Econometría Financiera

2023

Tema 2: Esperanza matemática

Rodrigo Ortiz

Universidad Adolfo Ibáñez

Chile, 2023

1. Tema 2: Esperanza matemática
   - Esperanza, varianza y covarianzas de variables aleatorias
     - Variables discretas
     - Variables continuas
   - Esperanza y varianza de combinaciones lineales de variables aleatorias

La **función de distribución de probabilidad**, $P(x)$, de una variable aleatoria discreta X expresa la probabilidad de que X tome el valor x, como una función de x. Es decir,

$$P(x) = P(X = x)$$

para todos los valores de x.

Esperanza, varianza y covarianzas de variables aleatorias

Variables discretas: Propiedades que deben satisfacer las funciones de probabilidad de variables aleatorias discretas

Sea X una variable aleatoria discreta que tiene una función de probabilidad $P(x)$. En ese caso,

1. $0 \leq P(x) \leq 1$ para cualquier valor x y
2. Las probabilidades individuales suman 1, es decir,

$$\sum_{x} P(x) = 1$$

donde la notación indica que el sumatorio abarca todos los valores posibles de x.

La **función de probabilidad acumulada**, $F(x_0)$, de una variable aleatoria X, expresa la probabilidad de que X no tenga un valor superior a x_0, como una función de x_0. Es decir,

$$F(x_0) = P(X \leq x_0)$$

donde la función se evalúa en todos los valores de x_0.

Sea X una variable aleatoria que tiene la función de probabilidad $P(x)$ y la función de probabilidad acumulada $F(x_0)$. Podemos demostrar que

$$F(x_0) = \sum_{x \leq x_0} P(x)$$

donde la notación implica que el sumatorio abarca todos los valores posibles de x que son menores o iguales que x_0.

El **valor esperado**, $E(X)$, de una variable aleatoria discreta X se define de la forma siguiente:

$$E(X) = \mu = \sum_{x} xP(x)$$

donde la notación indica que el sumatorio abarca todos los valores posibles de x.

El valor esperado de una variable aleatoria también se llama media y se representa por medio del símbolo μ.

Sea X una variable aleatoria discreta. La esperanza de los cuadrados de las diferencias con respecto a la media, $(X - \mu)^2$, se llama **varianza**, se representa por medio del símbolo σ^2 y viene dada por

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 P(x)$$

La varianza de una variable aleatoria discreta X también puede expresarse de la forma siguiente:

$$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = \sum_x x^2 P(x) - \mu_x^2$$

La desviación típica, σ_x, es la raíz cuadrada positiva de la varianza.

Sean X e Y un par de variables aleatorias discretas. Su función de probabilidad conjunta expresa la probabilidad de que simultáneamente X tome el valor específico x e Y tome el valor y como función de x e y. La notación empleada es P(x, y), de donde

$$P(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$$

Sean X e Y un par de variables aleatorias distribuidas conjuntamente. En este contexto, la función de probabilidad de la variable aleatoria X se llama función de probabilidad marginal y se obtiene sumando las probabilidades conjuntas correspondientes a todos los valores posibles; es decir,

$$P(x) = \sum_{y} P(x, y)$$

Asimismo, la función de probabilidad marginal de la variable aleatoria Y es

$$P(y) = \sum_{x} P(x, y)$$

Sea X una variable aleatoria de media μ_X e Y una variable aleatoria de media μ_Y. El valor esperado de $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)$ se llama covarianza entre X e Y y se representa por medio de $Cov(X, Y)$. En el caso de las variables aleatorias discretas,

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y)P(x, y)$$

Una expresión equivalente es

$$Cov(X, Y) = E[XY] - \mu_X\mu_Y = \sum_x \sum_y xyP(xy) - \mu_X\mu_Y$$

Sean X e Y variables aleatorias distribuidas conjuntamente. La correlación entre X e Y es

$$\rho = Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad es $P(x)$ y sea $g(X)$ una función de X. El valor esperado, $E[g(X)]$, de esa función se define de la forma siguiente:

$$E[g(X)] = \sum_{x} g(x)P(x)$$
$$E[g(X)] = \int_{x} g(x)f(x)dx$$

Esperanza, varianza y covarianzas de variables aleatorias

Variables discretas: Resumen de las propiedades de las funciones lineales de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria de media μ_x y varianza σ_x^2 y sean a y b unos números fijos constantes cualesquiera. Definamos la variable aleatoria Y como $a + bX$. Entonces, la media y la varianza de Y son

$$\mu_Y = E(a + bX) = a + b\mu_X$$
$$\sigma_Y^2 = Var(a + bX) = b^2\sigma_X^2$$

por lo que la desviación típica de Y es

$$\sigma_Y = |b1|\sigma_X$$

La **función de distribución acumulada**, $F(x)$, de una variable aleatoria continua X expresa la probabilidad de que X no sea mayor que el valor de x, en función de x

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Sea X una variable aleatoria continua que tiene una función de distribución acumulada $F(x)$ y sean a y b dos valores posibles de X, siendo $a < b$. La probabilidad de que X se encuentre entre a y b es

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Sea X una variable aleatoria continua y x cualquier número situado en el rango de valores que puede tomar esta variable aleatoria. La función de densidad de probabilidad, $f(x)$, de la variable aleatoria es una función que tiene las siguientes propiedades:

1. $f(x) > 0$ para todos los valores de x.
2. El área situada debajo de la función de densidad de probabilidad, $f(x)$, cuando se abarcan todos los valores de la variable aleatoria, X, es igual a 1,0.
3. Supongamos que se representa gráficamente esta función de densidad. Sean a y b dos valores posibles de la variable aleatoria X, siendo $a < b$. En ese caso, la probabilidad de que X se encuentre entre a y b es el área situada debajo de la función de densidad entre estos puntos.

4. La función de distribución acumulada, $F(x_0)$, es el área situada debajo de la función de densidad de probabilidad, $f(x)$, hasta x_0:

$$F(x_0) = \int_{x_m}^{x_0} f(x)dx$$

donde x_m es el valor mínimo de la variable aleatoria X.

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_K$, K variables aleatorias que tienen las medias $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_K$ y las varianzas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. La media de su suma es la suma de sus medias; es decir,

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_K) = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_K$$

2. Si la covarianza entre cada par de estas variables aleatorias es 0, entonces la varianza de su suma es la suma de sus varianzas; es decir,

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_K) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_K^2$$

Sin embargo, si las covarianzas entre pares de variables aleatorias no son 0, la varianza de su suma es

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_K) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_K^2 + 2\sum_{i=1}^{K-1}\sum_{j=i+1}^{K} Cov(X_i, X_j)$$

Sean X e Y un par de variables aleatorias que tienen las medias μ_X y μ_Y y las varianzas σ_X^2 y σ_Y^2. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. La media de su diferencia es la diferencia de sus medias; es decir,

$$E(X - Y) = \mu_X - \mu_Y$$

2. Si la covarianza entre X e Y es 0, entonces la varianza de su diferencia es

$$Var(X - Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$$

3. Si la covarianza entre X e Y no es 0, entonces la varianza de su diferencia es

$$Var(X - Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - Cov(X, Y)$$

Esperanza y varianza de combinaciones lineales de variables aleatorias

Variables discretas: Resumen de las propiedades de las funciones lineales de una variable aleatoria

1. La variable aleatoria continua X tiene una función densidad de probabilidad dada por $f(x) = cx, 0 < x < 1$, siendo c una constante positiva. Determine Var(X).
2. Sean X e Y dos variable aleatorias con primeros y segundos momentos dados por $E(X) = \mu_X, E(y) = \mu_Y, Var(X) = \sigma_{XX}, Var(X) = \sigma_{YY}$, y $cov(X, Y) = \sigma_{XY}$. Defínase $\gamma = \sigma_{XY}/\sigma_{XX}$ y $\alpha = \mu_Y - \gamma\mu_X$.
    1. Demuestre que la variable aleatoria z= $(Y - \alpha - \gamma X)$ no está correlacionada con X. Encuentre su media $E[z]$ y varianza $Var(z)$.
    2. Para constantes arbitrarias a y b, considere la variable aleatoria $Z = Y - a - bX$. Encuentre los valores de a y b que minimizan $E(Z^2)$.
3. Si $Var(X_1) = 5$, $Var(X_2) = 4$, $Var(X_3) = 7$, $Cov(X_1, X_2) = 3$, $Cov(X_1, X_3) = -2$ y X_2 y X_3 son independientes, encuentre la covarianza de $Y_1 = X_1 - 2X_2 + 3X_3$ e $Y_2 = -2X_1 + 3X_2 + 4X_3$