Ejercicios clase 7 pauta -Econometría financiera

- Ejercicio 1: $Y_{t+1} = \rho Y_t + \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t$ con $|\rho| < 1$

  1. Encuentre el pronóstico un paso hacia adelante y el error de estimación.
     Respuesta:

     $$\begin{aligned} Y_t^F(1) &= \rho Y_t - \theta\epsilon_t \\ e_t^F(1) &= Y_{t+1} - Y_t^F(1) = \epsilon_{t+1} \end{aligned}$$

  2. Encuentre una expresión general para el pronóstico h pasos hacia adelante.
     Respuesta:

     $$\begin{aligned} Y_{t+2}(2) &= \rho Y_{t+1} + \epsilon_{t+2} - \theta\epsilon_{t+1} \\ &= \rho(\rho Y_t + \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t) + \epsilon_{t+2} - \theta\epsilon_{t+1} \\ &= \rho^2 Y_t - \rho\theta\epsilon_t + \epsilon_{t+1}(\rho - \theta) + \epsilon_{t+2} \end{aligned}$$

     $$Y_t^F(2) = \rho^2 Y_t - \rho\theta\epsilon_t = \rho(\rho Y_t - \theta\epsilon_t) = \rho Y_t^F(1)$$

     $$e_t^F(2) = Y_{t+2} - Y_t^F(2) = \epsilon_{t+1}(\rho - \theta) + \epsilon_{t+2}$$

  3. Usando la siguiente representación de Y_{t+1}, calcule $E[Y_{t+1}]$ y $V[Y_{t+1}]$

     $$Y_{t+1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\rho - \theta)\rho^i \epsilon_{t-i} + \epsilon_{t+1}$$

     Respuesta:

     $$\begin{aligned} E[Y_{t+1}] &= \sum_{i=0}^{\infty} (\rho - \theta)\rho^i E[\epsilon_{t-i}] + E[\epsilon_{t+1}] = 0 \\ V[Y_{t+1}] &= \sum_{i=0}^{\infty} (\rho - \theta)^2\rho^{2i} V[\epsilon_{t-i}] + V[\epsilon_{t+1}] \\ V[Y_{t+1}] &= \sum_{i=0}^{\infty} (\rho - \theta)^2\rho^{2i} \sigma_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 = \sigma_\epsilon^2\left[\frac{(\rho-\theta)^2}{1-\rho^2} + 1\right] \end{aligned}$$

4. ¿Qué sucede con $Y_t^F(h)$ cuando $h \longrightarrow \infty$?

   Respuesta:

   $Y_t^F(h) = \rho^h Y_t - \rho^{h-1}\theta\epsilon_t \longrightarrow 0$

   Esto hace sentido, pues su valor esperado es cero. Así, si un proceso es estacionario, en el largo plazo los pronósticos convergen a su valor esperado.

- Ejercicio 2

  Suponga que X_t es una caminata aleatoria con deriva e Y_t un proceso AR(1) estacionario, ambos independientes entre sí. ¿Qué tipo de proceso es $Z_t = X_t + Y_t$?

  Respuesta:
  $X_t = \mu + X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad X_t \sim I(1)$
  $Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_{t-1} + \eta_t \qquad Y_t \sim I(0)\ ya\ que\ |\gamma_1| < 1$

  ε_t y η_t son procesos de ruido blanco independientes.
  $Z_t = X_t + Y_t$ deberia ser $I(1)$ ya que predomina el orden de integración superior

  Demostración
  Usando el operador de rezago

$$(1-L)X_t = \mu + \varepsilon_t \quad \rightarrow \quad X_t = \frac{(\mu + \varepsilon_t)}{(1-L)}$$

$$(1-\gamma_1 L)Y_t = \gamma_0 + \eta_t \quad \rightarrow \quad Y_t = \frac{\gamma_0 + \eta_t}{(1-\gamma_1 L)}$$

$$\therefore \quad Z_t = X_t + Y_t = \frac{(\mu + \varepsilon_t)}{(1-L)} + \frac{\gamma_0 + \eta_t}{(1-\gamma_1 L)}$$

$$Z_t = \frac{(1-\gamma_1 L)(\mu + \varepsilon_t) + (1-L)(\gamma_0 + \eta_t)}{(1-L)(1-\gamma_1 L)}$$

$$(1-L)(1-\gamma_1 L)Z_t = (1-\gamma_1 L)(\mu + \varepsilon_t) + (1-L)(\gamma_0 + \eta_t)$$

$$Z_t - \gamma_1 Z_{t-1} - Z_{t-1} + \gamma_1 Z_{t-2} = \mu + \varepsilon_t - \gamma_1\mu - \gamma_1\varepsilon_{t-1} + \gamma_0 + \eta_t - \gamma_0 - \eta_{t-1}$$

$$\triangle\ Z_t - \gamma_1 \triangle\ Z_{t-1} = (1-\gamma_1)\mu + \varepsilon_t - \gamma_1\varepsilon_{t-1} + \eta_t - \eta_{t-1}$$

  Donde $\varepsilon_t - \gamma_1\varepsilon_{t-1} + \eta_t - \eta_{t-1} = \omega_t$ es un proceso MA(1)

$$\therefore \triangle\ Z_t = (1-\gamma_1)\mu + \gamma_1 \triangle\ Z_{t-1} + \omega_t \quad \rightarrow \quad D.E\ con\ |\gamma_1| < 1$$

  Implica que Z_t es un ARIMA(1,1,1) y el proceso diferenciado 1 vez, $\triangle\ Z_t$ es D.E con componentes AR(1) y MA(1)

- Ejercicio 3

  Demuestre que el siguiente modelo puede formularse como un ARIMA(0,2,2):

$$y_t = \mu_t + \epsilon_t \tag{1}$$

$$\mu_t = \mu_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t \tag{2}$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \zeta_t \tag{3}$$

  en donde ϵ_t, η_t y ζ_t son ruido blanco, independientes entre sí.
  Respuesta:

  (1) En $\mu_t = Y_t - \epsilon_t$:

$$\Rightarrow \mu_{t-1} = Y_{t-1} - \epsilon_{t-1}$$

  (2) En $Y_t - \epsilon_t = Y_{t-1} - \epsilon_{t-1} + \beta_{t-1} + \eta_t$:

$$\therefore \beta_{t-1} = Y_t - \epsilon_t - Y_{t-1} + \epsilon_{t-1} - \eta_t$$

$$\therefore \beta_t = Y_{t+1} - \epsilon_{t+1} - Y_t + \epsilon_t - \eta_{t+1}$$

  (3) en $\zeta_t = \beta_t - \beta_{t-1}$:

$$\zeta_t = Y_{t+1} - \epsilon_{t+1} - Y_t + \epsilon_t - \eta_{t+1} - Y_t + \epsilon_t + Y_{t-1} - \epsilon_{t-1} + \eta_t$$

  Reordenando y agrupando términos en Y_t:

$$Y_{t+1} - 2Y_t + Y_{t-1} = \epsilon_{t+1} - 2\epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \eta_{t+1} - \eta_t + \zeta_t$$

$$\Rightarrow (1 - 2L + L^2)Y_{t+1} = (1 - 2L + L^2)\epsilon_{t+1} + (1 - L)\eta_{t+1} + \zeta_t$$

$$(1 - L)^2 Y_{t+1} = (1 - L)^2\epsilon_{t+1} + (1 - L)\eta_{t+1} + \zeta_t$$

  Donde:
  $(1 - L)^2 Y_{t+1}$: d=2
  $(1 - L)^2 \epsilon_{t+1}$: MA(2)
  $(1 - L)\eta_{t+1}$: MA(1) Recordemos que:

$$MA(2) + MA(1) = MA(2)$$

  De esta forma:

$$\Delta^2 Y_{t+1} = (1 - 2L + L^2)\epsilon_{t+1} + (1 - L)\eta_{t+1} + \zeta_t$$

$$\therefore \quad ARIMA(0, 2, 2)$$