# Guía de Ejercicios

1. Suponga $Y_t \sim$ i.i.d N(1,1) para t impar e $Y_t \sim$ i.i.d exp(l) para t par; siendo las Y's independientes entre sí para t par e impar ¿Es $Y_t$ un proceso estrictamente estacionario?
**Respuesta:** Proceso:

$$Y_t = \begin{cases} \sim i.i.d\ N(1,1)\ \forall t\ impar \\ \sim e^{\lambda},\ \lambda = 1, \forall\ t\ par \end{cases}$$

$Y_t$ es debilmente estacionario porque:

$$E[Y_t] = \begin{cases} 1,\ \forall t\ impar \\ 1/1 = 1, \forall\ t\ par\ (*) \end{cases}$$

$$Var[Y_t] = \begin{cases} 1,\ \forall t\ impar \\ 1/1^2 = 1, \forall\ t\ par\ (*) \end{cases}$$

Pero para ser estrictamente estacionario se requiere que la función de distribución conjunta sea la misma a traves del tiempo, es decir, que la distribución de $\{Y_t\} = Distr. \quad \{Y_{t+k}\} \quad \forall$
Tomemos arbitrariamente la distribución conjunta de $Y_1, Y_3$
Por independencia de $Y_t$ la densidad conjunta es el producto de las densidades individuales.

$$f(Y_1, Y_3) = f(Y_1) \cdot f(Y_3) =\sim N(1,1)$$

Pero no se cumple para el caso de

$$f(Y_2, Y_4) = E[Y_2 Y_4] = E[e^1 e^1] = E[e^2] = 1/2$$

$$Var[Y_2 Y_4] = Var[e^1 e^1] = Var[e^2] = 1/2^2 = 1/4$$

$$\therefore \quad F(Y_1, Y_3) \neq F(Y_2, Y_4)$$

2. Suponga que $Y_t$ es generado por $Y_t = Z + \varepsilon_t$, para todo t=1,2,..., donde $\varepsilon_t$ es una secuencia i.i.d. con media cero y varianza $\sigma_\varepsilon^2$. La variable aleatoria Z no cambia en el tiempo; tiene media cero y varianza $\sigma_Z^2$, y no está correlacionada con $\varepsilon_t$

   *a*) Encuentre el valor esperado y la varianza de $Y_t$. ¿Depende su respuesta de t?
   **Respuesta:**

   $$E[Y_t] = E[Z] + E[\varepsilon_t] = 0$$

   $$Var[Y_t] = Var[Z] + Var[\varepsilon_t] + 2Cov(Z, \varepsilon_t) = \sigma_Z^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

   Independiente de $t$

*b*) Encuentre Cov($Y_t$,$Y_{t-h}$) para t y h cualesquiera. ¿Es $Y_t$ un proceso débilmente estacionario?
**Respuesta:**
$Cov(Y_t, Y_{t-h}) \qquad \forall t\ y\ h$

$$= Cov(Z, Z) + Cov(Z, \varepsilon_{t-h}) + Cov(\varepsilon_t, Z) + Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h})$$

$$= Var(Z)$$

$$Cov(Y_t, Y - t - h) = \sigma_Z^2$$

$\therefore \qquad Y_t$ es debilmente estacionario.

*c*) Utilice las partes a) y b) para determinar Corr($Y_t$,$Y_{t-h}$) para todo t y h.
**Respuesta:**

$$Corr(Y_t, Y_{t-h}) = \frac{Cov(Y_t, Y_{t-h})}{\sqrt{Var(Y_t) \cdot Var(Y_{t-h})}} = \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_Z^2 + \sigma_\varepsilon^2}$$

*d*) ¿Es $Y_t$ un proceso débilmente dependiente o asintóticamente no correlacionado, esto es, Corr($Y_t$,$Y_{t-h}$)$\rightarrow$ 0 a medida que $h \rightarrow \infty$? Explique.
**Respuesta:**
En c) vimos que $Corr(Y_t, Y_{t-h}) = \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_Z^2 + \sigma_\varepsilon^2} \qquad \forall t, h$
$\therefore \qquad Y_t$ no es debilmente dependiente; la $Corr(Y_t, Y_{t-h}) \nrightarrow 0$ cuando $h \rightarrow \infty$, ya que esa correlación siempre es constante

3. $Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + u_t \qquad u_t = \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t \qquad |\alpha| < 1$, $\varepsilon_t$ es ruido blanco

*a*) Demuestre que $Y_t$ se puede expresar como un proceso AR(1) estacionario en torno a una tendencia:

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

*b*) Indique qué es $\gamma_i$, i=0,1,2, en terminos de los parametros originales del proceso. ¿Qué ventaja tiene esta formulación para la estimación de los parametros vía MCO?
**Respuesta:**
En $Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + u_t$ (1), $u_t = Y_t - \delta_0 - \delta_1 t$; $\therefore u_{t-1} = Y_{t-1} - \delta_0 - \delta_1(t-1)$

$\therefore$ Podemos usar (1) en $u_t = \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t(2)$

$$Y_t - \delta_0 - \delta_1 t = \alpha(Y_{t-1} - \delta_0 - \delta_1 t + \delta_1) + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \delta_0 + \delta_1 t + \alpha Y_{t-1} - \alpha\delta_0 - \alpha\delta_1 t + \alpha\delta_1 + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \delta_1 t(1-\alpha) + \delta_0(1-\alpha) + \alpha\delta_1 + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0 + \delta_1(1-\alpha)t + \alpha Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\therefore \qquad \gamma_0 = \alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0 \quad ; \gamma_1 = \delta_1(1-\alpha)t \quad ; \gamma_2 = \alpha Y_{t-1}$$

$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$ es D.E porque $|\gamma_2| = |\alpha| < 1$

Ademas, $\varepsilon_t$ es R.B lo que facilita la estimación por MCO. Varianzas y estadígrafos estarán correctamente calculados.

c) ¿Que sucederia si $\alpha = 1$?
**Respuesta:**
Si $\alpha = 1$, $Y_t$ es C.A con deriva

$$Y_t = \delta_1 + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \therefore \quad Y_t \text{ no es D.E}$$

Pero sabemos que su primera diferencia si lo es:

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta_1 + \varepsilon$$

$$\triangle\, Y_t = \delta_1 + \varepsilon \qquad \hat{\delta}_1 = \sum_{t=2}^{T} \triangle\, Y_t / T - 1$$

4. Suponga un proceso AR(1) en que $Y_t$ está expresado en desviación con respecto a una tendencia determinística:

$$Y_t - \mu - \delta t = \phi(Y_{t-1} - \mu - \delta(t-1)) + \varepsilon$$

a) Demuestre que para $|\phi| < 1$, $Y_t$ se revierte a $(\mu + \delta t)$.
**Respuesta:**

$$Y_t - \mu - \delta t = \phi Y_{t-1} - \phi\mu - \phi\delta(t-1) + \varepsilon_t$$
$$Y_t(1-\phi L) = (1-\phi)\mu + \delta t - \phi\delta(t-1) + \varepsilon_t \quad (*)$$
$$Y_t = \frac{(1-\phi)\mu}{(1-\phi L)} + \frac{\delta t}{(1-\phi L)} - \frac{\phi\delta(t-1)}{(1-\phi L)} + \frac{\varepsilon_t}{(1-\phi L)}$$
$$Y_t = \mu + \delta\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i(t-i) - \delta\phi\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i(t-1-i) + \sum_{i=0}^{\infty}\phi^i\varepsilon_{t-i}$$

Expandiendo algunos terminos de las $\sum$, tenemos

$$Y_t = \mu + (\delta t + \delta\phi(t-1) + \delta\phi^2(t-2)...) - \delta\phi((t-1) + \phi(t-2)...) + (\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2}...)$$

$$\therefore \quad Y_t = \mu + \delta_t + \sum_{i=0}^{\infty}\phi^i\varepsilon_{t-i}$$

$$E[Y_t] = E[\mu] + E[\delta t] + \sum_{i=0}^{\infty}\phi^i E[\varepsilon_{t-i}]$$

$$E[Y_t] = \mu + \delta t$$

$$Var[Y_t] = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} Var(\varepsilon_{t-i}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} \quad \rightarrow \quad Var[Y_t] = \sigma^2 \frac{1}{1-\phi^2]}$$

$$Var[Y_t] = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

*b*) Si $\phi = 1$, $Y_t$ es una caminata aleatoria con deriva.

**Respuesta:**
En (*) $\rightarrow \quad Y_t(1-\phi L) = (1-\phi)\mu + \delta t - \phi\delta(t-1) + \varepsilon_t$ / con $\phi = 1$

$$Y_t - Y_{t-1} = \delta t - \delta t + \delta + \varepsilon_t$$

$$Y_t = \delta + Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \rightarrow \quad C.A.\ con\ deriva$$

5. Considere el modelo AR(4) estacional o SAR(4), $Y_t = \gamma_4 Y_{t-4} + \epsilon_t, \quad |\gamma_4| < 1$. Determine la función de autocorrelación simple de $Y_t$.
**Respuesta:**
Si actuamos recursivamente:

$$Y_{t-4} = \gamma_4 Y_{t-8} + \epsilon_{t-4}$$
$$\Rightarrow Y_t = \gamma_4(\gamma_4 Y_{t-8} + \epsilon_{t-4}) + \epsilon_t$$
$$Y_t = \gamma_4^2 Y_{t-8} + \gamma_4 \epsilon_{t-4} + \epsilon_t$$

Por su parte:

$$Y_{t-8} = \gamma_4 Y_{t-12} + \epsilon_{t-8}$$
$$\Rightarrow Y_t = \gamma_4^2(\gamma_4 Y_{t-12} + \epsilon_{t-8}) + \gamma_4 \epsilon_{t-4} + \epsilon_t$$
$$Y_t = \gamma_4^3 Y_{t-12} + \gamma_4^2 \epsilon_{t-8} + \gamma_4 \epsilon_{t-4} + \epsilon_t$$

En general, podemos representar el proceso así:

$$Y_t = \epsilon_t + \gamma_4 \epsilon_{t-4} + \gamma_4^2 \epsilon_{t-8} + \gamma_4^3 \epsilon_{t-12} + ... + \gamma_4^i \epsilon_{t-4i} + \gamma_4^{i+1} Y_{t-4(i+1)}$$

Dado que $|\gamma_4| < 1$ cuando $i \rightarrow \infty$; $\gamma_4^i \rightarrow 0$. e $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_4^i \epsilon_{t-4i}$ o podemos aplicar teorema de Wold y representar el proceso como MA($\infty$).

$$Y_t = \gamma_4 Y_{t-4} + \epsilon_t \quad \rightarrow (1 - \gamma_4 L^4) Y_t = \epsilon_t$$

$$Y_t = \left(\frac{1}{1-\gamma_4 L^4}\right) \epsilon_t \rightarrow Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_4^i L^{4i} \epsilon_t$$

$$\therefore \quad Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_4^i \epsilon_{t-4i}$$

$$\Rightarrow Y_t = \epsilon_t + \gamma_4 \epsilon_{t-4} + \gamma_4^2 \epsilon_{t-8} + \gamma_4^3 \epsilon_{t-12} ...$$

Para calcular la FAC necesitamos $COV(Y_t, Y_{t_4k})$:

**i)** Si K=0:

$$Cov(Y_t, Y_t) = Var(Y_t) = Var(\epsilon_t) + \gamma_4^2 Var(\epsilon_{t-4}) + \gamma^4 Var(\epsilon_{t-8}) + \gamma^6$$

dadod que $\epsilon_t$ es R.B:

$$Var(\epsilon_t) = Var(\epsilon_{t-4}) = Var(\epsilon_{t-8}) = \sigma_\epsilon^2$$
$$\therefore \quad Var(Y_t) = \sigma_\epsilon^2(1 + \gamma_4^2 + \gamma_4^4 + \gamma_4^6 ...) \quad \text{pero} |\gamma_4| < 1$$
$$Var(Y_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \gamma_4^2}$$

**ii)** Si k=1 $\rightarrow Cov(Y_t, Y_{t-4})$:

$$Cov\left[\epsilon_t + \gamma_4^2 \epsilon_{t-8} + \gamma^3 \epsilon_{t-12} ...; \epsilon_{t-4} + \gamma_4 \epsilon_{t-8} + \gamma_4 \epsilon_{t-12} + \gamma^3 \epsilon_{t-16} ...\right]$$
$$= \gamma_4 Var(\epsilon_t) + \gamma_4^3 Var(\epsilon_t) + \gamma_4^5 Var(\epsilon_t)$$
$$= \sigma_\epsilon^2(\gamma_4 + \gamma_4^3 + \gamma_4^5 ...)$$
$$\sigma_\epsilon^2 \gamma_4 (1 + \gamma_4^2 + \gamma_4^4 + \gamma_4^6 + ...)$$

De esta forma:

$$Cov(Y_t, Y_{t-4}) = \frac{\sigma_\epsilon^2 \gamma_4}{1 - \gamma_4^2} \quad \Rightarrow Cov(Y_t, Y_{t-4}) = \gamma_4 \lambda_0 = \lambda_4$$

$$\Rightarrow (Y_t, Y_{t-8}) = \frac{\sigma_\epsilon^2 \sigma_4^2}{1 - \sigma_4^2} \Rightarrow Cov(Y_t, Y_{t-8}) = \sigma_4^2 \lambda_0 = \lambda_8$$

La función $\rho_k$, vienen dada por:

$$\left.\begin{aligned} \rho_0 &= \tfrac{\lambda_0}{\lambda_0} = 1 \\ \rho_4 &= \tfrac{\lambda_4}{\lambda_0} = \tfrac{\sigma_4 \lambda_0}{\lambda_0} = \sigma_4 \\ \rho_8 &= \tfrac{\lambda_8}{\lambda_0} = \tfrac{\sigma_4^2 \lambda_0}{\lambda_0} = \gamma_4^2 \end{aligned}\right\} \therefore \rho_k \begin{cases} \gamma_4^{\frac{k}{4}} & ; k = 4, 8, 12... \\ 0 & ; \text{otro k} \end{cases}$$

6. Considere dos procesos MA(2) uno con $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$ y otro con $\theta_1 = -1, \quad \theta_2 = 6$. ¿Como se comparan las raíces de las ecuaciones características inversas?
**Respuesta:**
En general, un proceso MA(2):

$$Y_t = \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - \theta_2 \epsilon_{t-2}$$

**i)** Para $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$:

$$Y_t = \epsilon_t - \frac{1}{6}\epsilon_{t-1} - \frac{1}{6}\epsilon_{t-2}$$
$$Y_t = \left(1 - \frac{1}{6}L - \frac{1}{6}L^2\right)\epsilon_t$$

Le ecuación caracteristica de $1 - \frac{1}{6}L - \frac{1}{6}L^2$ es:

$$\left(\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{6}\right) \qquad ;\alpha_1\alpha_2 = \frac{-\frac{1}{6} \mp \sqrt{\frac{1}{6}^2 + 4\frac{1}{6}}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

**ii)** Para $\theta_1 = 1$ , $\theta_2 = 6$:

$$Y_t = \epsilon_t + \epsilon_{t-1} - 6\epsilon_{t-2} \Rightarrow Y_t = (1 + L - 6L^2)\epsilon_t$$

La ecuación caracteristica es:

$$(\alpha^2 + \alpha - 6) = \Rightarrow \alpha_1, \alpha_2 = \frac{-1 \mp \sqrt{1 + 24}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \\ \alpha_2 = -3 \end{cases}$$

Por lo tanto, las raices de un polinomio son las inversas del otro y recordar que sólo el proceso MA(2) con $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{6}$ es invertible, esto es, se puede represenar como un AR($\infty$) porque cumple las 3 condiciones:

*a*) $|\theta_2| < 1$
*b*) $\theta_2 + \theta_1) < 1$
*c*) $(\theta_2 - \theta_1) < 1$

7. Explique cómo obtendría un estimador consistente del parametro $\theta$ de un proceso MA(1), $Y_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$, a partir de la función de autocorrelación simple muestral. ¿Cuál es el rango de valores admisibles del coeficiente de autocorrelación simple, a fin de que $\theta \in \Re$? En general, existirán dos soluciones para $\theta$. ¿Cuál escogería?

**Respuesta:**

$$\text{Proceso } MA(1) \rightarrow Y_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$$

- Estimador consistente de $\theta$ a partir de FAS?
- Rango de $\rho$ para que $\theta \in \Re$

i) Función de auto-covarianza de MA(1):

- $\lambda_0$ :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= Var(Y_t) \\ &= Var(\epsilon_t) + \theta^2 Var(\epsilon_{t-1})) \\ &= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 \\ \lambda_0 &= (1 + \theta^2)\sigma^2 \end{aligned}$$

- $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= Cov(Y_t, Y_{t-1})\\ &= Cov(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2} - \theta\epsilon_{t-3})\\ &= -\theta Var(\epsilon_{t-1})\\ \lambda_1 &= -\theta\sigma^2\end{aligned}$$

- $\lambda_2$ :

$$\therefore \quad \lambda_k \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & \text{si } k=0 \\ -\theta\sigma^2 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k>1 \end{cases}$$

ii) La FAS:

- $\rho_0$ :

$$\rho_0 = 1$$

- $\rho_1$:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\\ &= \frac{-\theta\sigma^2}{(1+\sigma)} = -\frac{\theta}{1+\sigma^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ -\frac{\theta}{1+\theta^2} & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k>1 \end{cases}$$

Dado que:

$$\rho_1 = -\frac{\theta}{(1+\theta^2)} \to 1+\theta^2 = -\frac{\theta}{\rho_1} \to \theta^2 + \left(\frac{1}{\rho_1}\right)\theta + 1 = 0$$

$$\theta = \frac{-\frac{1}{\rho_1} \mp \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - 4}}{2}$$

A fin que:

$$\theta \in \Re \left(\frac{1}{\rho_1^2}\right) - 4 \geq 0$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\rho_1^2} \geq 4 \Rightarrow \rho_1^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$|\rho_1| \geq \frac{1}{2}$$

Para que $\theta \in \Re$

Si $|\rho_1| = \frac{1}{2}$ entonces $\theta$ tiene un valor único $\theta = 1$
Pero en general habrá dos soluciones posibles para $\theta$ una de las cuales será mayor a 1 en valor absoluto.
Ejemplo:

$$\theta = \frac{-2,5 \mp 1,5}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \theta_1 = -\frac{1}{2} \\ \\ \theta_2 = -2 \end{array}\right\} \text{Si } \theta \text{ es solución } \frac{1}{\theta} \text{ también lo será}$$

Pero a fin de tener un MA(1) invertible debemos escoger $|\theta_1| < 1$ con ello el proceso se puede representar como un AR($\infty$).0