Trabajo Práctico 1

Sebastián Cherny

28 de agosto de 2017

1)
Explicación del código: Aprovechando que el parámetro de la función es una permutación, por lo que no puede tener elementos repetidos, creo un vector (*indices*) que en la posición i diga en qué lugar se encuentra el número i en la permutación, para $1 \leq i \leq n$.
Luego, en el vector *ans* guardo en la posición i la longitud de cadena consecutiva creciente más larga terminada en el número i, con una especie de programación dinámica: Sé que terminando en el número 1 la cadena más larga tendrá longitud 1, y para $i > 1$, si el índice de $i-1$ es menor que el de i, el número i se sumará a la cadena y su longitud valdrá 1 más que la que termina en i, y si el índice de $i-1$ es mayor, entonces la longitud terminando en i será 1. El órden máximo será el mayor de los valores de *ans*.

2)
Para el riffle shuffle simplemente primero se elige un K que será la cantidad de cartas del sub-mazo, mediante la distribución Binomial mencionada. Luego se eligen K posiciones al azar del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ (sin reposición). Como R los agarra en cualquier orden, ordeno este vector para lugar insertar en orden en las posiciones random seleccionadas, los números del 1 al K. Y luego en las otras posiciones (if ans[i]==-1), inserto en orden también los números restantes, del $K+1$ al n.

3)
Al hacer un shuffle de una permutación ordenada de n cartas, tomamos un sub-mazo de k cartas y otro de $n-k$. Luego del shuffle, como las cartas de cada sub-mazo no cambian su orden relativo, habrá una cadena consecutiva creciente de al menos k cartas (el primer sub-mazo en su orden inicial, y puede ser que cartas del segundo sub-mazo formen con el primer sub-mazo una cadena aún más larga), y otra cadena consecutiva creciente de al menos $n-k$ cartas.
Como el orden máximo es el mayor valor dentro de todas estas cadenas, luego de un shuffle será mayor o igual al máximo entre los valores k y $n-k$, que como su suma da n, habrá exactamente uno mayor o igual a $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ y exactamente uno menor o igual a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Cuando $n = 52$, el orden máximo luego de un shuffle no podrá ser menor a 26.

Veamos qué pasa luego de dos shuffles: Digamos que en el primer shuffle, el primer sub-mazo tuvo k cartas y el segundo sub-mazo, $n-k$. Sabemos que luego del shuffle las cartas de cada sub-mazo siguen ordenas como en la permutación inicial.

Luego, pensemos en las cartas únicamente del primer sub-mazo (para el segundo será análogo).

Digamos que de las k cartas, a quedan en el primer sub-mazo del segundo shuffle, y $k-a$ cartas quedan en el segundo sub-mazo.

Ahora, estas a cartas siguen manteniendo su orden inicial, si bien pueden no estar todas juntas. Lo mismo pasa con las otras $k-a$ cartas, su orden relativo sigue manteniéndose como el inicial. Luego, al hacer el shuffle, habrá una cadena consecutiva creciente de longitud al menos a, y otra de longitud al menos $k-a$. Por lo que el orden máximo será mayor o igual a $\lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Análogamente, pensando en las cartas del segundo sub-mazo, el orden máximo será mayor o igual a $\lceil \frac{n-k}{2} \rceil$. Por lo que podemos concluir que luego de dos shuffles, el orden máximo será al menos $max(\lceil \frac{n-k}{2} \rceil, \lceil \frac{k}{2} \rceil) \geq \lceil \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{4} \rceil$

En el caso $n = 52$, concluimos que luego de dos shuffles el orden máximo no puede ser menor a 13. Si encontramos un ejemplo con su orden máximo igual a 13, entonces esta será la mayor cota inferior.

Ejemplo:

Al inicio:

$1, 2, 3, ..., 50, 51, 52$

Shuffle 1: Cada sub-mazo contiene 26 cartas, y los lugares elegidos para el primer sub-mazo son los ”segundos 13” y los últimos 13.

$27, 28, ..., 39, 1, 2, ..., 13, 40, 41, ..., 52, 14, 15, ..., 26$

Shuffle 2: Nuevamente cada sub-mazo contiene 26 cartas, y los lugares elegidos son los mismos que antes:

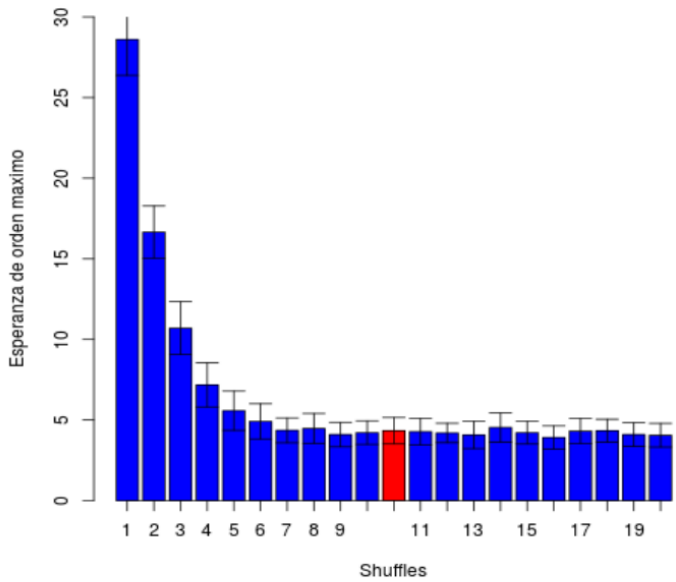
$40, 41, ..., 52, 27, 28, ..., 39, 14, 15, ..., 26, 1, 2, ..., 13$

Se puede ver fácilmente que el orden máximo de esta última configuración es 13 (tiene 4 cadenas consecutivas crecientes de longitud 13), y vimos que llegamos a ella a través de dos shuffles posibles.

Entonces como tenemos un ejemplo, la cota inferior es efectivamente 13 para dos shuffles.

4)
Valor esperado de una corrida: 4.34
Desviación estándar de una corrida: 0.815

5)
Gráfico del orden máximo con su desviación estándar para i shuffles ($1 \leq i \leq 20$) (simulado 100 veces para cada i):



La barra roja representa el valor (esperado y de desviación estándar) del orden máximo de una permutación al azar (lo obtenido en el punto 4).

Se simularon hasta 20 shuffles, realizando 100 experimentos para cada cantidad de shuffles.

6)

Se ve cómo la esperanza comienza siendo bastante más grande que el valor en rojo y a partir de los 7 shuffles las barras son indistinguibles, incluyendo la roja. Teniendo en cuenta estos resultados, afirmo que mezclando 7 veces el mazo se aproxima a tomar una permutación al azar de las cartas.