

$$\|AB\|_{\text{HS}}^2 = \text{tr}(B^*A^*AB) = \|A\|_{\text{op}}^2 \text{tr}(B^*B) - \text{tr}(B^*(\|A\|_{\text{op}}^2 I - A^*A)B)$$

$$\leq \|A\|_{\text{op}}^2 \text{tr}(B^*B) = \|A\|_{\text{op}}^2 \|B\|_{\text{HS}}^2,$$