

---

# Índice general

<b>1. Marco Teórico</b>	<b>5</b>
1.1. Fatiga . . . . .	5
1.1.1. Definiciones . . . . .	6
1.1.2. Curva S-N o de Wöhler . . . . .	8
1.1.3. Esfuerzo medio, $S_m$ . . . . .	10
1.1.4. Medición de la fatiga . . . . .	12
1.1.5. Correlación entre distintos métodos de medición de la fatiga . . . . .	14
1.2. Dinámica . . . . .	18
1.2.1. Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido . . . . .	18
1.2.2. Energía cinética de un cuerpo rígido . . . . .	19
1.3. Vibraciones . . . . .	19
1.3.1. Rigidz . . . . .	19
1.3.2. Damping . . . . .	20
1.3.3. Vibraciones forzadas . . . . .	21
1.3.4. Modeling . . . . .	22
1.3.5. Sistema de múltiples grados de libertad . . . . .	22
1.3.6. Método de energía . . . . .	24
1.3.7. Ecuaciones de energía para un sistema con amortiguamiento y forzado . . . . .	25
<b>2. Metodología</b>	<b>26</b>
2.1. Levantamiento de información . . . . .	26
2.1.1. Estado actual y antecedentes . . . . .	27
2.1.2. Funcionamiento . . . . .	28
2.1.3. Mediciones . . . . .	30
2.2. Diseño de estructura . . . . .	33
2.2.1. Diseño en acero . . . . .	33

2.2.2. Diseño en madera . . . . .	35
2.2.3. Cálculo de cargas en estructura de madera . . . . .	36
2.2.4. Uniones . . . . .	41
2.2.5. Simulaciones . . . . .	45
2.3. Modelo del sistema de vibratorio . . . . .	46
2.3.1. Elementos del sistema . . . . .	46
2.3.2. Modelo del sistema . . . . .	47
2.3.3. Cálculo y obtención de constantes características del sistema . . .	50
2.3.4. Función de la aceleración del disco . . . . .	52
2.3.5. Solución del modelo . . . . .	54
2.3.6. Matriz de carga sobre la probeta según velocidad del motor . . . .	55
2.4. Simulación de cargas . . . . .	56
<b>3. Análisis y Resultados</b>	<b>57</b>
3.1. Levantamiento de información . . . . .	57
3.2. Diseño de la estructura . . . . .	58
3.2.1. Diseño en acero . . . . .	58
3.3. Modelo del sistema . . . . .	59
3.3.1. Comportamiento del modelo para distintas configuraciones . . . .	59
3.3.2. Comparación entre las distintas configuraciones . . . . .	60

---

# Índice de figuras

1.1.	Diagrama de vida constante para aluminio 7075-T6 . . . . .	11
1.2.	Diagrama CFL normalizado . . . . .	13
1.3.	Sección transversal de probetas sujetas a esfuerzo alternante uniaxial. <i>a) push-pull, b) alternating bending y c) rotating bending</i> . . . . .	16
2.1.	Máquina de fatiga en flexión en el laboratorio de tecnología mecánica . .	26
2.2.	Brazo de carga junto a su mordaza y la mordaza empotrada a la derecha. .	32
2.3.	Diagrama del modelo utilizado y el sistema de coordenadas. . . . .	47
2.4.	Función por parte de la aceleración del disco . . . . .	53
2.5.	Función por parte de la velocidad angular del disco . . . . .	54

---

# Índice de cuadros

1.1.	Número mínimo de pruebas según tipo de prueba . . . . .	9
1.2.	Factores de modificación por tipo de carga, según el modelo de Lee. . . . .	18
2.1.	Especificaciones del motor de la máquina de fatiga. . . . .	27
2.2.	Tabla de configuración de las masas modificada, mostrando el peso, su diferencia y el total para cada combinación . . . . .	29
2.3.	Datos del sistema de transmisión . . . . .	31
2.4.	Medidas de las barras de acero según su posición . . . . .	31
2.5.	Masa de cada contrapeso utilizado . . . . .	32
2.6.	Dimensiones y características de la viga de acero . . . . .	34
2.7.	Valores de la densidad normal y anhidra del pino oregón. <sup>†</sup> : Definido con el percentil 5 % de exclusión. . . . .	36
2.8.	Tensiones admisibles y módulo de elasticidad en flexión para madera de pino oregón según su clase estructural. . . . .	37
2.9.	Valores del factor de modificación para el pino oregón. . . . .	37
2.10.	Dimensiones del tirafondo utilizado . . . . .	43
2.11.	Valores obtenidos de la rigidez de las barras de acero y la probeta de acero	51

---

# Capítulo 1

## Marco Teórico

### 1.1. Fatiga

El fenómeno en el cual una estructura se daña e incluso falla por cargas fluctuantes, es llamado fatiga. El estudio de este problema comenzó tempranamente en europa durante la mitad del siglo XIX, en pleno auge de la industrialización europea, producto de la falla repentina de algunos componentes en máquinas y los ejes de los trenes de la época. Estos experimentaban un gradual debilitamiento de la resistencia, fallando aún cuando su esfuerzo último no fuese alcanzado.

Así, en 1837 fueron publicados los resultados del primer ensayo de fatiga, realizado a una cadena transportadora utilizada en minas de hierro en Alemania. Wilhelm Albert, quien realizó esta investigación, se vió motivado a realizar los estudios por los altos costos que significaba la falla de este componente producto de las cargas cíclicas a las que estaba sometida. Los pocos conocimientos existentes del fenómeno en esa época, llevo a que la solución al problema fuese la invención del cable de acero.

Por otro lado, las primeras investigaciones enfocadas a comprender el fenómeno comenzaron en 1858 con August Wöhler. Su acucioso estudio lo llevó a conclusiones que siguen teniendo importancia y validez hasta el día de hoy. Diseñó, durante la década de 1860, una máquina de ensayos de flexión y flexión rotativa. En 1870 presentó un informe en el cual parte de sus conclusiones cualitativas son llamadas “Ley de Wöhler”, al establecer el esfuerzo alterante como el parámetro más importante para la vida de un componente, señalando que “the stress amplitudes are decisives for the destruction of the cohesion of the material. The maximum stress is of influence only in so far as the higher it is, the lower are the stress amplitudes which lead to failure”[citar schutz history of fatigue](#), aunque destacando también que el esfuerzo medio tiene una influencia perjudicial en el

material.

Es decir, desde 1853 hasta hoy, han transcurrido más de 160 años de investigación sobre la fatiga, logrando comprender distintas aristas del fenómeno, pero con muchas preguntas aún sin resolver. Por eso, la fatiga sigue siendo un problema necesario de abordar y seguir comprendiendo, por sus grandes implicaciones de costo que tiene en la industria y en distintos elementos que utilizamos en la vida diaria. Por otro lado, si bien muchas preguntas no han sido resueltas científicamente, diversas empresas han logrado evitar las fallas por fatiga y optimizar los diseños de manera operativa, sin comprender cabalmente el trasfondo de estos.

### 1.1.1. Definiciones

La fatiga se puede definir, desde la perspectiva del material, como el proceso en el cual el daño se acumula producto de la aplicación de cargas repetitivas que se encuentran bajo el punto de fluencia. En metales, este proceso se divide en tres fases o etapas las cuales, dependiendo del autor, pueden ser llamadas: fase de iniciación de la grieta, fase de crecimiento de la grieta y fractura.

La primera fase es el inicio de una o más microgrietas, la cual ocurre tempranamente en la vida a fatiga de un material y que, incluso, pueden ocurrir inmediatamente si el esfuerzo cíclico se encuentra sobre el límite de fatiga. Lo característico de esta etapa es que las grietas no pueden verse a simple vista, fase que representa una parte considerable de la vida a fatiga total. Estas crecerán lentamente y de manera errática, debido al efecto de las microestructuras como los bordes de grano. Durante este período, las concentraciones de esfuerzo juegan un importante papel, al ser los lugares donde comenzará la nucleación de las grieta, sumado a las pocas restricciones de deslizamiento de la superficie del material, hace que esta sea relevante en el inicio de este proceso.

En la segunda etapa, las microgrietas pasan a ser macrogrietas, es decir, son visibles al ojo humano. Estas grietas comienzan a tomar una dirección de crecimiento que es perpendicular a los esfuerzos principales producidos por la carga alternante. La resistencia al crecimiento de las grietas, cuando esta penetra el material, dependerá de las propiedades de grano. Así, se puede definir cualitativamente una separación entre ambas etapas, donde el periodo de iniciación o nucleación de las grietas termina cuando su crecimiento no es dependiente de las condiciones superficiales del material. Producto de la micro-deformación plástica cíclica se forman bandas de crecimiento conocidos como *marcas de playa* o “*striations patterns*”, abriendo, cerrandose y frotandose entre sí, como se puede ver en la imagen [Añadir figura 2.24 de Fatigueofstructuresandmaterial 2009](#),

dejando en evidencia el frente de grieta, las variaciones en la carga, su velocidad de crecimiento y la naturaleza corrosiva del entorno.

Finalmente, la última etapa es la falla del material, que ocurre en el último ciclo de la carga, al no poder soportarla con el material restante. Esta fractura es rápida y es producto de una macro-deformación plástica, pudiendo ser frágil, dúctil o una combinación de ambas.

Con esto en cuenta, es posible definir ciertos conceptos en base a las distintas etapas que experimenta un material. La vida a fatiga de un material (*fatigue life*,  $N_f$ ) es el número de ciclos aplicados a una probeta para lograr el criterio de falla [referencia a ISO 23718](#). El límite de resistencia a la fatiga (*endurance limit*) es frecuentemente explicado como la amplitud de esfuerzo para el cual la vida a fatiga tiende a infinito o a la asíntota de la curva S-N. Sin embargo, al comprender la fatiga como un proceso, es posible dar una definición más acertada para el límite a la fatiga, pasando a ser el umbral para el crecimiento de las microgrietas. Es decir, bajo este límite existe nucleación e iniciación de grietas, sin embargo, su crecimiento está limitado a los bordes de grano del material.

Por otra parte, para el estudio de este fenómeno existen tres modelos de falla por fatiga: de *esfuerzo-vida* (*S-N*), de *deformación-vida* ( $\varepsilon$ -N) y de la *mecánica de fractura lineal elástica* (LEFM). Cada uno de ellos tiene ventajas y desventajas, sin embargo, la máquina que es objeto de evaluación en este trabajo utiliza el método *esfuerzo-vida*. El criterio de elección entre los distintos modelos se divide principalmente por la cantidad de ciclos que se hará la medición, los que se clasifican en régimen de fatiga de ciclo bajo (*low-cycle fatigue*, LCF) o un régimen de fatiga de ciclo alto (*high-cycle fatigue*, HCF). La división entre ambos régimen dependerá de distintos autores, no obstante, por lo general se establece la separación en  $10^3 \leq LCF < HCF$  [referencia al shigley - pag. 265](#), debido a que la zona LCF está asociada a la existencia de macro-deformaciones plásticas en cada ciclo. De esta manera, el método de esfuerzo-vida se utiliza para ensayos de alto ciclaje debido a su poca precisión en casos LCF. A su vez, los métodos de deformación-vida y LEFM se aplican para casos LCF.

En el método de esfuerzo-vida las muestras o probetas son sometidas a fuerzas de magnitudes especificadas, al mismo tiempo que se cuentan la cantidad de ciclos. Es por esto que es un modelo con base en el esfuerzo, con el cual se busca determinar una resistencia de fatiga o un límite de resistencia a la fatiga.

Estas fuerzas especificadas pueden ser constantes o variables en el tiempo y magnitud, sin embargo, se abordará principalmente los casos donde los esfuerzos fluctúan de manera constante en el tiempo y de una amplitud fija debido a las características de la máquina analizada en este trabajo. Esto permite trazar la curva de fatiga (S-N) del componente o

material para distintas cargas con su respectivo número de ciclos que falla.

Por esto, se hace necesario describir y definir elementos que surgen producto de una carga cíclica. Esta se caracteriza por el esfuerzo alterante (*alternate stress* o *amplitude stress*,  $S_a$ ) y el esfuerzo medio (*mean stress*,  $S_m$ ) que se muestran en la ecuación 1.1.1 y 1.1.2, respectivamente. A su vez, estas se definen por el esfuerzo máximo  $S_{max}$  y  $S_{min}$ , siendo el esfuerzo máximo y mínimo alcanzado por la carga cíclica. Finalmente, el rango del esfuerzo,  $\Delta S$  (eq. 1.1.3), y la razón de esfuerzos,  $R$  (eq. 1.1.4), también son opciones para caracterizar la fatiga.

$$S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} \quad (1.1.1)$$

$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} \quad (1.1.2)$$

$$\Delta S = S_{max} - S_{min} = 2S_a \quad (1.1.3)$$

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}} \quad (1.1.4)$$

Estos términos se pueden ver claramente en la figura [Insertar imagen que muestra Sa Sm etc.](#). Existen dos casos específicos, el primero en donde  $S_m = 0$ , y así  $R = -1$ , se llama esfuerzo de ciclo invertido. El segundo, cuando  $S_{min} = 0$ , y  $R = 0$ , se llama esfuerzo repetido.

### 1.1.2. Curva S-N o de Wöhler

Como se señaló en el punto anterior, la curva S-N es el resultado de la aplicación del método esfuerzo-vida. Es quizás uno de las herramientas más importantes en el desarrollo empírico para lograr cuantificar el proceso de fatiga y poder diseñar contra este. El diagrama S-N se obtiene como resultado de un número de ensayos de fatiga a distintos niveles de esfuerzo, donde  $S$  puede ser la amplitud ( $S_a$ ), el rango de esfuerzo ( $\Delta S$ ) o el esfuerzo máximo ( $S_{max}$ ) que es aplicado a la probeta, siendo la amplitud lo más común. La variable  $N$  hace referencia a la vida a fatiga del material, es decir, la cantidad de ciclos hasta que la probeta falle. Debido a que se desea analizar fallas en LCF y HCF, la cantidad de ciclos necesarios para fallar la probeta pueden llegar a ser demasiado altos, por esto,  $N$  se grafica en escala logarítmica.

La cantidad de ensayos requeridos para construir la curva S-N dependerá de distintos factores como, por ejemplo, la confiabilidad esperada, el uso final de la información o de los recursos disponibles. La norma E739-10 – "Statistical Analysis of Linear or Linearized

Cuadro 1.1: Número mínimo de pruebas según tipo de prueba

Tipo de prueba	Cantidad mínima de probetas
Preliminar y exploratorio (investigación exploratoria y ensayos de desarrollo)	6 a 12
Pruebas de desarrollo e investigación de componentes y probetas	6 a 12
Datos de diseños permisibles	12 a 24
Datos de confiabilidad	12 a 24

Stress-Life ( $S-N$ ) and Strain-Life ( $\varepsilon-N$ ) Fatigue Data", establece una guía dependiendo del tipo de prueba a realizar como se muestra en la tabla 1.1. Además, se recomienda realizar la medición con, al menos, tres puntos de esfuerzos distintos. Con esto, es posible obtener el diagrama  $S - N$  como el que se puede apreciar en la figura Añadir figura 6-10, Shigley, pag 266, donde se puede apreciar la diferencia entre la zona LCF, HCF y de vida infinita, para el caso de los aceros.

La curva  $S-N$  varía ampliamente sus resultados para distintos tipos de materiales y, a su vez, estos se ven afectados por una variedad de factores. Estos pueden ser por modificaciones en las condiciones de ensayo, de la geometría de la probeta, de la naturaleza del material o de la forma de fabricación de la probeta. Todos estos factores crean ciertas tendencias en la obtención de datos que los distinguen unos de otros.

En concreto, las condiciones medioambientales hostiles, ya sean químicas o térmicas, pueden acelerar el proceso de iniciación y crecimiento de grietas. Una probeta sometida a creep, fatiga y altas temperaturas puede disminuir drásticamente sus vida útil y, por tanto, la vida a fatiga del material. También es posible realizar ensayos en una solución de sal para homologar las condiciones marinas, afectando también su vida a fatiga. Otro factor que afecta los resultados de los ensayos es la frecuencia de los ciclos de carga ejercidos, al aumentar la temperatura de la probeta durante su ensayo. Agregar imagen, pag. 387 y 388 - Dowling

El esfuerzo residual también tiene incidencia en la curva de Wöhler, la cual puede incluso ser beneficiosa al utilizar técnicas como el granallado (*shot peening*). El mecanizado de las piezas, como en el caso de la probeta utilizada por la máquina de fatiga, verá afectado los resultados de la curva  $S-N$  dependiendo de las características con las que sea manufacturado. Como se indicó anteriormente, la primera etapa de la fatiga, la iniciación de las grietas, es un fenómeno que depende de la superficie del material y como consecuencia, un mecanizado grueso o fino tendrá un impacto en esa etapa de la

fatiga y no en la posterior, como se puede apreciar en la imagen [Imagen página 54 - Book of fatigue](#). Así, aquellas probetas que tengan una mejor calidad superficial producto del afinado, tendrán una mejor resistencia a la fatiga respecto a otras.

Es posible encontrar otros factores que inciden en los resultados de la curva, como pueden ser la geometría de la probeta o componente, sus dimensiones, el esfuerzo último ( $\sigma_{uts}$ ), su microestructura, tratamientos químicos y el esfuerzo medio ( $S_m$ ). Este último será analizado en la sección siguiente, debido a la importancia que posee al estar presente en la máquina a analizar.

### 1.1.3. Esfuerzo medio, $S_m$

Como se escribió anteriormente, el esfuerzo medio tiene influencia en los resultados de la curva  $S-N$ , dependiendo del tipo de ensayo realizado, con tal de lograr comparar los datos obtenidos entre distintas pruebas realizadas, como se muestra en la figura [añadir imagen 925 Dowling](#). Para esto, se han desarrollado ecuaciones que buscan estimar el efecto una carga media dada cuando no existe información disponible.

Existen distintas maneras de representar la información de un ensayo donde  $S_m \neq 0$ . Una forma es recolectar la información de distintos ensayos con distintos valores de carga media y graficarlos como se muestra en la figura [añadir imagen anterior como rf](#). Una segunda opción es realizar un diagrama de vida constante (*constant fatigue life diagram, CFL*), mostrada en la figura 1.1, el cual muestra claramente que un incremento del esfuerzo medio tiene como resultado una disminución del esfuerzo alternante, para la misma vida de la probeta,  $N_f$ . Finalmente, es posible graficar un ensayo para distintos valores de  $R$ , como se muestra en la figura [imagen 935 Dowling](#).

### Diseño para esfuerzos uniaxiales fluctuantes

Cuando elementos están sometidos a esfuerzos repetidos con componentes medios distintos de cero, estos deben tomarse en cuenta para el diseño. Para esto, se utiliza un diagrama de esfuerzo alternante versus esfuerzo normal en el cual se ajustan distintas curvas a los datos obtenidos. Como se muestra en la figura [añadir imagen 442 norton pag 324](#), existe la línea de Goodman modificada, la parábola de Gerber y la línea de Soderberg. La parábola de Gerber es la que mejor se ajusta a los datos de falla experimental, de acuerdo a la ecuación 1.1.5; mientras que la línea de Goodman modificada, ecuación 1.1.6, se ajusta por debajo de la dispersión de datos. Ambas curvas utilizan en el eje  $\sigma_a$  el límite de resistencia a la fatiga  $S_e$  y el esfuerzo último  $S_u$  o  $S_{ut}$  en el eje  $\sigma_m$ . En cambio, la línea de Soderberg, ecuación 1.1.7, une  $S_e$  con la resistencia a la fluencia del material

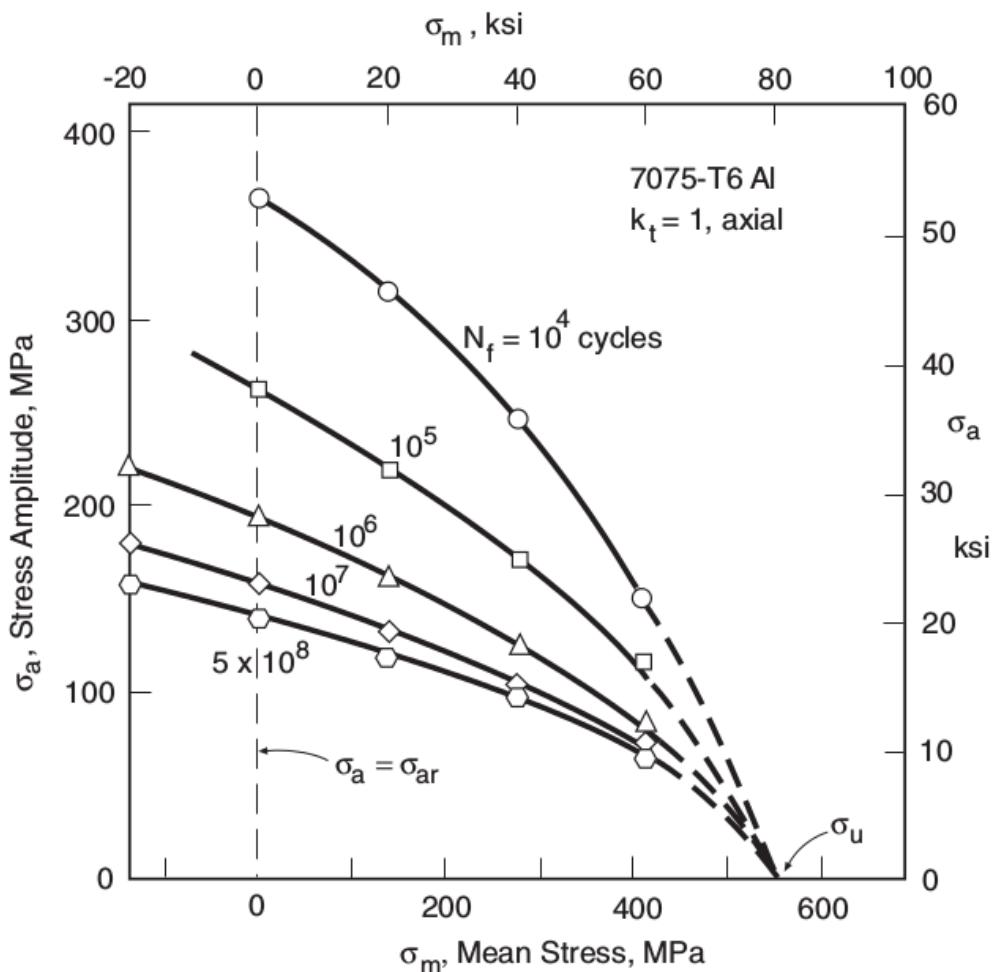


Figura 1.1: Diagrama de vida constante para aluminio 7075-T6

$S_y$  y es, por lo tanto, un criterio de falla más conservador que los demás. Sin embargo, la línea punteada que une ambos  $S_y$  se debe utilizar en las dos primeras curvas como límite del primer ciclo de esfuerzo para evitar que ceda o falle. [Referencia a libro norton](#)

$$\text{Par\'abola de Gerber:} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m^2}{S_u^2} = 1 \quad (1.1.5)$$

$$\text{Goodman modificada:} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1 \quad (1.1.6)$$

$$\text{Soderberg:} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = 1 \quad (1.1.7)$$

### Diagramas de esfuerzos alternantes normalizados y medios

La normalización del diagrama mostrado en la figura 1.1 responde a la necesidad de consolidar los datos de mediciones para distintos esfuerzos medios y vida de fatiga dentro una sola curva. Esto da la oportunidad de ajustar la curva a una ecuación que represente todos los datos obtenidos. Así para el caso particular de  $S_m = 0$ , el esfuerzo alternante se designará por  $\sigma_{ar}$ . Por lo tanto, en el diagrama *CFL*,  $\sigma_{ar}$  es el intercepto en  $\sigma_m = 0$  de la curva para cualquier vida  $N_f$ . Por consiguiente, el gráfico puede ser normalizado utilizando la relación  $\sigma_a/\sigma_{ar}$  en la ordenada y el esfuerzo medio  $\sigma_m$  en la abscisa. De esta manera, se cumplirá que  $\sigma_a/\sigma_{ar} = 1$  cuando  $\sigma_m = 0$  y, además, cuando el esfuerzo alternante es cercano a cero, el valor del esfuerzo medio debe aproximarse al esfuerzo último del material,  $\sigma_u$ . El resultado de esto se puede apreciar en la figura 1.2 [buscar otra imagen de referencia](#).

Al igual a como se vio en la sección anterior, las curvas que se ajustan a estos valores pueden ser rectas o una parábola. La ecuación modificada de Goodman normalizada sigue siendo una aproximación conservadora, y su versión normalizada es:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} = 1 \quad (1.1.8)$$

La parábola de Gerber queda expresada como:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 = 1 \quad (1.1.9)$$

Y una segunda modificación de la ecuación de Goodman, propuesta por J. Morrow, para metales dúctiles, en la cual se reemplaza  $\sigma_u$  por el esfuerzo verdadero de fractura corregido  $\tilde{\sigma}_{fB}$ .

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\tilde{\sigma}_{fB}} = 1 \quad (1.1.10)$$

#### 1.1.4. Medición de la fatiga

Existen distintas técnicas para cuantificar la respuesta de un material o componente frente a esfuerzos o deformaciones fluctuantes. La primera de ellas, como se habló anteriormente, corresponde a una viga giratoria sometida a flexión en voladizo, diseñada por A. Wöhler. Con respecto a la información existente en la literatura la mayoría de los datos disponibles de resistencia a la fatiga se encuentra en las pruebas de viga giratoria (*rotating bending*, en inglés) en ciclo de flexión invertida, seguido por cargas axiales

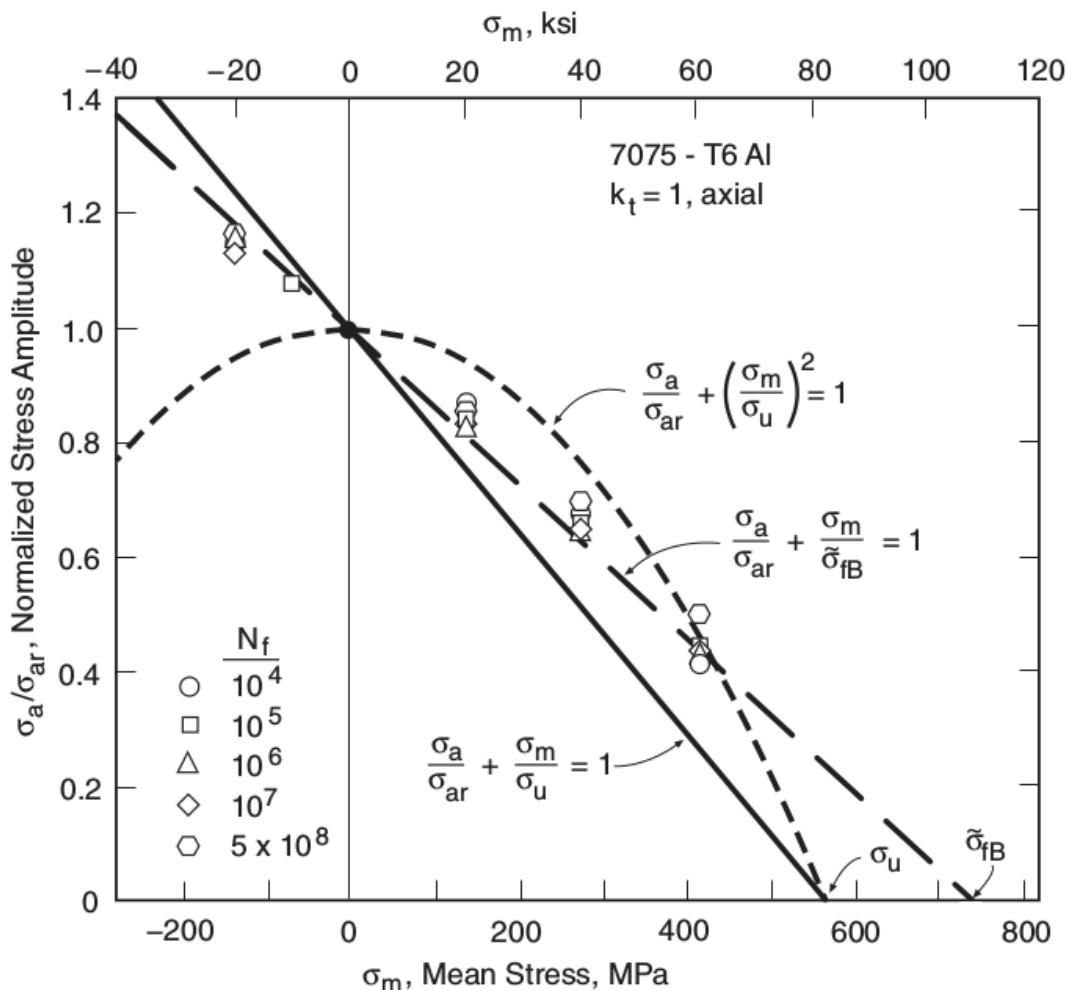


Figura 1.2: Diagrama CFL normalizado

(*push-pull*, en inglés), flexión en voladizo (*alternating bending*, en inglés) y en menor medida, en las pruebas de fatiga por torsión. [citar norton sección 45](#)

### Ensayo de fatiga con una viga giratoria en flexión

Su uso es el más extendido para determinar la vida a fatiga de un material. La principal ventaja frente a otros sistemas radica en su capacidad de aplicar ciclos de cargas a altas velocidades, es decir, realizar pruebas de fatiga a altas frecuencias. Sin embargo, no es posible aplicar una carga media distinta de cero, por lo tanto, su uso principal se encuentra en la obtención de datos para el rango HCF y de ciclo invertido. Los datos obtenidos son más altos respecto a otros tipos de medición, como se puede ver en la figura REF.

### Ensayo de fatiga axial

Esta configuración de prueba es más flexible que el resto, siendo posible cualquier combinación de esfuerzo alternante y medio, además de poder realizar ensayos con el modelo de deformación-vida. Su principal diferencia respecto al método de viga giratoria se encuentra en que la sección transversal está sometida a esfuerzos de manera uniforme, provocando que los resultados de resistencia a la fatiga obtenidos sean usualmente menores que las obtenidas por *rotating bending* y *alternating bending*. Se considera que esto se debe a la probabilidad más alta de hallar una microgrieta en un campo de esfuerzos más grande. Asimismo, la superposición de momentos de flexión sobre las cargas axiales, producto de la dificultad de crear cargas axiales sin excentricidad, son un factor en la disminución en la obtención de valores de resistencia menores. En concreto, la reducción de las resistencias a la fatiga obtenidos pueden variar entre un 10 % y un 30 % o más si hay flexión producto de la excentricidad de las cargas. La figura REF [sacar imagen de paper A Esin](#) muestra las diferencias de los datos obtenidos entre un ensayo de fatiga axial y uno de viga giratorio.

### Ensayo de fatiga de flexión en voladizo

Esta prueba consiste en someter a una viga en voladizo a oscilaciones en su extremo libre a través de algún mecanismo, pudiendo lograr combinaciones de esfuerzos medios y alternantes. La máquina analizada en esta memoria, utiliza este método para la obtención de los datos de vida de fatiga del material a analizar. Los resultados de este tipo de prueba son inferiores a los obtenidos por *rotating bending* y mayores a los obtenidos por *push-pull*.

#### 1.1.5. Correlación entre distintos métodos de medición de la fatiga

Como se señaló anteriormente y se aprecia en la imagen REF, cada prueba entrega valores distintos aún cuando los niveles de esfuerzo sean iguales. Por esto, existen distintos intentos en la literatura de crear correlaciones entre los datos, evitando los costos asociados a realizar nuevos ensayos experimentales del mismo material o componente. La forma en que se ha abordado esta problemática es la utilización de un factor de corrección ( $\phi$ ) calculado con distintas propuestas.

Algunos de estos modelos son: Manson y Muralidharan, Philipp, Lee y Esin. Cada metodología aborda de distinta forma el cálculo del factor de corrección  $\phi$ , ahora bien, se abordarán los modelos de Lee y Esin en este trabajo, ya que, de acuerdo a [agregar cita de](#)

analysis of axial papre, son los modelos que se ajustan mejor al comportamiento de los datos empíricos entre ensayos de *rotating bending* y de *push-pull*. corregir

## Modelo de Esin

El modelo propuesto por Esin en “*A method for correlating different types of fatigue curve*”, relaciona las curvas *S-N* de los ensayos *push-pull*, *alternating bending* y *rotating bending*. Éste depende del esfuerzo alternante, asumiendo que la curva base y la calculada por este método se intersectarán en el punto  $(S_e, N_f)$ , es decir, el factor de corrección es  $\phi = 1$  en esa posición.

El método se basa en el análisis de la dependencia de la micro-plasticidad en la distribución de esfuerzos en la sección transversal, definiéndose la micro-plasticidad como el flujo plástico de un material sin haber alcanzado su punto de fluencia. Ésta ocurre sobre cierto nivel de esfuerzos en el rango elástico, llamado límite elástico real (*true elastic limit*, en inglés o *TEL*) y bajo el límite de resistencia a la fatiga,  $S_e$ . Así, siempre se cumplirá que:

$$TEL \leq S_e \leq S_y$$

La micro-plasticidad es un fenómeno altamente localizado que depende de las propiedades probabilísticas micro-estructurales del material como su micro-inhomogeneidad, anisotropía y micro-concentraciones de esfuerzos, los cuales explican la dispersión de datos en los ensayos de fatiga. Así, cuando los esfuerzos alternantes están sobre valor del *TEL*, la micro-plasticidad influye en los macro-elementos. Dicho de otra forma, el comportamiento mecánico observado a un nivel macro es el comportamiento integrado de los micro-elementos.

En la figura 1.3, se puede apreciar las áreas afectadas por fatiga para cada tipo de ensayo, los cuales, por sí mismo podrían explicar las diferencias en los resultados de cada prueba. Sin embargo, basándose en el criterio de fatiga de la deformación micro-plástica, la falla ocurre cuando la energía acumulada por la histérsis plástica, a una cantidad de ciclos  $N_f$ , es igual al valor de la energía de ruptura real (área bajo la curva de un diagrama  $\sigma-\varepsilon$  real), como queda expresado en la ecuación 1.1.11.

$$N_f = \frac{U \cdot T_t}{W} \quad (1.1.11)$$

Donde:

- $N_f$ : Número de ciclos a la falla.

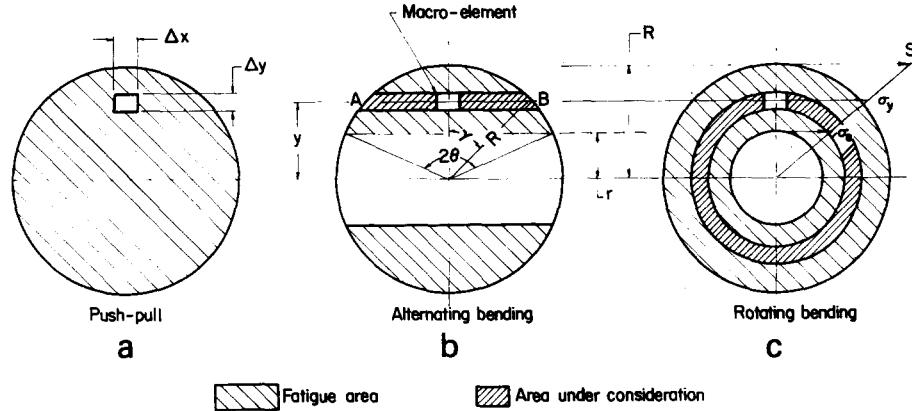


Figura 1.3: Sección transversal de probetas sujetas a esfuerzo alternante uniaxial. a) *push-pull*, b) *alternating bending* y c) *rotating bending*

- $U$ : Energía total real bajo la curva del diagrama esfuerzo-deformación.
- $W$ : Energía total plástica disipada.
- $T_t$ : Número total de macro-elementos.

De esta forma, el método utiliza varios factores para crear una correlación entre las distintas curvas, ocupando el esfuerzo alternante,  $S$ , como valor de entrada. El primero de ellos es el concepto de esfuerzo alternante equivalente,  $S_{eq}$  (ecuación 1.1.12), utilizado para denotar un esfuerzo hipotético actuando sobre todos los elementos sometidos a fatiga.

$$S_{eq} = \frac{\sum \sigma_i A_i}{\sum A_i} \quad (1.1.12)$$

Donde  $A_i$  es el número o área de los macro-elementos con igual esfuerzo equivalente. A partir de esto, el esfuerzo equivalente para ensayos de *rotating bending* y *alternating bending*, están dados por las ecuaciones 1.1.13 y 1.1.14, respectivamente.

$$S_{eq,rt} = \frac{2S \cdot \sin^3 \theta}{3C} \quad (1.1.13)$$

$$S_{eq,ab} = \frac{2S}{3} \cdot \left( \frac{1 - c^3}{1 - c^2} \right) \quad (1.1.14)$$

Donde las variables  $C$  y  $c$  se definen cómo:

$$C = \left( \frac{\pi \theta}{180} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \quad ; \quad c = \frac{r}{R} \quad (1.1.15)$$

Los valores de  $\theta$ ,  $r$  y  $R$  son propios de la geometría de la probeta utilizada y se definen de acuerdo a la figura 1.3. De igual forma, se debe calcular el factor de fatiga,  $FF$ , ecuación que representa el ratio entre el área total de la sección transversal y el área de los elementos que contribuyen al proceso de fatiga. Así, las ecuaciones 1.1.16 y 1.1.17 representan los factores de fatiga para calcular la vida a fatiga equivalente,  $N_{eq}$ , de *alternating bending* y *rotating bending*, respectivamente.

$$FF_{ab} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi\theta}{180} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \quad (1.1.16)$$

$$FF_{rb} = \frac{R^2}{(R^2 - r^2)} \quad (1.1.17)$$

Finalmente, con estos elementos es posible tomar del diagrama *S-N* un punto  $(S_i, N_i)$  y, a través de las correlaciones, obtener un nuevo punto  $(S'_i, N'_i)$  que equivale a la curva *S-N* de otro tipo de ensayo.

La metodología consiste en tomar un valor de esfuerzo alternante conveniente  $S$  y calcular su esfuerzo alternante equivalente,  $S_{eq}$ . Utilizando este valor, se determinará a partir de la curva *S-N* original el número de ciclos a la falla que se llamará vida a fatiga equivalente,  $N_{eq}$ . Este valor debe ser multiplicado por el factor de fatiga  $FF$ , obteniendo la vida a fatiga modificada,  $N$ . Así, el punto  $P = (S, N)$ , como se muestra en la figura REF [añadir fig 3](#) es el valor equivalente obtenido, teniendo que repetirse el procedimiento para todos los puntos que se requieran.

## Modelo de Lee

La estimación del límite de fatiga,  $S_e$ , se calcula a través de distintos factores de modificación según el tipo de carga, calidad superficial, tamaño y confiabilidad de la muestra. El factor de modificación según el tipo de carga  $C_L$  varía entre 0,7 y 0,9 para probetas sin muescas. Las recomendaciones para cada valor de  $C_L$  se realizaron considerando los efectos del gradiente de esfuerzos y el tipo de esfuerzo involucrado, es decir, cortantes y normales. Estos también varían según el tipo de material, los cuales fueron obtenidos de manera empírica. Así la tabla 1.2 muestra los factores de modificación para algunos tipos de carga.

Además, es posible apreciar en la imagen REF [colocar imagen 416 del texto de Lee](#) las diferencias que se generan por la aplicación del factor de corrección para los distintos tipos de carga que se buscan.

AÑADIR IMAGEN COMPARANDO AMBOS SISTEMAS.

Cuadro 1.2: Factores de modificación por tipo de carga, según el modelo de Lee.

Tipo de Carga	$C_L$	Observaciones
Carga axial pura	0,9	-
Carga axial con leve flexión	0,7	-
Rotating bending	1,0	-
Torsional	0,58	Para aceros

## 1.2. Dinámica

AGREGAR APOSTROFE A TODOS LOS DALEMBERT, buscar por Alembert

El movimiento y la relación existente entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido es estudiado por la dinámica, la cual busca predecir el movimiento y explicar su origen. En esta sección se hablará de cuerpos rígidos y no partículas, debido las características de lo que se analizará posteriormente, además, de ser la rotación un elemento importante a considerar.

### 1.2.1. Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido

Para describir el movimiento de un cuerpo es necesario recurrir a la segunda ley de movimiento de Newton, la cual permite trazar y predecir el movimiento de traslación y rotación del cuerpo.

Si sobre una masa  $m$  constante actúa una fuerza  $\vec{F}(t)$  que da como resultado un vector de desplazamiento  $\vec{x}(t)$ , la segunda ley de Newton se expresa:

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right) = m \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \quad (1.2.1)$$

De manera análoga para el mismo cuerpo rígido, de momento de inercia  $I$ , es sometido a un momento  $\vec{M}(t)$ , entonces el cuerpo girará con un vector de desplazamiento angular  $\vec{\theta}$ .

$$\vec{M}(t) = I \frac{d^2\vec{\theta}(t)}{dt^2} \quad (1.2.2)$$

Con las ecuaciones 1.2.1 y 1.2.2 se puede describir el movimiento de un sólido rígido.

Por otro lado, el principio de D'Alembert nos permite establecer un equilibrio dinámico entre las suma de las fuerzas externas o momentos y el producto entre su masa y la aceleración resultante del sólido, que se le denominará fuerza efectiva. Ambos términos deben ser equipolentes sobre el sistema que actúan, de esta manera las ecuaciones 1.2.3 y

1.2.4 son el resultado de la aplicación de este principio.

$$\sum \mathbf{F}_i = m\ddot{\mathbf{x}}_i \quad (1.2.3)$$

$$\sum \mathbf{M}_i = I\ddot{\theta}_i \quad (1.2.4)$$

## 1.2.2. Energía cinética de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido en movimiento tiene asociada una energía cinética que depende de su masa  $m$ , el momento de inercia  $I$ , su velocidad  $v$  y la velocidad de rotación  $\omega$ . Así la energía cinética  $T$  queda definida por la ecuación 1.2.5.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1.2.5)$$

## 1.3. Vibraciones

Es el estudio del movimiento repetitivo de los objetos relativo a un marco de referencia estacionario y que oscila respecto a una posición nominal. Es un fenómeno que se da en todos los objetos, afectando naturalmente el diseño en ingeniería, pudiendo ser perjudicial o útil, dependiendo del objetivo que se busca. Por esto, es necesario conocer cabalmente el fenómeno de la vibración, es decir, saber como analizarlo, medirlo y controlarlo para poder manejar las distintas variables que lo afectan.

Físicamente, la vibración es la interacción entre la energía potencial y cinética. De esta manera, un sistema vibratorio debe tener un componente que almacene la energía y la libere en forma de movimiento de una masa para, asimismo, este vuelva a ser almacenado en forma de energía potencial. Los elementos que componen un sistema mecánico y los métodos para describir los movimientos se explicarán en esta sección.

### 1.3.1. Rigidez

El comportamiento como resorte se puede aplicar a distintos elementos y componentes, dependiendo de su geometría y las propiedades del material. Así, a partir de la configuración del sistema, es posible calcular una rigidez  $k$  para el movimiento longitudinal, transversal o torsional.

El cálculo de la constante de rigidez para una viga de área  $A$ , módulo de Young  $E$ , largo  $L$  y el segundo momento de área  $I$ , se puede obtener a través de las ecuaciones de

energía. Así, la ecuación 1.3.1, muestra el valor de  $k$  para una viga en voladizo con una carga  $P$  en su extremo.

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (1.3.1)$$

Por otro lado, la ecuación 1.3.2, muestra la energía potencial elástica asociada a un elemento que se comporta como un resorte.

$$U_k = \frac{1}{2}k x(t) \quad (1.3.2)$$

### 1.3.2. Damping

Los sistemas vibratorios predicen oscilaciones indefinidas si solo se considera la rígidez del resorte y la masa del sistema, sin embargo, la experiencia nos indica que los sistemas tienden a eventualmente reducir su movimiento hasta cero si estos no están afectados por fuerzas externas. Para esto es necesario añadir un modelo físico para disipar la energía y amortiguar el sistema mecánico. Así, el modelo expresado anteriormente debe ser modificado para considerar la reducción de movimiento en el tiempo. Para esto, se añade a las ecuaciones diferenciales un término de la forma  $c\dot{x}(t)$ , donde  $c$  es una constante, el cual da como resultado una solución donde  $x(t)$  tiende a un punto de reposo. Este tipo de *damping* se llama amortiguamiento viscoso, en el cual su fuerza ( $f_c$ ) es proporcional a la velocidad del sistema en la dirección opuesta del movimiento. Por lo tanto, la ecuación 1.3.3 muestra la fuerza de amortiguamiento, de tipo viscoso, presente en un sistema mecánico.

$$f_c = c\dot{x}(t) \quad (1.3.3)$$

Producto del amortiguamiento de la oscilación del sistema, la frecuencia es menor que la de un sistema no amortiguado, disminuyendo exponencialmente. A partir del valor de la constante  $c$ , existen tres casos posibles:

1. **Subamortiguado:** El sistema continúa teniendo un movimiento oscilatorio, con un decaimiento exponencial de la amplitud hasta llegar a la posición de reposo.
2. **Sobreamortiguado:** El movimiento del sistema no alcanza a ser oscilatorio, sin embargo, vuelve a la posición de reposo exponencialmente.
3. **Críticamente amortiguado:** Es el caso que separa si el decaimiento es oscilatorio, siendo el movimiento que retorna al reposo más rápido sin oscilaciones.

Por lo tanto, la ecuación que describe el movimiento de un sistema amortiguado es:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -f_c - f_k \\ m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= 0 \end{aligned}$$

Desde la perspectiva del método de energía, el amortiguamiento viscoso es una fuerza no conservativa que puede ser modelada por la función de disipación de Reyleigh, que toma la forma 1.3.4.

$$R = \frac{1}{2}c\dot{q}_i^2 \quad (1.3.4)$$

Donde  $n$  es el número de coordenadas generalizadas y  $q$  cada coordenada generalizada. De esta manera, se puede obtener las fuerzas generalizadas para amortiguamiento viscoso derivando  $R$  respecto a cada variable generalizada  $q$ , como se muestra en la ecuación 1.3.5.

$$Q_{Rj} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}, \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, n \quad (1.3.5)$$

### 1.3.3. Vibraciones forzadas

Los sistemas mecánicos están sometidos a una gama bastante amplia de fuerzas externas que actúan sobre ellos, las que pueden ser aleatorias, periódicas, no periódicas o transientes. La fuente puede ser variada, pero todas ellas pueden causar vibraciones en el sistema, las cuales se denominarán  $F(t)$ . Para el caso de este trabajo, el sistema a analizar contiene un disco sometido a rotación constante, impulsado por un motor eléctrico, que produce una fuerza periódica producto de su desbalanceo.

Si consideramos un desequilibrio de masa  $m_0$ , a una distancia  $e$  del centro de rotación y rotando a una velocidad  $\phi$ , como se muestra en la figura [Hacer figura similar a 219 y 220 de Inman](#), la componente vertical de la fuerza centrífuga  $F(t)$  es:

$$F_y(t) = m_0\ddot{y}(t) \quad (1.3.6)$$

Tomando el centro de rotación como el punto cero del sistema de coordenadas y que la aceleración angular es distinta de cero, entonces las coordenadas de posición, velocidad y aceleración quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y(t) &= e \sin \phi \\ \dot{y}(t) &= e\dot{\phi} \cos \phi \\ \ddot{y}(t) &= e(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación 1.3.7, muestra la fuerza centrífuga en dirección del eje  $y$  cuando una masa desbalanceada  $m_0$  gira a una velocidad angular  $\dot{\phi}$  y su aceleración angular es  $\ddot{\phi} \neq 0$ .

$$F_y(t) = m_0e(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \quad (1.3.7)$$

### 1.3.4. Modeling

Es el proceso en el que se representan todos los detalles importantes del sistema con el objetivo de derivar las ecuaciones que rigen el comportamiento del mismo. Para esto, los métodos existentes son la ley de movimiento de Newton, el principio de D'Alembert y principio de conservación de la energía. Los primeros, vistos en la sección 1.2.1, se utilizan a través de un diagrama de cuerpo libre y la correcta identificación de las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo. Por otra parte, el método de conservación de la energía tiene la capacidad de derivar las ecuaciones de movimiento de un cuerpo sin la necesidad de recurrir a un diagrama de cuerpo libre, es decir, no se requiere identificar fuerzas ni momentos en el sistema. Éste método se verá en mayor profundidad en la sección 1.3.6.

Si consideramos un sistema amortiguado forzado y de un solo grado de libertad,  $x(t)$  o  $\theta(t)$  según sea el caso, entonces la ecuación que describe el movimiento tendrá la siguiente forma:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F(t) \quad (1.3.8a)$$

$$I \ddot{\theta}(t) + c \dot{\theta}(t) + k \theta(t) = M(t) \quad (1.3.8b)$$

Tanto la ecuación lineal (1.3.8a) y angular (1.3.8b) son el resultado de derivarlas a través de cualquiera de los métodos expuestos anteriormente.

### 1.3.5. Sistema de múltiples grados de libertad

El número de grados de libertad de un sistema es la cantidad de parámetros independientes necesarios para definir los movimientos que posee cada masa involucrada en el sistema. Para cada grado de libertad de una masa, corresponde una coordenada  $x_i(t)$ , describiendo su movimiento en esa dimensión. La figura REF{imagen 47 de Inman} muestra las posibilidades de movimiento de un elemento de masa  $m$  que no está sometido a ninguna restricción.

La forma de describir el movimiento de cada masa es a través del uso de matrices y vectores, de tal forma que es posible agrupar los distintos componentes que se vieron

en las ecuaciones 1.3.8a y 1.3.8b de un solo grado de libertad. De esta manera, las coordenadas  $x_i(t)$  pueden ser escritas como un vector  $\mathbf{x}(t)$  de  $n \times 1$ , donde  $n$  es la cantidad de grados de libertad del sistema. Asimismo, se puede representar matricialmente la información de la masa del sistema y la rigidez de cada resorte, donde  $M$  es la matriz de masas y  $K$  es la matriz rigidez, ambas de dimensión  $n \times n$ .

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = 0 \quad (1.3.9)$$

La forma de la ecuación 1.3.9 permite resolver un sistema de  $n$  grados de libertad, por lo tanto, la forma de la matriz de masas será:

$$M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

Y el vector  $\mathbf{x}(t)$  es:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Por otra parte, para sistemas con amortiguamiento viscoso se añade la matriz de amortiguamiento  $C$  de dimensión  $n \times n$ .

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = 0 \quad (1.3.10)$$

Finalmente, se tendrá un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden, con coeficientes constantes, cada una de las cuales requiere dos condiciones iniciales.

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_{10}(t_0) \\ x_{20}(t_0) \\ \vdots \\ x_{n0}(t_0) \end{bmatrix} ; \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10}(t_0) \\ \dot{x}_{20}(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n0}(t_0) \end{bmatrix} \quad (1.3.11)$$

Donde los valores de  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  y de las matrices  $M$ ,  $K$ , y  $C$  se deben conocer para poder resolver el sistema de ecuaciones.

### 1.3.6. Método de energía

El método de conservación de la energía puede ser combinado con los conceptos de trabajo virtual, lo cual lleva a las ecuaciones de Lagrange que pueden ser usadas para obtener la descripción del movimiento del sistema, incluso si son amortiguados y forzados. Sin embargo, antes de explicar su funcionamiento se debe introducir el concepto de coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio pueden estar compuestas por distintos sistemas de coordenadas, no obstante, aquellos sistemas de coordenadas independientes entre sí y de las condiciones de restricción se les llama coordenadas generalizadas,  $q_j$ . De igual forma, se designará como  $Q_j$  a las fuerzas generalizadas que estén actuando sobre el sistema. Estas fuerzas se definen según la ecuación 1.3.12, donde  $U_j$  es el trabajo realizado al cambiar las coordenadas generalizadas  $q_j$  y  $\delta q_j$  la cantidad desplazada.

$$Q_j = \frac{U_j}{\delta q_j} \quad (1.3.12)$$

Análogamente a como se ha desarrollado anteriormente,  $Q_j$  puede adquirir el valor de una fuerza o momento, así como  $q_j$  puede ser una coordenada de desplazamiento lineal o angular. Así mismo,  $q_j$  y  $Q_j^{(n)}$  representan la velocidad generalizada y la fuerza generalizada no conservativa, respectivamente.

Con esto en consideración, el método de Lagrange define el concepto de lagrangiano  $L$ , como la resta entre la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $U$  del sistema, ambos en términos de las coordenadas generalizadas  $q_i(t)$ .

$$L = T - U \quad (1.3.13)$$

Así, el método establece que para un sistema conservativo sin amortiguamiento, la ecuación 1.3.14 tiene la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.3.14)$$

Si se sustituye la ecuación 1.3.13 en 1.3.14, entonces se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (1.3.15)$$

Lo que resultará en una ecuación para cada coordenada generalizada. En resumen, es importante para que el sistema esté correctamente definido la identificación de los

sistemas de energía y el uso de las coordenadas generalizadas.

### 1.3.7. Ecuaciones de energía para un sistema con amortiguamiento y forzado

Finalmente, es posible obtener las ecuaciones de movimiento a través del método de conservación de energía para un sistema con dos grados de libertad, forzado y con amortiguamiento viscoso. Para esto, se utilizarán los elementos mostrados anteriormente y se derivará la ecuación. Además se añadirá el efecto de la energía potencial gravitatoria, factor importante en el caso estudiado en este trabajo, según la ecuación 1.3.16.

$$U_g = mg q_i \quad (1.3.16)$$

Por lo tanto, la energía potencial total del sistema, tendrá la siguiente forma:

$$U = U_k + U_g = \frac{1}{2} k q_i^2 + mg q_i \quad (1.3.17)$$

**utilizar figura 425 pag 382 Inman como referencia del sistema de coordenadas**

A partir de la ecuación 1.3.14, considerando los valores de la energía cinética y potencial de las ecuaciones 1.2.5 y 1.3.17, es necesario añadir las fuerzas de amortiguamiento y las fuerzas externas no conservativas. La suma de estas fuerzas fue desarrollada en las secciones 1.3.2 y 1.3.3, dando como resultado las ecuaciones 1.3.5 y 1.3.7. **Revisar parrafo y ecuación, definir letras**

$$Q_i = F_i(t) + Q_{Ri} = F_i(t) - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.3.18)$$

De esta manera, una vez identificado todos los sistemas de energía y sus respectivos valores, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i(t) \quad (1.3.19)$$

El cual, una vez derivado y escrito de forma matricial, adquiere la siguiente forma:

$$M \ddot{\mathbf{q}}_i + C \dot{\mathbf{q}}_i + K \mathbf{q}_i = \mathbf{F}_i \quad (1.3.20)$$

---

# Capítulo 2

## Metodología

### 2.1. Levantamiento de información

El departamento de ingeniería mecánica en el Campus Casa Central, posee una máquina de fatiga (MF) uniaxial en flexión en el laboratorio de tecnología mecánica que se encuentra en la universidad hace más de 50 años, sin saber su fecha exacta de adquisición. La medición de fatiga es realizada a través del método de *esfuerzo-vida*, utilizando la configuración de *rotating bending*, ambos descritos en el capítulo anterior. La información existente sobre la máquina de ensayos es escasa, principalmente por su antigüedad, la perdida de documentos y obsolescencia de la electrónica. Por lo mismo, parte del trabajo de esta memoria se centra en lograr rescatar información y su posterior comprensión para lograr tener operativa la máquina de fatiga.



Figura 2.1: Máquina de fatiga en flexión en el laboratorio de tecnología mecánica

### 2.1.1. Estado actual y antecedentes

Actualmente la máquina no puede ser utilizada por no estar anclada, estando apoyada sobre dos listones de madera, que a su vez, están sobre una mesa de madera como se aprecia en la figura REF. Por consiguiente, la máquina al ser utilizada comienza a vibrar, saltar y desplazarse lateralmente, lo que impide su uso prolongado por motivos de seguridad. Es decir, no es posible realizar correctamente un ensayo de fatiga de ningún material ni configuración.

A partir de información verbal entregada por el profesor Fernando Rojas, se cree que la máquina fue adquirida por el departamento hace, al menos, 50 años atrás. Fue fabricada en Suiza por *Alfred J. Amsler & Co.* y su estructura completa es de acero fundido. Previo a la remodelación del piso del laboratorio, la máquina se encontraba anclada al piso con un bloque de concreto que fue demolido durante los trabajos de remodelación, momento desde el cual se encuentra sin una solución definitiva. Más aún, varios equipos y máquinas de ensayo del laboratorio no se encuentran ancladas al piso ni con una instalación definitiva impidiendo su uso.

La única modificación que posee la máquina, según la información recopilada, consiste en el cambio del contador de revoluciones o ciclos realizados en un ensayo de fatiga. Esta actualización consistió en sacar el contador mecánico original y reemplazarlo por un contador electrónico, el cual tiene sus controles y el display adosada a su estructura, como se puede apreciar en la figura [agregar imagen del contador](#).

El sistema eléctrico de la máquina permanece intacto, la cual se encuentra conectada a la red de la universidad. Conserva su motor eléctrico original junto a un conjunto eléctrico cuya función es suministrar energía de manera continua y estable al motor, para evitar que el ensayo de fatiga se pueda ver afectado por problemas y las variaciones del suministro eléctrico. El motor es de [corriente continua](#) con velocidad constante y sus especificaciones se pueden ver en la tabla 2.1:

Especificaciones Motor	Valor
Tensión	220 [V]
Corriente	0,8 [A]
Factor de potencia ( $\cos \varphi$ )	Sin información
Potencia	100 [W]
Velocidad	1500 [rev/min]

Cuadro 2.1: Especificaciones del motor de la máquina de fatiga.

Otro elemento distinto al original consiste en la correa de transmisión entre el motor eléctrico y el disco desbalanceado. La original consistía en una correa de cuero plana y

cruzada, sin información respecto a su empalme. La correa actual consiste también en una correa plana y cruzada, sin embargo, su material es tela y el empalme es realizado a mano con hilo acerado. Cabe destacar que lo poco usual de las dimensiones, características y la necesidad de hacer el empalme en la misma máquina, dificulta la búsqueda de una correa que pueda cumplir de manera óptima la transmisión de potencia. Parte de estas dificultades se deben a que el sistema de transmisión no ha sido modificado donde sus poleas tienen dimensiones, tanto de diámetro como de ancho, que no están normalizadas o se encuentran fuera de catálogo de mucho proveedores.

Por otro lado, los elementos de agarre de la probeta no tienen modificaciones conocidas, tanto el brazo que recibe el movimiento como el agarre empotrado a la estructura de la máquina. La fabricación de las probetas utilizadas se realiza en el mismo laboratorio a partir de acero AISI 1020 o 1040, el cual para conseguir las dimensiones de la figura REF. se debe cortar y tornear.

Finalmente, para realizar los ensayos en distintas configuraciones existen distintas masas (figura REF) que desequilibran el disco rotativo, como se verá en la sección 2.1.2, y estas combinaciones se especifican en una tabla de cargas (Anexo REF). Sin embargo, se desconoce el origen, y en consecuencia, la fiabilidad de la información contenida en esta tabla.

### 2.1.2. Funcionamiento

La máquina de fatiga tiene como objetivo lograr que para cada ciclo se ejerza el mismo esfuerzo determinado sobre la probeta, en forma de flexión. Para lograr esto, el mecanismo utilizado es un disco desequilibrado girando a una velocidad constante  $\dot{\theta}$ , la fuerza es transmitida hasta un brazo que sostiene a su vez a la probeta, generando flexión en la probeta con un doble empotramiento. La velocidad  $\dot{\theta}$  del disco se transmitida desde el motor eléctrico a través de poleas y una correa de transmisión en una relación de 1:1 revisar, a una velocidad de 1500 revoluciones por minuto. Así, para realizar las mediciones de fatiga a distintas cargas se modifica el desequilibrio del disco a través de un conjunto de masas, mostradas en la figura REF, que permiten generar distintas configuraciones y, por consiguiente, esfuerzos en la probeta.

Agregar imagen de contrapesos c Los elementos utilizados para desbalancear son 6 discos pequeños de X medir radio masas a Y de diámetro. Estos son enumerados del 1 al 5, donde el 1 es el más liviano y el 5 el más pesado, todos de distinto peso y el quinto se encuentra repetido. Estas se colocan en los extremos del disco giratorio, como se ve en la figura REFindisco, dependiendo de la carga que se deseé generar. Para conocer que

configuración corresponde a cada esfuerzo aplicado sobre la probeta, se utiliza la tabla de cargas explicada a continuación.

Esta tabla, con 3 columnas de información como se ve en el Anexo REF, nos entrega el esfuerzo normal  $\sigma$ , cortante  $\tau$  y la combinación necesaria para generar esos esfuerzos. Los números entre paréntesis nos indican cuantos contrapesos se deben apilar en cada perno adosado al disco giratorio, los cuales llamaremos soportes de contrapeso (SC). Así, la tabla nos señala que la fuerza es función de la diferencia de masa entre cada soporte, es decir, la suma de las masas de cada paréntesis. A modo de ejemplo, en la tabla 2.2 se han colocado las 4 primeras filas de la tabla de cargas, añadiendo 4 columnas con información sobre el peso de cada combinación. En las columnas  $m_1$  y  $m_2$  se aprecia la suma de cada masa colocada en sus soportes de contrapeso señalado por la columna de “Combinación”. Las columnas siguientes representan  $\Delta m = m_1 - m_2$  y  $m_{total} = m_1 + m_2$ . Como se puede apreciar, los esfuerzos normales y cortantes aumentan en la medida que  $\Delta m$  de cada combinación aumenta, independiente de  $m_{total}$ .

$\sigma \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right]$	$\tau \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right]$	Combinación	$m_1$ [g]	$m_2$ [g]	$\Delta m$ [g]	$m_{total}$ [g]
40	20	(5) - (1+2+3+4)	30,9199	30,5071	0,4128	61,427
80	40	(1) - (0)	0,7582	0	0,7582	0,7582
120	60	(5) - (4+2+3)	30,9199	29,7489	1,171	60,6688
160	80	(2) - (1)	2,2969	0,7582	1,5387	3,0551

Cuadro 2.2: Tabla de configuración de las masas modificada, mostrando el peso, su diferencia y el total para cada combinación

Con esto, la probeta a ensayar estará sometida a un esfuerzo en flexión, empotrada en ambos lados por la mordaza del brazo y la mordaza empotrada a la estructura de la máquina, ambas mostradas en la figura REF. Una vez que se haya escogido la configuración de masas y la probeta se encuentre en su posición, una pequeña barra con una manilla ubicada entre las barras de acero, como se aprecia en la figura REF, eleva ambas barras con el objetivo de evitar que oscile durante el encendido y aceleración del motor hasta su velocidad final, dejando a la barra en una configuración de empotrado y apoyo simple. Una vez que el motor alcanza una velocidad estable, el sostén es girado nuevamente para dejar al disco giratorio en posición de empotrado-libre. Este sostén, permite que el ensayo de fatiga se realice siempre a una frecuencia constante y evitar la transición inicial del motor. Una vez que la probeta se fracture, provocarán un aumento en la amplitud de las oscilaciones del disco las cuales activarán el freno automático (figura REF) para detener el motor y, por lo tanto, el ensayo. Gracias a este sistema, es posible

conocer la cantidad de ciclos que realizados hasta el momento de fractura sin la necesidad de supervisar de manera continua el ensayo.

### Mordazas

#### 2.1.3. Mediciones

Para realizar un correcto diseño de la estructura soportante y la comprensión de su funcionamiento, se hace vital poder contar con información confiable para obtener resultados correctos. Para esto, las mediciones se dividirán según su objetivo en el desarrollo de este trabajo.

##### Diseño de estructura

Las medidas de la mesa actual son:

- Ancho = 74,5 cm
- Largo = 177 cm
- Altura = 91 cm

Por otro lado, para diseñar correctamente la estructura se deben conocer las dimensiones de la máquina, su peso y la ubicación de los pernos de anclaje, así como también el tipo de perno utilizado. La figura REFrealizar diagrama con vistas frontal y lateral de la maquina con sus dimensiones es un esquema representativo de la máquina, mostrando sus dimensiones de ancho, alto y largo, las dimensiones de su base y la ubicación de sus pernos. La masa de toda la máquina se approximó a partir de las dimensiones externas, estimando el grosor de sus paredes y considerando el peso específico del acero fundido, sobreestimando el valor del espesor de sus paredes como factor de seguridad. Considerando el peso específico del acero  $\rho_{ac.fundido} = 7850 [Kg/m^3]$ , entonces la masa total calculada es:

$$\left. \begin{array}{l} V_{base} = (3,3 \cdot 91 \cdot 39 - 3 \cdot 88 \cdot 37) \text{ cm}^3 \\ V_{superior} = (30,2 \cdot 84 \cdot 32 - 26 \cdot 78 \cdot 28,5) \text{ cm}^3 \end{array} \right\} V_{b+s} = 25323,3 \text{ cm}^3$$

$$m_{mag} = \rho_{ac.fundido} \cdot V_{b+s} = 198,8 \text{ kg} \approx 200 \text{ kg} \quad (2.1.1)$$

##### Componentes de la máquina de fatiga

**Sistema de transmisión.** El sistema de transmisión está compuesto por el motor eléctrico, cuyas características se detallaron anteriormente, la correa de transmisión y

ambas poleas. Las dimensiones y características de las poleas conductora y conducida, como también de la correa se encuentran en la tabla 2.3.

Características	Valor
Diámetro polea motriz	48 mm
Diámetro polea conducida	47,5 mm
Relación de poleas	$\approx 1 (-)$
Ancho correa	10 mm
Longitud correa	1235 mm
Configuración	Cruzada

Cuadro 2.3: Datos del sistema de transmisión

**Barras de acero.** El conjunto de barras de acero que sostienen el disco en empotrado-libre, tienen medidas levemente distintas para las superiores respecto a las inferiores, separadas por una distancia de 32 mm. La tabla 2.4 muestra las medidas de cada una.

Medida	Barras superiores [mm]	Barras inferiores [mm]
Espesor	5,7	5,8
Ancho	25,1	25,2
Largo	333	333

Cuadro 2.4: Medidas de las barras de acero según su posición

Con estos datos, es posible calcular el segundo momento de área respecto a un eje central horizontal equidistante entre las barras superiores e inferiores, según el cual es obtiene  $I = asfaf$ .

**Sistema de transmisión de fuerzas.** El brazo principal (figura 2.2) que ejerce la fuerza sobre la probeta proveniente del disco desbalanceado, está constituido por tres partes principales. La primera de ellas es la parte trasera, con forma regular rectangular, está hecho de una aleación de aluminio y dos tercios de su longitud es ahuecada. La segunda y principal, está hecha de acero fundido y añade el mayor porcentaje de masa al total del brazo. Finalmente, la última parte consiste en la mordaza, unida a la sección principal con dos pernos que permiten ajustar su posición. La longitud total del brazo es de 359 mm y su masa total 2,305 kg.



Figura 2.2: Brazo de carga junto a su mordaza y la mordaza empotrada a la derecha.

La transmisión de la carga entre el disco desbalanceado y el brazo de carga se da a través de dos barras de acero redondas, uno a cada lado del disco, de diámetro 6,2 mm y largo de 169 mm.

**Disco desbalanceado.** En base a las características visuales y auditivas del disco, se cree que está construido en alguna aleación de aluminio. Su radio  $R_d = 112$  mm y espesor de 6,4 mm.

La masa de cada contrapeso, medidos en el laboratorio de metalúrgica con pesas blablabla.

Contrapeso	Masa [g]
1	0,7582
2	2,2969
3	6,8541
4	20,5979
5	30,9199

Cuadro 2.5: Masa de cada contrapeso utilizado

Por otra parte, no fue posible medir directamente la masa del disco al no poder desarmarlo ni separarlo de su eje. Por lo tanto, se midió de la flecha de la viga en voladizo producida por la masa del disco, la polea, el sistema de sujeción y las barras de acero,

se pudo obtener la masa aproximada del disco. Sin embargo, si bien se restó la fuerza producida por la masa de las barras, se incluyó en el cálculo el resto de los elementos acompañantes del disco en la masa obtenida.

**Probeta.** La probeta utilizada actualmente para el ensayo de fatiga es de acero AISI 1020. Su geometría, como se aprecia en la figura REF, consiste en una pequeña viga de largo  $3\frac{1}{2}$ ", de sección cuadrada en sus extremos y una entalladura en el medio de sección circular, de lado  $\frac{1}{2}$ " de lado y 0,3" de diámetro respectivamente.

## 2.2. Diseño de estructura

El proceso de diseñar la estructura hasta su resultado final pasó por distintas etapas. Esto por el proceso de aprendizaje y comprensión de la norma de calculo de madera NCh 1198, como también por la restricción y disponibilidad de materiales, tecnología o medidas acorde a las necesidades. El diseño presentado en este trabajo se muestra en la figura REF, hecho principalmente de madera, junto a elementos de acero. El objetivo de esta estructura es fijar y soportar la máquina de fatiga tanto en reposo como en operación, buscando como características su durabilidad, lo modular de las piezas y la opción de modificarla en el futuro.

### Imagen de vista en perspectiva

La metodología de su diseño, se separará en las distintas etapas que se realizó y los requerimientos que surgieron a partir de estas. Finalmente, se realizó una simulación estática y modal para comparar los cálculos realizados y conocer su frecuencia natural, respectivamente.

### 2.2.1. Diseño en acero

La estructura se diseño para que la conexión con la máquina de fatiga fuera a través de pletinas de acero, utilizando los pernos existentes. Las pletinas, a su vez , están conectadas mediante pernos a las vigas principales de madera de cada extremo. Para llevar acabo los cálculo, se hará como suposición que cada pletina esta con un empotramiento en cada extremo, con dos cargas distribuidas. La primera de ellas es el apoyo de la maquina sobre la pletina y, la segunda, el peso propio del acero. Por lo tanto, la figura REF muestra el diagrama de las cargas que actúan y las distancias a utilizar.

### Diagrama de cargas

Por otro lado, al no conocerse la distribución de masa de la maquina de fatiga, se considerará la carga distribuida en cada pletina como:

$$q_{mag} = \frac{0,75 \cdot m_{mag}}{c} = 384,62 \text{ [kg/m]} \quad (2.2.1)$$

Donde  $m_{mag}$  es la masa estimada en ??, multiplicada por 0,75 como factor de seguridad por la distribución irregular de peso de la máquina. Para obtener el esfuerzo máximo flector es necesario conocer la geometría de la viga, motivo por la cual se iteró entre las distintas opciones disponibles en el mercado de pletinas o barras planas de acero. Por razones estipuladas en la norma NCh 1198, la conexión entre la pletina de acero y la viga principal de madera se debe realizar con un mínimo de dos pernos, por lo tanto, se escogió el ancho máximo del mercad. Así, la tabla 2.6 muestra las dimensiones de la pletina escogida.

Características pletina	Valor
Espesor ( $h_p$ ) [mm]	8
Ancho ( $b_p$ ) [mm]	100
Material	A270ES
Carga distribuida ( $q_{ac}$ ) [kg/m]	6,28

Cuadro 2.6: Dimensiones y características de la viga de acero

Por ende, el cálculo de la reacción en sus apoyos, el momento y esfuerzo flector máximo queda expresado por las ecuaciones 2.2.2a, 2.2.2b y 2.2.2c, respectivamente. Estas fueron calculadas respecto al punto A (o B, por simetría), donde se encuentra el momento flector máximo.

$$R_A = g \left( \frac{m_{mag}}{2} + \frac{q_{ac}L}{2} \right) \quad (2.2.2a)$$

$$M_A = \left( \frac{gcq_{mag}}{24L} \right) \left( 3L^2 - 4c^2 + \frac{6bc^2}{L} - \frac{3c^3}{L} \right) + \left( \frac{gq_{ac}L^2}{12} \right) \quad (2.2.2b)$$

$$\sigma_{max,pl} = \frac{M_A \cdot h_p}{2I_{pl}} \quad (2.2.2c)$$

Así, los valores obtenidos son:

- $R_A = 754,85 \text{ [N]}$
- $M_A = 100,97 \text{ [Nm]}$

- $I_{pl} = 4266,6 \text{ [mm}^4]$

- $\sigma_{max} = 94,66 \text{ [MPa]}$

Con relación a la cargas fluctuantes que recibirán las pletinas como parte del funcionamiento de la máquina, se considerará la carga mayor que es capaz de producir la máquina de todas sus configuraciones, de acuerdo a lo que se obtenga por medio del modelo que se expondrá en la sección 2.3.2. Esta carga alternante sobre la pletina,  $F_{a,pl}$ , se considerará igual a la mitad de la carga máxima posible producida por el disco desbalanceado. Por lo tanto, considerando la configuración utilizada en las cargas estáticas, la carga distribuida alternante será  $q_{a,pl} = F_{a,pl}/c$  y el momento flector máximo en el punto  $A$  es la primera expresión de la ecuación 2.2.2b y el esfuerzo sobre el mismo punto igual a la expresión 2.2.2c, quedando:

$$M_{a,pl,A} = \left( \frac{cq_{a,pl}}{24L} \right) \left( 3L^2 - 4c^2 + \frac{6bc^2}{L} - \frac{3c^3}{L} \right) \quad (2.2.3)$$

$$\sigma_{a,A} = \frac{M_{a,pl,A} \cdot h_p}{2I_{pl}} \quad (2.2.4)$$

Para obtener el factor de seguridad, se utilizará la ecuación de Goodman modificada REFERENCIAR. Para esto, el límite de resistencia a la fatiga de un acero se puede estimar como  $S_e = 0,5S_{ut}$  cuando el esfuerzo último es menor a 1400 MPa. Como el material utilizado es un acero A270ES, entonces su equivalente en la antigua nomenclatura chilena de acero es A42-27ES REFERENCIA, donde el esfuerzo último del material es  $S_{ut} = 420$  MPa, por lo tanto,  $S_e = 210$  MPa. También, el esfuerzo medio será igual al esfuerzo estático calculado anteriormente, donde,  $S_m = \sigma_{max,pl}$ . Así, el factor de seguridad es:

$$FS = \left( \frac{S_e \cdot S_{ut}}{S_a \cdot S_{ut} + S_m \cdot S_e} \right) \quad (2.2.5)$$

## 2.2.2. Diseño en madera

La elección de la madera como elemento principal de construcción se debió por su capacidad de disipar las vibraciones y la relación entre su resistencia y el peso, volviendo la estructura más liviana y útil para las necesidades. Para realizar los cálculos de la madera y sus uniones, se utilizó la norma **NCh 1198 Of. 91 – Madera: Construcciones en madera – Cálculo**, mostrada en el anexo ???. Las dimensiones del diseño de la estructura se realizaron considerando dejar el espacio necesario para la operación de la máquina, conservando la altura actual de 900 [mm]. Si bien en el presente trabajo se expondrán los

cálculos de una especie maderera y sus respectivas dimensiones, se realizaron cálculos con otras especies y en otros formatos para añadir flexibilidad al diseño propuesto. Las maderas consideradas en el trabajo son el pino Oregón, pino Radiata y la línea de pino radiata encolado Hilam de Arauco. Los resultados mostrados en la sección siguiente son los obtenidos al escoger el pino Oregón en formato de 110x110 [mm]. Los valores de las tensiones admisibles para distintas especies madereras se obtienen de la tabla 4 de la sección 6.2 de la NCh 1198, sin embargo, para la madera laminada encolada se encuentran en la norma NCh 2165. Finalmente, para la sección de diseño en madera se utilizará la nomenclatura utilizada por la norma NCh 1198, para evitar confusiones al momento de consultar el anexo o la norma misma.

añadir tabla con las dimensiones de la madera

### 2.2.3. Cálculo de cargas en estructura de madera

Para identificar las distintas partes de madera en la estructura, se utilizará la figura REF como referencia. Tanto las vigas A, C, D y el pilar B, están diseñados de la misma madera y formato. En el anexo REF se pueden apreciar los planos del diseño de la estructura propuesta y sus uniones.

añadir imagen de vigas A, B, C y D

Como se nombró anteriormente, la madera utilizada será pino oregón, el cual bajo las consideraciones de la tabla ?? se considerará como seca tanto en construcción como en servicio al estar en un ambiente cerrado sin calefacción, como se señala en la sección ?? de contenido de humedad. Los valores de densidad, tanto anhidra como normal, se pueden obtener del Anexo E de la norma, a partir de este, la tabla 2.7 muestra los valores del pino oregón.

Especie maderera	Densidad anhidra ( $\text{kg/m}^3$ )		Densidad normal ( $\text{kg/m}^3$ )	
	Valor medio $\rho_o$	Valor característico $\rho_{o,k}^\dagger$	Valor medio $\rho_{12}$	Valor característico $\rho_{12,k}^\dagger$
Pino oregón	410	326	441	350

Cuadro 2.7: Valores de la densidad normal y anhidra del pino oregón.  $^\dagger$ : Definido con el percentil 5 % de exclusión.

**Tensiones admisibles y módulo de elasticidad del pino oregón.** Para la determinación de estos valores es necesario catalogar el grado de calidad, si corresponde

a madera verde o seca y la clasificación de la madera del pino oregón. El agrupamiento de las maderas crecidas en Chile se encuentran en el anexo A de la norma NCh 1198, según la cual el pino oregón se clasifica en el grupo ES 5 para madera seca y se asumirá un grado estructural N° 4. Con esta información, a través de la tabla 6 de la norma, obtenemos que la clase estructural es F8. Con esto, la tabla 4 y 5 entrega la información de las tensiones admisibles y el módulo de elasticidad. Así, la tabla REF los valores del pino oregón utilizado en este trabajo.

Clase Estructural	Flexión $F_f$	Compresión Paralela $F_{cp}$	Compresión Normal $F_{cn}$	Tracción Paralela $F_{tp}$	Cizalle $F_{cz}$	Módulo de elasticidad en flexión $E_f$
F8	8,6 (MPa)	6,6 (MPa)	4,1 (MPa)	5,2 (MPa)	0,86 (MPa)	6,9 (GPa)

Cuadro 2.8: Tensiones admisibles y módulo de elasticidad en flexión para madera de pino oregón según su clase estructural.

**Factores de modificación.** Dada las condiciones en las que trabajará la madera, se deben calcular tres factores de modificación que afectan de manera global a la madera, sin embargo el factor de modificación por trabajo conjunto,  $K_C$ , no se considera en este caso. La modificación por contenido de humedad se calcula con un factor  $\Delta R$  y por la diferencia entre la humedad de la madera y una humedad del 12 %,  $\Delta H$ . Considerando una humedad de la madera del 15 %, entonces los valores de  $K_H$  para cada solicitud son los siguientes se muestran en la tabla 2.9.

Factor de modificación por humedad	Flexión $F_f$	Compresión Paralela $F_{cp}$	Compresión Normal $F_{cn}$	Tracción Paralela $F_{tp}$	Cizalle $F_{cz}$	Módulo de elasticidad en flexión $E_f$
$K_H$	0,999385	0,999385	0,999385	0,99952	0,999199	0,999556

Cuadro 2.9: Valores del factor de modificación para el pino oregón.

Por otro lado, el factor de modificación por duración,  $K_D$ , se aplica a través de la ecuación 2.2.6, donde la duración de la carga  $t$  se aplica en segundos. También, la norma incluye el gráfico de  $K_D$  siendo una opción para su cálculo. Los valores admisibles que se señalan en la norma corresponden a una vida útil de 10 años de duración, sin embargo, para una vida útil indefinida el valor de  $K_D$  corresponde a 0,9. Este factor de modificación no afecta al módulo de elasticidad ni a la tensión admisible de compresión normal.

$$K_D = \frac{1,747}{t^{0,0464}} + 0,295 \quad (2.2.6)$$

### Viga principal, A

Es la viga que soporta la carga de las pletinas que sostienen a la máquina y a su vez descansa la carga en los pilares B. Para realizar los cálculos de esfuerzo se consideró un doble empotramiento en cada extremo, con tres cargas distribuidas que representan la carga de las pletinas de acero,  $q_{pl}$ , las cuales se determinarán según la ecuación 2.2.7, y el peso propio de la madera.

$$q_{pl} = \frac{q_{mag} c + q_{ac} L}{2b_p} \quad (2.2.7)$$

El diagrama y la distribución de la carga se puede apreciar en la figura REF. Por otro lado, el esfuerzo máximo se presenta en los extremos de la viga. Las ecuaciones 2.2.8a y 2.2.8b, muestran la obtención de las reacciones y del momento flector máximo.

$$R_0 = g \left( q_{pl} \cdot b_p + \frac{L \cdot q_{mad}}{2} \right) \quad (2.2.8a)$$

$$M_0 = \left( \frac{q_{pl} \cdot g \cdot b_p}{L^2} \right) \left( l_2 l_6^2 + l_6 l_2^2 - \frac{b_p^2}{12} (l_6 + l_2) \right) + \frac{R_0 \cdot L}{6} \quad (2.2.8b)$$

Donde los valores obtenidos son:

- $R_0 = Q = 795 \text{ [N]}$
- $M_0 = M_{max} = 122,26 \text{ [Nm]}$

Así, la tensión de trabajo  $f_f$  se calcula según la ecuación ??, obteniéndose el valor:

$$f_f = 0,551 \text{ (MPa)} \quad (2.2.9)$$

De este modo, la tensión de diseño en la zona flexo-traccionada y flexo-comprimida que se calcula a partir de ?? y ??, respectivamente. Para la zona flexo-traccionada se debe calcular el factor de modificación por altura y para la flexo-traccionada el factor de modificación por volcamiento. El primero se obtiene con la ecuación ??, obteniéndose el valor de  $K_{hf} = 0,916$ . Para el factor de volcamiento, se deben verificar el caso que corresponde como se señala en el anexo ??, el cual da un valor de  $K_v = 1$ . Por lo tanto, el valor de  $F_{ft,dis}$  y  $F_{fv,dis}$  son:

$$F_{ft,dis} = 7,08 \text{ (MPa)} \quad (2.2.10a)$$

$$F_{fv,dis} = 7,74 \text{ (MPa)} \quad (2.2.10b)$$

Por otro lado, la tensión de trabajo en cizalle se obtiene a partir de la ecuación ?? y la de diseño en cizalle por ???. Dado que  $K_r = 1$  al no haber rebajo de la viga, entonces el valor obtenido para ambas tensiones son:

$$f_{cz} = 0,098 \text{ (MPa)} \quad (2.2.11)$$

$$F_{cz,dis} = 0,774 \text{ (MPa)} \quad (2.2.12)$$

Finalmente, los valores de factor de seguridad (FS) para cada uno de las tensiones calculadas son los siguientes:

$$FS_{ft} = 12,85 \quad (2.2.13a)$$

$$FS_{fv} = 14,03 \quad (2.2.13b)$$

$$FS_{cz} = 7,85 \quad (2.2.13c)$$

## Pilar de apoyo, B

El pilar B representa los cuatro apoyos de la estructura, recibiendo la carga de la máquina y su operación desde la viga principal y transmitiéndola hasta el piso. Por la disposición del cuartón, estará sometido a compresión paralela (??). Al igual que en la viga principal, se debe calcular la tensión de trabajo ( $f_{cp}$ ) y la tensión de diseño en compresión paralela ( $F_{cp,dis}$ ). Al ser el mismo formato y especie maderera de la viga principal, su área transversal sigue siendo de 110x110 mm, mientras que el largo del pilar ( $L_v$ ) corresponde a 790 mm.

Para el primero, se obtiene a través de la ecuación ??, donde la carga  $N$  será igual a la reacción obtenida en 2.2.8a. Así, su valor es:

**Corregir con área modificada por pernos**

$$f_{cp} = 0,0657 \text{ (MPa)} \quad (2.2.14)$$

Para el segundo, el cálculo de la tensión de diseño dependerá de la inestabilidad lateral dado por la esbeltez  $\lambda$ . La longitud efectiva de pandeo se obtiene a través de la tabla 18 de la norma, de la cual se escogerá la configuración de apoyo con impedimento de giros y desplazamiento por un extremo y, para el otro lado, impedimento de giro con libertad de

desplazamiento, es decir,  $l_p/L_v = 1,5$ . De esta forma, los valores obtenidos son:

$$l_p = 1,5 \cdot L_v = 1,185 \text{ (m)}$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{0,11^4}{12 \cdot 0,11^2}} = 0,032 \text{ (m)}$$

$$\lambda = \frac{l_p}{i} = 37,32 \text{ (-)}$$

Como  $\lambda > 5$ , entonces la tensión de trabajo de compresión paralela se debe calcular según ?? y se debe evaluar el factor de modificación por esbeltez  $K_\lambda$  a partir de ?. El coeficiente de proporcionalidad para una madera de grado n° 4 es  $c = 0,8$  y el módulo de elástico de diseño es  $E_{dis} = 6206,2 \text{ (MPa)}$ . Por otro lado, la tensión de diseño  $F_{cp,dis}$  se obtiene según ?? y los factores de modificación  $K_D$  y  $K_H$ .

$$F_{cp,dis} = 5,936 \text{ (MPa)} \quad (2.2.15)$$

Con esto, los valores de las constantes y el factor de modificación serán  $A = 2,852 \text{ (-)}$ ,  $B = 3,754 \text{ (-)}$  y  $K_\lambda = 0,759 \text{ (-)}$ . Así, el factor de modificación final  $F_{cp,\lambda,dis}$  será:

$$F_{cp,\lambda,dis} = 4,506 \text{ (MPa)} \quad (2.2.16)$$

Finalmente, el factor de seguridad con esta configuración es:

$$FS_{cp,\lambda} = 68,6 \text{ (-)} \quad (2.2.17)$$

### Viga transversal, C

Para esta viga se realizará el mismo procedimiento que para la viga A, sin embargo, las solicitudes son menores y la única carga a la que está sometida es la de su propio peso. Las dimensiones nominales de la tabla son 1x8" cepillada, es decir, según las tablas de valores ?? y ?? son de 19x185 mm y su largo es de 800 milímetro. La carga distribuida de su peso es de  $q_{tabla} = 1,5 \text{ [kg/m]}$ .

Debido a lo bajo de las solicitudes, las tensiones de trabajo en flexión son:

$$f_f = 3,804 \text{ (kPa)} \quad (2.2.18)$$

Por otro lado, por las dimensiones de la madera usada, el factor de modificación por altura

y volcamiento son los siguientes:

$$K_{hf} = 0,864 \text{ (-)}$$

$$K_v = 0,586 \text{ (-)}$$

El cálculo de  $K_v$  se realiza con la ecuación ??, porque la esbeltez del límite elástico es menor a la esbeltez de volcamiento.

$$\lambda_v = 23,38 \text{ (-)}$$

$$\lambda_{vo} = 21,95 \text{ (-)}$$

Así, la tensión de diseño en flexión de esta viga es de:

$$F_f = 3,9235 \text{ (MPa)} \quad (2.2.19)$$

## 2.2.4. Uniones

Las uniones en madera se deben diseñar siguiendo las indicaciones establecidas en la sección 10 de la norma NCh1198, uniones en la madera estructural. Esta considera la condición de la madera en operación, el tipo de unión, la dirección de la solicitud respecto a la dirección de la fibra, el número de elementos de unión, el distanciamiento entre los elementos de unión y el tipo de cizalle. Para el diseño de la estructura se utilizaron tres elementos de unión distintos: tirafondos, pernos **y, en menor medida, clavos.**

### Acero - madera

Para la unión entre la pletina de acero y la viga principal de madera, se utilizaron dos pernos de grado 2 de  $4\frac{1}{2}$ " de largo y  $3/8"$  de diámetro. Como se explica en la sección ?? el mínimo de pernos por unión debe ser dos, con la excepción de que el único perno no esté solicitado en un porcentaje superior al 50 % de su capacidad de diseño. La unión está compuesta por la pletina de acero, seguido por la viga de madera con la dirección de sus fibras normal a las solicitudes y nuevamente una placa de acero. Finalmente, para el cálculo de la capacidad de carga admisible y tensión admisible de aplastamiento nominal, se recurrirá a las ecuaciones ?? y ??, respectivamente.

Para calcular la capacidad de carga admisible,  $P_{ad}$ , se utilizaron las indicaciones para cizalle simple, las cuales indican que se determina como el menor valor de la mitad de la

carga admisible de cizalle doble entre una pieza central de espesor igual a la pieza más grande y una pieza central igual al dobleasí del espesor de la pieza más delgada. Para este diseño el valor menor consiste en considerar el espesor central ficticio  $e^*$  como dos veces el espesor menor, es decir, el espesor lateral  $e_l$ , así el valor de esbeltez del perno es:

$$\lambda_u = \frac{2 \cdot e^*}{D} = \frac{2 \cdot 8 \text{ mm}}{9,525 \text{ mm}} = 1,679 (-)$$

Para obtener los valores de  $F_{ap}$  el valor del factor de reducción de zona elástica se obtiene a partir de la densidad anhidra de la madera (tabla 2.7, siendo  $\eta = 2,2$ . Por otro lado el ángulo  $\theta$  es de  $\pi/2$  al estar las fuerzas en dirección normal a la fibra de madera. Con esto, se obtiene:

$$F_{ap} = 3,402 \text{ (MPa)} \quad (2.2.20)$$

$$P_{ad,simple} = \frac{P_{ad,doble}}{2} = 259,24 \text{ (MPa)} \quad (2.2.21)$$

Para terminar, se debe corroborar que se cumple la desigualdad de la ecuación ??, así:

$$Z \cdot D^2 = 2131,94 \text{ (MPa)} \geq 259,24 \text{ (MPa)}$$

**Espaciamiento** El espaciamiento entre los pernos se especifica en la sección ??, de las cuales se obtiene la distancia entre pernos y los bordes es:

$$S_{bcn} = 1,5 \text{ mm}$$

$$S_{bdn} = 0,75 \text{ mm}$$

$$S_p = 2,625 \text{ mm}$$

## Madera - Madera

Existen distintos componentes de unión para la conexión de elementos de madera. En este trabajo se utilizó el tirafondo, perno y clavo como elementos principales de unión. Cada uno de ellos tiene distintas características que los vuelven ventajosos en ciertas situaciones. La utilización del tirafondo se utiliza para unir la viga C con el pilar B y la viga A, por su capacidad de “empujar” una madera contra la otra de manera eficiente. Los pernos, por otro lado, se utilizaran para la unión de herrajes entre la viga D y el pilar B, como también en los herrajes de anclaje del pilar B con el piso. En el caso de los clavos, estos se ocupan en los herrajes o ángulos de apoyo entre las vigas A y B, para evitar su movimiento transversal. Para estos dos últimos elementos de unión, su elección

está supeditada a las recomendaciones del fabricante de los herrajes o ángulos, quienes incluyen los valores de carga en la elección de los elementos de unión. Por lo mismo, la caracterización de estos elementos se realizará en la sección de herrajes.

### Tirafondos

Las indicaciones para el cálculo, espaciamiento e instalación de los tirafondos se encuentran en la sección ???. Al igual que el proceso de selección de vigas de madera, se iteró con distintas dimensiones de largo y diámetro. Así el tirafondo escogido fue de 1/4x3½", lo cual se traduce a partir del anexo M de la norma en las medidas expuestas en la tabla 2.10.

Nomenclatura tirafondo	Diámetro Nominal ( $D_v$ o $D$ ) [mm]	Diámetro de rosca ( $D_R$ ) [mm]	Largo roscado (R) [mm]	Largo vástago (V) [mm]	Largo punta (P) [mm]
1/4x3½"	6,4	4,4	51	38	4,8

Cuadro 2.10: Dimensiones del tirafondo utilizado

Para su instalación, la norma indica que es necesario realizar perforaciones guías, las cuales están en función de sus características. Así el agujero tendrá dimensiones para la zona del vástago y otra para la zona con rosca. Para la zona del vástago, el agujero deberá tener las dimensiones del diámetro nominal  $D_v$  y el largo V. Para la segunda zona, la madera de pino oregón se categoriza en el grupo B según su densidad anhidra, a partir de la tabla 38 de la norma. Con esta información el largo del agujero debe ser de R - P y el diámetro del entre el 60 % y el 70 %.

**Solicitudes de extracción lateral** La carga admisible de extracción lateral se calcula según la ecuación ???. El valor K se obtiene a partir de la tabla 39 de la norma a partir de si la madera utilizada es conífera o latifoliada y su densidad anhidra. El pino oregón es una madera conífera y, según su densidad, el valor de K es de 11,7. Así el valor obtenido es de  $P_{el,ad} = 0,48$  (kN). Sin embargo, la norma establece tres condiciones que se deben cumplir para que la expresión ?? sea aplicable, de las cuales no se cumple que el espesor  $e_L$  de la pieza lateral atravesada por el tirafondo sea igual a  $3,5 \cdot D$ . Por esto se debe mayorar el valor de la carga admisible por factores de modificación que pueden penalizar o ayudar, dependiendo de la configuración de la unión.

**Factor de modificación por espesor de la pieza lateral.** El factor se obtiene a partir de la tabla 40 de la norma, debido a que  $e_L \neq 3,5 \cdot D$ . El valor  $K_{te} = 0,93$  se obtiene al ingresar a la tabla con la razón  $e_L/D \approx 3$ .

**Factor de modificación por penetración del vástago en la pieza principal.** De manera análoga, el factor se obtiene en la tabla 41 de la norma a partir de la razón la penetración del vástago en la pieza,  $P_v$  y el diámetro del tirafondo. El valor de este es  $P_v/D \approx 5$ , lo cual da que  $K_v = 1,36$

**Factor de modificación por diámetro.** Por último, este factor se obtiene directamente del diámetro nominal del tirafondo, a través de la tabla 42 de la norma. El valor corresponde a  $K_{tD} = 0,97$ .

Además de los factores de modificación expuestos, el eje del tirafondo se encuentra en dirección paralela a las fibras de la madera de la pieza principal, por lo tanto se debe multiplicar el valor de la carga admisibles por  $2/3$ . En conclusión, la carga admisible es igual a :

$$P_{el,ad} = \frac{2}{3} \cdot K_{te} \cdot K_{tv} \cdot K_{tD} \cdot K \cdot D^2 \cdot = 391,966 \text{ (N)} \quad (2.2.22)$$

**Solicitudes de extracción directa** Para el caso de la extracción directa es la ecuación ?? la que determina la carga admisible de tirafondos colocados con su eje normal a las fibras de la madera. Dado que este no es el caso, como se señaló en la sección de extracción lateral, la carga admisible a considerar se debe multiplicar por  $3/4$ . Por otra parte, el valor de la longitud crítica de penetración  $l_{crit} = 10 \cdot D_R$  se obtuvo de la tabla 43 de la norma. Sin embargo, la longitud real de penetración de la zona roscada (R-P) es menor a la longitud crítica, por lo tanto en la ecuación se reemplaza  $l_{crit}$  por  $l = R - P$ . Entonces el valor obtenido para la carga admisible es:

$$P_{ed,ad} = 6,37 \text{ (kN)} \quad (2.2.23)$$

## Herrajes y conectores

La elección de los conectores y herrajes utilizados se baso en tres aspectos principales: la disponibilidad de los productos en la región, la compatibilidad con los elementos de madera y con las cargas que pueden resistir según el fabricante. Estos consisten en un elemento de metal, acero generalmente, que permite la unión de dos o más piezas de madera para soportar determinadas cargas. Existen en distintas geometrías y el mecanismo de conexión entre acero y madera es a través de elementos de unión mecánica, es decir, pernos, clavos y tornillos, principalmente. Para este trabajo se utilizaron tres tipos, los cuales une las vigas A y B, B y D y B con el suelo del laboratorio, todos fabricados por la marca Simpson Strong-Tie.

Para la primera unión se utilizó en el diseño un ángulo de apoyo modelo A66, donde cada brazo tiene una longitud de 6". La unión mecánica utilizada son los clavos de **buscar dimensiones**. Como se puede apreciar en la figura REF, este ángulo busca responder a las fuerzas que son paralelas al plano horizontal.

#### Imagen A66

Para la unión del pilar B y la viga D se utilizó **colocar nombre**. Este se une a través de un perno por cada brazo de **dimensiones**. Estos buscan soportar la carga provocada por el propio peso y evitar los desplazamientos horizontales. Su disposición se puede ver en la figura REF, donde se aprecia cómo se utilizan dos ángulos por conexión.

#### Detalle del diseño de la mesa

Por último, la unión entre el piso y el pilar B se escogió un ángulo de anclaje A24. Utiliza un perno de anclaje para el piso y otro normal que es adosado en el otro extremo del pilar por un segundo ángulo de anclaje, de manera similar a la unión B-D. La imagen REF muestra en detalle el diseño de la conexión.

### 2.2.5. Simulaciones

Las simulaciones de la máquina se utilizaron como apoyo y contraparte de los cálculos realizados manualmente. Éstas se realizaron en el software Inventor AutoCAD, en el ambiente "*Stress Analysis*". A través de esto se buscó confirmar que los resultados obtenidos en los cálculos estáticos se encuentran fuera de los rangos de falla y obtener las frecuencias naturales de la estructura, utilizando "*Static and Modal Analysis*" respectivamente.

Debido a las limitantes del programa utilizado, se debieron adaptar las propiedades mecánicas ortotrópicas de la madera, las cuales no era posible simular directamente. Para esto, se utilizaron los valores mínimos del Módulo de Young y las tensiones admisibles en sus direcciones normales y perpendiculares, buscando representar de manera segura las propiedades ortotrópicas en una configuración isotrópica.

Como condición del problema, en ambas simulaciones, los apoyos del pilar se consideraron empotrados, restringiendo cualquier grado de movimiento en su base. Además, las uniones se consideraron perfectas y sin desplazamientos.

#### Estática

Las condiciones...

**Modal**

La configuración...

## 2.3. Modelo del sistema de vibratorio

Luego del levantamiento de información, se busca analizar y predecir el comportamiento de la máquina en sus distintas configuraciones. Para esto se utiliza la información disponible para realizar un modelo del funcionamiento de la máquina de fatiga, en específico, de la carga aplicada a la probeta en función de la velocidad de rotación del disco y las distintas combinaciones de contrapesos. El disco se encuentra en voladizo, cuyo desequilibrio a partir de los contrapesos colocados produce una fuerza que es transmitida hacia un brazo de carga. Este, a su vez, aplica un momento de flexión sobre una probeta que está doblemente empotrada por mordazas.

Para obtener el comportamiento y la fuerza que produce el desbalanceo en el disco sobre la probeta, se modelará un sistema de dos grados de libertad para representar el movimiento de la máquina y sus componentes, realizando ciertas simplificaciones y suposiciones. Se utilizará el método de energía para resolver el sistema.

A través de esto, se pretende obtener la posición en reposo de la máquina y la deformación máxima que sufre la probeta según la combinación de contrapesos. En concreto, la posición en reposo de la máquina, en otras palabras, la deformación producto de la masa de los elementos, entregará información sobre cual es la carga media y esfuerzo medio que sufre la probeta. En cambio, la deformación máxima es la información relativa al esfuerzo alterante que se le aplica a la probeta según la configuración utilizada. Por ello, el modelo deberá partir de una posición a conveniencia en un tiempo inicial y sin fuerzas externas interviniendo. Posteriormente, una vez que se haya alcanzado la posición de equilibrio, la fuerza externa producida por el disco desbalanceado comenzará a funcionar hasta que vibre de manera estacionaria. Al respecto, al ser la fuerza dependiente de la velocidad angular del disco, se introducirá una función que llamaremos  $\phi$  la cual controlará la aceleración y velocidad del disco.

### 2.3.1. Elementos del sistema

La imagen REF muestra todas los elementos que participan en el funcionamiento de la máquina y que afectan su comportamiento. Sin embargo, estos se llevarán a un diagrama que representará los elementos y las simplificaciones utilizadas para modelar el

movimiento de la máquina, en específico, del brazo de carga.

### Foto de la máquina abierta

#### 2.3.2. Modelo del sistema

Como se señaló, para poder crear un modelo del sistema y obtener soluciones, se realizaron simplificaciones y suposiciones que permiten llegar a una solución. Así, la figura REF muestra el diagrama que se modelará con las ecuaciones de movimiento. Parte de estas simplificaciones es la exclusión de las fuerzas horizontales, en dirección de la coordenada  $x$ , de acuerdo a la referencia utilizada. Para esto, también es necesario quitarle los grados de libertad a la barra de transmisión de la carga y simplificar la carga producida por la rotación del disco, explicado en la sección siguiente. Por último, se asumirá que el movimiento angular del brazo de carga será lo suficientemente pequeño como linealizar la función trigonométrica del ángulo  $\theta$ , aproximándose los valores de  $\sin(\theta) = \theta$  y  $\cos(\theta) = 1$ .

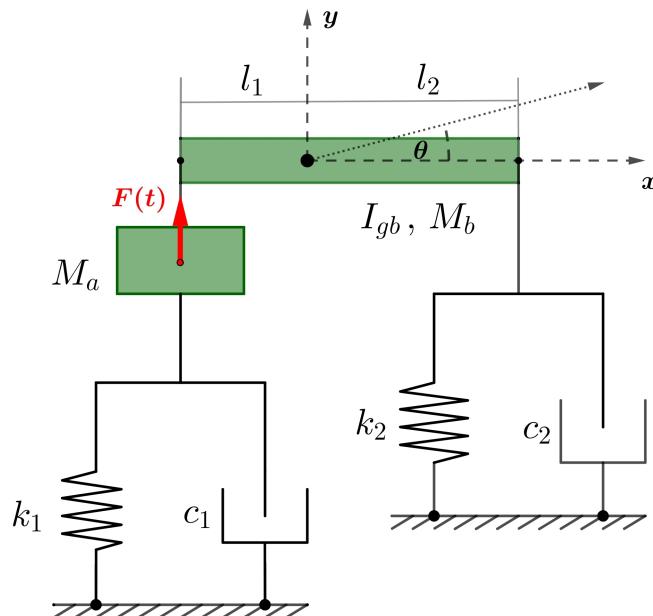


Figura 2.3: Diagrama del modelo utilizado y el sistema de coordenadas.

Los sistemas de coordenadas  $y(t)$  y  $\theta(t)$  definen la posición y el movimiento del brazo de carga en cualquier instante  $t$ . Al ser independientes entre sí y no depender de ninguna restricción, es que las coordenadas generalizadas serán  $q_1 = y$  y  $q_2 = \theta$ . A modo de conveniencia se establecerán las variables  $y_1$  e  $y_2$ , las cuales describen el movimiento en

ambos extremos del brazo.

$$y_1(t) = y(t) - l_1\theta(t) \quad (2.3.1)$$

$$y_2(t) = y(t) + l_2\theta(t) \quad (2.3.2)$$

Cuando  $y(t_0) = 0$  y  $\theta(t_0) = 0$  la deformación en ambos resortes será cero, por lo tanto las variables  $y_1$  e  $y_2$  son equivalentes a la deformación de los resortes. La rigidez de cada resorte se denotarán como  $k_1$ , relativo a las barras de acero, y  $k_2$ , relativo a la probeta.

Por otro lado, la velocidad de las coordenadas se definirán como  $\dot{y}(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  y, de manera análoga, la aceleración como  $\ddot{y}(t)$  y  $\ddot{\theta}(t)$ . A partir de las ecuaciones 2.3.1 y 2.3.2 se obtiene que:

$$\dot{y}_1(t) = \dot{y}(t) - l_1\dot{\theta}(t) ; \quad \ddot{y}_1(t) = \ddot{y}(t) - l_1\ddot{\theta}(t) \quad (2.3.3)$$

$$\dot{y}_2(t) = \dot{y}(t) - l_2\dot{\theta}(t) ; \quad \ddot{y}_2(t) = \ddot{y}(t) - l_2\ddot{\theta}(t) \quad (2.3.4)$$

La variable  $M_a$  representa la masa total del disco, que se expresa como:

$$M_a = M_d + m_1 + m_2 \quad (2.3.5)$$

Donde  $M_d$  es la masa del disco y  $m_1$  y  $m_2$  la suma de los contrapesos colocados en cada soporte.

Las constantes del brazo de carga,  $M_b$  es la masa total del brazo de carga e  $I_{gb}$  el momento de inercia con respecto al centro de masa. Las longitudes  $l_1$  y  $l_2$  corresponden a la distancia entre el centro de masa y la unión con la barra y la probeta, respectivamente. Por último, las constantes  $c_1$  y  $c_2$  son los amortiguamientos correspondientes a cada resorte.

### Modelo del disco

Frente a la eliminación de las fuerzas horizontales del modelo, se simplificó la carga producida por el disco desbalanceado a una fuerza variable en el tiempo, que actúa solo en dirección vertical y es externa al sistema. Esta fuerza queda expresada de la siguiente forma:

$$F_d(t) = M_a e_{ga}(\dot{\phi}^2 \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \phi) \quad (2.3.6)$$

La variable  $e_{ga}$  corresponde a la excentricidad del centro de masa del disco provocada por el desequilibrio entre  $m_1$  y  $m_2$ , el cual se detallará en la sección siguiente. También, la función  $\phi$ , con su respectiva velocidad y aceleración, es la coordenada angular del disco

respecto al tiempo, la que será explicada en la sección 2.3.4.

## Ecuaciones de movimiento

Utilizando el diagrama expuesto, entonces es posible escribir las ecuaciones que describen el movimiento del sistema utilizando el método de energía. Para esto, es necesario identificar los sistemas que actúan como parte de la energía cinética y potencial del sistema, además de las fuerzas externas que interactúan.

A partir de la ecuación REF, se sabe que los elementos que actúan como resortes tienen el comportamiento de almacenar energía potencial. La ecuación REF, expresa los elementos que interactúan en el sistema:

$$U_k = \frac{1}{2} (k_1 \cdot y_1^2 + k_2 \cdot y_2^2) \quad (2.3.7)$$

La energía potencial gravitatoria se obtiene al utilizar la ecuación REF, por lo tanto, se obtiene:

$$U_g = g \cdot (M_a y_1 + M_b y) \quad (2.3.8)$$

Por otro lado, la energía cinética se calcula según la ecuación REF para cada masa del sistema.

$$T = \frac{1}{2} (M_a \dot{y}_1^2 + M_b \dot{y}^2) \quad (2.3.9)$$

La energía disipada por el amortiguamiento viscoso se modela utilizando la ecuación REF, llamada función de disipación de Rayleigh.

$$R = \frac{1}{2} (c_1 \dot{y}_1^2 + c_2 \dot{y}_2^2) \quad (2.3.10)$$

Por último, la fuerza generalizada  $Q_i$  es la fuerza variable 2.3.6 proveniente del disco desbalanceado.

Con esto, el método de Lagrange define al lagrangiano  $L$  como la resta entre la energía cinética  $T$  y la energía potencial total  $U$ , la cual según la ecuación REF, es la suma de la energía potencial elástica y gravitatoria. Así, la ecuación de energía para un sistema con amortiguamiento y forzado, a través del método de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.3.11)$$

Al reemplazar y derivar cada término para cada coordenada generalizada, quedan las

siguientes expresiones:

$$M_b \ddot{y} + M_a \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2 y_2 + M_a g + M_b g = F_d(t) - c_1 \dot{y}_1 - c_2 \dot{y}_2 \quad (2.3.12a)$$

$$I_{gb} \ddot{\theta} - M_a y_1 l_1 - k_1 y l_1 + k_2 y_2 l_2 - M_a g l_1 = F_d(t) \cdot l_1 + c_1 \dot{y}_1 l_1 - c_2 \dot{y}_2 l_2 \quad (2.3.12b)$$

Al reemplazar las variables  $y_1$  e  $y_2$  y re acomodando los términos, se obtienen las dos ecuaciones de movimiento del brazo de carga:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(M_a + M_b) - \ddot{\theta} M_a l_1 + k_1(y - l_1 \theta) + k_2(y + l_2 \theta) + \dots \\ M_a g + M_b g = F_d(t) - c_1(\dot{y} - l_1 \dot{\theta}) - c_2(\dot{y} + l_2 \dot{\theta}) \end{aligned} \quad (2.3.13a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(I_{gb} - M_a l_1) - \ddot{y} M_a l_1 + k_1(y - l_1 \theta) \cdot l_1 + k_2(y + l_2 \theta) \cdot l_2 + \dots \\ M_a g l_1 = F_d(t) \cdot l_1 + c_1(\dot{y} - l_1 \dot{\theta}) \cdot l_1 - c_2(\dot{y} + l_2 \dot{\theta}) \cdot l_2 \end{aligned} \quad (2.3.13b)$$

Estas se pueden reescribir de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_a + M_b & -M_a l_1 \\ -M_a l_1 & I_{gb} - M_a l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 l_2 - c_1 l_1 \\ c_2 l_2 - c_1 l_1 & c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \dots \\ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 - k_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d(t) - g(M_a + M_b) \\ F_d(t) \cdot l_1 + g M_a l_1 \end{bmatrix} \quad (2.3.14)$$

### 2.3.3. Cálculo y obtención de constantes características del sistema

#### Rigidez y amortiguamiento

Las constantes de rigidez de las barras de acero  $k_1$  y de la probeta  $k_2$  se obtuvieron simulando su deformación elástica a través del software Inventor Autodesk. Para ello, se empotraron en un extremo y se les aplicaron distintas niveles de carga en el otro. Con los datos obtenidos fue posible ajustar una curva en una gráfica de deformación versus fuerza aplicada, donde la pendiente obtenida es la constante de rigidez del elemento.

Además, se realizaron cálculos para comprobar el orden de magnitud obtenido a través del software. Para esto se utilizó la ecuación 1.3.1, para una viga en voladizo. La tabla REF muestra los resultados de ambos métodos. Los datos utilizados en el modelo corresponden a los obtenidos por simulación.

Por otro lado, los valores de  $c_1$  y  $c_2$  se estimaron de manera cualitativa, visualizando la curvas de  $y(t)$  y  $\theta(t)$  para buscar que la vibración inicial se disipa antes del inicio de

Método	Barras de acero	Probeta
Simulación Inventor		
Cálculo		

Cuadro 2.11: Valores obtenidos de la rigidez de las barras de acero y la probeta de acero

la función de aceleración del disco. Así, los valores obtenidos son:

- $c_1 = 100$
- $c_2 = 100$

### Segundo momento de área

El segundo momento de área o segundo momento de inercia, se calculó para obtener la rigidez de los dos elementos anteriores. Para el segundo momento de inercia de la probeta se utilizará la sección transversal de la sección media de la probeta. Así, su valor es:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 330,994 \text{ mm}^4 \quad (2.3.15)$$

### Momento de inercia del brazo de carga

El momento de inercia del brazo de carga se obtuvo a través del modelo CAD del mismo. Su valor es

### Longitud, masa y módulo de elasticidad

Los elementos del sistema explicados en la sección 2.3.2, tienen un valor definido que fue medido como parte del levantamiento de información. La distancia correspondiente a cada extremo respecto al centro de masa es:

- $l_1 = 42,43 \text{ mm}$
- $l_2 = 158,07 \text{ mm}$

Además, la masa  $M_b$  corresponde a la masa medida del brazo de carga, como se especificó en la sección

- $M_b = 2,305 \text{ Kg}$

Por otro lado, la masa  $M_a$  como se señaló en la ecuación 2.3.5, corresponde a la suma de tres elementos. El primero de ellos, la masa del disco, tiene un valor de:

- $M_d = 19,2029 \text{ kg}$

Los valores correspondientes a  $m_1$  y  $m_2$  son variables y pueden ir desde 0 g hasta 92,3469 g de acuerdo a la configuración escogida. Las distintas combinaciones y valores que pueden tener se encuentran en la tabla del anexo REF.

Finalmente, el modulo de elasticidad utilizado corresponde al del material de la probeta que actualmente se utiliza. Al ser acero, su valor es:

- $E_p = 200 \text{ GPa}$

### Excentricidad

La excentricidad del centro de masa  $e_{ga}$  se calculó utilizando los datos del disco, la distancia de los soportes y la configuración de masas. Por lo tanto, se define como:

$$e_{ga} = \frac{R_d \cdot (m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \quad (2.3.16)$$

#### 2.3.4. Función de la aceleración del disco

La filosofía detrás de la función  $\phi$  es poder controlar el tiempo de retraso de la rotación del disco, que se designará como  $T_i$ , y suavizar la aceleración del mismo hasta que llega a la velocidad de rotación máxima  $\omega_{max}$ . Para esto, la función de la aceleración  $\ddot{\phi}(t)$  se formuló como una función por partes, como se ve en la imagen 2.4, donde el parámetro  $T$  indicará la suavidad con la que es acelerado el disco. Estas tres constantes,  $T_i$ ,  $\omega_{max}$  y  $T$ , son valores de entrada que se eligen dependiendo de los resultados que se deseen. Así, la función  $\ddot{\phi}$  adquiere la forma:

$$\ddot{\phi}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_i \\ \left(\frac{\omega_{max}}{T^2}\right)(t - T_i) & T_i < t \leq T_i + T \\ \left(\frac{\omega_{max}}{T}\right)\left(2 - \frac{t - T_i}{T}\right) & T_i + T < t \leq T_i + 2T \\ 0 & T_i + 2T < t \end{cases}$$

Para obtener la función de la velocidad  $\dot{\phi}(t)$  se debe integrar la función anterior, donde las constantes de integración se obtienen por los valores extremos conocidos, es decir,

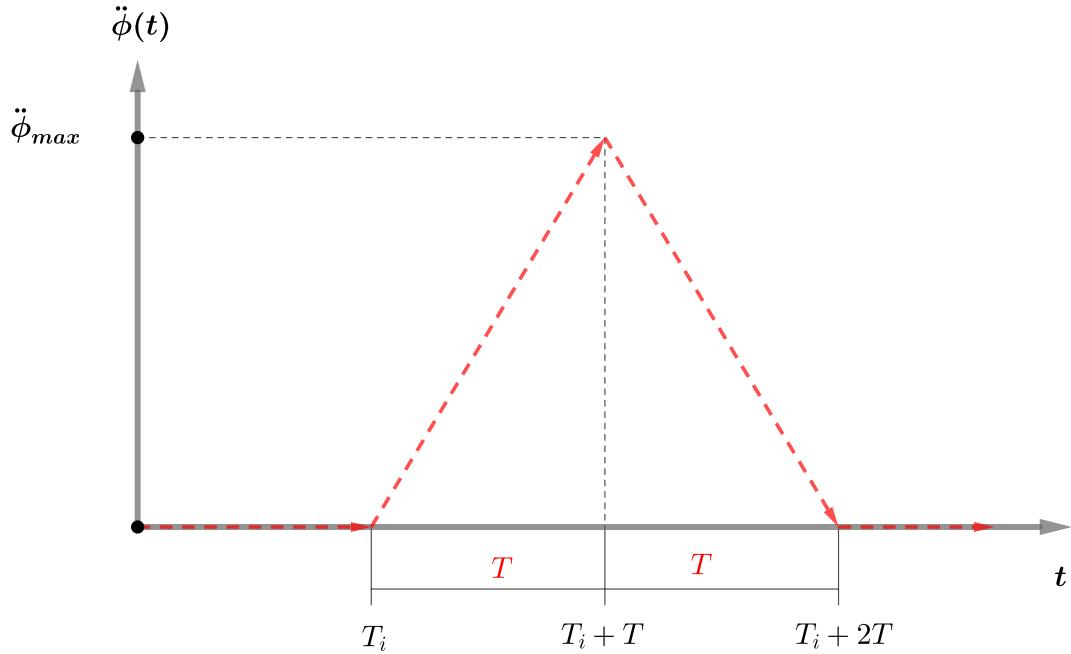


Figura 2.4: Función por parte de la aceleración del disco

$\dot{\phi}(T_i) = 0$  y  $\dot{\phi}(T_i + 2T) = \omega_{max}$ . Entonces, la función se define como:

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_i \\ \left(\frac{\omega_{max}}{2T^2}\right)(t^2 - 2T_i \cdot t + T_i^2) & T_i < t \leq T_i + T \\ \left(\frac{\omega_{max}}{T}\right)\left(2t - 2T_i - 3T + \frac{4T^2 - T_i^2 - t^2 + 2T_i \cdot t}{2T}\right) & T_i + T < t \leq T_i + 2T \\ \omega_{max} & T_i + 2T < t \end{cases}$$

El resultado de la función  $\dot{\phi}(t)$ , se muestra en la imagen 2.5.

Para concluir, se repite el mismo procedimiento anterior para obtener la función  $\phi(t)$ , sin embargo, para conocer las constantes de integración, los puntos conocidos serán cuando  $\phi(T_i) = 0$  y la igualdad de la función en el punto  $T_i + T$ . Así, es obtiene:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_i \\ \left(\frac{\omega_{max}}{6T^2}\right)(t^3 - 3T_i \cdot t^2 + 3T_i^2 \cdot t - T_i^3) & T_i < t \leq T_i + T \\ \Phi_3 & T_i + T < t \leq T_i + 2T \\ \omega_{max} t - \omega_{max}(T + T_i) & T_i + 2T < t \end{cases}$$

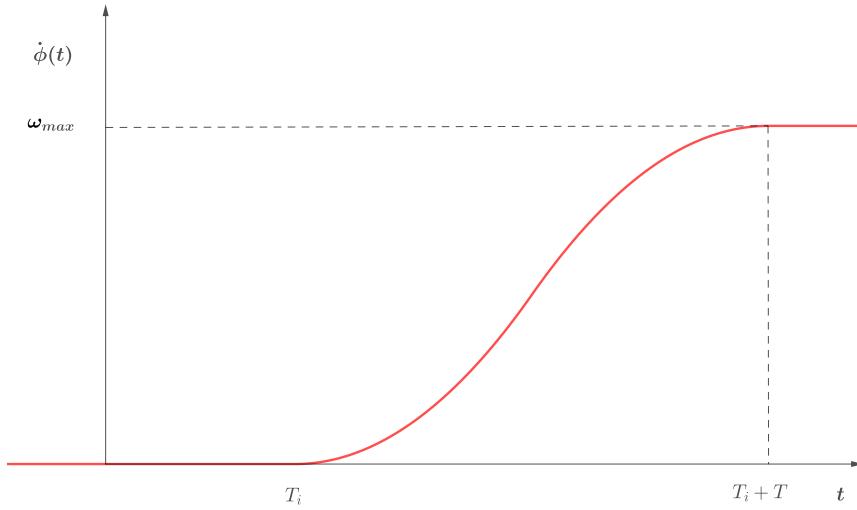


Figura 2.5: Función por parte de la velocidad angular del disco

La función  $\phi_3$  correspondiente al dominio cuando  $t$  es mayor  $T_i + T$  y menor a  $T_i + 2T$  es:

$$\begin{aligned}\Phi_3 = & \left(\frac{\omega_{max}}{T}\right) \left(t^2 - 2T_i \cdot t - 3T \cdot t + \left(\frac{1}{2T}\right) \left(4T^2 \cdot t - T_i^2 \cdot t - \frac{t^3}{3} + T_i \cdot t^2\right)\right) \dots \\ & + \left(\frac{1}{6T^2}\right) (2\omega_{max}T^3 + 6\omega_{max}T^2T_i + 6\omega_{max}TT_i + \omega_{max}T_i^3)\end{aligned}$$

Para el desarrollo de este trabajo, el tiempo de retraso de la aceleración del disco será de  $T_i = 2$ , instante en el que la barra se encuentra en un estado de reposo en consecuencia del valor de los amortiguamientos  $c_1$  y  $c_2$ . Por otro lado, se definirá  $T = 2,5$  como un valor que logra suavizar la aceleración, pero sin dilatar en exceso la llegada al punto de velocidad máxima. Finalmente,  $\omega_{max}$  el valor por defecto corresponderá a la velocidad actual de la máquina de 25 [rad/s] (1500 revoluciones por minuto), sin embargo, este se puede variar dependiendo de los resultados que se deseen obtener.

### 2.3.5. Solución del modelo

Para resolver el sistema de ecuaciones que se obtuvo en 2.3.14, se utilizó el solver de ecuaciones diferenciales ordinarias de MATLAB, `ode45`, que se basa en el método de Runge-Kutta con un espacio de tiempo variable para resolver sistemas de EDOs de primer orden y con condición inicial.

Es necesario ingresar datos de entrada que permitan resolver el sistema. Primero se

debe escoger la configuración de contrapesos  $m_1$  y  $m_2$  a partir de la tabla de cargas. El segundo de ellos es el tiempo que define los límites de integración de la función, el que se escogerá según la cantidad de información que se desee obtener. En tercer lugar, se deben ingresar los valores de la condición inicial correspondiente a cada variable. Por último, es opcional añadir valores de tolerancia relativa y absoluta.

Al ser el sistema de ecuaciones de segundo orden, es necesario realizar un cambio de variables para poder resolverlo. Se añadirán las nuevas variables  $\gamma$  y  $\beta$ , realizando la siguiente derivación:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \dot{y} \\ \beta = \dot{\theta} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ddot{y} = \dot{\gamma} \\ \ddot{\theta} = \dot{\beta} \end{array}$$

Para esto es necesario despejar los valores de  $\ddot{y}$  y  $\ddot{\theta}$ , entonces la función a resolver estará dada por los elementos  $(\gamma, \dot{\gamma}, \beta, \dot{\beta})$  y los resultados obtenidos serán  $(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ . A partir de los resultados, es posible calcular la fuerza sobre la probeta utilizando la deformación  $y_2$  y la constante de rigidez  $k_2$ .

$$F(t) = k_2 \cdot y_2 = k_2(y + l_2\theta) \quad (2.3.17)$$

### 2.3.6. Matriz de carga sobre la probeta según velocidad del motor

Una vez que se puede resolver el sistema de ecuaciones para un configuración y velocidad del motor específica, entonces es posible obtener una matriz del valor de la fuerza máxima ( $F_{max}$ ), media ( $F_m$ ) y su amplitud ( $F_a$ ) para cada una de las configuraciones existentes en la tabla de carga a una velocidad angular  $\omega_{max}$  determinada.

Para esto se itera la solución anterior para cada una de las 201 configuraciones de contrapeso existentes para distintas velocidades. De estas iteraciones se almacenan los valores de  $F_{max}$ ,  $F_m$ ,  $F_a$ , la diferencia de masa de los contrapeso  $\Delta m$  y la multiplicación entre la masa total  $M_a$  y la excentricidad del centro de masa del disco  $e_{ga}$ .

#### Carga máxima, media y amplitud

Los información que se busca de estos resultados corresponde a la carga que es producto de la fuerza del disco desbalanceado, es decir,  $F_d(t)$ . Producto del comportamiento con el que se diseñó el modelo donde el sistema se deja caer hasta su posición de equilibrio, se utiliza una variable auxiliar  $F_{aux}$  que extrae los datos de  $F(t)$  desde el inicio de la aceleración angular del disco hasta el final de la integración para evitar que las fuerzas de la transición entre la posición inicial y el reposo den resultados

incorrectos. Así, la carga máxima, media y la amplitud se definen:

$$F_{max} = \max(|F_{aux}|) \quad (2.3.18)$$

$$F_m = \frac{\max(F_{aux}) + \min(F_{aux})}{2} \quad (2.3.19)$$

$$F_a = \frac{\max(F_{aux}) - \min(F_{aux})}{2} \quad (2.3.20)$$

## 2.4. Simulación de cargas

---

# **Capítulo 3**

## **Análisis y Resultados**

### **3.1. Levantamiento de información**

Por medio del levantamiento de información es posible hacer un pequeño análisis del estado actual y los datos obtenidos. Por un lado, la estructura actual responde a la necesidad de colocar la máquina en una ubicación transitoria, debido a los trabajos realizados en el piso del laboratorio durante el año 2012. Por lo mismo, no está diseñada para la operación de la máquina bajo ningún contexto por los peligros que conlleva. Aún cuando esta podría ser modificada, se desconocen las características y propiedades de la especie maderera con la que fue fabricada, lo que obliga a diseñar y construir un nuevo soporte para la máquina.

Por otra parte, la información obtenida de la máquina de fatiga da cuenta de tres puntos importantes. La antigüedad de sus componentes y la tecnología utilizada afecta directamente en su mantenimiento ante la dificultad de encontrar piezas de repuesto, debido a que las dimensiones de sus componentes, como la polea y la correa, se encuentran fuera de catálogo o de las dimensiones de fabricación de los proveedores. También la obsolescencia de la tecnología afecta su mantenimiento, siendo difícil poder encontrar no sólo las piezas de repuesto, sino que también personas que estén técnicamente calificadas. En segundo lugar, la máquina fue fabricada con estándares o líneas de desarrollo propias de la época, como sería esperable, las cuales no evolucionaron en la misma dirección de que los estándares actuales de ensayo a fatiga, dificultando la comparación de los resultados obtenidos. Finalmente, la robustez del diseño, la cual se puede apreciar fácilmente en la dimensiones de la estructura exterior de la máquina, tiene la dualidad de proveer un armazón macizo y duradero sobre el cual trabajar, sin embargo, resulta ser una estructura difícil de modificar por esta misma razón.

En lo relativo a la exactitud de los datos obtenidos, la imposibilidad de desarmar gran parte de la máquina afectaron la precisión de las mediciones realizadas, sobre todo en partes específicas. Así, las dimensiones y la geometría de las barras de acero tuvieron que ser simplificadas ante la imposibilidad de tomar medidas en la unión barra-disco. Por la misma razón, la masa del disco desbalanceado, calculada a través de la deflexión de las barras de acero, incluye los errores de la medición anterior sumado a la masa de otros elemento que no son parte de la fuerza provocada por el desequilibrio del disco en rotación. Ante esto, surge la necesidad de poder desarmar la máquina para poder estudiarla con mayor detenimiento, obteniendo información que sea más precisa de sus elementos como también información útil para poder actualizar componentes que mejoren su desempeño y mantenibilidad.

## 3.2. Diseño de la estructura

### 3.2.1. Diseño en acero

A partir de las ecuaciones para el caso expuesto en metodología, se probó de forma iterativa para el acero A270ES de distintas dimensiones su comportamiento bajo la carga estática y dinámica. Los resultados que se obtuvieron se encuentran en la siguiente tabla:

[agregar tabla](#)

Con esta información en consideración, se optó por utilizar el acero número X de la tabla REF, el cual entrega un factor de seguridad aceptable a los requerimientos y espacio suficiente para una correcta ubicación de los pernos de unión. [añadir info de metodología - se encuentra en la zona inferior al límite de la resistencia a fatiga](#)

### Diseño en madera

Para este caso, los resultados que obtenidos para el cuartón y la tabla de pino oregón, en los distintos pilares y vigas que se utilizaron, se encuentran en la siguiente tabla:

[Añadir tabla resumen](#)

Asimismo, las cargas calculadas para los elementos de unión mecánica como el perno y los tirañfondos corresponden a:

[tabla extracción directa de pernos y tirañfondos](#)

Las restricciones de separación entre los elementos de unión establecidas en REF, a partir de la información de la tabla REF, dan como resultado:

[tabla de separación entre elementos](#)

A modo de comparación, en la tabla REF, se pueden apreciar los valores obtenidos para tablas y cuartones de distintas dimensiones y especie maderera.

#### tabla comparacion

Finalmente, con la configuración escogida en la tabla REF, los resultados de las simulaciones estáticas y modal corresponden a:

#### resultados simulacion

Tanto los resultados obtenidos por la simulación como los obtenidos a través de la norma, nos indica que la mesa no tendrá problemas para soportar la carga estática de la máquina, por lo sobre dimensionado de la estructura. Para las cargas fluctuantes, la información sobre el comportamiento de la madera bajo fatiga es bastante escasa en la literatura y aún más para las especies madereras chilenas.

### 3.3. Modelo del sistema

#### 3.3.1. Comportamiento del modelo para distintas configuraciones

Con la caracterización y el levantamiento de información de los distintos componentes, junto a la elección de  $c_1$ ,  $c_2$  y de las variables de la función  $\phi$ , nos permite resolver y obtener valores del movimiento lineal, angular y la carga a la que está sometida la probeta. El tiempo de integración para cada una de las soluciones será entre 0 y 10 segundos. Se utilizará una tolerancia relativa y absoluta de  $10^{-8}$ . En consecuencia, al resolverlo utilizando los códigos del anexo ?? se obtienen las curvas para la posición y velocidad del brazo de carga respecto a su centro de masa. Las figuras de las imágenes REF y REF, muestran las curvas de posición y velocidad del sistema para dos configuraciones distintas de la tabla de cargas.

#### cuatro imágenes de y y theta para dos configuraciones distintas

Utilizando la ecuación 2.3.17 para cada valor de  $y(t)$  y  $\theta(t)$ , se obtiene la curva de la carga aplicada sobre la probeta como se muestra en la figura REF, para los dos casos mostrados anteriormente.

#### dos imágenes de la fuerza para las configuraciones anteriores

En este conjunto de imágenes se aprecia como el sistema pasa de un estado inicial  $(y(0), \dot{y}(0), \theta(0), \dot{\theta}(0))$ , donde la probeta y la barra de acero sólo están bajo la acción de la gravedad, hasta su posición de reposo producto del propio peso de los elementos del sistema. El decaimiento de la vibración inicial está determinado por el valor de  $c_1$  y  $c_2$ , siendo un amortiguamiento subamortiguado. A continuación, desde el segundo 2 la función  $\phi$  comienza a acelerar suavemente hasta llegar a la velocidad  $\omega_{max} = 25$  [rad/s],

punto en el cual la vibración es constante y estable en el tiempo. A partir de este punto, se extraen la información respectiva de la fuerza máxima, media y alterna, según se muestra en 2.3.18, 2.3.19 y 2.3.20.

A partir de las imágenes REF y REF, es posible apreciar que el desplazamiento lineal, angular y, por añadidura, la fuerza sobre la probeta pueden ser incluso mayores en la zona de amortiguamiento del sistema. Esto ocurre en las configuraciones donde la carga  $F_p$  es muy baja en comparación a la masa total del sistema, siendo el punto de inflexión BUSCAR PUNTO DE INFLEXION.

De manera análoga, se puede comparar la influencia de la velocidad de giro máxima del disco desbalanceado sobre el movimiento del sistema. Las imágenes REF y REF, muestran la posición  $y(t)$ ,  $\theta(t)$  y  $F(t)$  para dos velocidad distintas, es decir,  $\omega_{max,1} = 20$  [rad/s] (o 1200 [rpm]) y  $\omega_{max,2} = 10$  [rad/s] (o 600 [rpm]).

**añadir imágenes**

Ambas gráficos muestran no sólo como el período de la oscilación aumenta entre el caso 1 y 2, como es esperable, sino que también la fuerza sobre la probeta disminuye en la medida que la velocidad de rotación del disco es menor. Esta información, junto a la de distintas configuraciones, muestra que el modelo se comporta de una manera correcta respecto a lo físicamente esperable, respondiendo de manera adecuada a los distintos cambios de parámetro que se le realizan.

### 3.3.2. Comparación entre las distintas configuraciones