Devoir Libre 9

Exercice 1: Développement Eulérien et Fonction périodique

Partie 1: Etude de φ

1. **Symétrie et prériode**

(a) $D = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ Pour $x \in D$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Soit x un réel.
Pour que $\varphi(x)$ soit définie sur D, il faut que $\forall x \in D$, $\varphi(x)$ converge. Décomposons $\varphi(x)$ en deux :

$$\varphi(-x) = \underbrace{\frac{1}{-x}}_{A(x)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-x)}{n^2 - x^2}}_{B(x)}$$

❏ $A(x)$ existe pour $x \neq 0$.

❏ $B(x)$
Autrement dit $x \neq a \in \mathbb{Z} \iff x \in D$
De plus, pour $x \in D$:

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(-x) & = & \frac{1}{-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-x)}{n^2-x^2} \\ \iff & \varphi(-x) & = & -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} \\ \iff & \varphi(-x) & = & -\left(\frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}\right) \\ \iff & \varphi(-x) & = & -\varphi(x) \end{array}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est bien définie sur } D \text{ et } \varphi \text{ est } \textbf{impaire}.}$$

❏ Soit $x \in D$. Calculons $\varphi(x+1)$:

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x+1) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-(x+1)} - \frac{1}{n+(x+1)}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1-x}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1+x}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x}\right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x+1} - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x}\right) + \frac{1}{-x}\right) + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\right) \\ \iff & \varphi(x+1) & = & \varphi(x) \end{array}$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est 1-préiodique.}}$$

Remarque : j'ai noté "1-préiodique" comme on note "π-périosdfsdfdique".

- D n'est pas un intervalle mais une union infinie d'intervalles ouverts. De plus, φ est une somme infinie de fonctions continues, donc je ne pense pas que l'argument "en tant que somme de fonctions continues" marche ici.

(b) **Continuité**

i. Soit $x \in [0,1]$
Soit $h \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2-x^2} \\ \Rightarrow \quad g(x+h)-g(x) &= 2\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x+h}{n^2-(x+h)^2} - \frac{x}{n^2-x^2}\right) \end{aligned}$$

ii. question b

iii. question c

iv. question d

Partie 2: Etude d'un endomorphisme de E

i. question 1

ii. question 2

iii. **Etude de l'espace propre de T associé à** 2

A. question a

B. question b

C. question c

D. question d

E. question e

F. question f

Partie 3: Etude de *cotan*

i. question 1

ii. question 2

iii. question 3

iv. question 4

v. question 5

Partie 4: Développement eulérien

i. question 1

ii. question 2

iii. question 3

iv. **Application et généralisation**

A. question a

B. question b

C. question c

Partie 5: Calcul d'un intégrale à paramètre

i. A. question a
   B. question b
   C. question c
ii. question 2
iii. question 3
iv. question 4
v. question 5
vi. question 6

Exercice 2: Temps d'attente d'une séquence dans un automate

Partie 1: Etude d'un cas simple

i. question 1
ii. question 2
iii. question 3
iv. question 4

Partie 2: Etude d'un cas intermédiaire

i. question a
ii. question a
iii. question a
iv. question a
v. question a
vi. question a
vii. question a
viii. question a
ix. question a
x. question a
xi. question a