = \prod_{k=0}^n (x - \frac{1}{2^{k-1}})$. 2 est racine du polynôme, donc 2 est valeur propre de T_n . Ainsi

$$2 \in \text{Sp}(T)$$

- (b) On a :
 — $[0, 1]$ est un intervalle
 — $f \in \mathcal{C}([0, 1])$

Par le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes. D'où :

$$\exists (x_0, x_1) \in [0, 1] / (m, M) = (f(x_0), f(x_1))$$

- (c) On a $f \in \text{Ker}(T - 2\text{Id}_E)$, donc f est vecteur propre de T associé à la valeur propre 2, d'où :

$$\begin{aligned} T(f) &= 2f \\ \Rightarrow T(f)(x_0) &= 2f(x_0) \\ \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) + \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\geq m} &= 2m \\ \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) &\leq m \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_0}{2}\right) &= 2f(x_0) - \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\geq m} \\ \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) &\geq 2f(x_0) - m \\ \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2}\right) &\geq m \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = m$$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit " $P(n) : f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$ ".

□ Initialisation : pour $n = 0$

$f(x_0) = m$: OK d'après la question 3.(b)

□ Heredite : pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $P(n)$ vraie, montrons que $P(n+1)$ l'est aussi. On a, d'après le raisonnement précédent :

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m \Rightarrow f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = m$$

D'où $P(n+1)$ vraie.

□ Conclusion : On a montré l'initialisation et l'hérédité de P . Par le principe de démonstration par récurrence, on a montré :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$$

De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = m$$

$$\Rightarrow f(0) = m$$

Donc

$$f(0) = m$$

(e) Par exactement le même raisonnement que pour les 3 relations précédentes :

$$M = f(0)$$

(f) On a montré que pour f quelconque appartenant à $\text{Ker}(T - 2\text{Id}_E)$:

$$\inf_{x \in [0,1]} f(x) = \sup_{x \in [0,1]} f(x) = f(0)$$

$$\Rightarrow \forall x \in [0,1], f(x) = f(0)$$

Donc

$$\text{Ker}(T - 2\text{Id}_E) = \{f \in \mathcal{C}([0,1]) / \forall x \in [0,1], f(x) = f(0)\}$$

Partie 3: Etude de \cotan

1. $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème de la bijection écrit dans mon cours de PTSI :

Si :

— f est strictement monotone sur I

— f et continue sur I

Alors :

— f réalise une bijection de I sur $f(I)$

— f et f^{-1} ont la même monotonie

— f^{-1} est continue

□ Continuité : \cotan est continue sur $]0, \pi[$ car \sin s'annule en 0 et π .

□ Monotonie : Calculons la dérivée.

\cotan est donc dérivable sur $]0, \pi[$ et :

$$\forall x \in]0, \pi[, \cotan'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} \text{ Ainsi, } \cotan \text{ est strictement décroissante sur }]0, \pi[.$$

Par théorème :

f réalise une bijection de $I =]0, \pi[$ sur $f(I) = \mathbb{R}$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. On cherche $x \in I$ tel que $y = \cotan(x)$

$$\begin{aligned} \iff y &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \iff y &= \frac{1}{\tan(x)} \\ \iff x &= \arctan\left(\frac{1}{y}\right) \\ \iff \end{aligned}$$

Or, on a la relation : $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. D'où

$$\iff x = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \operatorname{arccot}(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan(y)$$

3. Pour $x \in I$

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \pi \cotan(\pi x) = \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \\ \iff \psi(x) &= \frac{\pi}{0} \left(\frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)}{\pi x} \right) \\ \iff \psi(x) &= \frac{1}{0} x - \frac{\pi^2}{2} x + o(x) \end{aligned}$$

Remarque : Comme je ne trouve pas pareil je suppose que je ne suis pas allé assez loin dans mon DL, et qu'il est donc incomplet ? Ce qui explique qu'il manque $-\frac{\pi^2}{6}$ devant le coefficient de x .

$$\begin{aligned} \iff \psi(x) &= \frac{\pi}{0} \left(\frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)}{\pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)} \right) \\ \iff \psi(x) &= \frac{1}{0} \left[\frac{1}{x} \right] \left[1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2) \right] \underbrace{\left[\frac{1}{1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)} \right]}_{= 1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2)} \\ \iff \psi(x) &= \frac{1}{0} \left[\frac{1}{x} \right] \left[1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2) \right] \left[1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^2) \right] \\ \iff \psi(x) &= \frac{1}{0} x - \frac{\pi^2}{3} x + o(x) \end{aligned}$$

D'où :

$$\psi(x) = \frac{1}{0} x - \frac{\pi^2}{3} x + o(x)$$

4. Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \left[\cotan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cotan\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) \right] \\ &= \pi \left[\cotan(X) + \cotan\left(X + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= \pi \left[\cotan(X) + \tan(X) \right] \\ &= \pi \left[\frac{\cos^2(X) + \sin^2(X)}{\sin(X)\cos(X)} \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{\cos(2X)}{\sin(2X)} \right] \\ &= 2\pi \cotan(\pi x) \\ &= 2\psi(x) \end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in D, \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\psi(x)$$

5. ψ ne peut pas être vecteur propre de T car $\psi \notin E$ car ψ non continue en 0 et 1.

Partie 4: Développement eulérien

1. Passons par les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\varphi_N\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{2}{x} - \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{2n-x}\right) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{2}{2n+x}\right) \\ &= 2 \left[\frac{1}{x} - \sum_{n=2}^{2N} \left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=2}^{2N} \left(\frac{1}{n+x}\right) \right]\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{cases} \sum_{n=2}^{2N} \left(\frac{1}{n-x}\right) &= -\frac{1}{1-x} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\frac{1}{n-x}\right) \\ \sum_{n=2}^{2N} \left(\frac{1}{n+x}\right) &= -\frac{1}{1+x} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+x}\right) + \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\frac{1}{n+x}\right) \end{cases}$$

De même :

$$\begin{aligned}\varphi_N\left(\frac{x+1}{2}\right) &= 2 \left[\frac{1}{x+1} - \sum_{n=2}^{2N} \left(\frac{1}{n-x-1}\right) + \sum_{n=2}^{2N} \left(\frac{1}{n+x+1}\right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{2N-1} \left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=3}^{2N+1} \left(\frac{1}{n+x}\right) \right]\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N-1} \left(\frac{1}{n-x}\right) &= -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2N-x} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\frac{1}{n-x}\right) \\ \sum_{n=3}^{2N+1} \left(\frac{1}{n+x}\right) &= -\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2N-x} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+x}\right) + \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\frac{1}{n+x}\right) \end{cases}$$

En sommant tous les termes, on trouve :

$$\varphi_N\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi_N(x) + \frac{2}{2N-x}$$

Donc, lorsque $N \rightarrow +\infty$:

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$$

2. On a déjà $\varphi - \psi$ continue sur $]0, 1[$.

Calculons, si elle existe, la limite en 0 de $\varphi - \psi$. Comme ψ et φ sont 1-périodiques, elles auront la même limite en 1. On a déjà calculé les DL en 0 de ψ et φ , d'où :

$$\begin{aligned}\varphi - \psi &\underset{0}{=} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{\pi^2}{3}x + o(x) \\ &\underset{0}{=} \frac{\pi^2}{3}x + o(x) \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0}(\varphi - \psi) &= 0\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi - \psi \text{ se prolonge par continuité en 0 et 1, et } (\varphi - \psi)(0) = (\varphi - \psi)(1) = 0$$

3. Pour un peu plus de clareté, notons $\Psi = \varphi - \psi$.

$\Psi \in \mathcal{C}([0, 1]) \Rightarrow \Psi \in E$. On peut donc appliquer T à Ψ .

Notons de plus que, grâce aux questions III 4. et IV 1., on peut écrire :

$$\begin{aligned}T(\Psi) &= 2\Psi \\ \Rightarrow \Psi &\in \text{Ker}(T - 2\text{Id}_E) \\ \Rightarrow \forall x \in [0, 1], \Psi(x) &= \Psi(0) = 0 \\ \Rightarrow \varphi &= \psi\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\varphi = \psi$$

4. Application et généralisation

(a) On remarque que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9n^2-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times \frac{1}{3}}{n^2 - \frac{1}{3}} \\
&= 3 - \psi\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 3 - \pi \cotan\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 3 - \pi \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9n^2-1} = 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

(b) Je suppose que ce n'est pas $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-x^2} &= \frac{1}{2x}(2-\varphi) \\
&= \frac{1}{2x}(2-\psi) \\
\text{Or } \frac{1}{2x}(2-\psi) &\underset{0}{\sim} \frac{1}{2x}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{\pi^2}{3}x+o(x)\right) \\
&\underset{0}{\sim} \frac{\pi^2}{6}+o(1) \\
\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-x^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarques :

— je ne pense pas avoir bien rédiger...

— il me semble qu'en cours on avait vu la fonction zeta de Riemann, et :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

(c)

$$(\mathcal{R}'_0) : \forall x \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}, \pi \cotan(\pi x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Passons sous forme exponentielle

$$\begin{aligned}
\cotan(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\
\Rightarrow \cotan(x) &= i \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^{ix} - e^{-ix}} \\
\Rightarrow \cotan(x) &= -i \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}
\end{aligned}$$

Donc, pour $y \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned}
 -\pi \frac{\cosh(\pi y)}{\sinh(\pi x)} &= \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} &= \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{x} + \pi \frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} \right) \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} &= \frac{1}{2x^2} \left(1 + \pi x \frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} \right) \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} &= \frac{1}{2x^2} \left(1 + \pi x \frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} \right) \\
 \Rightarrow \begin{cases} x &= iy \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} &= -\frac{1}{2y^2} \left(1 + \pi \frac{\cosh(\pi iy)}{\sinh(\pi iy)} \right) \end{cases} \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} &= \frac{1}{2y^2} \left(-\pi \frac{\cosh(\pi iy)}{\sinh(\pi iy)} - 1 \right) \\
 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} &= \frac{1}{2y^2} \left(\pi \frac{\cosh(\pi y)}{\sinh(\pi y)} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{1}{2y^2} \left(\pi \frac{\cosh(\pi y)}{\sinh(\pi y)} - 1 \right)$$

Partie 5: Calcul d'un intégrale à paramètre

1. (a) Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 |\sin(xt)| &\leq |x|t \\
 \Rightarrow |h(x, t)| &\leq 1 \times \frac{|x|t}{e^t - 1} \\
 \Rightarrow M &= 1
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, |h(x, t)| \leq M|x| \frac{t}{e^t - 1}$$

(b) Γ est une intégrale à paramètre, appliquons le théorème du cours :

On a :

□ Regularité selon $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall t \in]0, +\infty[, h(\blacksquare, t) : \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x, t) \end{matrix} \text{ continue sur } \mathbb{R}$$

□ Regularité selon $t \in]0, +\infty[$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x, \blacksquare) : \begin{matrix}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto h(x, t) \end{matrix} \text{ continue sur }]0, +\infty[\text{ car } \forall t > 0, (e^t - 1) > 0$$

□ Domination :

D'après la question précédente :

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, |h(x, t)| \leq M|x| \underbrace{\frac{t}{e^t - 1}}_{\varphi(t)}$$

Or,

$$\begin{cases} e^t - 1 & \underset{+\infty}{\sim} e^t \\ t & \underset{+\infty}{=} o(e^{t/2}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{t}{e^t} &=_{+\infty} o(e^{-t/2}) \\ \Rightarrow \varphi(t) &=_{+\infty} o(e^{-t/2}) \end{aligned}$$

Or, $e^{-t/2}$ est intégrale sur $[0, +\infty$ en tant qu'intégrale de référence. Par le théorème de comparaison des fonctions positives, $\varphi(t)$ est intégrale sur $[0, +\infty[$.

Par théorème :

Γ continue sur \mathbb{R}

(c) On a déjà presque tout dit, mais il faut tout recommencer, alors qu'on aurait pu tout faire en une question... (Heureusement qu'il y a le copier-coller !)

□ Regularite selon $x \in \mathbb{R}$:

$\forall t \in]0, +\infty[, h(\blacksquare, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto h(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

□ Regularite selon $t \in]0, +\infty[$:

$\forall x \in \mathbb{R},$

□ $h(x, \blacksquare) :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto h(x, t)$ continue et intégrable sur $]0, +\infty[$

□ $\frac{\partial h}{\partial x}(x, \blacksquare) :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ continue $]0, +\infty[$

□ Domination :

D'après la question précédente :

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[, |h(x, t)| \leq M|x| \underbrace{\frac{t}{e^t - 1}}_{\varphi(t)}$$

Avec $\varphi(t)$ est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$.

Par théorème :

Γ est de classe \mathcal{C}^1 \mathbb{R}

2. Soit $(x, t, N) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} \\ \Rightarrow h(x, t) &= e^{-t} \sin(xt) \frac{1}{e^t(e^t - 1)} \\ \Rightarrow h(x, t) &= e^{-t} \sin(xt) \frac{1}{1 - e^{-t}} \end{aligned}$$

De plus, $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1 :$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N q^k &= \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^N q^k &= \frac{1}{1 - q} - \frac{q^{N+1}}{1 - q} \\ \Rightarrow \frac{1}{1 - q} &= \sum_{k=0}^N q^k + \frac{q^{N+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Or, $\forall t > 0, |e^{-t}| < 1$, la relation précédente est donc valable pour $q = e^{-t}$.

D'où :

$$h(x, t) = e^{-t} \sin(xt) \left(\sum_{k=0}^N e^{-tk} + \frac{e^{-t(N+1)}}{1 - e^{-t}} \right)$$

Ainsi :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) \left(\sum_{k=0}^N e^{-tk} + \frac{e^{-t(N+1)}}{1-e^{-t}} \right) dt$$

3. Soit $(x, t, N) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} |h(x, t)| &\leq M|x| \frac{t}{e^t - 1} \\ \Rightarrow |h(x, t)| e^{-(N+1)t} &\leq M|x| \frac{te^{-(N+1)t}}{e^t - 1} \end{aligned}$$

Or, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} e^t - 1 &\underset{+\infty}{\sim} e^t \\ \text{et } t &= o(e^t) \\ \Rightarrow \frac{te^{-(N+1)t}}{e^t - 1} &= o(e^{-(N+1)t}) \\ \Rightarrow \frac{te^{-(N+1)t}}{e^t - 1} &= o(e^{-(N+1)t}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |h(x, t)| e^{-(N+1)t} &\leq M|x| e^{-(N+1)t} \\ \Rightarrow \int_0^{+\infty} |h(x, t)| e^{-(N+1)t} dt &\leq M|x| \int_0^{+\infty} e^{-(N+1)t} dt \\ \Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} h(x, t) e^{-(N+1)t} dt \right| &\leq M|x| \int_0^{+\infty} e^{-(N+1)t} dt \\ \Rightarrow \left| \int_0^{+\infty} h(x, t) e^{-(N+1)t} dt \right| &\leq \frac{M|x|}{(N+1)} \end{aligned}$$

Par le théorème de l'encadrement, on a alors :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$$

4. Soit $(x, t, k) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{N}$.

Utilisons la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} \sin(xt) &= \operatorname{Im}(e^{ixt}) \\ J_{k_{Im}}(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t(1+k-ix)} dt \\ \Rightarrow J_{k_{Im}}(x) &= \frac{1}{1+k-ix} \\ \Rightarrow J_{k_{Im}}(x) &= \frac{1+k+ix}{(1+k)^2+x^2} \\ \Rightarrow J_k(x) &= \frac{x}{(1+k)^2+x^2} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, J_k(x) = \frac{x}{(1+k)^2+x^2}$$

5. Soit $(x, t, N) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) \left(\sum_{k=0}^N e^{-tk} + \frac{e^{-t(N+1)}}{1-e^{-t}} \right) dt \\
\Rightarrow \Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) \sum_{k=0}^N e^{-tk} dt + R_N(x) \\
\Rightarrow \Gamma(x) &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^N e^{-t} \sin(xt) e^{-tk} dt + R_N(x) \\
\Rightarrow \Gamma(x) &= \sum_{k=0}^N \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) e^{-tk} dt + R_N(x) \\
\Rightarrow \Gamma(x) &= \sum_{k=0}^N \frac{x}{(1+k)^2 + x^2} + R_N(x) \\
\Rightarrow \Gamma(x) &= x \sum_{k=2}^N \frac{1}{k^2 + x^2} + R_N(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, et en utilisant \mathcal{R}_1 :

$$\forall x \neq 0, \Gamma(x) = \frac{1}{2x} \left(\pi x \frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} - 1 \right)$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\
\Rightarrow \frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{1 + \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2)}{\pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3)} \\
\Rightarrow \frac{1}{2x} \left(\pi x \frac{\cosh(\pi x)}{\sinh(\pi x)} - 1 \right) &\underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6} x + o(x)
\end{aligned}$$

On remarque que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 4} dt = \Gamma'(0)$$

D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 4} dt = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 2: Temps d'attente d'une séquence dans un automate

Partie 1: Etude d'un cas simple

1. On reconnaît une loi géométrique de paramètre q .

$$Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = (1 - q)^{n-1} q$$

2. Redémontrons la formule de la série génératrice d'une loi géométrique. On se souvient de bien faire attention aux indices, le seul piège.

$$\begin{aligned}
G_y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=n)t^n \\
\Rightarrow G_y(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-q)^{n-1}qt^n \\
\Rightarrow G_y(t) &= \frac{q}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} (pt)^n \\
\Rightarrow G_y(t) &= \frac{q}{p} pt \sum_{n=1}^{+\infty} (pt)^{n-1} \\
\Rightarrow G_y(t) &= qt \sum_{n=0}^{+\infty} (pt)^n \\
\Rightarrow G_y(t) &= qt \frac{1}{1-pt} \\
\Rightarrow G_y(t) &= \frac{qt}{1-pt}
\end{aligned}$$

De plus : $G_y(t) = \frac{q}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} (pt)^n$ converge pour $|pt| < 1 \Rightarrow |t| < \frac{1}{p}$. Donc le rayon de convergence est $R_y = \frac{1}{p}$ avec $p \in]0, 1[$.

Ainsi :

$$\begin{cases} R_y = \frac{1}{p} > 1 \\ \forall t \in]-R_y, R_y[, G_y(t) = \frac{qt}{1-pt} \end{cases}$$

3. $1 \in]-R_Y, R_Y[$ et G_Y est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R_Y, R_Y[$ en tant que fonction décomposable en série entière, donc G_Y est deux fois dérivable en 1. De plus, $\forall t \in]-R_Y, R_Y[$:

$$\begin{aligned}
G_y(t) &= \frac{qt}{1-pt} \\
\Rightarrow G'_y(t) &= \frac{q(1-pt) + qpt}{(1-pt)^2} = \frac{q}{(1-pt)^2} \\
\Rightarrow G''_y(t) &= q - \frac{-2p(1-pt)}{(1-pt)^4} = \frac{2pq}{(1-pt)^3}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Rightarrow \begin{cases} G'_y(1) = \frac{q}{(1-p)^2} = \frac{1}{q} \\ G''_y(1) = \frac{2pq}{q^3} = \frac{2p}{q^2} \end{cases}$$

Ainsi :

$$G_Y \text{ deux fois dérivable et } \begin{cases} G'_y(1) = \frac{1}{q} \\ G''_y(1) = \frac{2p}{q^2} \end{cases}$$

4. Par propriété :

$$\begin{cases} E(Y) = G'_Y(1) \\ V(Y) = G''_Y(1) + G'_Y(1) - G'_Y(1)^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} E(Y) = \frac{1}{q} \\ V(Y) = \frac{p}{q^2} \end{cases}$$

Partie 2: Etude d'un cas intermédiaire

1. On a :

$$\begin{cases} p_1 &= 0 \\ p_2 &= q^2 \\ p_3 &= pq^2 \end{cases}$$

2. Pour que ce système soit un système complet d'événements, il faut que les événements soient deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$), et que la réunion des événements forme Ω . Ici les événements ne peuvent pas se produire en même temps, donc sont incompatibles. De plus les 3 événements couvrent toutes les possibilités. Ainsi :

$(P_1, C_1 \cup P_2, C_1 \cup C_2)$ forme un système complet d'événements.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$\underbrace{P(Z = n)}_{p_n} = P(Z = n|P_1)P(P_1) + P(Z = n|C_1 \cap P_2)P(C_1 \cap P_2) + P(Z = n|C_1 \cap C_2)P(C_1 \cap C_2)$$

$$\square \frac{P(Z = n|P_1)P(P_1)}{P(P_1) = p} :$$

$$- \frac{P(P_1) = p}{P(P_1) = p}$$

- Puisque l'événement P_1 vient d'être réalisé, on retourne à l'état initial, donc il ne reste plus que $n - 1$ tirages possibles, d'où $P(Z = n|P_1) = p_{n-1}$

$$\square \frac{P(Z = n|C_1 \cap P_2)P(C_1 \cap P_2)}{P(C_1 \cap P_2) = pq} :$$

$$- \frac{P(C_1 \cap P_2) = pq}{P(C_1 \cap P_2) = pq}$$

- Par le même raisonnement : $P(Z = n|C_1 \cap P_2) = p_{n-2}$

$$\square \frac{P(Z = n|C_1 \cap C_2)P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1 \cap C_2) = q^2} :$$

$$- \frac{P(C_1 \cap C_2) = q^2}{P(C_1 \cap C_2) = q^2}$$

- Pour $n > 2$, l'événement $(Z = n|C_1 \cap C_2)$ n'est pas possible car une fois que l'on atteint C_2 l'expérience s'arrête, d'où $P(Z = n|C_1 \cap C_2) = 0$

D'où

$$p_n = pp_{n-1} + pq p_{n-2}$$

4. Soit $t \in]-R_Z, R_Z[$.

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum p_n t^n \\ \Rightarrow G_Z(t) &= \sum (p_{n-1} + qp_{n-2}) p t^n \\ \Rightarrow G_Z(t) &= p \sum p_{n-1} t^n + pq \sum p_{n-2} t^n \\ \Rightarrow G_Z(t) &= pt \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n}_{G_Z(t)} + pqt^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n}_{G_Z(t)} + p_2 t^2 \\ \Rightarrow G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) &= q^2 t^2 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2 t^2$$

5. $Q(t)$ est un polynôme de degré 2, il peut donc se mettre sous la forme : $Q(t) = \alpha(t - r_1)(t - r_2)$ avec r_1 et r_2 les racines de Q et α le coefficient dominant. D'où :

$$Q(t) = -pt(t - a)(t - b)$$

6. J'étais parti sur de longues inégalités avec les formules de a et b . J'ai vu le corrigé, c'est super malin !

7.

$$f(t) = \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2} = -\frac{qt^2}{p(t-a)(t-b)} = -\frac{q}{p} t^2 \frac{1}{(a-t)} \frac{1}{(b-t)} = -\frac{qt^2}{pab} \frac{1}{(1-\frac{t}{a})} \frac{1}{(1-\frac{t}{b})}$$

Or $\frac{1}{(1-\frac{t}{a})}$ et $\frac{1}{(1-\frac{t}{b})}$ sont décomposables en séries entières de rayon respectifs $|a|$ et $|b|$. Comme il y a produit de 2 DSE, c'est le plus petit rayon des deux qui compte, ici $|a|$, donc $R \leq |a|$, mais f n'existe pas en $t = a$ donc $R = |a|$.

Donc :

f est développable en série entière
 $\forall t \in]-a, a[, f(t) = G_Z(t)$
 $R_Z = |a|$

8. On calcule le produit de Cauchy pour trouver G_Z sous forme d'une seule somme, puis on identifie :

Soit $t \in]-a, a[$

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= -\frac{qt^2}{pab} \frac{1}{(1-\frac{t}{a})} \frac{1}{(1-\frac{t}{b})} \\ \Rightarrow G_Z(t) &= -\frac{qt^2}{pab} \sum \left(\frac{t}{a}\right)^n \sum \left(\frac{t}{b}\right)^n \\ \Rightarrow G_Z(t) &= -\frac{qt^2}{pab} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^n}{a^k b^{n-k}} \\ \Rightarrow G_Z(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left[-\frac{q}{pab^{n+1}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k \right]}_{P(Z=n+2)} t^{n+2} \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^{n+1}(a-b)}$$

Donc

$$p_{n+2} = -\frac{q}{p(ab)^{n+1}} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

D'où :

$$p_n = \frac{q}{p(ab)^{n-1}} \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{a-b}$$

9. $G_Z(t)$ est une série entière, par propriété elle est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $] -a, a[$.

Or $1 \in]-a, a[$, donc $G'_Z(1)$ et $G''_Z(1)$ existent.

Par propriété :

$$\begin{cases} E(Z) &= G'_Z(1) \\ V(Z) &= G'_Z(1) + G''_Z(1) - G'_Z(1)^2 \end{cases}$$

De plus, en reprenant la formule : $G_Z(t)(1 - pt - pqt^2) = q^2 t^2$, on trouve :

$$\begin{aligned} G'_Z(t) &= \frac{2tq^2(1-pt-pqt^2) - t^2 q^2(-p-2pqt)}{(1-pt-pqt^2)^2} \\ \Rightarrow G'_Z(1) &= \frac{2q^2(1-p-pq) - q^2(-p-2pq)}{(1-p-pq)^2} \\ \Rightarrow G'_Z(1) &= \frac{2q^2(q^2) - q^2(-p-2pq)}{(q^2)^2} \\ \Rightarrow G'_Z(1) &= \frac{2q^2 + p + 2pq}{q^2} \\ \Rightarrow G'_Z(1) &= 2 + \frac{1-q}{q^2} + 2\frac{1-q}{q} \\ \Rightarrow G'_Z(1) &= \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} \end{aligned}$$

D'où

$$E(Z) = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}$$

10.

$$\begin{aligned} E(Z) &\geq E(Y) + 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} &\geq \frac{1}{q} + 1 \\ \Rightarrow \frac{1+q}{q^2} &\geq \frac{1+q}{q} \\ \Rightarrow 1 &\leq \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Dernière égalité vraie car $q \in]0, 1[$ D'où :

$$E(Z) \geq E(Y) + 1$$

11. Oui car $Z \geq Y + 1$.