Econometría Financiera

2023

Tema 2: Estimación por momentos y máxima verosimilitud

Rodrigo Ortiz

Universidad Adolfo Ibáñez

Chile, 2023

Planificación

Agenda

Definiciones importantes

Definición: Sea $X_1, \ldots, X_n$, n variables aleatorias con función de probabilidad conjunta $f(x_1, \ldots, x_n$ y funciones marginales $f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)$

- $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$
- $E[x_1 x_2 \ldots x_n] = E[x_1]E[x_2] \ldots E[x_n]$

Definición: Sea dice que las n variables aleatorias son idénticamente distrubuidas si y sólo si:

- $f_1(x_1) = f_2(x_2) = \cdots = f_n(x_n)$

Definiciones importantes

Definición: Sea $X_1, \ldots, X_n$, n variables aleatorias conjunto de n variables aleatorias $(x_1, \ldots, x_n)$ constituye una muestra aleatoria si y sólo si:

- $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias estocásticamentte independientes
- $X_1, \ldots, X_n$ sin variables aleatorias idénticamente distribuidas

Definición: Sea X variable aleatoria, se define el k-ésimo momento problacional del origen μ_k

$$\mu_k = E[x^k]$$

Definición: Sea X variable aleatoria, se define el k-ésimo momento problacional alrededor de μ, μ'_k

$$\mu'_k = E[(x-\mu)^k]$$

Definiciones importantes

Definición: Se define el k-ésimo momento muestral alrededor del origen, M_k, mediante $M_k = \frac{1}{n}\sum_{1=1}^{n} x_i^k$, donde $x_1, \dots, x_n$ constituye una muetsra aleatoria de esta población

Definición: Sea $x_1, \dots, x_n$ una muestra aleatoria de una población X se define el k-ésimo momento muestral alrededor de $\overline{x}$, M'_k, mediante

$$M'_k = E[(x_i - \overline{x})^k]$$

Definiciones importantes: Ejercicios

Ejercicio 1: Muestre que $E[M_k] = \mu_k$ y $V(M_K) = E\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k\right)^2\right] - \mu_k^2$

Ejercicio 2:Sea $x_1, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de una población X. Determine el $E[M_2']$

Métodos de estimación: Método de los Momentos

Sea $X \sim f(x, \theta_1, \ldots, \theta_k)$ donde $\theta_1, \ldots, \theta_k$ son k parámetros desconocidos y sea $(x_1, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria de esta población.

Recordemos que el r-ésimo momento poblacional alrededor del origen es $\mu_1 = E[x^n]$ y el r-ésimo momento muestral alrededor del origen $M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r$

Para encontrar los estimadores por mommentos de $\theta_1, \ldots, \theta_k$ se procede a formar un sistema de k-ecuaciones

Métodos de estimación: Método de los Momentos

$$\mu_1 = M_1$$
$$\mu_2 = M_2$$
$$\vdots$$
$$\mu_k = M_k$$

Al resolver para $\theta_1, \ldots, \theta_k$ encontramos los estimadores por momentos $\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_k$

Ejercicio 3: El tiempo en X segundos que un computador tarda en ejecutar una tarea sigue una variable aletaroria con función de densidad

$$f(X;\theta) = \frac{\theta 2^{\theta}}{X^{\theta+1}}, x \geqslant 2, \theta > 0$$

encuentre el estimador por momentos para θ.

Métodos de estimación: Estimación por máxima verosimilitud(EMV, MLE inglés)

Sea $X \sim f(x, \theta_1, \ldots, \theta_k)$ donde $\theta_1, \ldots, \theta_k$ son k parámetros desconocidos y sea $(x_1, \ldots, x_n)$ una muestra aleatoria de esta población.

Se define la función de verosimilitud de la muestra aleatoria de los parámetros

$$\begin{aligned} L(X_1, \ldots, X_n; \theta_1, \ldots, \theta_k) &= f(X_1; \theta_1, \ldots, \theta_k) \ldots f(X_n; \theta_1, \ldots, \theta_k) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(X_i; \theta_1, \ldots, \theta_k) \end{aligned}$$

Métodos de estimación: Estimación por máxima verosimilitud (EMV, MLE inglés)

Del cálculo sabemos que para maximizar una función obtebemos las derivadas parciales respecto de $\theta_1, \ldots, \theta_k$ e igualamos a cero y resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(X_1, \ldots, X_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_1} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial L(X_1, \ldots, X_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_k} &= 0
\end{aligned}$$

Métodos de estimación: Estimación por máxima verosimilitud (EMV, MLE inglés)

$L(X_1, \ldots, X_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ en una función positiva, por lo que el máximo se logra en el mismo punto que el de la función $lnL(X_1, \ldots, X_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)$

Resolviendo el sistema:

$$\frac{\partial lnL(X_1, \ldots, X_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial lnL(X_1, \ldots, X_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_k} = 0$$

Del **Ejercicio 3** encontrar el EMV de θ.