

$$S(t,x)=a'(t)+(x-a(t))+\frac{|x-a(t)|^2}{2}w(t)$$