Series de Tiempo
Modelos AR y MA

Rodrigo Ortiz, PhD

Preguntas articuladoras

- ¿Qué son las ST?
- ¿Qué las caracteriza?
- ¿Qué condiciones vamos a exigir sobre las ST?

- Lecturas sugeridas:
- 1) Brooks (hasta el capítulo 6)
- 2) Enders (cap 1-2) (Esta lectura es algo más compleja).

Introducción

- Las series de tiempo poseen una gran **“bendición”,** que a la vez es su gran **“maldición”**

- Una propiedad distintiva de las ST es la **dependencia** temporal de las series. Es una bendición pues nos permite decir algo sobre la serie en el futuro (dado el conjunto de información actual).

- Es una maldición pues dificulta el poder establecer “verdaderas” relaciones, y a la vez dificulta el análisis estadístico (los supuestos de i.i.d parecen demasiado fuertes en este contexto).

Introducción

- Una serie de tiempo $Y = \{Y_{t+1}\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ es una **colección de variables indexadas en el tiempo**.
- Esta colección de variables aleatorias tienen asociadas (obviamente) distribuciones de probabilidad.
- Supongamos queremos decir algo acerca de los momentos de Y_{t+1}. Asumamos su valor esperado existe; luego:
- $\mu_{t+1} = E(Y_{t+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_{Y_{t+1}}(u) du$
- Donde $f_{Y_{t+1}}$ es simplemente la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria Y_{t+1}

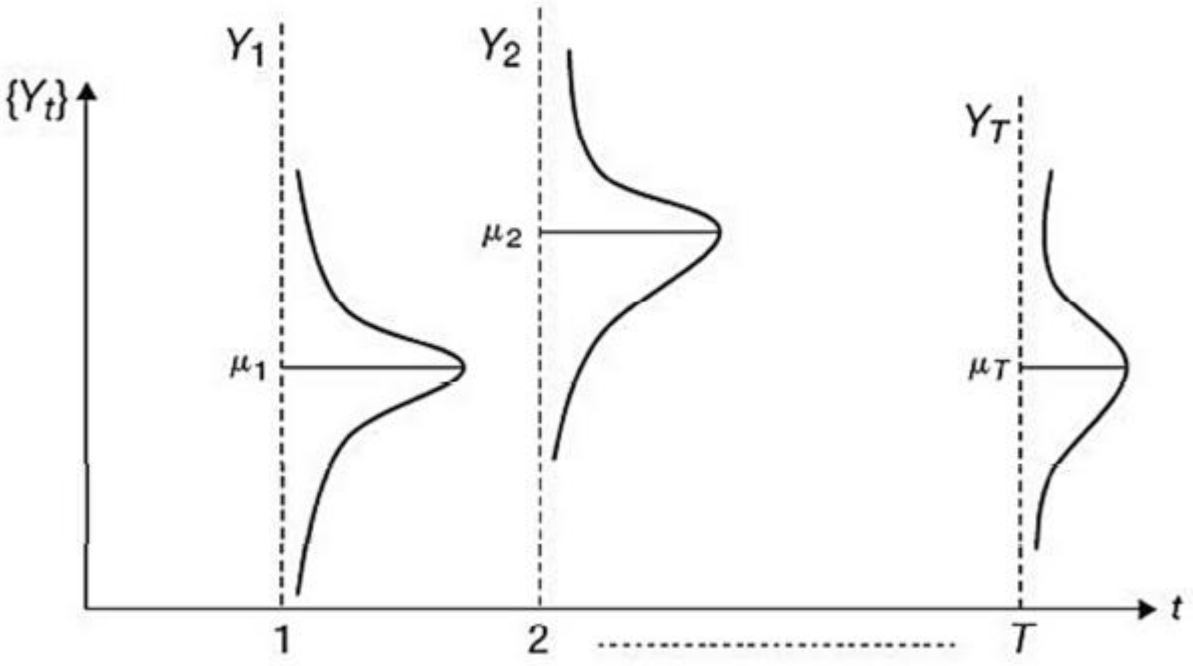
Introducción

- La varianza de Y_{t+1} (en caso de existir)
- $\sigma_{t+1}^2 = V(Y_{t+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(u - E(Y_{t+1})\right)^2 f_{Y_{t+1}}(u)du$
- La autocovarianza de orden "j" (qué es?) viene dada por
- $\gamma_{jt+1} = E(Y_{t+1} - EY_{t+1})(Y_{t+1-j} - EY_{t+1-j})$
- Y por tanto, la autocorrelación de orden "j"
- $\rho_{jt+1} = \frac{\gamma_{jt+1}}{\sqrt{V(Y_{t+1})}\sqrt{V\left(Y_{t+1-j}\right)}}$

Introducción

- Notar que $\mu_{t+1}, \sigma_{t+1}^2, \gamma_{jt+1}, \rho_{jt+1}$ están indexadas en t+1 !!
- ¿Cómo estimar estos momentos? Si tuviéramos N realizaciones **independientes** del proceso, podríamos utilizar la LGN. Esto implicaría que conocemos **realidades paralelas (?).**
- $\left\{Y_{t+1}^{(1)}\right\}_{t=-\infty}^{+\infty}, \left\{Y_{t+1}^{(2)}\right\}_{t=-\infty}^{+\infty}, \left\{Y_{t+1}^{(3)}\right\}_{t=-\infty}^{+\infty}, \left\{Y_{t+1}^{(4)}\right\}_{t=-\infty}^{+\infty}, \dots \left\{Y_{t+1}^{(N)}\right\}_{t=-\infty}^{+\infty}$
- En definitiva, requeriríamos observar múltiples realizaciones de la realidad para obtener los momentos (en caso de existir) de Y en t+1

Quizás estamos ante un proceso estocástico de este estilo…



Definiciones

- Definición 1: Llamamos *proceso estocástico* a una sucesión de variables aleatorias $\{Y_t\}$, $t = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty$

- Definición 2: Se llama *ruido blanco* a una sucesión de variables aleatorias con esperanza cero, igual varianza e independientes en el tiempo. En lo sucesivo, denotamos por ruido blanco $\{\varepsilon_t\}$

Definiciones

- Definición 3: Un proceso estocásticos $\{Y_t\}$ *es estacionario en el sentido estricto* si para toda m-tupla $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ y todo entero *k* el vector de variables $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_m})$ tienen la misma distribución de probabilidad conjunta que en vector $(Y_{t_{1+k}}, Y_{t_{2+k}}, \dots, Y_{t_m+k})$

Estacionariedad débil

- En general, para trabajar con series de tiempo, **debemos restringir en algo en nivel de dependencia y el nivel de heterogeneidad** (no vamos a trabajar con cualquier cosa).

- En algún sentido, vamos a trabajar con cosas "más generales" dado que **derribamos el supuesto iid**. En otro sentido, **relajar este supuesto introduce restricciones adicionales sobre los momentos**.

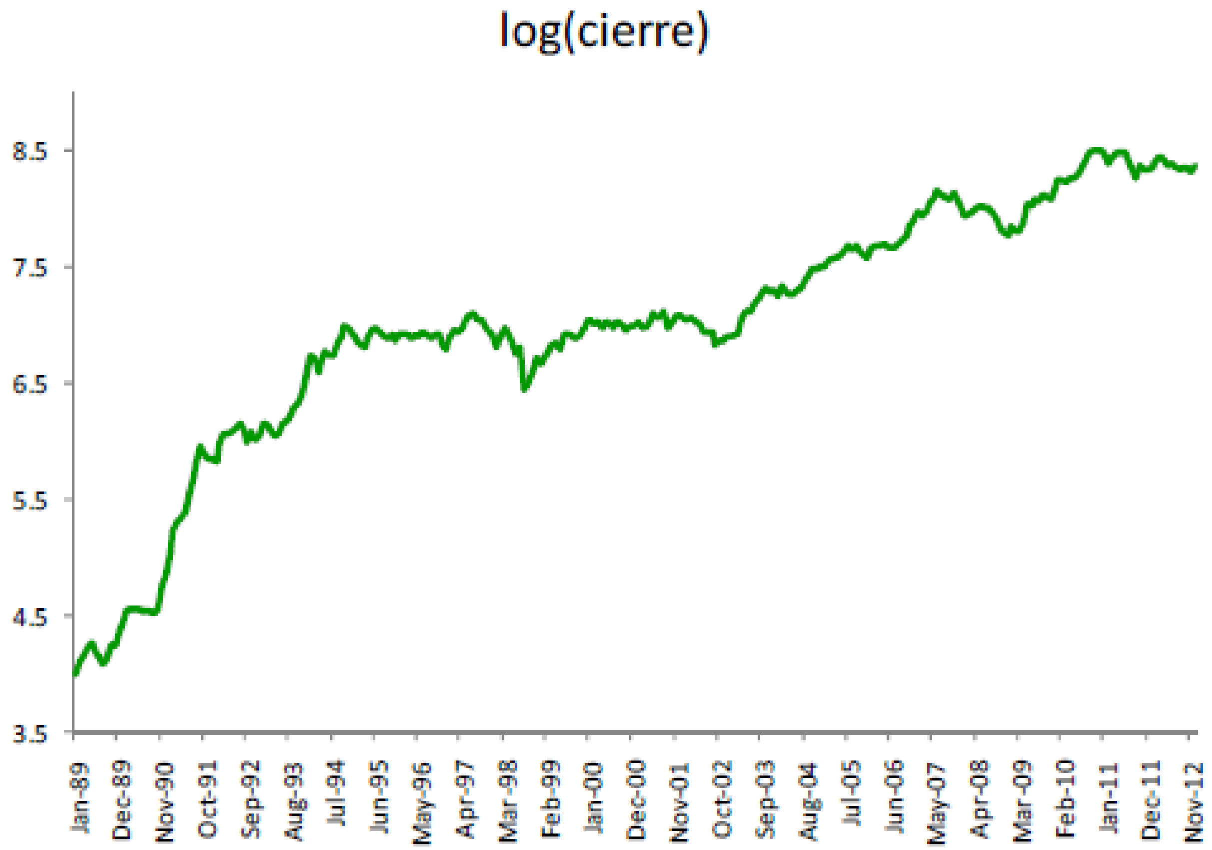
Estacionariedad débil

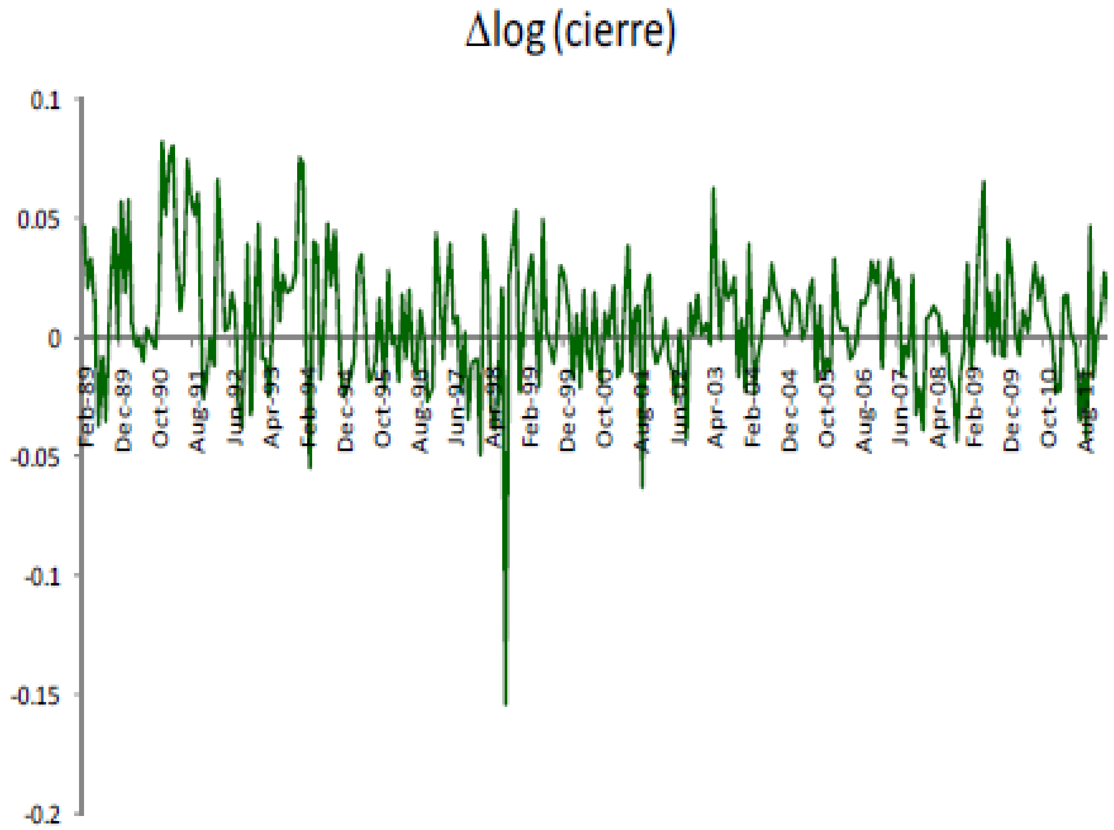
- En palabras sencillas, estamos pidiendo alguna **noción de estabilidad y tratabilidad**. Intentaremos **explotar la estructura estable del proceso**. Una serie inestable sería, por ejemplo, $E(Y_t) = \mu_t$.
- Notar que **el proceso no tiene un valor esperado**, sino que **cada variable aleatoria**, en cada tiempo, **posee un valor esperado distinto**.
- El problema de este ejemplo es que, para inferir algo sobre el proceso, solo disponemos de **una observación!!**

Estacionariedad débil

- Diremos que Y_t es un proceso estacionario en covarianzas (o débilmente estacionario) ssi:
- 1) $E(Y_t) = \mu \; \forall t$
- 2) $E(Y_t - \mu)\left(Y_{t-j} - \mu\right) = \gamma_j \; \forall t, j$
- Notar que de 2) se desprende que la **varianza tampoco depende de t (j=0).**
- En otras palabras, los dos primeros momentos del proceso son invariantes en el tiempo. **En particular, las autocovarianzas dependen de su distancia intertemporal j, pero no de t.**
- Si bien existen distintas nociones de estacionariedad (e.g., estacionariedad fuerte o estricta), durante el curso usualmente nos referiremos a estacionariedad débil

Volviendo a series financieras: ¿Cuál se aproxima más al concepto de estacionariedad: Precios o Retornos?





El Ruido Blanco (White Noise)

- Diremos que $\{\varepsilon_t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ es ruido blanco ssi
- $E(\varepsilon_t) = 0 \; \forall t$
- $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2 \; \forall t$
- $Cov\left(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}\right) = 0 \; \forall t, j$

¿Son los siguientes procesos estacionarios?

- $Y_t = c + \varepsilon_t$
- $Y_t = t + \varepsilon_t$
- $Y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$
- $Y_t = \alpha\, cos(\lambda t) + \beta\, sen(\lambda t)$ Con $\alpha \sim N(0, \sigma^2)$ y $\beta \sim N(0, \sigma^2)$ e independientes
- $Y_t \sim N(1{,}1)\ \forall t\ impar$

  $Y_t \sim exp(1)\ \forall t\ par$

Ambas son independientes entre sí. Entre normales, entre sí y entre t.

Operadores de rezago (Back-shift operator)

- Dependiendo de los libros, lo verán denotados como L (Lag) o B (Back-shift).
- $LY_t = Y_{t-1}$
- $L^2 Y_t = L(LY_t) = Y_{t-2}$
- $L^i Y_t = Y_{t-i}$
- $Lc = ?$
- $L^{-i} Y_t = Y_{t+i}$
- $\left(L^i + L^k\right) Y_t = Y_{t-i} + Y_{t-k}$
- $\sum_{i=0}^{\infty} (cL)^i Y_t = (1 - cL)^{-1} Y_t \; con \; |c| < 1$

Modelos AR(p)

Esperanza y varianza incondicional para un AR(1) estacionario

- $Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad , \varepsilon_t \; es \; WN \; y \; |\rho| < 1$
- $EY_t = \frac{\mu}{1-\rho}$
- $V(Y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\rho^2}$

El Random Walk

- Un paseo aleatorio puede pensarse como un AR(1) no estacionario

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Estas series suelen mostrar “tendencias por tramos” o “tendencias estocásticas”; esto es, un RW está compuesto por distintas tendencias van cambiando de pendiente en forma aleatoria.

$$Y_t = \mu + (\mu + Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \cdots =$$
$$\mu t + Y_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

El Random Walk

$$Y_t = \mu + (\mu + Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \cdots =$$
$$Y_t = \mu t + Y_0 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t)$$

$$Y_t = \mu t + Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i}$$

- Notar $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \ldots + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ indica que los shocks nunca desaparecen en la serie (tienen un efecto perpetuo).

- μt es una tendencia determinística, Y_0 es una CI.

Modelos MA(q)

Modelos de Medias Móviles

$$Y_t = c + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$c, \theta_i, i \ = 1, \ldots, q$: $parámetros, \{\varepsilon_t\} \sim RB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

Funciones de auto covarianza y auto correlación

Función de auto-covarianza λ_k y Función de autocorrelación ρ_k

- MA(1)

$$\boxed{Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}}$$

$$\lambda_k = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 & k=0 \\ -\theta\sigma_\varepsilon^2 & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases} \qquad \rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ -\theta/(1+\theta^2) & k=1 \\ 0 & k>1 \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

- Sea un modelo MA(2), con ε_t RB

$$Y_t = c + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

(1) Calcule la media y la varianza de Y_t.

(2) Deduzca la función de autocorrelación para este proceso.

Ejercicios propuestos

- Sea un modelo AR(1)

$$Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad , \varepsilon_t \; es \; WN \; y \; |\rho| < 1$$

(1)Calcule la media (incondicional) Y_t.

(2) Calcule la varianza (incondicional) de Y_t.

(3) Deduzca la función de autocorrelación para este proceso.

Función de auto-covarianza λ_k y Función de autocorrelación ρ_k

- AR(1) $Y_t = \mu + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$ $\{\varepsilon_t\}$: ruido blanco

<u>Caso 1: $|\gamma| < 1$</u>

- $E(Y_t) = \dfrac{\mu}{1-\gamma}$
- $\lambda_k = \gamma^k \left(\dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\gamma^2} \right)$ k=0, 1, 2...
- $\rho_k = \gamma^k$ k=0, 1, 2...

Función de auto-covarianza λ_k y Función de autocorrelación ρ_k

- AR(1)

Caso 2: $\gamma = 1$ (caminata aleatoria)

- $E(Y_t \mid Y_0) = \mu t + Y_0$
- $Cov(Y_t, Y_{t-k} \mid Y_0) \equiv \lambda_k = (t-k)\sigma_\varepsilon^2$
- $Corr(Y_t, Y_{t-k} \mid Y_0) \equiv \rho_k = \sqrt{\dfrac{t-k}{t}}$