Econometría Financiera

2022

Tema 4: Metodología de Box Jenkins (ARIMA)

Rodrigo Ortiz

Universidad Adolfo Ibáñez

Chile, 2022

Planificación

Agenda

1. Series de tiempo no estacionarias
2. Pronósticos ARIMA

Hasta ahora nos hemos enfocado en series de tipo **retorno** que son estacionarias (o al menos razonablemnte).

Sin embargo, algunas series de precios de activos financieros o tipos de cambio tienen a ser **no estacionarios**.

Muchas veces, en series económicas y/o financieras, esta **no estacionariedad** es generada por la presencia de raíces unitarias.

Un ejemplo clásico de **serie no estacionaria con raíz unitaria** es el paseo aleatorio (randon walk)

Sea $\{P_t\}$ una serie de tiempo, diremos que $\{P_t\}$ es un RW si satisface:

$$P_t = P_{t-1} + \epsilon_t$$

Si pensamoq $\{P_t\}$ como un caso particular de un AR(1) entonces el coeficiente autoregresivo $\rho = 1$, lo cual **no satisface las condiciones de estacionariedad**.

Consideremos un modelo ARMA(p,q)

$$Y_t = c + \rho_1 Y_{t-1} + \cdots + \rho_p Y_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \epsilon_{t-q}$$
$$(1 - \rho_1 L - \cdots - \rho_p L^p) Y_t = c + (1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_p L^p) \epsilon_t$$
$$\rho(L) Y_t = c + \theta(L) \epsilon_t$$

Si un modelo ARMA tiene una raíz unitaria, entonces el modelo se vuelve un **ARIMA(p,d,q)**.

Así, si un modelo **ARIMA** posee una raíz unitaria, es porque el polinomio **AR** posee una.

El enfoque clásico es **diferenciar**. Una serie Y_t sigue un **ARIMA(p,d,q)** si

$$W_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$$

sigue un proceso estacionario **ARMA(p,q)**

La idea de transformar una serie **no estacionaria** (por ejemplo el log del precio) en una **estacionaria** (retornos) considerando sus *cambios* se denomina **diferenciar**.

$W_t = Y_t - Y_{t-1} = \Delta Y_t$ es la primera diferencia de Y_t

Podría ser el caso que Y_t contenga múltiples raíces unitarias y por tanto, sea necesario diferenciar más de una vez para ser estacionaria.

Por ejemplo: Sea Y_t no estacionario, entonces calculamos la primera diferencia como $W_t = Y_t - Y_{t-1}$, si esta primera diferencia es no estacionaria, entonces calculamos la segunda diferencia como

$$Z_t = W_t - W_{t-1} = Y_t - Y_{t-1} - Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

$$= Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = (1 - 2L + L^2)Y_t = (1 - L)^2 Y_t$$

Así, si Z_t estacionaria entonces $Z_t \sim ARMA(p, q)$ y por consiguiente $Y_t \sim ARIMA(p, 2, q)$

Como notación general para $Y_t \sim ARIMA(p, d, q)$

$$\rho(L)(1 - L)^d Y_t = c + \theta(L)\epsilon_t$$

Nota: Estamos permitiendo que p,d,q $\in \mathbb{N}$, existen otro tipo de modelos los ARFIMA que permiten d **racional**.

Sea el siguiente proceso $Y_t = \alpha t + \epsilon_t$

1. Demuestre que Y_t es no estacionario.
2. Calcule la primera diferencia del proceso Y_t.
3. Demuestre que la primera diferencia de Y_t es un proceso estacionario e indique el modelo que describe al proceso Y_t.

Sea el siguiente proceso $Y_t = \alpha t + \epsilon_t$

1. Demuestre que Y_t es no estacionario.

$$E[Y_t] = \alpha t$$

Por lo tanto, es no estacionario.

2 . Calcule la primera diferencia del proceso Y_t.

Sea $W_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-L)^{d=1} Y_t$

$= \alpha t + \epsilon_t - \alpha(t-1) - \epsilon_{t-1} = \alpha + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$

3. Demuestre que la primera diferencia de Y_t es un proceso estacionario e indique el modelo que describe al proceso Y_t.

Demostración queda de TAREA.

Así, W_t es estacionario, $W_t \sim ARMA(0,1)$. Por lo tanto,

$Y_t \sim ARIMA(0,1,1)$

Sea el siguiente proceso $Y_t = \alpha t^2 + \epsilon_t$

1. Demuestre que Y_t es no estacionario.
2. Calcule la primera diferencia del proceso Y_t y demuestre que no es estacionaria.
3. Demuestre que la segunda diferencia de Y_t es un proceso estacionario e indique el modelo que describe al proceso Y_t.

Sea el siguiente proceso $Y_t = \alpha t^2 + \epsilon_t$

1. Demuestre que Y_t es no estacionario

$$E[Y_t] = \alpha t^2$$

   Por lo tanto, es no estacionario.

2. Calcule la primera diferencia del proceso Y_t y demuestre que no es estacionaria.

Sea $W_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1-L)^{d=1} Y_t$

$= \alpha t^2 + \epsilon_t - \alpha(t-1)^2 - \epsilon_{t-1} = 2\alpha t - \alpha + \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$

$$E[W_t] = 2\alpha t - \alpha$$

Por lo tanto, W_t es no estacionario.

3. Demuestre que la segunda diferencia de Y_t es un proceso estacionario e indique el modelo que describe al proceso Y_t.

   Sea $Z_t = W_t - W_{t-1}$

   $= 2\alpha t - \alpha + \epsilon_t - \epsilon_{t-1} - 2\alpha(t-1) - \alpha - \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2}$

   $= 2\alpha + \epsilon_t - 2\epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2}$

   Demostración queda de TAREA.

   Así, Z_t es estacionario, $Z_t \sim ARMA(0,2)$. Por lo tanto,

   $Y_t \sim ARIMA(0,2,2)$

Definición: Sea Y_t una serie de tiempo **no** estacionaria, diremos que Y_t es integrable de orden **d** si y sólo si

$$W_t = (1 - L)^d Y_t \sim \textit{estacionario}$$

Para el cálculo de errores, los errores se pronostican como cero sobre el set de información.

Ejemplo: Sea el proceso $Y_{t+1} = c + \rho Y_t + \epsilon_{t+1}$ con $|\rho| < 1$

1. Calcule el pronóstico de Y_t un paso hacia adelante.
2. Calcule el error de pronóstico de Y_t un paso hacia adelante.
3. Calcule el pronóstico de Y_t dos pasos hacia adelante.
4. Calcule el error de pronóstico de Y_t dos pasos hacia adelante.
5. Obtenga una expresión general para el pronósticos **h** pasos hacia adelante.
6. Calcule el error cuadrático medio de estimación **h** pasos hacia adelante.

Ejemplo: Sea el proceso $Y_{t+1} = c + \rho Y_t + \epsilon_{t+1}$

1. Calcule el pronóstico de Y_t un paso hacia adelante.

$$Y_t^F(1) = c + \rho Y_t$$

2. Calcule el error de pronóstico de Y_t un paso hacia adelante.

$$e_t^F(1) = Y_{t+1} - Y_t^F(1) = \epsilon_{t+1}$$

Ejemplo: Sea el proceso $Y_{t+1} = c + \rho Y_t + \epsilon_{t+1}$

3. Calcule el pronóstico de Y_t dos pasos hacia adelante.

$$\begin{aligned} Y_t^F(2) &= c + \rho Y_t^F(1) = c + \rho[c + \rho Y_t] \\ &= c(1+\rho) + \rho^2 Y_t \end{aligned}$$

4. Calcule el error de pronóstico de Y_t dos pasos hacia adelante.

$$\begin{aligned} Y_{t+2} &= c + \rho Y_{t+1} + \epsilon_{t+2} \\ &= c + \rho[c + \rho Y_t + \epsilon_{t+1}] + \epsilon_{t+2} \\ &= c(1+\rho) + \rho^2 Y_t + \rho\epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2} \\ e_t^F(2) &= Y_{t+2} - Y_t^F(2) = \rho\epsilon_{t+1} + \epsilon_{t+2} \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea el proceso $Y_{t+1} = c + \rho Y_t + \epsilon_{t+1}$

5. Obtenga una expresión general para el pronósticos **h** pasos hacia adelante.
$$Y_t^F(h) = c(1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{h-1}) + \rho^h Y_t$$

6. Calcule el error cuadrático medio de estimación **h** pasos hacia adelante.
$$ECM = E[e_t^F(h)^2] = \sum_{i=0}^{h-1} E[\rho^{2i}\epsilon_{t+h-i}^2]$$
$$= \sum_{i=0}^{h-1} \rho^{2i}\sigma^2 = \frac{\sigma^2[1 - \rho^{2h}]}{1 - \rho^2}$$

Notar que:

- $$\lim_{h \longrightarrow \infty} Y_t = \frac{c}{1-\rho} = E[Y_t]$$
- $$\lim_{h \longrightarrow \infty} ECM = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2} = V(Y_t)$$
- ECM es creciente en h, pero converge en el largo plazo a la varianza del proceso.

Ejercicio 1: Sea el proceso $Y_{t+1} = \rho Y_t + \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t$, con $|\rho| < 1$

1. Calcule el pronóstico un paso hacia adelante del proceso.
2. Calcule el error de pronóstico un paso hacia adelante del proceso.
3. Obtenga una expresión general para el pronóstico h pasos hacia adelante.
4. Usando la siguiente representación de $Y_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty}(\rho - \theta)\rho^i\epsilon_{t-i} + \epsilon_{t+1}$, calcule $E[Y_{t+1}]$ y $V[Y_{t+1}]$.
5. Qué sucede con $Y_t^F(h)$ cuando $h \longrightarrow \infty$?

Ejercicio 2: Suponga que X_t es una caminata aleatoria con deriva e Y_t un proceso AR(1) estacionario, ambos independientes entre sí. ¿Qué tipo de proceso es $Z_t = X_t + Y_t$?

Ejercicio 3: Demuestre que el siguiente modelo puede formularse como un ARIMA(0,2,2):

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t \tag{1}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \tag{2}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \tag{3}$$

en donde ϵ_t, η_t y ζ_t son ruido blanco, independientes entre sí.