Econometría Financiera

2022

Modelando Volatilidad

Rodrigo Ortiz

Universidad Adolfo Ibáñez

Santiago, 2022

Una excursión al mundo no-lineal

- **Motivación**: los modelos lineales (y de series de tiempo) estructurales, no pueden explicar una serie de características importantes comunes a muchos datos financieros
- Nuestro modelo estructural *tradicional* podría ser algo como:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

Nosotros asumimos que $u_t \sim N(0, \sigma^2)$

Modelos no lineales: una definición

- Campbell, Lo y Mackinlay (1997) definen un proceso de generación de datos no lineal como uno que se puede escribir como:

$$y_t = f(u_t, u_{t-1}, u_{t-2}, \dots)$$

  donde u_t es un términos de error aleatorio (iid) y f es una función no lineal.

- También dan una definición un poco más específica:

$$y_t = g(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) + u_t \sigma^2(u_{t-1}, u_{t-2}, \dots)$$

  donde g es una función de términos de error pasados solamente y σ^2 es un término de varianza.

- Modelos con $g()$ no lineales, son *no-lineales en la media*, mientras que los no lineales en $\sigma^2()$ son *no-lineales en varianza*.

Tipos de modelos no lineales

- El paradigma lineal es muy útil. Muchas relaciones aparentemente no lineales se pueden linealizar, a través de una transformación adecuada. Por otra parte, es probable que muchas relaciones en finanzas sean intrínsecamente no lineales.
- Hay muchos tipos de modelos no lineales, e.g.
    - ARCH / GARCH
    - switching models
    - bilinear models

Pruebas de no linealidad

- Las herramientas *tradicionales* de análisis de series temporales (ACF, análisis espectral, etc.) pueden no encontrar evidencia de que podamos utilizar un modelo lineal, pero los datos aún pueden no ser independientes.
- Pruebas de Portmanteau para la dependencia no lineal se han desarrollado. La más simple es el RESET de Ramsey, que tomó la forma:

$$\hat{u}_t = \beta_0 + \beta_1 \hat{y_t^2} + \beta_2 \hat{y_t^3} + \cdots + \beta_{p-1} \hat{y_t^p} + \nu_t$$

- Se dispone de muchas otras pruebas de no linealidad, por ejemplo, el *test BDS* y la prueba de biespectro.
- Un modelo no lineal en particular que ha demostrado ser muy útil en las finanzas es el modelo ARCH, debido a Engle (1982).

Heteroscedasticidad Revisada

- Un ejemplo de un modelo estructural es

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + u_t$$

  con $u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$
- La suposición de que la varianza de los errores es constante se conoce como homocedasticidad, i.e. $Var(u_t) = \sigma_u^2$
- ¿Qué pasa si la varianza de los errores no es constante?
  - heterocedasticidad
  - Lo que implican que las estimaciones de error estándar podría estar equivocadas.
- ¿En la práctica es la varianza de los errores constante en el tiempo? **No** para los datos financieros.

Autoregressive Conditionally Heteroscedastic (ARCH) Models

- Utilicemos un modelo que no asume que la varianza es constante.
- Recuerde la definición de la varianza de u_t:

$$\sigma_t^2 = Var(u_t/u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) = E[(u_t - E(u_t))^2/u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots]$$

  Normalmente suponemos que $E(u_t) = 0$, de aquí:

$$\sigma_t^2 = Var(u_t/u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) = E[u_t^2/u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots]$$

- ¿De qué dependerá el valor actual de la varianza de los errores?
  - Cuadrado términos de error anteriores.
  - Esto lleva al modelo the autoregressive conditionally heteroscedastic model *condicionalmente heterocedástico autorregresivo* para la varianza de los errores

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

  - Este se conoce como: ARCH(1) model.

Autoregressive Conditionally Heteroscedastic (ARCH) Models (cont.)

- El modelo completo sería:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + u_t$$

con $u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, donde $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2$

- Podemos extender fácilmente esto para el caso general en que la varianza del error depende de q rezagos de errores al cuadrado:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

- Es es un ARCH(q) model.
- En lugar de llamar a la varianza, σ_t^2 en la literatura se le suele llamar h_t, por lo que el modelo es en definitiva:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + u_t$$

con $u_t \sim N(0, h_t)$, donde $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

Otra forma de representar a los ARCH Models

- Por ejemplo, considere un ARCH (1). En lugar de la representación anterior, podemos escribir

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + u_t$$

con $u_t = \nu_t \sigma_t$

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2}$$

con $\nu_t \sim N(0, 1)$

- Las dos formas representas diferentes maneras de expresar exactamente el mismo modelo. La primera forma es más fácil de entender, mientras que la segunda representa mejor la simulación de un modelo ARCH.

Las pruebas de *efectos ARCH*

1. En primer lugar, ejecutar una regresión lineal, por ejemplo,

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + u_t$$

   guardando los residuos, $\hat{u}_t$

2. A continuación, elevar los residuos al cuadrado, y correr una regresión sobre los q rezagos propios para la prueba de ARCH de orden q, es decir, ejecutar la regresión

$$\hat{u}_t{}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \gamma_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \cdots + \gamma_q \hat{u}_{t-q}^2 + \nu_t$$

   donde ν_t es iid. Obtener R^2 de esta regresión

3. El test estadístico se define como TR^2 (el número de observaciones multiplicado por el coeficiente de correlación múltiple) a partir de la última regresión, y se distribuye como una $\chi^2(q)$

Las pruebas de *efectos ARCH*

4 Las hipótesis nula y alternativa son

$$\begin{aligned} H_0 :& \gamma_1 = 0 \quad \text{and} \quad \gamma_2 = 0 \quad \text{and} \quad \dots \quad \text{and} \quad \gamma_q = 0 \\ H_1 :& \gamma_1 \neq 0 \quad \text{or} \quad \gamma_2 \neq 0 \quad \text{or} \quad \dots \quad \text{or} \quad \gamma_q \neq 0 \end{aligned}$$

Si el valor de la prueba estadística es mayor que el valor crítico de la distribución $\chi^2(q)$, se rechaza la hipótesis nula.

Tenga en cuenta que la prueba ARCH también a veces se aplica directamente a la rentabilidad, en lugar de los residuos de la etapa 1 anterior.

Problemas con ARCH(q) Models

- ¿Cómo decidimos el mejor q?
- El valor requerido de q podría ser muy grande.
- Las restricciones de no negatividad pueden ser violadas.
- Cuando se estima un modelo ARCH, requerimos $\alpha_i > 0$ $\forall i = 1, 2, ..., q$ (ya que la varianza no puede ser negativa)
- Una extensión natural de un modelo ARCH(q), que evita algunos de estos problemas es el modelo GARCH.

Generalised ARCH (GARCH) Models

- Debido a Bollerslev (1986). Deja que la varianza condicional sea dependiente de sus propios rezagos anteriores
- La ecuación de la varianza es ahora

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

- Se trata de un GARCH (1,1), que es como un ARMA (1,1) de la ecuación de la varianza.
- También podríamos escribir

$$\begin{aligned}\sigma_{t-1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2 \\ \sigma_{t-2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-3}^2 + \beta \sigma_{t-3}^2\end{aligned}$$

- Sustituyendo en primera ecuación por σ_{t-1}^2

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\alpha_0 + \beta\alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta^2 \sigma_{t-2}^2\end{aligned}$$

Generalised ARCH (GARCH) Models

- Sustituyendo por σ^2_{t-2}

$$\begin{aligned}
\sigma^2_t =& \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta\alpha_0 + \beta\alpha_1 u^2_{t-2} + \beta^2\sigma^2_{t-2} \\
\sigma^2_t =& \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta\alpha_0 + \beta\alpha_1 u^2_{t-2} + \beta^2(\alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-3} + \beta\sigma^2_{t-3}) \\
\sigma^2_t =& \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \beta\alpha_0 + \beta\alpha_1 u^2_{t-2} + \beta^2\alpha_0 + \beta^2\alpha_1 u^2_{t-3} + \beta^3\sigma^2_{t-3}
\end{aligned}$$

- Un número infinito de sustituciones sucesivas produciría

$$\sigma^2_t = \alpha_0(1 + \beta + \beta^2 + \dots) + \alpha_1 u^2_{t-1}(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots) + \beta^\infty \sigma^2_0$$

- Así que el GARCH(1,1) puede escribirse como un modelo de ARCH orden infinito.
- Nuevamente, podemos extender el GARCH(1,1) a un GARCH(p,q):

$$\begin{aligned}
\sigma^2_t =& \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{t-1} + \dots + \alpha_q u^2_{t-q} + \beta_1\sigma^2_{t-1} + \dots + \beta_p\sigma^2_{t-p} \\
\sigma^2_t =& \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u^2_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma^2_{t-j}
\end{aligned}$$

Generalised ARCH(GARCH) Models (cont)

- Pero, en general, un modelo GARCH(1,1) será suficiente para capturar la volatilidad clusterizada de los datos.
- ¿Por qué es mejor GARCH que ARCH?
  - Más parsimonioso - evita el sobreajuste
  - Menos probabilidades de violar restricciones de no negatividad

La varianza incondicional bajo la especificación GARCH

- La varianza incondicional de u_t esta dada por:

$$Var(u_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}$$

  cuando $\alpha_1 + \beta < 1$

- $\alpha_1 + \beta \geq 1$ que se denomina *no estacionariedad* en la varianza
- $\alpha_1 + \beta = 1$ que se denomina intergrated GARCH
- Para varianza no estacionaria, los pronósticos de la varianza condicional no convergerán a su valor incondicional en la medida que el tiempo aumenta.

Estimación de modelos ARCH/GARCH

- Dado que el modelo ya no es de la forma lineal que acostumbramos, no podemos usar MCO.
- Utilizamos otra técnica conocida como de máxima verosimilitud.
- El método funciona mediante la búsqueda de los valores más probables de los parámetros, dados los datos reales.
- Más específicamente, formamos una función de verosimilitud y la maximizamos.

Estimación de modelos ARCH/GARCH

- Los pasos a seguir en la estimación de un modelo ARCH o GARCH son los siguientes:
  1. Especificar las ecuaciones apropiadas para la media y la varianza - por ejemplo, un AR(1)-GARCH(1,1):

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu + \phi y_{t-1} + u_t \\
\sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

     donde $u_t \sim N(0, \sigma^2)$
  2. Especifique la función de verosimilitud para maximizar:

$$
L = -\frac{T}{2} log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{T} log(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{T} \frac{(y_i - \mu - \phi y_{t-1})^2}{\sigma_t^2}
$$

  3. El computador maximizar la función, y calcula los parámetros y sus errores estándar ...

Extensiones al modelo GARCH Básico

- Desde que se desarrolló el modelo GARCH, se han propuesto un gran número de extensiones y variantes. Tres de los ejemplos más importantes son los modelos GARCH-M, EGARCH, y GJR.
- Problemas con los modelos GARCH(p,q):
  - Restricciones de no negatividad pueden ser violadas
  - Los Modelos GARCH no pueden dar cuenta de los efectos de apalancamiento
- Posibles soluciones: el modelo GARCH exponencial (EGARCH) o el modelo GJR, que plantean modelos GARCH asimétricos.

El Modelo EGARCH

- Sugerido por Nelson (1991). La ecuación de varianza está dada por:

$$log(\sigma_t^2) = \omega + \beta log(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{u_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \alpha \left[\frac{|u_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right]$$

- Ventajas del modelo
  - Dado que modelamos $log(\sigma_t^2)$, incluso si los parámetros son negativos, σ_t^2 será positivo.
  - Podemos tomar cuenta el efecto de apalancamiento: si la relación entre volatilidad y rentabilidad es negativa, γ, será negativo.

El Modelo GJR

- Debido a Glosten, Jaganathan and Runkle (1993):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 I_{t-1}$$

donde $I_{t-1} = 1$ si $u_{t-1} < 0$ y $I_{t-1} = 0$ si $u_{t-1} > 0$

- Para un efecto de apalancamiento veríamos $\gamma > 0$

- Requerimos $\alpha_1 + \gamma \geq 0$ y $\alpha_1 \geq 0$ para no-negatividad.

GARCH - in Mean

- Si esperamos que un riesgo se compense con una mayor rentabilidad, ¿por qué no dejar que el retorno de un valor determinado sea parcialmente determinado por su riesgo?
- Engle, Lilien y Robins (1987) sugirieron la especificación ARCH-M. Un modelo GARCH-M sería

$$
\begin{aligned}
y_t =& \mu + \delta\sigma_{t-1} + u_t \\
\sigma_t^2 =& \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2
\end{aligned}
$$

  donde $u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$

- δ puede interpretarse como una especie de prima por riesgo.
- Es posible combinar todos o algunos de estos modelos en conjunto para obtener modelos más complejos, *híbridos* - por ejemplo, un modelo ARMA-EGARCH(1,1)-M.

¿Por qué usar modelos GARCH?

- GARCH puede modelar el efecto del agrupamiento de volatilidad, ya que la varianza condicional es autorregresiva. Tales modelos pueden ser utilizados para pronosticar la volatilidad.
- Vimos que

$$Var(y_t \ \ y_{t-1}, y_{t-2}, \dots) = Var(u_t \ \ u_{t-1}, u_{t-2}, \dots)$$

- Modelado σ_t^2 nos permitirá modelar y pronosticar y_t también.
- Los pronósticos de varianza son aditivos en el tiempo.

Modelos GARCH Multivariados

- Los modelos GARCH multivariantes (MGARCH) generalizan los modelos GARCH univariantes y permiten incorporar relaciones entre los procesos de volatilidad de varias series. Queremos saber cómo los cambios en la volatilidad de una acción afectan a la volatilidad de otra acción. Estas relaciones se pueden parametrizar de varias maneras. El comando de Stata **mgarch** implementa cuatro parametrizaciones comúnmente utilizadas:
  1. el modelo vech diagonal (mgarch dvech),
  2. el modelo de correlación condicional constante (mgarch ccc),
  3. el modelo de correlación condicional dinámica (mgarch dcc), y
  4. el modelo de correlación condicional variable (mgarch vcc).

Referencias

- Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1997) The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press, Princeton, NJ
- Engle, R. F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, Econometrica 50(4), 9871007
- Bollerslev, T. (1986) Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics 31, 307?27
- Nelson, D. B. (1991) Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: a New Approach, Econometrica 59(2), 347?70
- Glosten, L. R., Jagannathan, R. and Runkle, D. E. (1993) On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, The Journal of Finance 48(5), 1779?801
- Engle, R. F., Lilien, D. M. and Robins, R. P. (1987) Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model, Econometrica 55(2), 391?407