Devoir Libre 9

Exercice 1: Développement Eulérien et Fonction périodique

Partie 1: Etude de φ

1. **Symétrie et prériode**

   (a) $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ Pour $x \in D$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Soit x un réel.
Pour que $\varphi(x)$ soit définie sur D, il faut que $\forall x \in D$, $\varphi(x)$ converge. Décomposons $\varphi(x)$ en deux :

$$\varphi(-x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{A(x)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}}_{B(x)}$$

- ❏ $A(x)$ existe pour $x \neq 0$.
- ❏ $B(x)$ n'existe pas si $x = n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $x \in D$, on a :

$$\frac{2x}{n^2 - x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, par le théorème de compraison des séries à termes positifs, $B(x)$ a même nature que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Or, la série de référence de Riemann $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Alors $B(x)$ converge.

D'où, φ bien définie sur D.
De plus, pour $x \in D$:

$$\begin{aligned}
& \varphi(-x) &=& \frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-x)}{n^2 - x^2} \\
\iff & \varphi(-x) &=& -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} \\
\iff & \varphi(-x) &=& -\left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\right) \\
\iff & \varphi(-x) &=& -\varphi(x)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } D \text{ et } \varphi \text{ est } \textbf{impaire}.}$$

   (b) Soit $x \in D$. D'après l'ennoncé, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n - x}\right)}_{A(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n + x}\right)}_{B(x)}$$

Ces séries $A(x)$ et $B(x)$ sont divergentes, passons donc par des somme partielles puis faisons tendre la borne N vers $+\infty$. ☺

Soit $N \in \mathbb{N}$. Posons $\varphi_N(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}\right)$. Calculons $\varphi_N(x+1)$:

$$\begin{array}{rrcl}
 & \varphi_N(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n-1-x}\right) + \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+1+x}\right) \\
\iff & \varphi_N(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum_{n=0}^{N-1}\left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=2}^{N+1}\left(\frac{1}{n+x}\right) \\
\iff & \varphi_N(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \left(\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n-x}\right) + \frac{1}{-x} - \frac{1}{N-x}\right) + \left(\sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{1}{n+x}\right) - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{N+1+x}\right) \\
\iff & \varphi_N(x+1) & = & \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) + \underbrace{\frac{1}{N+1+x} + \frac{1}{N-x}}_{\epsilon(x)} \\
\iff & \varphi_N(x+1) & = & \varphi_N(x) + \epsilon(x)
\end{array}$$

Or

$$\begin{array}{rrcl}
 & \lim\limits_{N\to+\infty} \epsilon(x) & = & 0 \\
\Rightarrow & \varphi(x+1) & = & \varphi(x)
\end{array}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est 1-préiodique.}}$$

Remarques :

— *j'ai noté "1-périodique" comme on note "π-périodique" $\to$ vous m'avez déjà répondu en cours.*

— *j'ai utilisé les sommes partielles parce que vous nous l'avez dit en cours, je n'avais pas vu de problème à utiliser des séries qui divergent...*

(c) D n'est pas un intervalle mais une union infinie d'intervalles ouverts. De plus, φ est une somme infinie de fonctions continues, donc je ne pense pas que l'argument "en tant que somme de fonctions continues" marche ici.

2. **Continuité**

(a) Je n'avais pas réussi cette question. J'ai compris avec le corrigé, mais franchement je ne pense pas que j'aurai trouvé sans y passer beaucoup de temps... Concrètement en DS/concours j'aurai sauté la question !

Par contre dans le corrigé il n'y aurait pas une erreur ? à la ligne :

$$\text{Mais on a } x+h \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right] \text{ donc } \left\{\begin{array}{l} x+h \leq \frac{3}{2} \Rightarrow n-(x+h) \geq n - \frac{3}{2} \\ \\ x+h \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow n+(x+h) \geq n - \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

(b) D'après la question précédente, on a :

$$\forall x \in [0,1], \left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right| \leq C$$

avec $C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})}$ Or, $\frac{2}{(n-1)(n-\frac{3}{2})} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$, donc par le théorème de comparaison de séries à termes positifs, C converge.

$$\boxed{g \in \mathcal{C}([0,1])}$$

(c) Soit $x \in]0,1[$.

$$\varphi(x) = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{2x}{1-x^2}}_{\in\mathcal{C}(]0,1[)} - \underbrace{g(x)}_{\in\mathcal{C}([0,1])}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{C}(]0,1[)$. De plus, comme φ est 1-périodique :

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{C}(D)}$$

(d) Je suppose qu'ici c'est le piège d'inverser limite et somme infinie :

$$\underset{x\to 0}{lim}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}\right)\underset{\text{pas forcément}}{=}0$$

Ha oui mais non car ici $g(0)$ existe d'après la question 2.(b). Donc on peut le calculer directement, sans faire de limite ?
$g(0)=0$ et

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}+\frac{2x}{1-x^2}-g(x)$$

$$\Rightarrow\quad \varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}$$

De plus, comme φ est 1-périodique, φ aura le même équivalent en 0 qu'en $0+1$
D'où

$$\boxed{\begin{cases}\varphi(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}\\ \varphi(x)\underset{x\to 1}{\sim}\frac{1}{x}\end{cases}}$$

Partie 2: Etude d'un endomorphisme de E

1. Bon comme je ne me suis pas bouché les oreilles, je sais qu'il faut faire attention à l'***endo*** plus qu'au *morphisme* !

   Soit $f\in E \iff f\in\mathcal{C}([0,1])$

   ❏ Montrons que T est une application linéaire.
   Soit $(f,i)\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}T(f+\lambda i)(x) &= (f+\lambda i)\left(\tfrac{x}{2}\right)+(f+\lambda i)\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\\ &= f\left(\tfrac{x}{2}\right)+\lambda i\left(\tfrac{x}{2}\right)+f\left(\tfrac{x+1}{2}\right)+\lambda i\left(\tfrac{x+1}{2}\right)\\ &= T(f)(x)+\lambda T(i)(x)\end{aligned}$$

   Donc T est linéaire.

   ❏ Montrons que $T: E\to E$ $x\in[0,1]\to\frac{x}{2}\in[0,1]$ et $\frac{x+1}{2}\in[0,1]$. Donc :

$$T(f)(x)=\underbrace{f\left(\frac{x}{2}\right)}_{\in E}+\underbrace{f\left(\frac{x+1}{2}\right)}_{\in E}$$

   Ainsi, T est un endomorphisme.

   ❏ Montrons que F_n est stable par T
   i.e. montrons que $T(F_n)=F_n$ avec :
   Pour $x\in[0,1]$, $F_n=Vect\{(\underbrace{x\mapsto 1}_{e_0},\underbrace{x\mapsto x}_{e_1},\underbrace{x\mapsto x^2}_{e_2},\underbrace{x\mapsto x^3}_{e_3},...,\underbrace{x\mapsto x^n}_{e_n})\}$

$$\begin{aligned}f\in F_n &\Rightarrow f=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k e_k\\ &\Rightarrow T(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k T(e_k)(x)\\ &\Rightarrow T(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\frac{x^k+(x+1)^k}{2^k}\\ &\Rightarrow T(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\beta_k\left(x^k+(x+1)^k\right)\end{aligned}$$

2. question 2

3. **Etude de l'espace propre de T associé à** 2
   (a) question a
   (b) question b
   (c) question c
   (d) question d
   (e) question e
   (f) question f

Partie 3: Etude de *cotan*

1. question 1
2. question 2
3. question 3
4. question 4
5. question 5

Partie 4: Développement eulérien

1. question 1
2. question 2
3. question 3
4. **Application et généralisation**
   (a) question a
   (b) question b
   (c) question c

Partie 5: Calcul d'un intégrale à paramètre

1. (a) question a
   (b) question b
   (c) question c
2. question 2
3. question 3
4. question 4
5. question 5
6. question 6

Exercice 2: Temps d'attente d'une séquence dans un automate

Partie 1: Etude d'un cas simple

1. question 1
2. question 2
3. question 3
4. question 4

Partie 2: Etude d'un cas intermédiaire

1. question a
2. question a
3. question a
4. question a
5. question a
6. question a

7. question a
8. question a
9. question a
10. question a
11. question a