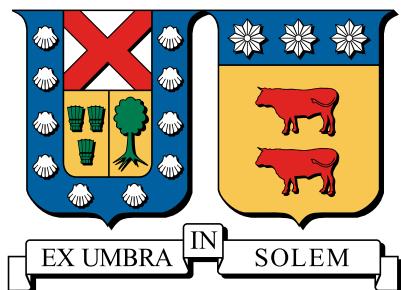


**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA  
VALPARAÍSO- CHILE**



**“ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL COMPORTAMIENTO DE FATIGA PARA EL  
MATERIAL ABS IMPRESO EN 3D”**

**SEBASTIÁN ORLANDO CUETO DEL FIERRO**

Memoria de Titulación para optar al título de  
Ingeniería Mecánica Industrial

Profesor Guía: Ph.D. Alejandro Pacheco Sanjuan

Profesora Correferente: Dra. Sheila Lascano Farak

Junio - 2019

*Toda experiencia cognoscitiva involucra al que conoce de manera personal,  
enraizada en su estructura biológica, donde toda experiencia de  
certidumbre es un fenómeno individual ciego al acto cognoscitivo del otro,  
en una soledad que sólo se trasciende en el mundo que se crea con él.*

*Humberto Maturana - Francisco Varela*



---

# Resumen

El desarrollo de este trabajo se encuentra entorno a la máquina de fatiga en flexión del laboratorio de tecnología mecánica, el cual tiene como objetivo avanzar hacia la operatividad de la máquina. Para esto, la metodología se dividió en 4 etapas: levantamiento de información, diseño de una estructura soportante, modelar el comportamiento de la máquina y contrastar los resultados con la información existente.

La máquina tiene problemas en su funcionamiento, mantenibilidad y disponibilidad de respuestos producto de su antigüedad. Su funcionamiento se basa en una tabla de cargas (anexo ??), que relaciona los contrapesos con los esfuerzos sobre probeta.

El diseño de la estructura se realizó de acero y madera, utilizando como guía la norma NCh 1198. Además, a través de MEF se simuló el comportamiento estático y modal de la estructura. De esta manera, la dimensión final de cada componente se exponen en los planos del anexo ??.

Para el modelamiento de la máquina, se utilizaron los datos obtenidos en el levantamiento de información y se resolvieron las ecuaciones de movimiento utilizando el método de energía. Así, se obtuvo el movimiento y la velocidad del centro de masa del brazo de carga. A través de esto, se calculó la fuerza realizada sobre la probeta para distintas configuraciones. La carga máxima posible, según el modelo, es de 1498,83 [N], a una velocidad de rotación del disco  $\omega_{max} = 25$  [rad/s].

Estos resultados de fuerza máxima se simularon usando MEF, utilizando como límite el esfuerzo último del material. Por lo tanto, se obtuvo una nueva relación entre las combinaciones de los contrapesos y los esfuerzos en la probeta, las cuales se muestran en la propuesta ??.

Con la información y los resultados obtenidos, se puede concluir que es necesaria una actualización y reparación de la máquina de fatiga, como también la construcción de la estructura para lograr que la máquina esté operativa. Además existen discrepancias entre el modelo propuesto y la información existente, ante lo cual es necesario hacer un trabajo posterior que valide, refute o corrija el modelo y la tabla de cargas propuesta.

---

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>12</b>
<b>2. Antecedentes</b>	<b>16</b>
2.1. Fenómeno de la fatiga y su medición . . . . .	16
2.1.1. Medición de la fatiga . . . . .	17
2.1.2. Correlación entre distintos métodos de medición de la fatiga . . . . .	19
2.2. Máquina de fatiga a flexión . . . . .	23
2.3. La madera como elemento constructivo . . . . .	24
2.3.1. Anatomía de la madera . . . . .	25
2.3.2. Propiedades mecánicas de la madera . . . . .	25
2.4. Acero . . . . .	26
2.5. Software de simulación de elementos finitos . . . . .	28
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>29</b>
3.1. Fatiga . . . . .	29
3.1.1. Definiciones . . . . .	29
3.1.2. Curva S-N o de Wöhler . . . . .	32
3.1.3. Esfuerzo medio, $S_m$ . . . . .	34
3.1.4. Diseño para esfuerzos uniaxiales fluctuantes . . . . .	35
3.2. Dinámica . . . . .	38
3.2.1. Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido . . . . .	38
3.2.2. Energía cinética de un cuerpo rígido . . . . .	39
3.3. Vibraciones . . . . .	39
3.3.1. Rigidez . . . . .	39
3.3.2. Damping . . . . .	40
3.3.3. Vibraciones forzadas . . . . .	41

3.3.4. Derivación de las ecuaciones de movimiento . . . . .	42
3.3.5. Sistema de múltiples grados de libertad . . . . .	43
3.3.6. Método de Lagrange . . . . .	44
3.3.7. Ecuaciones de energía para un sistema con amortiguamiento y forzado . . . . .	45
3.4. Plasticidad . . . . .	46
3.4.1. Esfuerzo y deformación real . . . . .	46
3.4.2. Factor de corrección de Bridgman . . . . .	47
3.4.3. Endurecimiento isotrópico por deformación . . . . .	47
3.5. Método de elementos finitos . . . . .	48
3.5.1. Mallado . . . . .	49
3.5.2. Ecuación del momentum lineal . . . . .	51
3.5.3. Esfuerzo y deformación . . . . .	52
<b>4. Metodología</b>	<b>55</b>
4.1. Levantamiento de información . . . . .	55
4.1.1. Estado actual . . . . .	55
4.1.2. Funcionamiento . . . . .	57
4.1.3. Mediciones . . . . .	59
4.2. Diseño de estructura . . . . .	64
4.2.1. Diseño de pletinas de acero . . . . .	65
4.2.2. Diseño en madera . . . . .	68
4.2.3. Cálculo de cargas en estructura de madera . . . . .	68
4.2.4. Uniones . . . . .	74
4.2.5. Simulaciones . . . . .	78
4.3. Modelo dinámico del sistema . . . . .	80
4.3.1. Elementos del sistema . . . . .	80
4.3.2. Modelo del sistema . . . . .	82
4.3.3. Cálculo de constantes características del sistema . . . . .	85
4.3.4. Función de aceleración del disco . . . . .	87
4.3.5. Solución del modelo . . . . .	90
4.3.6. Matriz de carga sobre la probeta según velocidad del motor . . . . .	90
4.4. Simulación de carga máxima . . . . .	91
4.4.1. Tipo de simulación . . . . .	91
4.4.2. Propiedades del material . . . . .	92
4.4.3. Generación de la malla . . . . .	95

4.4.4. Configuración de la simulación estática . . . . .	98
<b>A. Norma de cálculo en madera - NCh1198</b>	<b>100</b>
A.1. Propiedades de la madera y factores de modificación . . . . .	100
A.1.1. Contenido de humedad . . . . .	100
A.1.2. Densidad . . . . .	101
A.1.3. Tensiones admisibles y módulo de elasticidad . . . . .	102
A.1.4. Factores de modificación . . . . .	102
A.2. Diseño de piezas . . . . .	102
A.2.1. Flexión . . . . .	103
A.2.2. Cizalle en vigas simples . . . . .	104
A.2.3. Compresión paralela a la fibra . . . . .	105
A.2.4. Compresión normal a la fibra . . . . .	106
A.3. Nomenclatura y tipos de madera . . . . .	106
A.4. Uniones en la madera estructural . . . . .	108
A.4.1. Generalidades . . . . .	108
A.4.2. Verificaciones tensionales . . . . .	110
A.4.3. Número de elementos de unión . . . . .	113
A.4.4. Uniones con perno . . . . .	113
A.4.5. Uniones con tirafondos . . . . .	118

---

# Índice de figuras

2.1.	Comparación entre las distintas curvas caracterísitcas de cada forma de medición de la fatiga para el acero. [?][? ] . . . . .	17
2.2.	Sección transversal de probetas sujetas a esfuerzo alternante uniaxial. <i>a) push-pull, b) alternating bending y c) rotating bending.</i> [? ] . . . . .	20
2.3.	Representación entre una curva característica de un ensayo de fatiga y los métodos de Lee y Esin para correlacionar distintos tipos de ensayos. [? ] .	22
2.4.	Máquina de fatiga en flexión en el laboratorio de tecnología mecánica .	23
2.5.	Curva de esfuerzo-deformación ingenieril (A) y real (B) de un acero. Los puntos representan: (1) Esfuerzo último ( $\sigma_u$ ), (2) esfuerzo de fluencia ( $\sigma_y$ ), (3) esfuerzo de ruptura, (4) región de endurecimiento por deformación y (5) región de estriccción. [? ] . . . . .	27
3.1.	Crecimiento de una grieta durante un ciclo de carga perpendicular, dando origen a las marcas de playa. [? ] . . . . .	30
3.2.	Definición de los esfuerzos alternantes, máximo, mínimo y medio. [? ] .	32
3.3.	Diagrama <i>S-N</i> obtenido a partir de los resultados de ensayos a fatiga axial con carga invertida. Se pueden apreciar las zonas LCF, HCF y la zona de vida infinita. [? ] . . . . .	34
3.4.	Diagrama <i>S-N</i> de ensayos de fatiga axial con distintos esfuerzos medios para aluminio 7075-T6. [? ] . . . . .	35
3.5.	Diagrama de vida constante para aluminio 7075-T6. [? ] . . . . .	36
3.6.	Curvas de estimación de falla a fatiga de Goodman, Gerber y Soderberg.[? ]	36
3.7.	Diagrama <i>CFL</i> normalizado para aluminio 7075-T6. [? ] . . . . .	37
3.8.	Diagrama de cuerpo libre de un disco desequilibrado por masa $m_0$ a una distancia $e$ . . . . .	41
3.9.	Todos los posibles grados de libertad que puede tener una masa, los cuales se dividen en 3 grados de libertad rotacionales ( $\theta_i$ ) y 3 lineales ( $x_i$ ). [? ] .	43

3.10. Endurecimiento isotrópico por deformación plástica. Se puede apreciar como se conserva la distancia del esfuerzo máximo respecto a la abscisa. . . . .	48
3.11. Relación de aspecto para triángulos. . . . .	49
3.12. Definición de el módulo plástico como la pendiente entre el origen y un punto de la curva de esfuerzo yreal y deformación real plástica. [? ] . . . . .	53
4.1. Control del contador electrónico . . . . .	56
4.2. Contrapesos utilizados para desequilibrar el disco. De izquierda a derecha se aprecia el n° 5 al n° 1. . . . .	57
4.3. Distintas vistas del disco desbalanceado de la máquina. En la imagen (b) se pueden apreciar claramente los soportes de los contrapesos en los extremos del disco, en cambio, en la imagen (c) se ven los distintos componentes que están adosados al disco. . . . .	58
4.4. A la izquierda se aprecia la mordaza de la barra de carga, a la derecha la mordaza empotrada sin la parte superior y apoyada sobre esta, la probeta. . . . .	59
4.5. En la imagen (a) se aprecia el botón del freno automático y la extensión que lo presiona. En la imagen (b) la barra de bloqueo sosteniendo las vigas en voladizo. . . . .	60
4.6. Esquema de la máquina de fatiga y sus dimensiones externas, en mm. . . . .	61
4.7. Brazo de carga junto a su mordaza y la mordaza empotrada a la derecha. . . . .	62
4.8. Vista en corte, lateral y frontal de la probeta con sus respectivas dimensiones. . . . .	63
4.9. En las imágenes (a) y (b) se pueden ver los elementos que componen el sistema eléctrico de la máquina de fatiga. . . . .	64
4.10. Diseño en perspectiva de la estructura de soporte. . . . .	65
4.11. Diagrama de las cargas soportadas por la pletina de acero. . . . .	66
4.12. Identificación de las distintas partes de madera de la estructura soportante. . . . .	69
4.13. Diagrama de las cargas soportadas por la viga A. . . . .	72
4.14. Representación de un ángulo de unión A44 y A66. [? ] . . . . .	78
4.15. En las imágenes (a) y (b) se enumeran los elementos que fueron considerados al modelar el sistema vibratorio. (1) Barra de carga. (2) Probeta ( $k_2$ ), que se encuentra cubierta por ambas mordazas. (3) Mordaza sujetada al brazo de carga. (4) Mordaza empotrada a la máquina. (5) Barra de transmisión de la carga. (6) Disco desbalanceado. (7) Soportes de contrapeso. (8) Sistema de vigas en voladizo ( $k_1$ ). . . . .	81
4.16. Diagrama del modelo utilizado y el sistema de coordenadas. . . . .	82

4.17. Función por parte de la aceleración del disco . . . . .	88
4.18. Función por parte de la velocidad angular del disco . . . . .	89
4.19. Curva de esfuerzo-deformación del material AISI 1020 en valores inge- nieriles y reales. . . . .	93
4.20. La zona verde de la imagen (a) corresponde a la zona intermedia de la probeta y la zona azul de la imagen (b) a la sección transversal en la mitad de la probeta. . . . .	96
4.21. (a) Vista isométrica general de la malla. (b) Detalle en isométrico de la zona media y la sección transversal. (c) Malla de la sección transversal media. (d) Detalle de la malla de la sección transversal media. . . . .	97
4.22. Condiciones de contorno aplicadas en la probeta. Las caras amarillas re- presentan las restricciones de desplazamiento y la cara roja la presión aplicada. . . . .	98
4.23. Ubicación de los elementos seleccionados . . . . .	99
A.1. Designaciones de espaciamientos y bordes. [? ] . . . . .	111
A.2. Valor de $h_e$ , para los distintos elementos de unión. [? ] . . . . .	112
A.3. Uniones en cizalle doble. [? ] . . . . .	115
A.4. Espaciamientos mínimos entre pernos, barras de acero, tirafondos y a los bordes. [? ] . . . . .	117
A.5. Esquema de un tirafondo. [? ] . . . . .	118

---

# Índice de tablas

2.1. Factores de modificación por tipo de carga, según el modelo de Lee. . . . .	22
3.1. Número mínimo de pruebas según tipo de prueba. [? ] . . . . .	33
3.2. Lista de los rangos de los valores de la oblicuidad y la respectiva calidad del elemento. [? ] . . . . .	51
4.1. Tabla de cargas modificada, mostrando el peso de cada combinación, su diferencia y el total. . . . .	58
4.2. Datos del sistema de transmisión . . . . .	61
4.3. Medidas de las vigas en voladizo según su posición . . . . .	61
4.4. Masa de cada contrapeso utilizado . . . . .	63
4.5. Especificaciones del motor de la máquina de fatiga. . . . .	64
4.6. Dimensiones y características de la viga de acero . . . . .	66
4.7. Valores de la densidad normal y anhidra del pino oregón. †: Definido con el percentil 5 % de exclusión. [? ] . . . . .	70
4.8. Tensiones admisibles y módulo de elasticidad en flexión para madera de pino oregón según su clase estructural. [? ] . . . . .	70
4.9. Valores del factor de modificación para el pino oregón. . . . .	70
4.10. Dimensiones del tirafondo utilizado . . . . .	76
4.11. Valores obtenidos mediante un modelo de elementos finitos y por media de la ec. 3.3.1 de la rigidez de las vigas en voladizo y la probeta de acero .	86
4.12. Datos utilizados del ensayo de esfuerzo-deformación del acero AISI 1020 HR en el modelo MISO. . . . .	94
A.1. Condiciones que se deben considerar en la determinación de tensiones admisibles y módulo de elasticidad. [? ] . . . . .	101
A.2. Espesor nominal y real de la madera según el tratamiento recibido. . . . .	107
A.3. Ancho nominal y real de la madera según el tratamiento recibido. . . . .	108

---

# Capítulo 1

## Introducción

Las prótesis y la impresión 3D son tópicos que han ido tomando importancia durante la última década. La impresión 3D, como tecnología, ha crecido fuertemente desde la aparición de las impresoras de escritorio, las cuales permiten a cualquier persona sin conocimientos específicos de ingeniería, poder imprimir piezas u objetos diseñados por el propio usuario sin tener que contar con equipo especializado. Un ejemplo de este rápido crecimiento se puede notar en una noticia del periódico The Economist de hace más de una década:

*If you really want to impress your friends with high-tech wizardry in 2008 then consider shopping for a three-dimensional printer. (“A Whole New Dimension”, 2007)*

Esta transición de una tecnología restringida a la industria especializada hacia lo privado o industrias de pequeña escala, llevó a un desarrollo y aplicación de la impresión 3D más disgregada, independiente de las principales marcas fabricantes de impresoras, permitiendo el surgimiento de comunidades, startups o incluso iniciativas universitarias centradas en la investigación o desarrollo de aplicaciones y mejoras de esta tecnología. Como consecuencia de esto, se crearon nuevas marcas de impresión 3D como MakerBot, surgieron comunidades de libre acceso como RepRap y también diversas iniciativas desarrollaron prótesis, principalmente de brazo, impresas en 3D.

Por otro lado, las prótesis de extremidades que actualmente se comercializan tienen un costo que es muy superior al que pueden pagar los potenciales usuarios, el cual se ve encarecido a medida que los diseños son más versátiles y para algún requerimiento específico, como atletismo o el ciclismo. Además, estas necesitan que haya una infraestructura de salud que de apoyo en el uso y mantenimiento de las prótesis, restringiendo aún más su aplicación a zonas con un alto desarrollo hospitalario [? ]. Dado que se espera que las

amputaciones de extremidades inferiores aumenten considerablemente en las próximas décadas, se vuelve necesario buscar alternativas y soluciones para las problemáticas de las prótesis tradicionales, buscando mejorar la calidad de vida de los pacientes [? ].

Así, las prótesis fabricadas con impresión 3D surgen como una solución para estas problemáticas. De esta forma, distintos diseños, desarrollos y alternativas surgen desde distintos lugares y con objetivos distintos. Por un lado, existe un desarrollo de libre acceso destinado a solucionar de manera rápida y autónoma las problemáticas de las personas con discapacidad motora, buscando que cada usuario pueda modificar e imprimir sus prótesis. Y por otro, empresas han buscado crear o mejorar diseños existentes con el objetivo de poder entregar un producto que se adapte mejor a cada paciente y situación, sin los grandes costos que implica la compra de una prótesis tradicional.

Dependiendo del tipo de prótesis, estarán sometidas a distintas cargas estáticas y fluctuantes y tendrán un uso más reiterativo o puntual. En consecuencia, surge la necesidad de tener información respecto al comportamiento mecánico del material manufacturado bajo condiciones específicas como lo es la impresión 3D por deposición fundida (FDM, por sus siglas en inglés). Para el plástico ABS, existen distintos estudios respecto a sus propiedades a tensión y compresión bajo distintas configuraciones de carácter estático, sin embargo, la información disponible sobre su comportamiento bajo cargas dinámicas es bastante escasa [? ][? ], dificultando la predicción de su vida útil y, a su vez, la confiabilidad que tendrá durante su uso.

Así, las cargas variables generan un daño en las estructuras al provocar micro-grietas que se expanden con el tiempo y que reducen las propiedades mecánicas del material. Este daño provocado por una o varias cargas variables y repetitivas en el tiempo es llamada fatiga y la resistencia a la fatiga es la capacidad de un material de soportar este daño. Para estudiar las propiedades de un material o elemento frente a la fatiga, se deben realizar ensayos que logren dar información relevante para los casos de estudio, como en este caso son las prótesis, existiendo distintas tipos de máquinas, normas y tecnologías que se adaptan a las distintas necesidades.

De este modo, este trabajo se enmarca en el proyecto de análisis de una prótesis trans-tibial fabricada a través de FDM con material ABS. Con este proyecto se busca conocer el comportamiento mecánico de la prótesis bajo cargas estáticas y fluctuantes, como lo son el estar de pie y caminar, para predecir la vida útil del diseño. No obstante, como se señaló anteriormente, la información existente sobre las propiedades de fatiga del material son bastante escasas, lo que nos lleva a la necesidad de generar información útil que pueda servir como datos de entrada a las simulaciones computacionales de la prótesis.

Bajo este contexto es que el presente trabajo de título busca diseñar las condiciones

necesarias para la puesta en marcha de la máquina de fatiga a flexión existente en el laboratorio de tecnología mecánica del departamento de ingeniería mecánica en el campus Casa Central. Para esto, se hará un nuevo diseño para la estructura soportante que logre anclar la máquina y resistir su operación. Además se levantará información respecto a su funcionamiento, para posteriormente realizar un modelo que busque describir y predecir el movimiento de la máquina y sus componentes para comprender la carga a la que se somete la probeta. Por último, se verificarán las cargas obtenidas simulando mediante un software de elementos finitos los esfuerzos asociados a cada configuración de la máquina, para en último término, contrastar los datos conseguidos con la información existente previamente en el laboratorio.

El trabajo realizado se dividirá en 4 grandes secciones a lo largo de toda esta memoria. El primero corresponde al levantamiento de información, el segundo al diseño de la estructura soportante, seguido del desarrollo del modelo vibratorio de la máquina de fatiga, para culminar en la simulación elasto-plástica de la probeta. Así, cada capítulo está compuesto por cada una de estas 4 secciones.

De esta manera, en el capítulo 2, antecedentes, se hace una breve introducción a la fatiga, las formas que existen para medirla y como se correlacionan las distintas metodologías de medición. Luego, se habla brevemente del historial de la máquina de fatiga. Por otra parte, se pasa a caracterizar los dos materiales utilizados en este trabajo, la madera y el acero, para terminar con un esbozo de los software de elementos finitos utilizados.

A continuación, se muestra y desarrolla todo el marco teórico que apoya y sustenta el trabajo a través del capítulo 3. Se profundiza qué es la fatiga, se exponen las ecuaciones de movimiento y energía de un sistema dinámico, seguido por la derivación del método de Lagrange. Además, se expone sobre qué es la plasticidad, las relaciones de esfuerzo y deformación real y el endurecimiento por deformación isotrópico. Por último, se explica el método de elementos finitos, se deriva la ecuación de momentum lineal y se exponen las ecuaciones de esfuerzos y deformación asociadas a elementos finitos.

El capítulo 4, metodología, detalla el procedimiento con el que se llevó a cabo el trabajo. El levantamiento de información de la máquina de fatiga, la medición y descripción de sus componentes. El diseño de la estructura, los cálculos en acero, madera y sus respectivas uniones, para las cuales se utilizaron la norma NCh 1198, sintetizada en el anexo A. La derivación de las ecuaciones de movimiento para el brazo de carga y su resolución, para terminar con la simulación, en el software ANSYS, de la probeta sometida a distintas cargas.

En el capítulo 5, se exponen los resultados obtenidos y se realiza un análisis de esta información, como también se bosquejan las primeras conclusiones del trabajo. A lo largo

de este capítulo se muestran las dimensiones de cada elemento seleccionado en el caso del diseño y los datos del movimiento del brazo de carga y los esfuerzos en la probeta en el caso del modelo y la simulación, respectivamente.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones a las que se llegaron producto de los resultados y la información recopilada. Para terminar, se expondrá el trabajo futuro que se abre como consecuencia de esta tesis.

---

# **Capítulo 2**

## **Antecedentes**

### **2.1. Fenómeno de la fatiga y su medición**

El fenómeno en el cual una estructura se daña e incluso falla por cargas fluctuantes, es llamado fatiga. El estudio de este problema comenzó tempranamente en Europa durante la mitad del siglo XIX, en pleno auge de la industrialización europea, producto de la falla repentina de algunos componentes en máquinas y los ejes de los trenes de la época. Estos experimentaban un gradual debilitamiento de la resistencia, fallando aún cuando su esfuerzo último no fuese alcanzado.

Así, en 1837 fueron publicados los resultados del primer ensayo de fatiga, realizado a una cadena transportadora utilizada en minas de hierro en Alemania. Wilhelm Albert, quien realizó esta investigación, se vio motivado a realizar los estudios por los altos costos que significaba la falla de este componente producto de las cargas cíclicas a las que estaba sometida. Los pocos conocimientos existentes del fenómeno en aquella época, llevaron a que la solución al problema fuese la invención del cable de acero.

Por otro lado, las primeras investigaciones enfocadas a comprender el fenómeno comenzaron en 1858 con August Wöhler. Su acucioso estudio lo llevó a conclusiones que siguen teniendo importancia y validez hasta el día de hoy. Diseñó, durante la década de 1860, una máquina de ensayos de flexión y flexión rotativa. En 1870 presentó un informe en el cual parte de sus conclusiones cualitativas son llamadas “Ley de Wöhler”, al establecer el esfuerzo alterante como el parámetro más importante para la vida de un componente, señalando que: “the stress amplitudes are decisives for the destruction of the cohesion of the material. The maximum stress is of influence only in so far as the higher it is, the lower are the stress amplitudes which lead to failure”[? ]. Se destaca también que el esfuerzo medio tiene una influencia perjudicial en el material.

Es decir, desde 1853 hasta hoy, han transcurrido más de 160 años de investigación sobre la fatiga, logrando comprender distintas aristas del fenómeno, pero con muchas preguntas aún sin resolver. Por lo tanto, la fatiga sigue siendo un problema necesario de abordar y seguir comprendiendo por sus grandes implicaciones de costo que tiene en la industria y en los distintos elementos que utilizamos en la vida diaria. Por otro lado, si bien muchas preguntas no han sido resueltas científicamente, diversas empresas han logrado evitar las fallas por fatiga y optimizar los diseños de manera operativa, sin comprender cabalmente el trasfondo de estos.

### 2.1.1. Medición de la fatiga

Existen distintas técnicas para cuantificar la respuesta de un material o componente frente a esfuerzos o deformaciones fluctuantes. La primera de ellas, como se habló anteriormente, corresponde a una viga giratoria sometida a flexión en voladizo diseñada por A. Wöhler. Con respecto a la información existente en la literatura la mayoría de los datos disponibles de resistencia a la fatiga se encuentra en las pruebas de viga giratoria (*rotating bending*, en inglés) en ciclo de flexión invertida, seguido por cargas axiales (*push-pull*, en inglés), flexión en voladizo o flexión alternante (*alternating bending*, en inglés) y en menor medida, en las pruebas de fatiga por torsión. [? ]

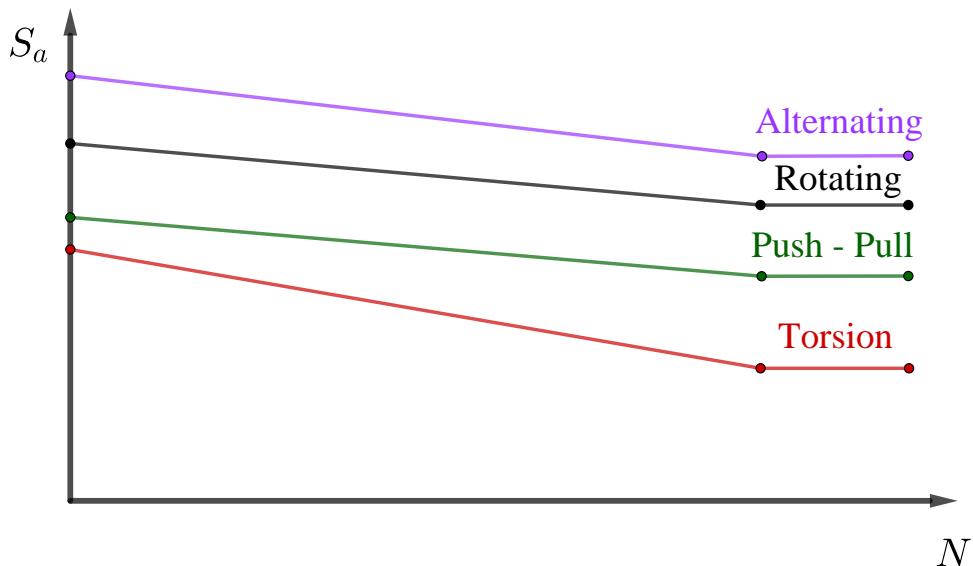


Figura 2.1: Comparación entre las distintas curvas características de cada forma de medición de la fatiga para el acero. [? ][? ]

### **Ensayo de fatiga con una viga giratoria en flexión**

Su uso es el más extendido para determinar la vida a fatiga de un material. La principal ventaja frente a otros sistemas radica en su capacidad de aplicar ciclos de cargas a altas velocidades, es decir, realizar pruebas de fatiga a altas frecuencias. Sin embargo, no es posible aplicar una carga media distinta de cero, por lo tanto, su uso principal se encuentra en la obtención de datos para un régimen de fatiga de alto ciclaje y de ciclo invertido. Los datos obtenidos de la resistencia a la fatiga son inferiores a los obtenidos por medio de flexión alternante, como se puede ver en la fig. 2.1.

### **Ensayo de fatiga axial**

Esta configuración de prueba es más flexible que el resto, siendo posible cualquier combinación de esfuerzo alternante y medio, además de poder realizar ensayos con el modelo de deformación-vida [? ]. Su principal diferencia respecto al método de viga giratoria se encuentra en que la sección transversal está sometida a esfuerzos de manera uniforme, provocando que los resultados de resistencia a la fatiga obtenidos sean usualmente menores que las obtenidas por viga giratoria y flexión alternante. Se considera que esto se debe a la probabilidad más alta de hallar una microgrieta en un campo de esfuerzos más grande. Asimismo, la superposición de momentos de flexión sobre las cargas axiales, producto de la dificultad de crear cargas axiales sin excentricidad, son un factor en la disminución en la obtención de valores de resistencia menores. En concreto, la reducción de las resistencias a la fatiga obtenidas pueden variar entre un 10 % y un 30 % o más si hay flexión producto de la excentricidad de las cargas [? ]. La fig. 2.1 muestra las diferencias de los datos obtenidos entre un ensayo de fatiga axial y el resto de las formas de medición.

### **Ensayo de fatiga de flexión en voladizo o flexión alternante**

Esta prueba consiste en someter a una viga en voladizo a oscilaciones en su extremo libre a través de algún mecanismo, pudiendo lograr combinaciones de esfuerzos medios y alternantes. La máquina analizada en esta memoria utiliza este método para la obtención de los datos de vida de fatiga del material a analizar. Los resultados de este tipo de prueba son los más altos respecto a otros tipos de medición de fatiga.

### 2.1.2. Correlación entre distintos métodos de medición de la fatiga

Como se señaló anteriormente y se aprecia en la fig. 2.1, cada prueba entrega valores distintos aún cuando los niveles de esfuerzo sean iguales. Por esto, existen distintos intentos en la literatura de crear correlaciones entre los datos, evitando los costos asociados a realizar nuevos ensayos experimentales del mismo material o componente. La forma en que se ha abordado esta problemática es la utilización de un factor de corrección ( $\phi$ ) calculado con distintas propuestas.

Algunos de estos modelos son: Philipp, Lee, Esin y Manson y Muralidharan. Cada metodología aborda de distinta forma el cálculo del factor de corrección  $\phi$ , ahora bien, se abordarán los modelos de Lee y Esin en este trabajo, ya que son los modelos que se ajustan mejor al comportamiento de los datos empíricos de ensayos de fatiga.[? ]

#### Modelo de Esin

El modelo propuesto por Esin [? ] relaciona las curvas  $S-N$  de los ensayos *push-pull*, *alternating bending* y *rotating bending*. Éste depende del esfuerzo alterante, asumiendo que la curva base y la calculada por este método se intersectarán en el punto  $(S_e, N_f)$ , es decir, el factor de corrección es  $\phi = 1$  en esa posición.

El método se basa en el análisis de la dependencia de la micro-plasticidad en la distribución de esfuerzos en la sección transversal, definiéndose la micro-plasticidad como el flujo plástico de un material sin haber alcanzado su punto de fluencia. Ésta ocurre sobre cierto nivel de esfuerzos en el rango elástico, llamado límite elástico real (*true elastic limit*, en inglés o *TEL*) y bajo el límite de resistencia a la fatiga,  $S_e$ . Así, siempre se cumplirá que:

$$TEL \leq S_e \leq S_y$$

La micro-plasticidad es un fenómeno altamente localizado que depende de las propiedades probabilísticas micro-estructurales del material como su micro-inhomogeneidad, anisotropía y micro-concentraciones de esfuerzos, los cuales explican la dispersión de datos en los ensayos de fatiga. Así, cuando los esfuerzos alternantes están sobre valor del *TEL*, la micro-plasticidad influye en los macro-elementos. Dicho de otra forma, el comportamiento mecánico observado a un nivel macro es el comportamiento integrado de los micro-elementos.

En la figura 2.2, se puede apreciar las áreas afectadas por fatiga para cada tipo de ensayo, los cuales, por sí mismo podrían explicar las diferencias en los resultados de cada

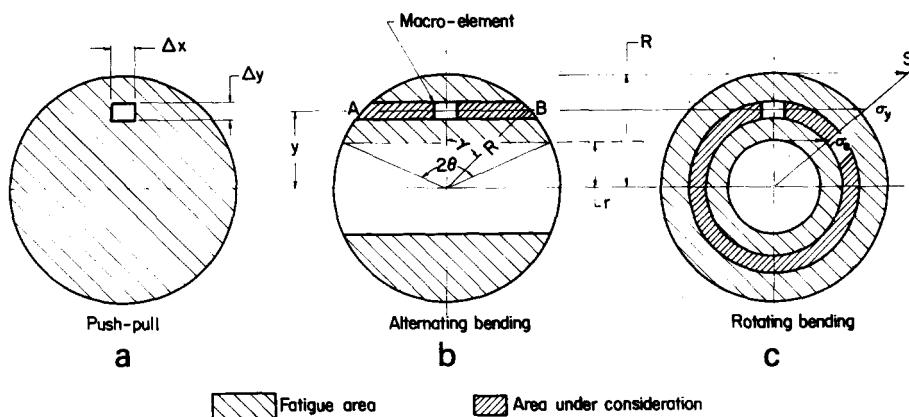


Figura 2.2: Sección transversal de probetas sujetas a esfuerzo alternante uniaxial. a) *push-pull*, b) *alternating bending* y c) *rotating bending*. [? ]

prueba. Sin embargo, basándose en el criterio de fatiga de la deformación micro-plástica, la falla ocurre cuando la energía acumulada por la histéresis plástica, a una cantidad de ciclos  $N_f$ , es igual al valor de la energía de ruptura real (área bajo la curva de un diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$  real), como queda expresado en la ecuación 2.1.1.

$$N_f = \frac{U \cdot T_t}{W} \quad (2.1.1)$$

Donde:

- $N_f$ : Número de ciclos a la falla.
- $U$ : Energía total real bajo la curva del diagrama esfuerzo-deformación.
- $W$ : Energía total plástica disipada.
- $T_t$ : Número total de macro-elementos.

De esta forma, el método utiliza varios factores para crear una correlación entre las distintas curvas, ocupando el esfuerzo alternante,  $S$ , como valor de entrada. El primero de ellos es el concepto de esfuerzo alternante equivalente,  $S_{eq}$  (ecuación 2.1.2), utilizado para denotar un esfuerzo hipotético actuando sobre todos los elementos sometidos a fatiga.

$$S_{eq} = \frac{\sum \sigma_i A_i}{\sum A_i} \quad (2.1.2)$$

Donde  $A_i$  es el número o área de los macro-elementos con igual esfuerzo equivalente. A partir de esto, el esfuerzo equivalente para ensayos de *rotating bending* y *alternating*

*bending*, están dados por las ecuaciones 2.1.3 y 2.1.4, respectivamente.

$$S_{eq,rt} = \frac{2S \cdot \sin^3 \theta}{3C} \quad (2.1.3)$$

$$S_{eq,ab} = \frac{2S}{3} \cdot \left( \frac{1 - c^3}{1 - c^2} \right) \quad (2.1.4)$$

Donde las variables  $C$  y  $c$  se definen cómo:

$$C = \left( \frac{\pi\theta}{180} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \quad ; \quad c = \frac{r}{R} \quad (2.1.5)$$

Los valores de  $\theta$ ,  $r$  y  $R$  son propios de la geometría de la probeta utilizada y se definen de acuerdo a la figura 2.2. De igual forma, se debe calcular el factor de fatiga,  $FF$ , ecuación que representa el ratio entre el área total de la sección transversal y el área de los elementos que contribuyen al proceso de fatiga. Así, las ecuaciones 2.1.6 y 2.1.7 representan los factores de fatiga para calcular la vida a fatiga equivalente,  $N_{eq}$ , de *alternating bending* y *rotating bending*, respectivamente.

$$FF_{ab} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\pi\theta}{180} - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \quad (2.1.6)$$

$$FF_{rb} = \frac{R^2}{(R^2 - r^2)} \quad (2.1.7)$$

Finalmente, con estos elementos es posible tomar del diagrama *S-N* un punto  $(S_i, N_i)$  y, a través de las correlaciones, obtener un nuevo punto  $(S'_i, N'_i)$  que equivale a la curva *S-N* de otro tipo de ensayo.

La metodología consiste en tomar un valor de esfuerzo alternante conveniente  $S$  y calcular su esfuerzo alternante equivalente,  $S_{eq}$ . Utilizando este valor, se determinará a partir de la curva *S-N* original el número de ciclos a la falla que se llamará vida a fatiga equivalente,  $N_{eq}$ . Este valor debe ser multiplicado por el factor de fatiga  $FF$ , obteniendo la vida a fatiga modificada,  $N$ . Así, el punto  $P = (S, N)$  es el valor equivalente obtenido, teniendo que repetirse el procedimiento para todos los puntos que se requieran.

## Modelo de Lee

La estimación del límite de fatiga,  $S_e$ , se calcula a través de distintos factores de modificación según el tipo de carga, calidad superficial, tamaño y confiabilidad de la muestra. El factor de modificación según el tipo de carga  $C_L$  varía entre 0,7 y 0,9 para probetas sin muescas. Las recomendaciones para cada valor de  $C_L$  se realizaron considerando los

efectos del gradiente de esfuerzos y el tipo de esfuerzo involucrado, es decir, cortantes y normales. Estos también varían según el tipo de material, los cuales fueron obtenidos de manera empírica. Así la tabla 2.1 muestra los factores de modificación para algunos tipos de carga.

Tipo de Carga	$C_L$	Observaciones
Carga axial pura	0,9	-
Carga axial con leve flexión	0,7	-
Rotating bending	1,0	-
Torsional	0,58	Para aceros

Tabla 2.1: Factores de modificación por tipo de carga, según el modelo de Lee.

En definitiva, ambos métodos toman en consideración distintos elementos, lo que lleva a que exista una diferencia entre ambos. La fig. 2.3 muestra las diferencias de sus curvas de manera representativa, en las cuales se puede ver claramente la diferencia de los resultados esperados al utilizar el factor de corrección de cada método.

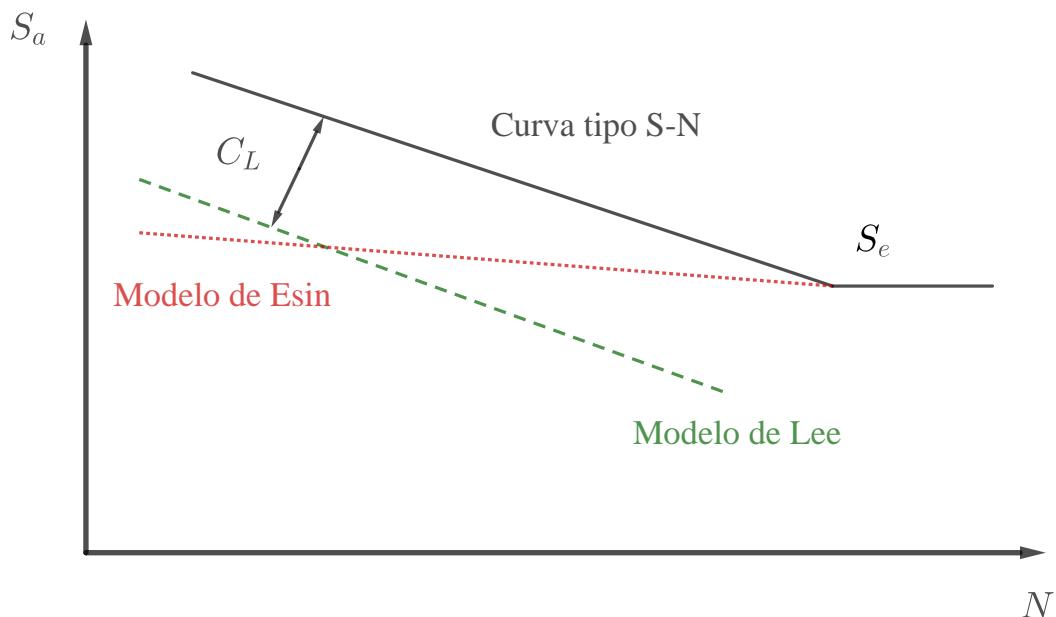


Figura 2.3: Representación entre una curva característica de un ensayo de fatiga y los métodos de Lee y Esin para correlacionar distintos tipos de ensayos. [? ]

## 2.2. Máquina de fatiga a flexión

El desarrollo de este trabajo se centrará en la máquina de fatiga que posee el departamento de ingeniería mecánica en el laboratorio de tecnología mecánica en Valparaíso. La información existente sobre la máquina de ensayo es escasa principalmente por su antigüedad, por lo que con el transcurso del tiempo ha llevado a la perdida de documentos y la obsolescencia de su tecnología.



Figura 2.4: Máquina de fatiga en flexión en el laboratorio de tecnología mecánica

A partir de la información verbal entregada por el profesor Guillermo González, la máquina fue adquirida por el departamento durante la década del 50. Fue fabricada en

Suiza por *Alfred J. Amsler & Co.* y su estructura completa es de hierro fundido. Previo a la remodelación del piso del laboratorio durante el año 2012, la máquina se encontraba montada sobre un colchón de corcho, que a su vez se anclaba a un bloque hecho de concreto. Este fue demolido durante los trabajos, momento desde el cual se encuentra apoyada sobre la mesa de madera sin una solución definitiva. Más aún, varios equipos y máquinas de ensayo del laboratorio no se encuentran ancladas al piso ni con una instalación definitiva, impidiendo su correcto uso.

La máquina consiste, en un primer acercamiento, en un disco desequilibrado de forma controlada por el usuario, el cual, al ser acelerado angularmente hasta una velocidad definida por su motor eléctrico, comienza a oscilar. Esta oscilación es transmitida, a través de un brazo de carga, hacia la probeta en forma de momento. La probeta se encuentra doblemente empotrada, por un lado está fija a la estructura de la máquina y, por el otro, empotrado al brazo de carga que le realiza el momento. Los elementos que generan el desequilibrio son pequeñas masas calibradas, como se puede apreciar en la fig. 4.2, que se denominarán contrapesos. La máquina también entrega la posibilidad de realizar ensayos de fatiga a torsión al girar los empotramientos 90 grados, sin embargo, esta configuración no se estudiará en este trabajo. Un estudio a mayor profundidad de la fatiga a flexión se realizará en la sección 4.1.

### 2.3. La madera como elemento constructivo

La madera es un material de construcción simple y liviano, con ciertas características que lo vuelven particular respecto a otros materiales de construcción. Esto hace que al momento de trabajar con la madera se requiera un conocimiento especial y se tomen en consideración reglas específicas que permitan realizar diseños de calidad que aprovechen al máximo las propiedades y beneficios que provee.

Existen cientos de variedades de madera, donde cada una tiene propiedades distintas. Además, al haber sido parte de un organismo vegetal en crecimiento, hace que ninguna pieza de madera sea igual a otra y, dependiendo del tipo de corte, también varíen las propiedades mecánicas. Frente a esta importante variabilidad del material, surgen las normas en cada país que intentan delimitar y clasificar las distintas especies madereras que se encuentran en su región según el tipo de corte, contenido de humedad, su calidad o uso. Incluso, existen distintas metodologías de cálculo si se utiliza madera maciza, laminada encolada o aglutinada. En el caso de este trabajo, se utilizará exclusivamente madera maciza, por lo tanto, toda la metodología de cálculo e información respectiva a este tipo de madera, a excepción del pino radiata, se encuentra en la norma NCh 1198 Of. 1991 -

Madera - Construcciones en madera - Cálculo.

### 2.3.1. Anatomía de la madera

La madera es un material que es fabricado naturalmente por los vegetales leñosos, con un alto grado de especialización y complejidad. Esto lo convierte en un material altamente heterogéneo, al estar especializado en llevar a cabo las funciones fundamentales del vegetal, lo que se ve reflejado en sus propiedades físicas y mecánicas.

Una consecuencia de esta heterogeneidad es el comportamiento anisotrópico, teniendo un comportamiento distinto según la dirección en que se trabaja. Se establecen tres planos de referencia respecto a su propiedades físicas.

- Longitudinal: Sigue la misma dirección de la fibra o el eje del tronco.
- Radial: Pasa por el eje del tronco y es perpendicular a los anillos de crecimiento.
- Tangencial: Paralela a un plano tangente a los anillos de crecimiento.

En relación a sus propiedades mecánicas se habla de dos direcciones, la paralela (longitudinal) y normal o perpendicular (englobando radial y tangencial). Esta diferencia hace que la madera sea capaz de soportar cargas de compresión de hasta 4 veces en dirección paralela respecto a la normal. Esto quiere decir que siempre que sea posible, se deben instalar las piezas madereras para que resistan las cargas en su dirección longitudinal para un uso eficiente del material. De esta forma, se habla que las propiedades mecánicas de la madera son ortotrópicas.

Por último, es considerado un material higroscópico por su capacidad de captar o ceder agua del exterior, tanto en forma líquida como vapor. La cantidad de agua que contiene tenderá a estar en equilibrio con su entorno, lo que afectará sus propiedades físicas, mecánicas y en su posible degradación.

### 2.3.2. Propiedades mecánicas de la madera

Junto a la ortotropía de la madera, existen otras particularidades que influyen en sus propiedades, como la duración de la carga, el contenido de humedad y su calidad. En el primer caso, dado su carácter orgánico, es susceptible a degradarse por elementos externos como la lluvia, hongos, insectos o el sol, la cual se protege utilizando tratamientos químicos, e internos, que se cuantifica a través de un factor de modificación por duración de carga. En el segundo caso, a mayor cantidad de humedad la resistencia comienza a decaer, como también sus dimensiones se comienzan a modificar, afectando las uniones o

ensambles. En último término, la calidad se reflejada en la cantidad de nudos, desviaciones de fibra o gemas que influyen en su comportamiento.

La tracción y compresión tienen resistencias distintas, además de las diferencias existentes entre las cargas paralelas y perpendiculares a la madera. La resistencia a la tracción paralela es comúnmente más alta que la compresión paralela, en la cual se debe calcular además la inestabilidad lateral. En el caso de la compresión y tracción perpendicular, los valores de resistencia son considerablemente más bajos, llegando a ser 9 y 20 veces menos resistente que su par paralelo, respectivamente. Esto se debe a la eficiencia de construcción de los árboles al no estar solicitados fuertemente en estas direcciones.

Esta diferencia de resistencia y comportamiento entre la tracción y compresión de la madera implica que en el cálculo de la flexión se deban separar las zonas flexo-comprimidas y flexo-traccionadas, a pesar que la resistencia a la flexión de una madera sea única. Por otro lado, el esfuerzo cortante en un elemento de madera puede tener diversos modos:

- Cortadura: las fibras son cortadas transversalmente.
- Deslizamiento: las fibras se desplazan longitudinalmente.
- Rodadura: las fibras se desplazan una sobre otra.

Donde la rotura se produce por deslizamiento al ser el plano más débil.

En última instancia, la resistencia a la fatiga de la madera es muy buena en comparación a otros materiales estructurales con estructura cristalina como el acero [?], siendo resistente a la acción cíclica de las cargas y al amortiguamiento de estas.

## 2.4. Acero

El acero es una aleación basada principalmente en fierro y carbono, pudiendo tener concentraciones de otros elementos incluso. Sus propiedades mecánicas son fuertemente sensativas al contenido de carbono, por lo que muchas veces es clasificado a partir de su porcentaje, como aceros de bajo, media y alto en carbono. También inciden en sus propiedades mecánicas las características de fabricación y si reciben algún tipo de tratamiento térmico.

La probeta utilizada en la máquina de fatiga se fabrica actualmente de acero de bajo carbono, los cuales bajo nomenclatura AISI/SAE se denominan 1020 y 1040, es decir, son aceros que sólo contienen concentraciones residuales de otros elementos distintos al carbono y su concentración es del 0,20 % y 0,40 % respectivamente. Los aceros de bajo

carbono se caracterizan por ser más débiles, pero con una alta tenacidad. Además, son maquineables, soldables y más baratos respecto a otros tipos de aceros.

Para la mayoría de los aceros, su comportamiento bajo carga se divide en una zona elástica y otra plástica, como se muestra en la fig. 2.5. La zona elástica se caracteriza por tener un módulo de elasticidad  $E$ , que en el caso de los aceros ronda entre 200 y 210 GPa. La transición de la zona elástica a plástica es gradual y comienza cuando deja de existir una relación lineal entre los esfuerzos y la deformación, es decir, llega al esfuerzo de fluencia,  $\sigma_y$ . Una vez en la región de deformación plástica el punto de esfuerzo máximo en una curva ingenieril de esfuerzo-deformación es llamado esfuerzo último,  $\sigma_u$ .

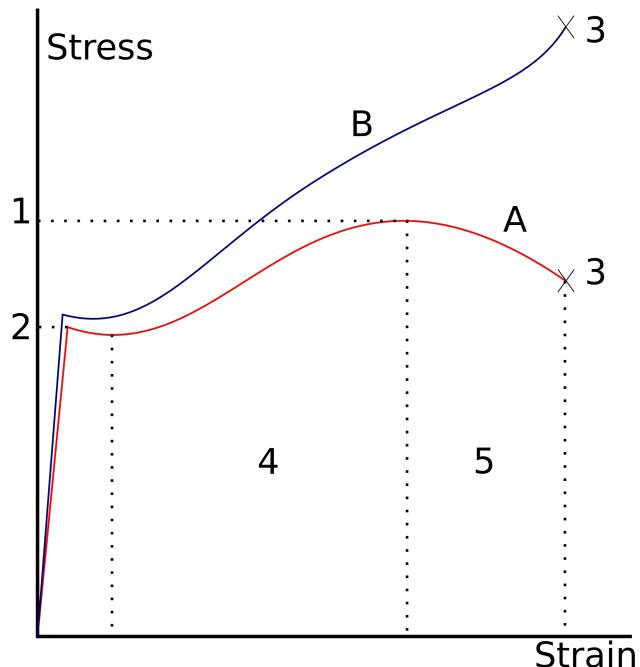


Figura 2.5: Curva de esfuerzo-deformación ingenieril (A) y real (B) de un acero. Los puntos representan: (1) Esfuerzo último ( $\sigma_u$ ), (2) esfuerzo de fluencia ( $\sigma_y$ ), (3) esfuerzo de ruptura, (4) región de endurecimiento por deformación y (5) región de estricción. [? ]

## 2.5. Software de simulación de elementos finitos

En el desarrollo de esta tesis se utiliza el software de elementos finitos ANSYS para la simulación estática de la probeta y el software Autodesk Inventor para la simulación de la estructura soportante en su módulo de análisis de esfuerzos (*Stress Analysis*).

En el caso de ANSYS, se utilizó el ambiente “*Static Structural*”, el cual determina los desplazamientos, esfuerzos y fuerzas en la estructura que está sometida a una o varias cargas. Además permite el análisis elastoplástico de un material, siendo utilizado el modelo de plasticidad multilineal de endurecimiento isotrópico (*Multilinear Isotropic Hardening* o MISO).

Inventor, por otro lado, el módulo de análisis de esfuerzos puede realizar análisis de tipo estático, para evaluar las condiciones de carga de la estructura, y de tipo modal, para evaluar los modos de frecuencia natural de la estructura.

---

# **Capítulo 3**

## **Marco Teórico**

### **3.1. Fatiga**

#### **3.1.1. Definiciones**

La fatiga se puede definir, desde la perspectiva del material, como el proceso en el cual el daño se acumula producto de la aplicación de cargas repetitivas que se encuentran bajo el punto de fluencia. En metales, este proceso se divide en tres fases o etapas las cuales, dependiendo del autor, pueden ser llamadas: fase de iniciación de la grieta, fase de crecimiento de la grieta y fractura.

La primera fase es el inicio de una o más microgrietas, la cual ocurre tempranamente en la vida a fatiga de un material y que, incluso, pueden ocurrir inmediatamente si el esfuerzo cíclico se encuentra sobre el límite de fatiga. Lo característico de esta etapa es que las grietas no pueden verse a simple vista, fase que representa una parte considerable de la vida a fatiga total. Estas crecerán lentamente y de manera errática, debido al efecto de las microestructuras como los bordes de grano. Durante este período, las concentraciones de esfuerzo juegan un importante papel, al ser los lugares donde comenzará la nucleación de las grieta, sumado a las pocas restricciones de deslizamiento de la superficie del material, hace que esta zona sea relevante en el inicio de este proceso.

En la segunda etapa, las microgrietas pasan a ser macrogrietas, es decir, son visibles al ojo humano. Estas grietas comienzan a tomar una dirección de crecimiento que es perpendicular a los esfuerzos principales producidos por la carga alterna. La resistencia al crecimiento de las grietas, cuando esta penetra el material, dependerá de las propiedades de grano. Así, se puede definir cualitativamente una separación entre ambas etapas, donde el periodo de iniciación o nucleación de las grietas termina cuando su crecimiento no es dependiente de las condiciones superficiales del material. Producto de la micro-

deformación plástica cíclica se forman bandas de crecimiento conocidos como *marcas de playa* o “*striations patterns*”, abriendo, cerrándose y frotándose entre sí, como se puede ver en la fig. 3.1, dejando en evidencia el frente de grieta, las variaciones en la carga, su velocidad de crecimiento y la naturaleza corrosiva del entorno.

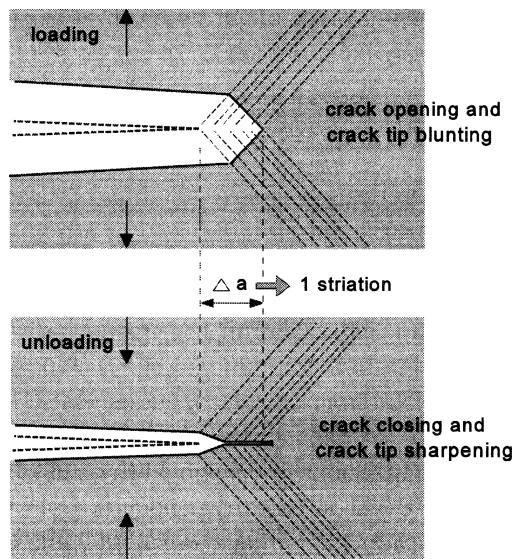


Figura 3.1: Crecimiento de una grieta durante un ciclo de carga perpendicular, dando origen a las marcas de playa. [? ]

Finalmente, la última etapa es la falla del material, que ocurre en el último ciclo de la carga, al no poder soportarla con el material restante. Esta fractura es rápida y es producto de una macro-deformación plástica, pudiendo ser frágil, dúctil o una combinación de ambas.

Con esto en cuenta, es posible definir ciertos conceptos en base a las distintas etapas que experimenta un material. La vida a fatiga de un material (*fatigue life*,  $N_f$ ) es el número de ciclos aplicados a una probeta para lograr el criterio de falla [? ]. El límite de resistencia a la fatiga (*endurance limit*) es frecuentemente explicado como la amplitud de esfuerzo para el cual la vida a fatiga tiende a infinito o a la asíntota de la curva S-N. Sin embargo, al comprender la fatiga como un proceso, es posible dar una definición más acertada para el límite a la fatiga, pasando a ser el umbral para el crecimiento de las microgrietas. Es decir, bajo este límite existe nucleación e iniciación de grites, sin embargo, su crecimiento está limitado a los bordes de grano del material.

Por otra parte, para el estudio de este fenómeno existen tres modelos de falla por fatiga: de *esfuerzo-vida* (*S-N*), de *deformación-vida* ( $\varepsilon$ -N) y de la *mecánica de fractura lineal elástica* (LEFM). Cada uno de ellos tiene ventajas y desventajas, sin embargo, la

máquina que es objeto de evaluación en este trabajo utiliza el método *esfuerzo-vida*. El criterio de elección entre los distintos modelos se divide principalmente por la cantidad de ciclos que se harán en la medición, los que se clasifican en régimen de fatiga de bajo ciclaje (*low-cycle fatigue*, LCF) o un régimen de fatiga de alto ciclaje (*high-cycle fatigue*, HCF). La división entre ambas se establece, por lo general, como  $10^3 \leq LCF < HCF$  [? ] (ver fig. 3.3), debido a que la zona LCF está asociada a la existencia de macro-deformaciones plásticas en cada ciclo. De esta manera, el método de esfuerzo-vida se utiliza para ensayos de alto ciclaje debido a su poca precisión en casos LCF. A su vez, los métodos de deformación-vida y LEFM se aplican para casos LCF.

En el método de esfuerzo-vida las muestras o probetas son sometidas a fuerzas de magnitudes específicas, al mismo tiempo que se cuentan la cantidad de ciclos. Es por esto que es un modelo con base en el esfuerzo, con el cual se busca determinar un límite de resistencia a la fatiga.

Estas fuerzas específicas pueden ser constantes o variables en el tiempo y magnitud, sin embargo, se abordará principalmente los casos donde los esfuerzos fluctúan de manera constante en el tiempo y de una amplitud fija debido a las características de la máquina analizada en este trabajo. Esto permite trazar la curva de fatiga *S-N* del componente o material para distintas cargas con su respectivo número de ciclos en el que falla.

Por esto, se hace necesario describir y definir conceptos que surgen producto de una carga cíclica. Esta curva se caracteriza por el esfuerzo alterna (*alternate stress* o *amplitude stress*,  $\sigma_a$ ) y el esfuerzo medio (*mean stress*,  $\sigma_m$ ) que se muestran en la ecuación 3.1.1 y 3.1.2, respectivamente. A su vez, estas se definen por el esfuerzo máximo  $\sigma_{max}$  y  $\sigma_{min}$ , siendo el esfuerzo máximo y mínimo alcanzado por la carga cíclica. Finalmente, el rango del esfuerzo,  $\Delta\sigma$  o  $\sigma_r$  (ec. 3.1.3), y la razón de esfuerzos,  $R$  (ec. 3.1.4), también son opciones para caracterizar la fatiga.

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (3.1.1)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (3.1.2)$$

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\sigma_a \quad (3.1.3)$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (3.1.4)$$

Estos términos se pueden ver claramente en la fig. 3.2.

Existen dos casos específicos destacables, el primero en donde  $\sigma_m = 0$ , y así  $R = -1$ , se llama esfuerzo de ciclo invertido. El segundo, cuando  $\sigma_{min} = 0$ , y  $R = 0$ , se llama esfuerzo repetido.

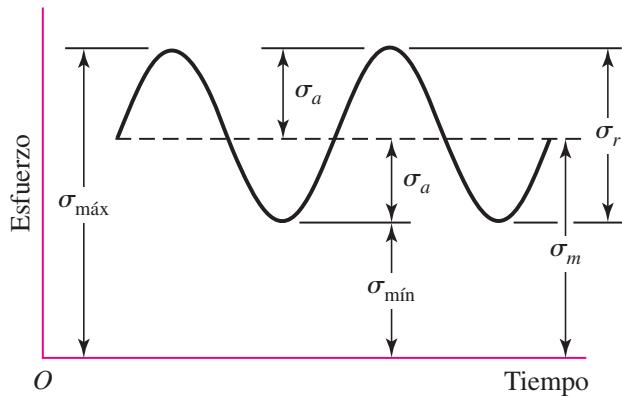


Figura 3.2: Definición de los esfuerzos alternantes, máximo, mínimo y medio. [? ]

### 3.1.2. Curva S-N o de Wöhler

Como se señaló en el punto anterior, la curva *S-N* es el resultado de la aplicación del método esfuerzo-vida. Es quizás uno de las herramientas más importantes en el desarrollo empírico para lograr cuantificar el proceso de fatiga y poder diseñar contra este. El diagrama *S-N* se obtiene como resultado de un número de ensayos de fatiga a distintos niveles de esfuerzo, donde *S* puede ser la amplitud ( $S_a$ ), el rango de esfuerzo ( $\Delta S$ ) o el esfuerzo máximo ( $S_{max}$ ) que es aplicado a la probeta, siendo la amplitud lo más común. La variable *N* hace referencia a la vida a fatiga del material, es decir, la cantidad de ciclos hasta que la probeta falle. Debido a que se desea analizar fallas en LCF y HCF, la cantidad de ciclos necesarios para fallar la probeta pueden llegar a ser demasiado altos, por esto, *N* se grafica en escala logarítmica.

La cantidad de ensayos requeridos para construir la curva *S-N* dependerá de distintos factores como, por ejemplo, la confiabilidad esperada, el uso final de la información o de los recursos disponibles. La norma E739-10 – "Statistical Analysis of Linear or Linearized Stress-Life (*S-N*) and Strain-Life ( $\varepsilon$ -*N*) Fatigue Data" [?], establece una guía dependiendo del tipo de prueba a realizar como se muestra en la tabla 3.1. Además, se recomienda realizar la medición con al menos tres puntos de esfuerzos distintos. Con esto, es posible obtener el diagrama *S-N* como el que se aprecia en la fig. 3.3, donde se puede notar la diferencia entre la zona LCF, HCF y de vida infinita.

Tipo de prueba	Cantidad mínima de probetas
Preliminar y exploratorio (investigación exploratoria y ensayos de desarrollo)	6 a 12
Pruebas de desarrollo e investigación de componentes y probetas	6 a 12
Datos de diseños permisibles	12 a 24
Datos de confiabilidad	12 a 24

Tabla 3.1: Número mínimo de pruebas según tipo de prueba. [? ]

La curva  $S-N$  varía ampliamente sus resultados para distintos tipos de materiales y, a su vez, estos se ven afectados por una variedad de factores. Estos pueden ser por modificaciones en las condiciones de ensayo, de la geometría de la probeta, de la naturaleza del material o de la forma de fabricación de la probeta. Todos estos factores crean ciertas tendencias en la obtención de datos que los distinguen unos de otros.

En concreto, las condiciones medioambientales hostiles, ya sean químicas o térmicas, pueden acelerar el proceso de iniciación y crecimiento de grietas. Una probeta sometida a creep, fatiga y altas temperaturas puede disminuir drásticamente sus vida útil y, por tanto, la vida a fatiga del material. También es posible realizar ensayos en una solución de sal para homologar las condiciones marinas, afectando su vida a fatiga. Otro factor que afecta los resultados de los ensayos es la frecuencia de los ciclos de carga ejercidos, al aumentar la temperatura de la probeta durante su ensayo.

El esfuerzo residual también tiene incidencia en la curva de Wöhler, la cual puede incluso ser beneficiosa al utilizar técnicas como el granallado (*shot peening*). El mecanizado de las piezas, como en el caso de la probeta utilizada por la máquina de fatiga, verá afectado los resultados de la curva  $S-N$  dependiendo de las características con las que sea manufacturado. Como se indicó anteriormente, la primera etapa de la fatiga, la iniciación de las grietas, es un fenómeno que depende de la superficie del material y como consecuencia, un mecanizado grueso o fino tendrá un impacto en esa etapa de la fatiga y no en la posterior. Así, aquellas probetas que tengan una mejor calidad superficial producto del afinado, tendrán una mejor resistencia a la fatiga respecto a otras.

Es posible encontrar otros factores que inciden en los resultados de la curva, como pueden ser la geometría de la probeta o componente, sus dimensiones, el esfuerzo último ( $\sigma_u$ ), su microestructura, tratamientos químicos y el esfuerzo medio ( $S_m$ ). Este último será analizado en la sección siguiente, debido a la importancia que posee al estar presente en la máquina que se estudia en este trabajo.

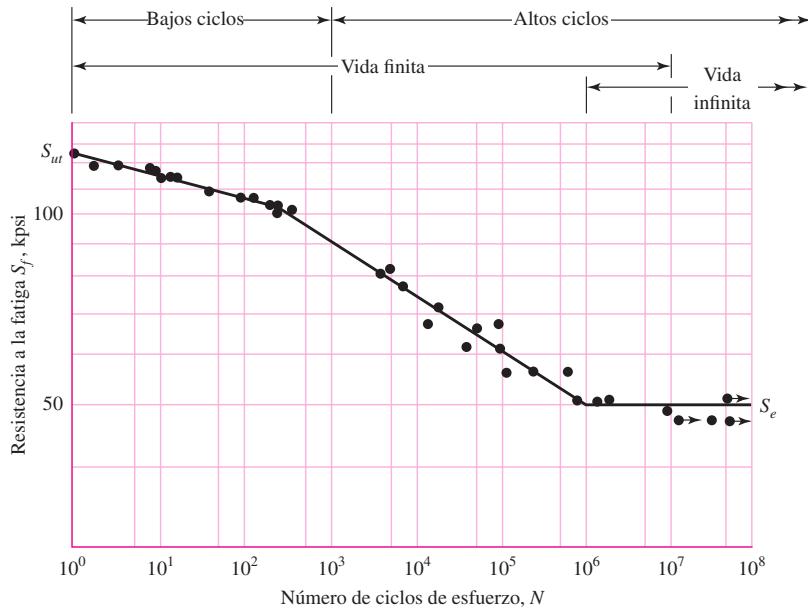


Figura 3.3: Diagrama  $S$ - $N$  obtenido a partir de los resultados de ensayos a fatiga axial con carga invertida. Se pueden apreciar las zonas LCF, HCF y la zona de vida infinita. [?]

### 3.1.3. Esfuerzo medio, $S_m$

Como se escribió anteriormente, el esfuerzo medio tiene influencia en el resultado de una curva  $S$ - $N$ , disminuyendo el límite a la resistencia de la fatiga del material a medida que aumenta su carga media. Debido a que realizar ensayos para cada carga media resultaría muy costoso, existen ecuaciones que buscan estimar el efecto de un esfuerzo sobre un material o componente.

Se utilizan distintas maneras para representar la información de un ensayo cuando  $S_m \neq 0$ . Una forma es recolectar la información de distintos ensayos con distintos valores de carga media y graficarlos como se muestra en la fig. 3.4. Una segunda opción es realizar un diagrama de vida constante (*constant fatigue life diagram, CFL*), mostrada en la fig. 3.5, el cual muestra claramente que un incremento del esfuerzo medio tiene como resultado una disminución del esfuerzo alternante, para la misma vida de la probeta,  $N_f$ .

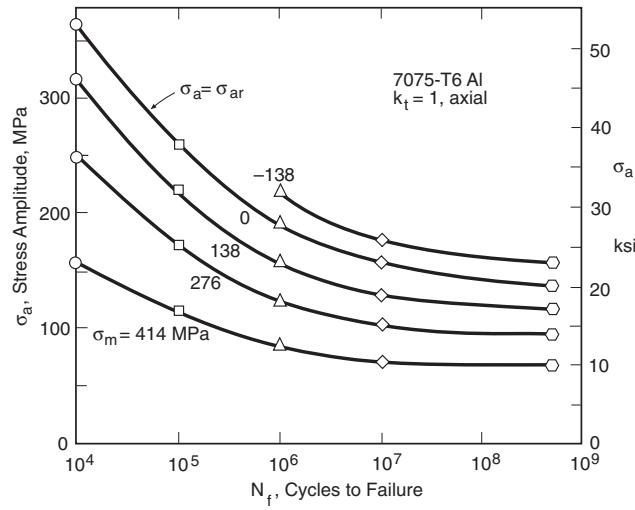


Figura 3.4: Diagrama  $S$ - $N$  de ensayos de fatiga axial con distintos esfuerzos medios para aluminio 7075-T6. [?]

### 3.1.4. Diseño para esfuerzos uniaxiales fluctuantes

Es importante tomar en consideración en el diseño de elementos la componente media de la carga fluctuante. Para esto, se utiliza un diagrama de esfuerzo alternante versus esfuerzo normal en el cual se ajustan distintas curvas a los datos obtenidos. Como se muestra en la fig. 3.6, existe la línea de Goodman modificada, la parábola de Gerber y la línea de Soderberg.

La parábola de Gerber es la que mejor se ajusta a los datos de falla experimental, de acuerdo a la ec. 3.1.5; mientras que la línea de Goodman modificada, ec. 3.1.6, se ajusta por debajo de la dispersión de datos. Ambas curvas utilizan en el eje  $\sigma_a$  el límite de resistencia a la fatiga  $S_e$  y el esfuerzo último  $S_u$  en el eje  $\sigma_m$ . En cambio, la línea de Soderberg, ec. 3.1.7, une  $S_e$  con la resistencia a la fluencia del material  $S_y$  y es, por lo tanto, un criterio de falla más conservador que los demás. Sin embargo, la línea punteada que une ambos  $S_y$  se debe utilizar en las dos primeras curvas como límite del primer ciclo de esfuerzo para evitar que ceda o falle. [?]

$$\text{Par\'abola de Gerber:} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m^2}{S_u^2} = 1 \quad (3.1.5)$$

$$\text{Goodman modificada:} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1 \quad (3.1.6)$$

$$\text{Soderberg:} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = 1 \quad (3.1.7)$$

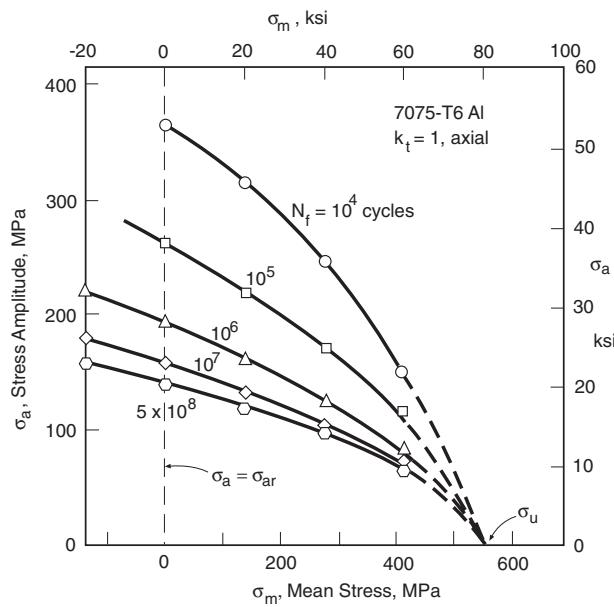


Figura 3.5: Diagrama de vida constante para aluminio 7075-T6. [? ]

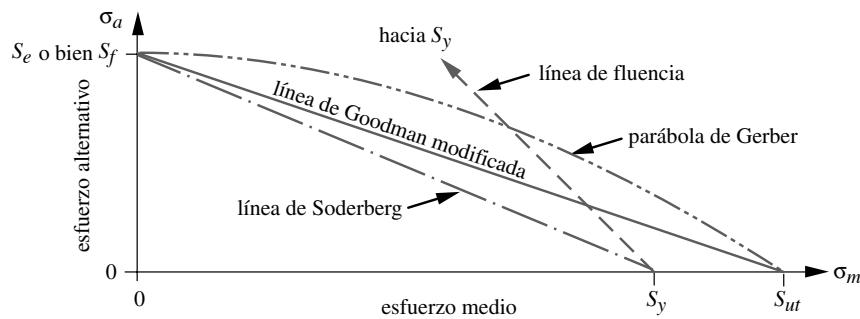


Figura 3.6: Curvas de estimación de falla a fatiga de Goodman, Gerber y Soderberg.[? ]

### Diagramas de esfuerzos alternantes normalizados y medios

La normalización del diagrama mostrado en la fig. 3.5 responde a la necesidad de consolidar los datos de mediciones para distintos esfuerzos medios y vida de fatiga dentro una sola curva. Esto da la oportunidad de ajustar la curva a una ecuación que represente todos los datos obtenidos. Así para el caso particular de  $S_m = 0$ , el esfuerzo alternante se designará por  $\sigma_{ar}$ . Por lo tanto, en el diagrama *CFL*,  $\sigma_{ar}$  es el intercepto en  $\sigma_m = 0$  de la curva para cualquier vida  $N_f$ . Por consiguiente, el gráfico puede ser normalizado utilizando la relación  $\sigma_a/\sigma_{ar}$  en la ordenada y el esfuerzo medio  $\sigma_m$  en la abscisa. De

esta manera, se cumplirá que  $\sigma_a/\sigma_{ar} = 1$  cuando  $\sigma_m = 0$  y, además, cuando el esfuerzo alterante es cercano a cero, el valor del esfuerzo medio debe aproximarse al esfuerzo último del material,  $\sigma_u$ . El resultado de esto se puede apreciar en la fig. 3.7.

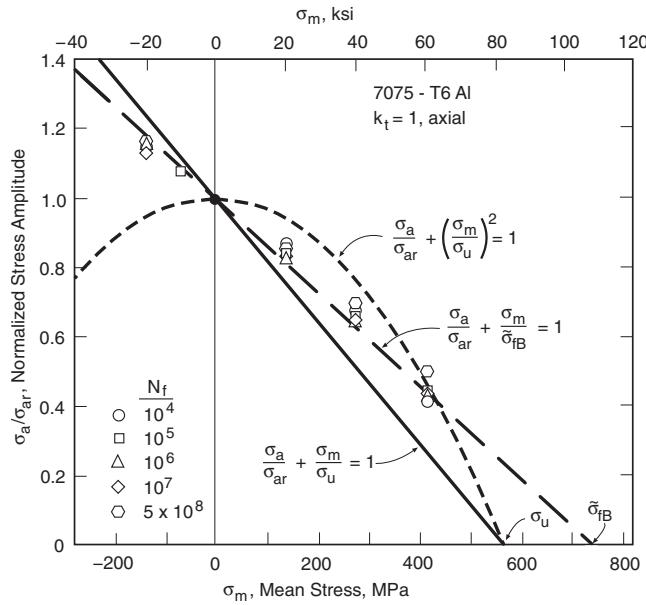


Figura 3.7: Diagrama *CFL* normalizado para aluminio 7075-T6. [? ]

Al igual a como se vio en la sección anterior, las curvas que se ajustan a estos valores pueden ser rectas o una parábola. La ecuación modificada de Goodman normalizada sigue siendo una aproximación conservadora, y su versión normalizada es:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} = 1 \quad (3.1.8)$$

La parábola de Gerber queda expresada como:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 = 1 \quad (3.1.9)$$

Y una segunda modificación de la ecuación de Goodman, propuesta por J. Morrow, para metales dúctiles, en la cual se reemplaza  $\sigma_u$  por el esfuerzo verdadero de fractura corregido  $\tilde{\sigma}_{fB}$ .

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{ar}} + \frac{\sigma_m}{\tilde{\sigma}_{fB}} = 1 \quad (3.1.10)$$

## 3.2. Dinámica

El movimiento y la relación existente entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido es estudiado por la dinámica, la cual busca predecir el movimiento y explicar su origen.

### 3.2.1. Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido

Para describir el movimiento de un cuerpo es necesario recurrir a la segunda ley de movimiento de Newton, la cual permite trazar y predecir el movimiento de traslación y rotación del cuerpo.

Si sobre una masa  $m$  constante actúa una fuerza  $\vec{F}(t)$  que da como resultado un vector de desplazamiento  $\vec{x}(t)$ , la segunda ley de Newton se expresa:

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} \left( m \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \right) = m \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} \quad (3.2.1)$$

De manera análoga para el mismo cuerpo rígido, de momento de inercia  $I$ , es sometido a un momento  $\vec{M}(t)$ , entonces el cuerpo girará con un vector de desplazamiento angular  $\vec{\theta}$ .

$$\vec{M}(t) = I \frac{d^2\vec{\theta}(t)}{dt^2} \quad (3.2.2)$$

Con las ecuaciones 3.2.1 y 3.2.2 se puede describir el movimiento plano de un sólido rígido.

Por otro lado, el principio de D'Alembert nos permite establecer un equilibrio dinámico entre la suma de las fuerzas externas o momentos y el producto entre su masa y la aceleración resultante del sólido, que se le denominará fuerza efectiva. Ambos términos deben ser equipolentes sobre el sistema que actúan, de esta manera las ecuaciones 3.2.3 y 3.2.4 son el resultado de la aplicación de este principio.

$$\sum \mathbf{F}_i = m \ddot{\mathbf{x}}_i \quad (3.2.3)$$

$$\sum \mathbf{M}_i = I \ddot{\theta}_i \quad (3.2.4)$$

### 3.2.2. Energía cinética de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido en movimiento tiene asociada una energía cinética que depende de su masa  $m$ , el momento de inercia  $I$ , su velocidad  $v$  y la velocidad de rotación  $\omega$ . Así la energía cinética  $T$  queda definida por la ec. 3.2.5.

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (3.2.5)$$

## 3.3. Vibraciones

Es el estudio del movimiento repetitivo de los objetos relativo a un marco de referencia estacionario y que oscila respecto a una posición nominal. Es un fenómeno que se da en todos los objetos, afectando naturalmente el diseño en ingeniería, pudiendo ser perjudicial o útil, dependiendo del objetivo que se busca. Por esto, es necesario conocer cabalmente el fenómeno de la vibración, es decir, saber como analizarlo, medirlo y controlarlo para poder manejar las distintas variables que lo afectan.

Físicamente, la vibración es la interacción entre la energía potencial y cinética. De esta manera, un sistema vibratorio debe tener un componente que almacene la energía y la libere en forma de movimiento de una masa para, asimismo, este vuelva a ser almacenado en forma de energía potencial. Los elementos que componen un sistema mecánico y los métodos para describir los movimientos se explicarán en esta sección.

### 3.3.1. Rigidez

El comportamiento como resorte se puede aplicar a distintos elementos y componentes, dependiendo de su geometría y las propiedades del material. Así, a partir de la configuración del sistema, es posible calcular una rigidez  $k$  para el movimiento longitudinal, transversal o torsional.

El cálculo de la constante de rigidez para una viga de área  $A$ , módulo de Young  $E$ , largo  $L$  y el segundo momento de área  $\bar{I}$ , se puede obtener a través de las ecuaciones de energía. Así, la ec. 3.3.1, muestra el valor de  $k$  para una viga en voladizo con una carga  $P$  en su extremo.

$$k = \frac{3EI}{L^3} \quad (3.3.1)$$

Por otro lado, la ec. 3.3.2, muestra la energía potencial elástica asociada a un elemento

que se comporta como un resorte.

$$U_k = \frac{1}{2}k x(t) \quad (3.3.2)$$

### 3.3.2. Damping

Los sistemas vibratorios predicen oscilaciones indefinidas si solo se considera la rigidez del resorte y la masa del sistema, sin embargo, la experiencia nos indica que los sistemas tienden a eventualmente reducir su movimiento hasta cero si estos no están afectados por fuerzas externas. Para esto es necesario añadir un modelo físico para disipar la energía y amortiguar el sistema mecánico. Así, el modelo expresado anteriormente debe ser modificado para considerar la reducción de movimiento en el tiempo. Para esto, se añade a las ecuaciones diferenciales un término de la forma  $c\dot{x}(t)$ , donde  $c$  es una constante, el cual da como resultado una solución donde  $x(t)$  tiende a un punto de reposo. Este tipo de *damping* se llama amortiguamiento viscoso, en el cual su fuerza ( $f_c$ ) es proporcional a la velocidad del sistema en la dirección opuesta del movimiento. Por lo tanto, la ec. 3.3.3 muestra la fuerza de amortiguamiento, de tipo viscoso, presente en un sistema mecánico.

$$f_c = c\dot{x}(t) \quad (3.3.3)$$

Producto del amortiguamiento de la oscilación del sistema, la frecuencia es menor que la de un sistema no amortiguado, disminuyendo exponencialmente. A partir del valor de la constante  $c$ , existen tres casos posibles:

1. **Subamortiguado:** El sistema continúa teniendo un movimiento oscilatorio, con un decaimiento exponencial de la amplitud hasta llegar a la posición de reposo.
2. **Sobreamortiguado:** El movimiento del sistema no alcanza a ser oscilatorio, sin embargo, vuelve a la posición de reposo exponencialmente.
3. **Críticamente amortiguado:** Es el caso que separa si el decaimiento es oscilatorio, siendo el movimiento que retorna al reposo más rápido sin oscilaciones.

Por lo tanto, la ecuación que describe el movimiento de un sistema amortiguado es:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -f_c - f_k \\ m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= 0 \end{aligned}$$

Desde la perspectiva del método de energía, el amortiguamiento viscoso es una fuerza no conservativa que puede ser modelada por la función de disipación de Rayleigh, que toma la forma 3.3.4.

$$R = \frac{1}{2} c \dot{q}_i^2 \quad (3.3.4)$$

Si  $q$  es cada coordenada generalizada y  $n$  es el número de coordenadas generalizadas, entonces se pueden obtener las fuerzas generalizadas para amortiguamiento viscoso derivando  $R$  respecto a cada variable generalizada  $q$ , como se muestra en la ec. 3.3.5.

$$Q_{Rj} = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}, \text{ para cada } j = 1, 2, \dots, n \quad (3.3.5)$$

### 3.3.3. Vibraciones forzadas

Los sistemas mecánicos están sometidos a una gama bastante amplia de fuerzas externas que actúan sobre ellos, las que pueden ser aleatorias, periódicas, no periódicas o transientes. La fuente puede ser variada, pero todas ellas causan vibraciones en el sistema, las cuales se denominarán  $F(t)$ . Para el caso de este trabajo, el sistema a analizar contiene un disco sometido a una velocidad de rotación constante, impulsado por un motor eléctrico, que produce una fuerza periódica producto de su desbalanceo.

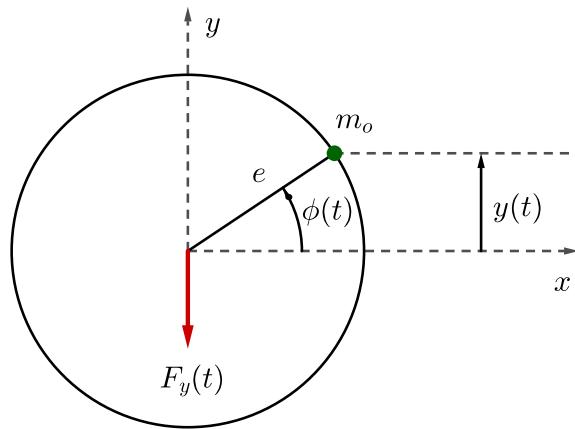


Figura 3.8: Diagrama de cuerpo libre de un disco desequilibrado por masa  $m_0$  a una distancia  $e$ .

Si consideramos un desequilibrio de masa  $m_0$ , a una distancia  $e$  del centro de rotación y rotando a una velocidad  $\phi$ , como se muestra en la fig. 3.8, la componente vertical de la fuerza centrífuga  $F(t)$  es:

$$F_y(t) = m_0 \ddot{y}(t) \quad (3.3.6)$$

Tomando el centro de rotación como el punto cero del sistema de coordenadas y que la aceleración angular es distinta de cero, entonces las coordenadas de posición, velocidad y aceleración quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}y(t) &= e \sin \phi \\ \dot{y}(t) &= e \dot{\phi} \cos \phi \\ \ddot{y}(t) &= e(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi)\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación 3.3.7, muestra la fuerza centrífuga en dirección al eje  $y$  cuando una masa desbalanceada  $m_0$  gira a una velocidad angular  $\dot{\phi}$  y su aceleración angular es  $\ddot{\phi}$ .

$$F_y(t) = m_0 e(\ddot{\phi} \cos \phi - \dot{\phi}^2 \sin \phi) \quad (3.3.7)$$

### 3.3.4. Derivación de las ecuaciones de movimiento

Es el proceso en el que se representan todos los detalles importantes del sistema con el objetivo de derivar las ecuaciones que rigen el comportamiento del mismo. Para esto, los métodos existentes son la ley de movimiento de Newton, el principio de D'Alembert y principio de conservación de la energía. Los primeros, vistos en la sección 3.2.1, se utilizan a través de un diagrama de cuerpo libre y la correcta identificación de las fuerzas y momentos que actúan sobre un cuerpo. Por otra parte, el método de conservación de la energía tiene la capacidad de derivar las ecuaciones de movimiento de un cuerpo sin la necesidad de recurrir a un diagrama de cuerpo libre, es decir, no se requiere identificar fuerzas ni momentos en el sistema. Éste método se verá en mayor profundidad en la sección 3.3.6.

Si consideramos un sistema amortiguado forzado y de un solo grado de libertad,  $x(t)$  o  $\theta(t)$  según sea el caso, entonces la ecuación que describe el movimiento tendrá la siguiente forma:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = F(t) \quad (3.3.8a)$$

$$I \ddot{\theta}(t) + c \dot{\theta}(t) + k \theta(t) = M(t) \quad (3.3.8b)$$

Tanto la ecuación lineal (ec. 3.3.8a) y angular (ec. 3.3.8b) son el resultado de derivarlas a través de cualquiera de los métodos expuestos anteriormente.

### 3.3.5. Sistema de múltiples grados de libertad

El número de grados de libertad de un sistema es la cantidad de parámetros independientes necesarios para definir los movimientos que posee cada masa involucrada en el sistema. Para cada grado de libertad de una masa, corresponde una coordenada  $x_i(t)$ , describiendo su movimiento en esa dimensión. La fig. 3.9 muestra las posibilidades de movimiento de un elemento de masa  $m$  que no está sometido a ninguna restricción.

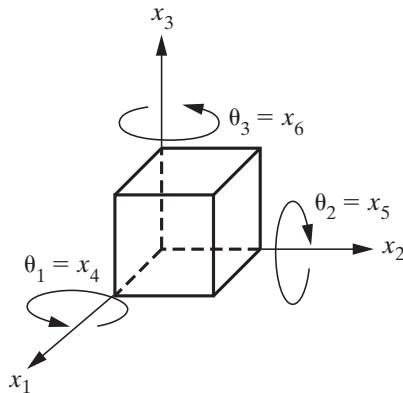


Figura 3.9: Todos los posibles grados de libertad que puede tener una masa, los cuales se dividen en 3 grados de libertad rotacionales ( $\theta_i$ ) y 3 lineales ( $x_i$ ). [? ]

La forma de describir el movimiento de cada masa es a través del uso de matrices y vectores, de tal forma que es posible agrupar los distintos componentes que se vieron en las ecuaciones 3.3.8a y 3.3.8b de un solo grado de libertad. De esta manera, las coordenadas  $x_i(t)$  pueden ser escritas como un vector  $\mathbf{x}(t)$  de  $n \times 1$ , donde  $n$  es la cantidad de grados de libertad del sistema. Asimismo, se puede representar matricialmente la información de la masa del sistema y la rigidez de cada resorte, donde  $M$  es la matriz de masas y  $K$  es la matriz rigidez, ambas de dimensión  $n \times n$ .

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = 0 \quad (3.3.9)$$

La forma de la ec. 3.3.9 permite resolver un sistema de  $n$  grados de libertad, por lo tanto, la forma de la matriz de masas será:

$$M = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n)$$

Y el vector  $\mathbf{x}(t)$  es:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Por otra parte, para sistemas con amortiguamiento viscoso se añade la matriz de amortiguamiento  $C$  de dimensión  $n \times n$ .

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = 0 \quad (3.3.10)$$

Finalmente, se tendrá un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden, con coeficientes constantes, cada una de las cuales requiere dos condiciones iniciales.

$$\mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} x_{10}(t_0) \\ x_{20}(t_0) \\ \vdots \\ x_{n0}(t_0) \end{bmatrix} ; \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10}(t_0) \\ \dot{x}_{20}(t_0) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n0}(t_0) \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

Donde los valores de  $\mathbf{x}(t_0)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$  y de las matrices  $M$ ,  $K$ , y  $C$  se deben conocer para poder resolver el sistema de ecuaciones.

### 3.3.6. Método de Lagrange

El método de conservación de la energía puede ser combinado con los conceptos de trabajo virtual, lo cual lleva a que las ecuaciones de Lagrange puedan ser usadas para obtener la descripción del movimiento del sistema, incluso si son amortiguados y forzados. Sin embargo, antes de explicar su funcionamiento se debe introducir el concepto de coordenadas generalizadas.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema vibratorio pueden estar compuestas por distintos sistemas de coordenadas, no obstante, aquellos sistemas de coordenadas independientes entre sí y de las condiciones de restricción se les llama coordenadas generalizadas,  $q_j$ . De igual forma, se designará como  $Q_j$  a las fuerzas generalizadas que estén actuando sobre el sistema. Estas fuerzas se definen según la ec. 3.3.12, donde  $W_j$  es el trabajo realizado al cambiar las coordenadas generalizadas  $q_j$  y  $\delta q_j$  la cantidad desplazada.

$$Q_j \cdot \delta q_j = W_j \quad (3.3.12)$$

Análogo a como se ha desarrollado anteriormente,  $Q_j$  puede adquirir el valor de una fuerza o momento, así como  $q_j$  puede ser una coordenada de desplazamiento lineal o angular. Así mismo,  $\dot{q}_j$  y  $Q_j^{(n)}$  representan la velocidad generalizada y la fuerza generalizada no conservativa, respectivamente.

Con esto en consideración, el método de Lagrange define el concepto de lagrangiano  $L$ , como la resta entre la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $U$  del sistema, ambos en términos de las coordenadas generalizadas  $q_i(t)$ .

$$L = T - U \quad (3.3.13)$$

Así, el método establece que para un sistema no conservativo sin amortiguamiento, la ecuación 3.3.14 tiene la forma:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.3.14)$$

Si se sustituye la ec. 3.3.13 en 3.3.14, entonces se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (3.3.15)$$

Lo que resultará en una ecuación para cada coordenada generalizada. En resumen, es importante para que el sistema esté correctamente definido la identificación de los sistemas de energía y el uso de las coordenadas generalizadas.

### 3.3.7. Ecuaciones de energía para un sistema con amortiguamiento y forzado

Finalmente, es posible obtener las ecuaciones de movimiento a través del método de conservación de energía para un sistema con dos grados de libertad, forzado y con amortiguamiento viscoso. Para esto, se utilizarán los elementos mostrados anteriormente y se derivará la ecuación. Además se añadirá el efecto de la energía potencial gravitatoria, factor importante en el caso estudiado en este trabajo, donde  $g$  será la gravedad. Por tanto se define según la ec. 3.3.16.

$$U_g = mg q_i \quad (3.3.16)$$

Por lo tanto, la energía potencial total del sistema, tendrá la siguiente forma:

$$U = U_k + U_g = \frac{1}{2} k q_i^2 + mg q_i \quad (3.3.17)$$

A partir de la ec. 3.3.14, considerando los valores de la energía cinética y potencial de las ecuaciones 3.2.5 y 3.3.17, es necesario añadir las fuerzas de amortiguamiento y las fuerzas externas no conservativas. La suma de estas fuerzas fue desarrollada en las secciones 3.3.2 y 3.3.3, dando como resultado las ecuaciones 3.3.5 y 3.3.7.

$$Q_i = F_i(t) + Q_{Ri} = F_i(t) - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.3.18)$$

De esta manera, una vez identificado todos los sistemas de energía y sus respectivos valores, se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = F_i(t) \quad (3.3.19)$$

El cual, una vez derivado y escrito de forma matricial, adquiere la siguiente forma:

$$M\ddot{\mathbf{q}}_i + C\dot{\mathbf{q}}_i + K\mathbf{q}_i = \mathbf{F}_i \quad (3.3.20)$$

## 3.4. Plasticidad

En el caso de metales cristalinos, la plasticidad corresponde a la deformación permanente que se produce a una escala microscópica por el movimiento de un gran número de dislocaciones producto de la aplicación de una carga sobre el material. La zona de deformación plástica es permanente, independiente del tiempo y se caracteriza por estar sobre el punto de fluencia, por lo tanto, los esfuerzos y las deformaciones dejan de ser proporcionales en la curva de esfuerzo-deformación, es decir, tienen un comportamiento no lineal. Los mecanismos que producen la deformación elástica y plástica son distintos, lo que resulta en que ambas deformaciones convivan en la deformación total, teniendo como efecto que cuando un elemento es descargado exista una recuperación de la deformación elástica.

### 3.4.1. Esfuerzo y deformación real

La curva de esfuerzo-deformación ingenieril se construye a partir de dividir la carga aplicada ( $P$ ) en la probeta por el área transversal inicial de esta, sin embargo, esto omite la deformación sufrida. Así, el esfuerzo real (*true stress*,  $\tilde{\sigma}$ ) se define como la fuerza aplicada en la probeta dividida por el área transversal en ese instante ( $A$ ).

$$\tilde{\sigma} = \frac{P}{A} \quad (3.4.1)$$

Dada la disminución en el área  $A$  el esfuerzo real crece por sobre el ingenieril y no baja al llegar al punto de esfuerzo último al considerar la estricción de la probeta. Por otro lado, la deformación real (*true strain*,  $\tilde{\varepsilon}$ ) se define como:

$$\tilde{\varepsilon} = \ln \left( \frac{L}{L_i} \right) \quad (3.4.2)$$

Donde  $L = L_i + \Delta L$  es el largo final. Si se asume que es una deformación isocórica, es decir, no existen cambios de volumen durante la deformación plástica, entonces se tiene que  $A_i L_i = A L$  y el módulo de Poisson es  $\nu' = 0,5$ . Al reemplazar en ambas ecuaciones, se obtiene que el esfuerzo y la deformación real es:

$$\tilde{\sigma} = \sigma(1 + \varepsilon) \quad (3.4.3)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \ln(1 + \varepsilon) \quad (3.4.4)$$

### 3.4.2. Factor de corrección de Bridgman

Cuando una probeta de acero llega al punto de estricción en un ensayo de tracción, los esfuerzos dejan de ser uniaxiales y aparecen esfuerzos en otros componentes. Esto produce que los valores de esfuerzos axiales sean mayores que los reales y deban ser corregidos. El factor que intenta corregir esta diferencia fue desarrollada por Bridgman, entregando una nueva curva de esfuerzo  $\tilde{\sigma}_B$  aplicando un factor  $B$  al esfuerzo real que se obtiene por la ec. 3.4.3 [? ].

$$\tilde{\sigma}_B = B\tilde{\sigma} \quad (3.4.5)$$

Este factor de corrección es un polinomio que se calcula a través de la deformación real que se obtiene de la ec. 3.4.4. Así, se define la variable  $x = \log_{10} \tilde{\varepsilon}$ , dando como resultado la siguiente ecuación:

$$B = 0,0684x^3 + 0,0461x^2 - 0,205x + 0,825 \quad (3.4.6)$$

La corrección se aplica en el rango  $0,12 \leq \tilde{\varepsilon} \leq 3$ .

### 3.4.3. Endurecimiento isotrópico por deformación

Se le denomina al incremento en la resistencia del material a medida que su deformación crece, luego de superar el punto de fluencia. En el caso del endurecimiento isotrópico, el esfuerzo de fluencia del material permanece centrado respecto al eje central aún cuando

crezca producto de la deformación plástica, como se muestra en la fig. 3.10.

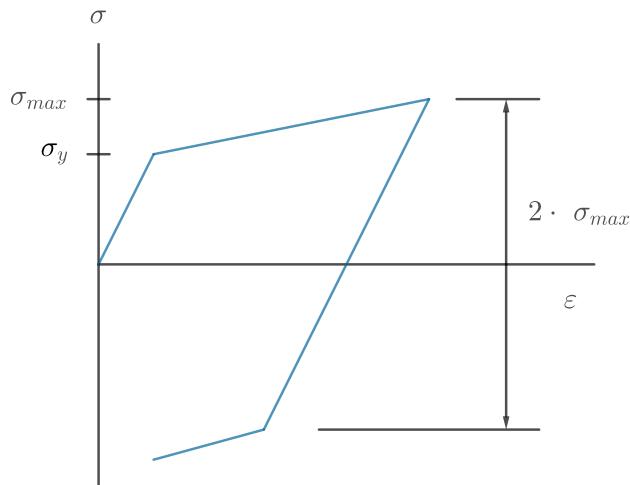


Figura 3.10: Endurecimiento isotrópico por deformación plástica. Se puede apreciar como se conserva la distancia del esfuerzo máximo respecto a la abscisa.

### 3.5. Método de elementos finitos

El método de elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés) y el análisis de elementos finitos (FEA, por sus siglas en inglés) son herramientas utilizadas para proporcionar soluciones aproximadas a problemas complejos en fenómenos mecánicos. Este consiste en tomar un componente real con una estructura continua y dividirla en pequeñas subestructuras finitas de geometría mucho más simple. A este proceso se le llama discretización, a las subestructuras elementos y a los puntos de unión nodos. De esta forma, los nodos pasan a ser fundamentales al ser donde se conectan los elementos, se asignan las condiciones de frontera y se aplican las fuerza de contacto o cuerpo [? ]. Los nodos poseen grados de libertad (DOF, por sus siglas en inglés) de la misma forma en la que se establecieron para una masa, como se puede ver en la fig. 3.9. Para cada nodo se escribe su correspondiente ecuación de balance y luego se puede llegar a un sistema de ecuaciones que resuelve el problema para todos los nodos simultáneamente. Las soluciones de estas ecuaciones da como resultado una aproximación del comportamiento elástico del componente a analizar. En el caso de este trabajo, este procedimiento entregará los desplazamientos de cada nodo, a partir de los cuales se pueden determinar los esfuerzos por medio de las ecuaciones constitutivas de elasticidad.

El FEA se divide en tres etapas: (a) pre-procesamiento, (b) procesamiento y (c) post-procesamiento. El primero incluye toda la preparación de los datos, la generación de la malla, la determinación del sistema coordenado, las conexiones, las condiciones de frontera, las propiedades del material y las cargas. El procesamiento es la resolución del sistema de ecuaciones y otras relaciones anexas. Para este trabajo, se deberá resolver las ecuaciones del momentum lineal para carga estática, por lo tanto, se buscarán las soluciones de la ecuación de equilibrio. Finalmente, el post-proceso es la etapa donde se trabaja con la presentación de los resultados, es decir, los desplazamientos, la deformación y los esfuerzos requeridos son calculados durante esta etapa.

### 3.5.1. Mallado

Se le llama malla a la red de elementos y nodos que discretizan un componente o una región. Para esto, los elementos pueden tener distintas formas geométricas que dependerán del tipo de problema a resolver, los grados de libertad o la capacidad computacional. La geometría dependerá de la cantidad de nodos por elementos, que para el caso de este trabajo, se utilizará el tetraedro, un elemento de 4 nodos.

Existen distintas formas de saber si la malla construida dará los resultados esperados en un tiempo óptimo. A esto se le denomina calidad de la malla, donde una mejor calidad entregará resultados más precisos en un menor tiempo. Para determinar su calidad, existen distintos parámetros que indican como está compuesta la malla generada <sup>1</sup>.

#### Relación de aspecto

Es la relación entre el lado más largo y el más corto de un elemento. En este caso, un triángulo equilátero tiene un valor de 1, siendo la mejor relación posible. A medida que el triángulo se deforma, la relación entre los lados más corto y largo aumenta, como se puede ver en la fig. 3.11.

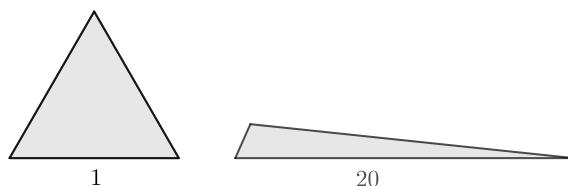


Figura 3.11: Relación de aspecto para triángulos.

---

<sup>1</sup>La definición de estos parámetros se obtuvieron de conferencias y el manual de ANSYS [? ][? ]

### Calidad del elemento

Se basa en la razón entre el volumen del elementos y la longitud de los bordes del elemento. Se evalúa del 1 al 0, donde 1 indica un elemento perfecto mientras que cero que el elemento no tiene volumen. Esta métrica se define como:

$$\text{Calidad del elemento} = C \cdot \frac{\text{Volumen}}{\left[ \sqrt{\sum \text{longitud borde}^2} \right]^3} \quad (3.5.1)$$

La constante  $C$  tendrá un valor definido según el tipo de elemento, para escalar su calidad de 0 a 1. Para tetraedros la constante tiene el valor de  $C = 124,707$ , al igualar la calidad del elemento a 1 para un tetraedro regular.

### Calidad ortogonal

Este parámetro se mide entre 0 y 1, donde 0 es un mal resultado y 1 el mejor. Se calcula según la ec. 3.5.2, donde  $\mathbf{A}_i$  es el vector normal a la cara  $i$ ,  $\mathbf{B}_i$  el vector que parte del centroide del elemento y termina en el centroide del elemento colindante a la cara  $i$  y  $\mathbf{C}_i$  es el vector que va desde el centroide del elemento hacia el centro de la cara  $i$ .

$$\text{Calidad Ortogonal} = \text{MIN} \left\{ \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{B}_i}{|\mathbf{A}_i||\mathbf{B}_i|}, \frac{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{C}_i}{|\mathbf{A}_i||\mathbf{C}_i|} \right\} \quad (3.5.2)$$

### Oblicuidad

Es una de las medidas de calidad primarias para una malla. La oblicuidad, también llamada asimetría, determina que tan cerca está de la figura ideal está el elemento o su cara (triángulo equilátero para un tetraedro). A partir de su definición (ec. 3.5.3), un valor 0 indica que el tamaño del elemento es igual a un triángulo equilátero y un valor de 1 indica un triángulo completamente deformado.

$$\text{Oblicuidad} = \frac{\text{Tamaño óptimo del elemento} - \text{Tamaño del elemento}}{\text{Tamaño óptimo del elemento}} \quad (3.5.3)$$

El manual de ANSYS, entrega la tabla 3.2, que sirve de guía para los valores de la oblicuidad y su respectiva calidad.

Valor de la oblicuidad	Calidad del elemento
1	Inaceptable
0,9 - <1	Muy mala
0,75 - 0,9	Mala
0,5 - 0,75	Buena
0,25 - 0,5	Muy buena
>0 - 0,25	Excelente
0	Equilátero

Tabla 3.2: Lista de los rangos de los valores de la oblicuidad y la respectiva calidad del elemento. [?]

### 3.5.2. Ecuación del momentum lineal

La conservación del momentum lineal es una consecuencia de la aplicación de la segunda ley de Newton. Una forma de escribir la conservación de momentum lineal es fijar un volumen de control en el espacio y considerar el flujo de momentum que entra y sale del volumen. Para esto, denominaremos  $\mathbf{t}$  como la fuerza superficial por unidad de área, llamada tracción, y  $\mathbf{b}$  será la fuerza del cuerpo por unidad de masa, aplicado a un volumen  $v(t)$  encerrado por un área  $a(t)$ . Así, se obtiene:

$$\int_{a(t)} \mathbf{t} da + \int_{v(t)} \rho b dv = \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho v dv \quad (3.5.4)$$

El termino  $\mathbf{t}$  puede ser escrito en términos de  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  y utilizando el teorema de la divergencia sobre la primera expresión. Luego, al hacer los arreglos necesarios y juntando términos queda:

$$\int_{v(t)} \left\{ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \frac{dv}{dt} \right\} dv = 0$$

De esta forma, la expresión restante escrita en forma indicial queda:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho \frac{dv_j}{dt} \quad (3.5.5)$$

Obteniéndose la ecuación de movimiento. Sin embargo, dado que no existen variaciones del volumen respecto al tiempo, entonces el término se desprecia y finalmente se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 \quad (3.5.6)$$

Expresando que la suma de las fuerzas son iguales a cero. Por lo tanto, a partir de la ec. 3.5.6 y las condiciones de borde de movimiento y de carga externa, es posible resolver el sistema.

### 3.5.3. Esfuerzo y deformación

Para esta sección, se definirá  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  como los esfuerzos principales y  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  como las deformaciones unitarias principales.

#### Esfuerzo y deformación unitaria de von Mises

El esfuerzo de von Mises, llamado también equivalente, es una forma de representar un estado de esfuerzos en tres dimensiones en un valor escalar positivo. Este es calculado de la siguiente forma:

$$\sigma_{vm} = \left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2} \right]^{1/2} \quad (3.5.7)$$

La deformación de von Mises total, es calculada como:

$$\varepsilon_{vm,t} = \frac{1}{1 + \nu'} \left[ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}{2} \right]^{1/2} \quad (3.5.8)$$

Donde  $\nu'$  es el coeficiente de Poisson efectivo, que se define según:

- Para la zona elástica como el coeficiente de Poisson del material  $\nu$ .
- Para la zona plástica como  $\nu = 0,5$

Por lo tanto, la deformación unitaria equivalente total del material es la suma de la deformación plástica más la deformación elástica.

$$\varepsilon_{vm,t} = \varepsilon_{vm,p} + \varepsilon_{vm,e} \quad (3.5.9)$$

#### Esfuerzo máximo cortante

El esfuerzo máximo cortante es el punto más alejado al eje de los esfuerzos normales en el círculo de Mohr, por lo tanto se define como:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.5.10)$$

### Esfuerzo y deformación normal

Este corresponde al esfuerzo que se produce por la carga normal a la superficie. En este caso, el esfuerzo  $\sigma_x$  corresponde a la carga ( $P$ ) en dirección  $x$  provocada sobre la superficie del plano  $yz$ . Por lo tanto, se define como:

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad (3.5.11)$$

Así mismo, la deformación elástica en la dirección  $x$  es:

$$\varepsilon_{x,e} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.5.12)$$

Y la deformación plástica es:

$$\varepsilon_{x,p} = \frac{1}{E_p} [\sigma_x - 0,5(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.5.13)$$

Donde  $E_p$  es el módulo plástico que se define como:

$$E_p = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\varepsilon}_p} \quad (3.5.14)$$

Es decir, como la pendiente provocada por una recta entre el origen y el punto de esfuerzo real y la deformación real plástica, como se ve en la fig. 3.12.

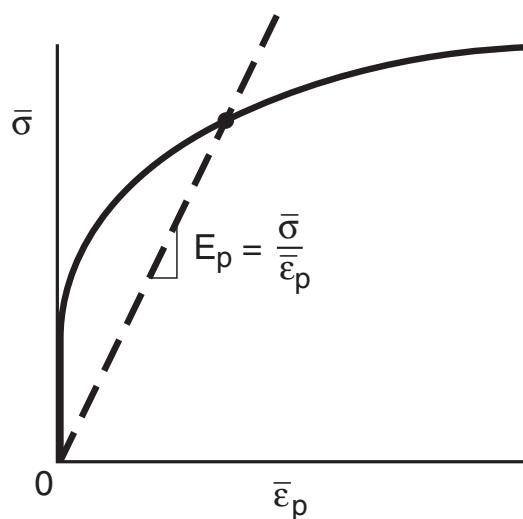


Figura 3.12: Definición del módulo plástico como la pendiente entre el origen y un punto de la curva de esfuerzo y real y deformación real plástica. [?]

Sin embargo, es posible reescribir ambos módulos,  $E$  y  $E_p$ , como el módulo secante  $E_t$ , quedando la deformación total unitaria en la dirección  $x$  como:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_t} [\sigma + \tilde{\nu}(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (3.5.15)$$

Donde el módulo secante y coeficiente de Poisson generalizado,  $\tilde{\nu}$ , se definen como:

$$E_t = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\varepsilon}} \quad ; \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu\sigma + 0,5E\tilde{\varepsilon}_p}{E\varepsilon}$$

---

# Capítulo 4

## Metodología

### 4.1. Levantamiento de información

Parte del trabajo de esta memoria se centra en hacer un levantamiento de información y su posterior comprensión de la máquina de fatiga, en su configuración a flexión, para tenerla operativa para su uso en el laboratorio. El levantamiento de información consistirá en detallar su estado actual, describir el funcionamiento para realizar los ensayos y, finalmente, en poder cuantificar y medir los distintos componentes de la máquina.

La máquina tiene la versatilidad de poder realizar ensayos en dos configuraciones, ambas a través del método de *esfuerzo-vida*. El primero de ellos es utilizando la configuración de flexión alterna y será la que se estudiará en este trabajo. La configuración secundaria consiste en fatiga por torsión, la cual no será profundizada.

#### 4.1.1. Estado actual

Actualmente la máquina no puede ser utilizada por no estar anclada, estando apoyada sobre dos listones de madera, que a su vez, están sobre una mesa de madera como se aprecia en la fig. 2.4. Por consiguiente, la máquina al ser utilizada comienza a vibrar, saltar y desplazarse lateralmente, lo que impide su uso prolongado por motivos de seguridad. Es decir, no es posible realizar correctamente un ensayo de fatiga de ningún material ni en ninguna configuración.

La única modificación que posee la máquina, según la información recopilada, consiste en el cambio del contador de revoluciones o ciclos realizados en un ensayo de fatiga. Esta actualización consistió en sacar el contador mecánico original y reemplazarlo por un contador electrónico, el cual tiene sus controles y el display adosada a su estructura, como se puede apreciar en la fig. 4.1



Figura 4.1: Control del contador electrónico

El sistema eléctrico de la máquina permanece intacto, el cual se encuentra conectada a la red de la universidad. Conserva su motor eléctrico original junto a un conjunto eléctrico cuya función es suministrar energía de manera continua y estable al motor, para evitar que el ensayo de fatiga se pueda ver afectado por problemas y las variaciones del suministro eléctrico. El motor es de corriente continua con velocidad constante y sus especificaciones se pueden ver en la tabla 4.5.

Otro elemento distinto al original consiste en la correa de transmisión entre el motor eléctrico y el disco desbalanceado. La original consistía en una correa de cuero plana y cruzada, sin información respecto a su empalme. La correa actual consiste también en una correa plana y cruzada, sin embargo, su material es tela y el empalme es realizado a mano con hilo acerado dentro de la misma máquina. Lo particular de estas características dificultan la búsqueda de una correa que pueda cumplir de manera óptima la transmisión de potencia. Esta dificultad se debe a que el sistema de transmisión no ha sido modificado, es decir, sus poleas tienen dimensiones, tanto de diámetro como de ancho, que no están normalizadas o se encuentran fuera de catálogo de mucho proveedores.

Por otro lado, los elementos de agarre de la probeta no tienen modificaciones conocidas, tanto el brazo que recibe el movimiento como el agarre empotrado a la estructura de la máquina. La fabricación de las probetas utilizadas se realiza en el mismo laboratorio a partir de acero AISI 1020 o 1040, el cual para conseguir las dimensiones de la fig. 4.8 se debe cortar y tornear.

Finalmente, para realizar los ensayos en distintas configuraciones existen distintas masas (fig. 4.2) que desequilibran el disco rotativo, como se verá en la sección 4.1.2, y estas combinaciones se especifican en una tabla de cargas (anexo ??). Sin embargo, se

desconoce el origen, y en consecuencia, la fiabilidad de la información contenida en esta tabla.

#### 4.1.2. Funcionamiento

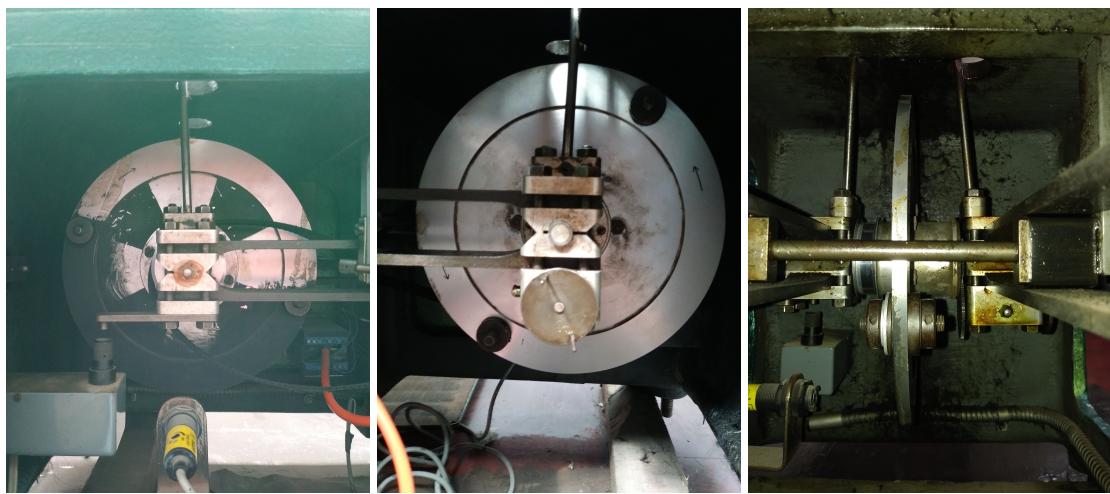
La máquina de fatiga tiene como objetivo lograr cargar la probeta de manera cíclica y constante a lo largo de todo el ensayo. Para lograr esto, el mecanismo utilizado es un disco desequilibrado girando a una velocidad constante  $\omega_{max}$ , la fuerza es transmitida hasta un brazo que sostiene a su vez a la probeta, generando flexión sobre esta con un doble empotramiento. La velocidad  $\omega$  del disco se transmite desde el motor eléctrico a través de poleas y una correa de transmisión en una relación de 1:1, a una velocidad de 1500 revoluciones por minuto. Así, para realizar las mediciones de fatiga a distintas cargas se modifica el desequilibrio del disco a través de un conjunto de masas, mostradas en la fig. 4.2, que permiten generar distintas configuraciones y, por consiguiente, esfuerzos en la probeta.



Figura 4.2: Contrapesos utilizados para desequilibrar el disco. De izquierda a derecha se aprecia el n° 5 al n° 1.

Los elementos utilizados para desbalancear son 6 discos pequeños, enumerados del 1 al 5, donde el 1 es el más liviano y el 5 el más pesado, todos de distinto peso y el quinto se encuentra repetido. Estas se colocan en el perímetro del disco giratorio de forma diametralmente opuesta, como se ve en la fig. 4.3b, dependiendo de la carga que se deseé generar. Para conocer que configuración corresponde a cada esfuerzo aplicado sobre la probeta se utiliza la tabla de cargas.

Esta tabla, con 3 columnas de información como se ve en el anexo ??, nos entrega el esfuerzo  $\sigma$ , cortante  $\tau$  y la combinación necesaria para generar esos esfuerzos. Los números entre paréntesis nos indican cuantos contrapesos se deben apilar en cada perno adosado al disco giratorio, los cuales llamaremos soportes de contrapeso. Así, la tabla nos señala que la fuerza es función de la diferencia de masa entre cada soporte, es decir,



(a) Vista delantera.

(b) Vista anterior.

(c) Vista lateral.

Figura 4.3: Distintas vistas del disco desbalanceado de la máquina. En la imagen (b) se pueden apreciar claramente los soportes de los contrapesos en los extremos del disco, en cambio, en la imagen (c) se ven los distintos componentes que están adosados al disco.

la suma de las masas de cada paréntesis. A modo de ejemplo, en la tabla 4.1 se han colocado las 4 primeras filas de la tabla de cargas, añadiendo 4 columnas a la derecha de “Combinación” con información sobre el peso de cada una. En las columnas  $m_1$  y  $m_2$  se aprecia la suma de cada masa colocada en sus soportes de contrapeso señalado por la columna de “Combinación”. Las columnas siguientes representan  $\Delta m = m_1 - m_2$  y  $m_{total} = m_1 + m_2$ . Como se puede apreciar, los esfuerzos normales y cortantes aumentan en la medida que  $\Delta m$  de cada combinación aumenta, independiente de  $m_{total}$ .

$\sigma \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right]$	$\tau \left[ \frac{\text{kg}_f}{\text{cm}^2} \right]$	Combinación	$m_1$ [g]	$m_2$ [g]	$\Delta m$ [g]	$m_{total}$ [g]
40	20	(5) - (1+2+3+4)	30,9199	30,5071	0,4128	61,427
80	40	(1) - (0)	0,7582	0	0,7582	0,7582
120	60	(5) - (4+2+3)	30,9199	29,7489	1,171	60,6688
160	80	(2) - (1)	2,2969	0,7582	1,5387	3,0551

Tabla 4.1: Tabla de cargas modificada, mostrando el peso de cada combinación, su diferencia y el total.

Con esto, la probeta a ensayar estará sometida a un esfuerzo en flexión, empotrada por la mordaza del brazo de carga y la mordaza empotrada a la estructura de la máquina, ambas mostradas en la fig. 4.4.

Una vez que se haya escogido la configuración de masas y la probeta se encuentre en su posición, una pequeña barra de bloqueo con una manilla ubicada entre las barras

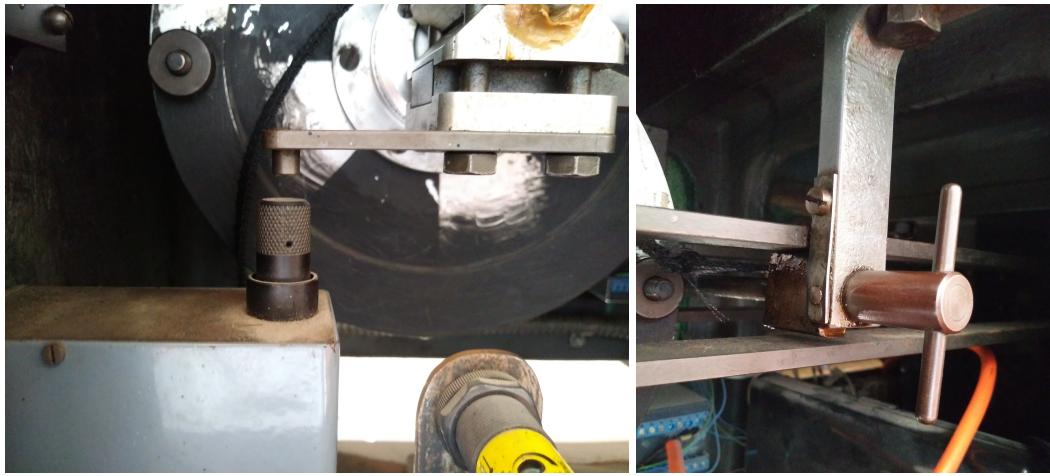


Figura 4.4: A la izquierda se aprecia la mordaza de la barra de carga, a la derecha la mordaza empotrada sin la parte superior y apoyada sobre esta, la probeta.

de acero, como se aprecia en la fig. 4.5b, eleva ambas barras con el objetivo de evitar que oscile en su frecuencia natural durante el encendido y aceleración del motor hasta su velocidad final, dejando a la barra en una configuración de empotrado y apoyo simple. Una vez que el motor alcanza una velocidad estable, el sostén es girado nuevamente para dejar al disco giratorio en posición de empotrado-libre. Este sostén, permite que el ensayo de fatiga se realice siempre a una frecuencia constante y evitar la transición inicial del motor. Una vez que la probeta se fracture, provocará un aumento en la amplitud de las oscilaciones del disco las cuales activarán el freno automático (fig. 4.5a) para detener el motor y, por lo tanto, el ensayo. Gracias a este sistema, es posible conocer la cantidad de ciclos realizados hasta el momento de la fractura sin la necesidad de supervisar de manera continua el ensayo.

#### 4.1.3. Mediciones

Para realizar un correcto diseño de la estructura soportante y la comprensión de su funcionamiento, se hace vital poder contar con información confiable para obtener resultados correctos. Para esto, las mediciones se dividirán según su objetivo en el desarrollo de este trabajo.



(a) Freno automático.

(b) Barra de bloqueo.

Figura 4.5: En la imagen (a) se aprecia el botón del freno automático y la extensión que lo presiona. En la imagen (b) la barra de bloqueo sosteniendo las vigas en voladizo.

### Diseño de estructura

Las medidas de la mesa actual son:

- Ancho = 74,5 cm
- Largo = 177 cm
- Altura = 91 cm

Por otro lado, para diseñar correctamente la estructura se deben conocer las dimensiones de la máquina, su peso y la ubicación de los pernos de anclaje, así como también el tipo de perno utilizado. La fig. 4.6 es un esquema representativo de la máquina, mostrando sus dimensiones de ancho, alto y largo, las dimensiones de su base y la ubicación de sus pernos. La masa de toda la máquina se approximó a partir de las dimensiones externas, estimando el grosor de sus paredes y considerando el peso específico del acero fundido, sobreestimando el valor del espesor de sus paredes como factor de seguridad. Considerando el peso específico del acero  $\rho_{ac.fundido} = 7850 [Kg/m^3]$ , entonces la masa total calculada es:

$$\left. \begin{array}{l} V_{base} = (3,3 \cdot 91 \cdot 39 - 3 \cdot 88 \cdot 37) \text{ cm}^3 \\ V_{superior} = (30,2 \cdot 84 \cdot 32 - 26 \cdot 78 \cdot 28,5) \text{ cm}^3 \end{array} \right\} V_{b+s} = 25323,3 \text{ cm}^3$$

$$m_{maq} = \rho_{ac.fundido} \cdot V_{b+s} = 198,8 \text{ kg} \approx 200 \text{ kg} \quad (4.1.1)$$

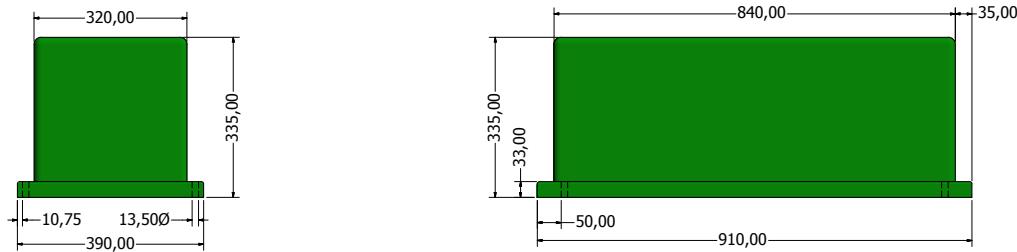


Figura 4.6: Esquema de la máquina de fatiga y sus dimensiones externas, en mm.

### Componentes de la máquina de fatiga

**Sistema de transmisión.** El sistema de transmisión está compuesto por el motor eléctrico, cuyas características se detallaron anteriormente, la correa de transmisión y ambas poleas. Las dimensiones y características de las poleas conductora y conducida, como también de la correa se encuentran en la tabla 4.2.

Características	Valor
Diámetro polea motriz	48 mm
Diámetro polea conducida	47,5 mm
Relación de poleas	$\approx 1 (-)$
Ancho correa	10 mm
Longitud correa	1235 mm
Configuración	Cruzada

Tabla 4.2: Datos del sistema de transmisión

**Sistema de vigas en voladizo** El conjunto de barras en voladizo que sostienen el disco en empotrado-libre, tienen medidas levemente distintas para las superiores respecto a las inferiores, separadas por una distancia de 32 mm. La tabla 4.3 muestra las medidas de cada una.

Medida	Barras superiores [mm]	Barras inferiores [mm]
Espesor	5,7	5,8
Ancho	25,1	25,2
Largo	333	333

Tabla 4.3: Medidas de las vigas en voladizo según su posición

Con estos datos, es posible calcular el segundo momento de área respecto a un eje central horizontal equidistante entre las barras superiores e inferiores, según el cual se obtiene  $\bar{I}_{\text{barras}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ .

**Sistema de transmisión de fuerzas.** El brazo principal (fig. 4.7) que ejerce la fuerza sobre la probeta proveniente del disco desbalanceado, está constituido por tres partes principales. La primera de ellas es la parte trasera, con forma regular rectangular, está hecho de una aleación de aluminio y dos tercios de su longitud es ahuecada. La segunda y principal, está hecha de acero fundido y añade el mayor porcentaje de masa al total del brazo. Finalmente, la última parte consiste en la mordaza, unida a la sección principal con dos pernos que permiten ajustar su posición. La longitud total del brazo es de 359 mm y su masa total 2,305 kg.



Figura 4.7: Brazo de carga junto a su mordaza y la mordaza empotrada a la derecha.

La transmisión de la carga entre el disco desbalanceado y el brazo de carga se da a través de dos barras de acero redondas, uno a cada lado del disco, de diámetro 6,2 mm y largo de 169 mm.

**Disco desbalanceado y contrapesos.** En base a las características visuales y auditivas del disco, se cree que está construido de alguna aleación de aluminio. Su radio  $R_d = 112 \text{ mm}$  y espesor de 6,4 mm.

La masa de cada contrapeso (fig. 4.2) fue medida en el laboratorio de ingeniería metalúrgica con una balanza analítica.

Contrapeso	Masa [g]	Diámetro [mm]	Espesor promedio [mm]
1	0,7582	20,55	1,00
2	2,2969	27,00	1,50
3	6,8541	27,00	1,70
4	20,5979	27,90	5,00
5	30,9199	29,90	4,40

Tabla 4.4: Masa de cada contrapeso utilizado

Por otra parte, no fue posible medir directamente la masa del disco al no poder desarmarlo ni separarlo de su eje. Por lo tanto, se midió de la flecha de la viga en voladizo producida por la masa del disco, la polea, el sistema de sujeción y las barras de acero, para obtener la masa aproximada del disco. Sin embargo, si bien se restó la fuerza producida por la masa de las barras, se incluyó en el cálculo el resto de los elementos acompañantes del disco en la masa obtenida.

**Probeta.** La probeta utilizada actualmente para el ensayo de fatiga es de acero. Su geometría, como se aprecia en la fig. 4.8, consiste en una pequeña viga de largo  $3\frac{1}{2}$ ", de sección cuadrada en sus extremos y una entalladura en el medio de sección circular, de lado  $\frac{1}{2}$ " de lado y  $0,3$ " de diámetro respectivamente.

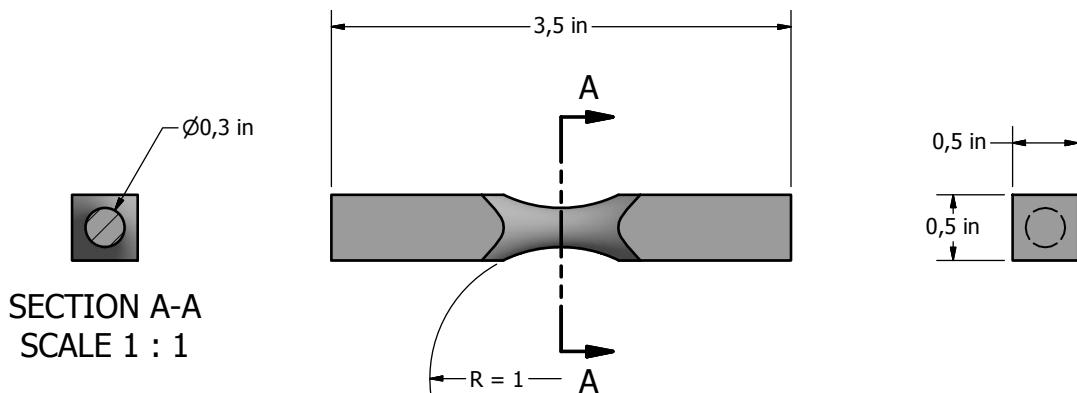


Figura 4.8: Vista en corte, lateral y frontal de la probeta con sus respectivas dimensiones.

**Motor y sistema eléctrico.** Como se señaló, el motor eléctrico con el que funciona la máquina de fatiga es de corriente continua y sus características se encuentran en la tabla 4.5. El motor tiene una velocidad angular constante, aunque como consecuencia de su antigüedad y tipo de motor, añadirle un variador de frecuencia se vuelve más complejo que cambiar el motor mismo.

Especificaciones Motor	Valor
Tensión	220 [V]
Corriente	0,8 [A]
Factor de potencia ( $\cos \varphi$ )	Sin información
Potencia	100 [W]
Velocidad	1500 [rev/min]

Tabla 4.5: Especificaciones del motor de la máquina de fatiga.

Por otro lado, el sistema eléctrico que se ve en la imagen 4.9, tienen como función en mantener el suministro eléctrico del motor estable. Ahora bien, su tecnología es compleja y se encuentra obsoleta, lo que vuelve difícil mantener, reparar o actualizar sus componentes.

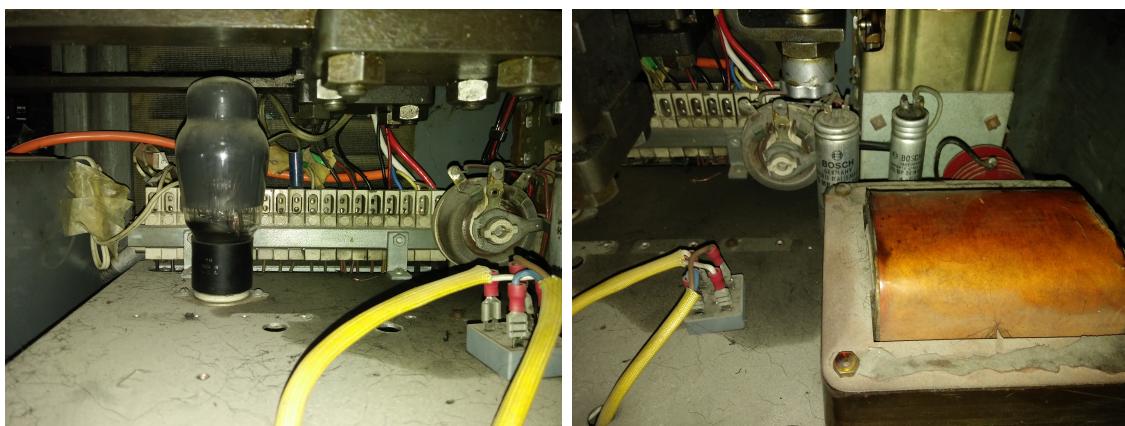


Figura 4.9: En las imágenes (a) y (b) se pueden ver los elementos que componen el sistema eléctrico de la máquina de fatiga.

## 4.2. Diseño de estructura

El proceso de diseñar la estructura hasta su resultado final pasó por distintas etapas. Esto por el proceso de aprendizaje y comprensión de la norma de calculo de madera NCh 1198, como también por la restricción y disponibilidad de materiales, tecnología o medidas acorde a las necesidades. El diseño presentado en este trabajo se muestra en la fig. 4.10, hecho principalmente de madera, junto a elementos de acero. El objetivo de esta estructura es fijar y soportar la máquina de fatiga tanto en reposo como en operación, buscando como características su durabilidad, lo modular de las piezas y la opción de modificarla en el futuro.

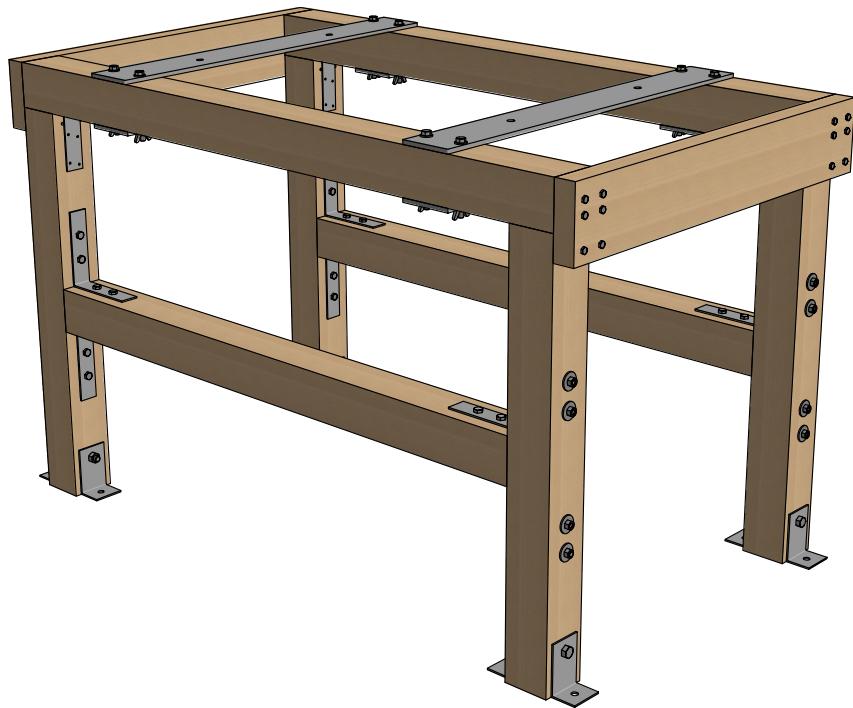


Figura 4.10: Diseño en perspectiva de la estructura de soporte.

La metodología de su diseño, se separará en las distintas etapas que se realizó y los requerimientos que surgieron a partir de estas. Finalmente, se realizó una simulación estática y modal para comparar los cálculos realizados y conocer su frecuencia natural, respectivamente.

#### 4.2.1. Diseño de pletinas de acero

La estructura se diseñó para que la conexión con la máquina de fatiga fuera a través de pletinas de acero, utilizando los pernos existentes. Las pletinas, a su vez, están conectadas mediante pernos a las vigas principales de madera de cada extremo. Para llevar a cabo los cálculos, se hará como suposición que cada pletina tiene un empotramiento en cada extremo, con dos cargas distribuidas. La primera de ellas es el apoyo de la máquina sobre la pletina y, la segunda, el peso propio del acero. Por lo tanto, la fig. 4.11 muestra el diagrama de las cargas que actúan y las distancias a utilizar.

Por otro lado, al no conocerse la distribución de masa de la máquina de fatiga, se

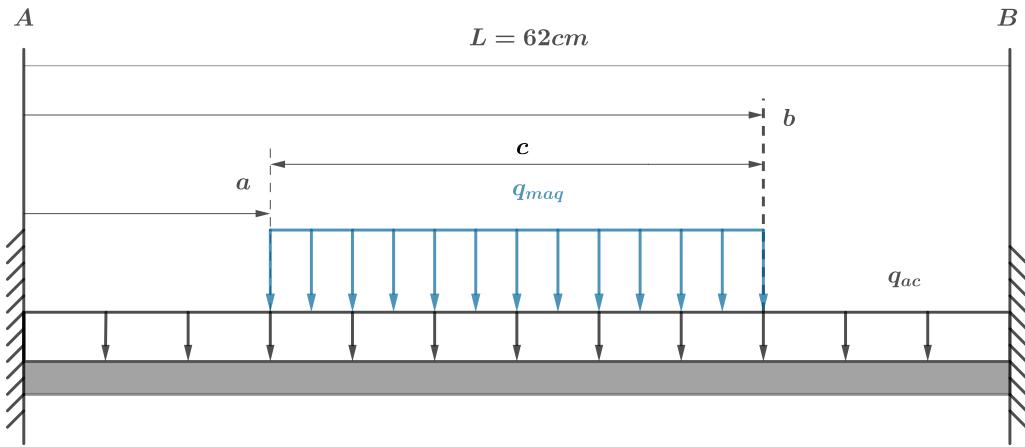


Figura 4.11: Diagrama de las cargas soportadas por la pletina de acero.

considerará la carga distribuida en cada pletina como:

$$q_{mag} = \frac{0,75 \cdot m_{mag}}{c} = 384,62 \text{ [kg/m]} \quad (4.2.1)$$

Donde  $m_{mag}$  es la masa estimada en la ec. 4.1.1, multiplicada por 0,75 como factor de seguridad por la distribución irregular de peso de la máquina. Para obtener el esfuerzo máximo flector es necesario conocer la geometría de la viga, motivo por la cual se iteró entre las distintas opciones disponibles en el mercado de pletinas o barras planas de acero. Por razones estipuladas en la norma NCh 1198, la conexión entre la pletina de acero y la viga principal de madera se debe realizar con un mínimo de dos pernos, por lo tanto, se escogió el ancho máximo del mercado. Así, la tabla 4.6 muestra las dimensiones de la pletina escogida.

Características pletina	Valor
Espesor ( $h_p$ ) [mm]	8
Ancho ( $b_p$ ) [mm]	100
Material	A270ES
Carga distribuida ( $q_{ac}$ ) [kg/m]	6,28

Tabla 4.6: Dimensiones y características de la viga de acero

Por ende, el cálculo de la reacción en sus apoyos, el momento y esfuerzo flector máximo queda expresado por las ecuaciones 4.2.2a, 4.2.2b y 4.2.2c, respectivamente. Estas fueron calculadas respecto al punto A (o B, por simetría), donde se encuentra el momento

flector máximo.

$$R_A = g \left( \frac{m_{mag}}{2} + \frac{q_{ac}L}{2} \right) \quad (4.2.2a)$$

$$M_A = \left( \frac{gcq_{mag}}{24L} \right) \left( 3L^2 - 4c^2 + \frac{6bc^2}{L} - \frac{3c^3}{L} \right) + \left( \frac{gq_{ac}L^2}{12} \right) \quad (4.2.2b)$$

$$\sigma_{max,pl} = \frac{M_A \cdot h_p}{2\bar{I}_{pl}} \quad (4.2.2c)$$

Así, los valores obtenidos son:

- $R_A = 754,85$  [N]
- $M_A = 100,97$  [Nm]
- $\bar{I}_{pl} = 4266,6$  [ $\text{mm}^4$ ]
- $\sigma_{max} = 94,66$  [MPa]

Con relación a la cargas fluctuantes que recibirán las pletinas como parte del funcionamiento de la máquina, se considerará la carga mayor que es capaz de producir la máquina de todas sus configuraciones, de acuerdo a lo que se obtenga por medio del modelo que se expondrá en la sección 4.3.2. Esta carga alterna sobre la pletina,  $F_{a,pl}$ , se considerará igual a la mitad de la carga máxima posible producida por el disco desbalanceado. Por lo tanto, considerando la configuración utilizada en las cargas estáticas, la carga distribuida alterna será  $q_{a,pl} = F_{a,pl}/c$  y el momento flector máximo en el punto A es la primera expresión de la ec. 4.2.2b y el esfuerzo sobre el mismo punto igual a la expresión 4.2.2c, quedando:

$$M_{a,pl,A} = \left( \frac{cq_{a,pl}}{24L} \right) \left( 3L^2 - 4c^2 + \frac{6bc^2}{L} - \frac{3c^3}{L} \right) \quad (4.2.3)$$

$$\sigma_{a,A} = \frac{M_{a,pl,A} \cdot h_p}{2\bar{I}_{pl}} \quad (4.2.4)$$

Para obtener el factor de seguridad, se utilizará la ecuación de Goodman modificada (ec. 3.1.6). Para esto, el límite de resistencia a la fatiga de un acero se puede estimar como  $S_e = 0,5S_u$  cuando el esfuerzo último es menor a 1400 MPa [? ]. Como el material utilizado es un acero A270ES, entonces su equivalente en la antigua nomenclatura chilena de acero es A42-27ES [? ], donde el esfuerzo último del material es  $S_u = 420$  MPa, por lo tanto,  $S_e = 210$  MPa. También, el esfuerzo medio será igual al esfuerzo estático calculado

anteriormente, donde,  $S_m = \sigma_{max,pl}$ . Así, el factor de seguridad es:

$$FS = \left( \frac{S_e \cdot S_{ut}}{S_a \cdot S_{ut} + S_m \cdot S_e} \right) \quad (4.2.5)$$

#### 4.2.2. Diseño en madera

La elección de la madera como elemento principal de construcción se debió por su capacidad de disipar las vibraciones y la relación entre su resistencia y el peso, volviendo la estructura más liviana y útil para las necesidades. Para realizar los cálculos de la madera y sus uniones, se utilizó la norma NCh 1198 Of. 91 [?], sintetizada en el anexo A para los requerimientos de este trabajo. Las dimensiones del diseño de la estructura se realizaron considerando dejar el espacio necesario para la operación de la máquina, conservando la altura actual de 900 [mm]. Si bien en el presente trabajo se expondrán los cálculos de una especie maderera y sus respectivas dimensiones, se realizaron cálculos con otras especies y en otros formatos para probar distintas configuraciones antes de llegar al diseño propuesto. Las maderas consideradas fueron el pino Oregón, pino Radiata y la línea de pino radiata encolado Hilam de Arauco. Los resultados mostrados en la sección siguiente son los obtenidos al escoger el pino Oregón en formato de 110x110 [mm]. Los valores de las tensiones admisibles para distintas especies madereras se obtienen de la tabla 4 de la sección 6.2 de la NCh 1198, sin embargo, para la madera laminada encolada se encuentran en la norma NCh 2165. Finalmente, para la sección de diseño en madera se utilizará la nomenclatura utilizada por la norma NCh 1198, para evitar confusiones al momento de consultar el anexo o la norma misma.

#### 4.2.3. Cálculo de cargas en estructura de madera

Para identificar las distintas partes de madera en la estructura, se utilizará la fig. 4.12 como referencia. Tanto las vigas A, C, D y el pilar B, están diseñados en base a la misma especie maderera y las vigas A, C y el pilar B del mismo formato. En el anexo ?? se pueden apreciar los planos del diseño de la estructura propuesta y sus uniones.

Como se nombró anteriormente, la madera utilizada será pino oregón, el cual bajo las consideraciones de la tabla A.1 se trabajará como madera seca tanto en construcción como en servicio al estar en un ambiente cerrado sin calefacción, como se señala en la sección de contenido de humedad, A.1.1. Los valores de densidad, tanto anhidra como normal, se pueden obtener del anexo E de la norma. A partir de este anexo, la tabla 4.7 muestra los valores admisibles del pino oregón.

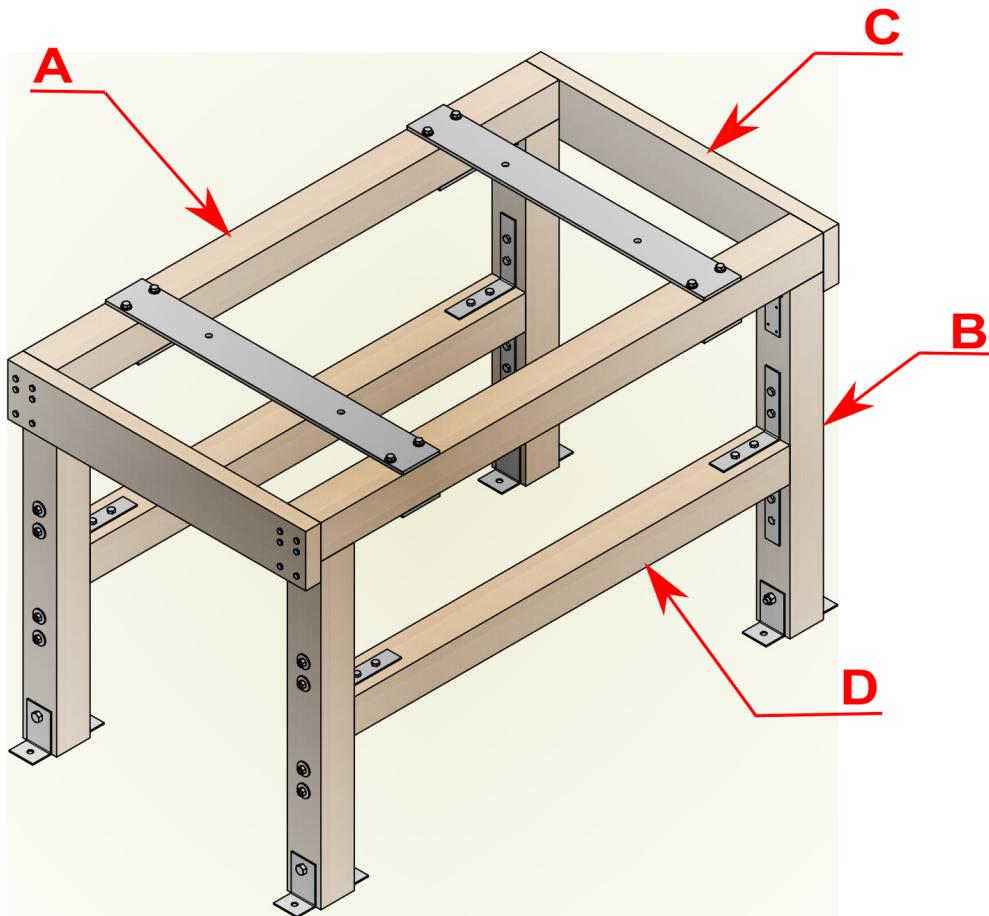


Figura 4.12: Identificación de las distintas partes de madera de la estructura soportante.

**Tensiones admisibles y módulo de elasticidad del pino oregón.** Para la determinación de estos valores es necesario catalogar el grado de calidad, si corresponde a madera verde o seca y la clasificación de la madera del pino oregón. El agrupamiento de las maderas crecidas en Chile se encuentran en el anexo A de la norma NCh 1198, según la cual el pino oregón se clasifica en el grupo ES 5 para madera seca y se asumirá un grado estructural N° 4. Con esta información, a través de la tabla 6 de la norma, obtenemos que la clase estructural es F8. Con esto, la tabla 4 y 5 entrega la información de las tensiones admisibles y el módulo de elasticidad. Así, la tabla 4.8 muestra los valores del pino oregón utilizado en este trabajo.

**Factores de modificación.** Dada las condiciones en las que trabajará la madera, se deben calcular dos factores de modificación que afectan de manera global a la madera. La modificación por contenido de humedad se calcula con un factor  $\Delta R$  y por la diferencia

Especie maderera	Densidad anhidra ( $\text{kg/m}^3$ )		Densidad normal ( $\text{kg/m}^3$ )	
	Valor medio	Valor característico	Valor medio	Valor característico
	$\rho_o$	$\rho_{o,k}^\dagger$	$\rho_{12}$	$\rho_{12,k}^\dagger$
Pino oregón	410	326	441	350

Tabla 4.7: Valores de la densidad normal y anhidra del pino oregón.  $^\dagger$ : Definido con el percentil 5 % de exclusión. [? ]

Clase Estructural	Flexión $F_f$	Compresión Paralela $F_{cp}$	Compresión Normal $F_{cn}$	Tracción Paralela $F_{tp}$	Cizalle $F_{cz}$	Módulo de elasticidad en flexión $E_f$
F8	8,6 (MPa)	6,6 (MPa)	4,1 (MPa)	5,2 (MPa)	0,86 (MPa)	6,9 (GPa)

Tabla 4.8: Tensiones admisibles y módulo de elasticidad en flexión para madera de pino oregón según su clase estructural. [? ]

entre la humedad de la madera y una humedad del 12 %,  $\Delta H$ . Considerando una humedad de la madera del 15 %, entonces los valores de  $K_H$  para cada solicitud se muestran en la tabla 4.9.

Factor de modificación por humedad	Flexión $F_f$	Compresión Paralela $F_{cp}$	Compresión Normal $F_{cn}$	Tracción Paralela $F_{tp}$	Cizalle $F_{cz}$	Módulo de elasticidad en flexión $E_f$
$K_H$	0,999385	0,999385	0,999385	0,99952	0,999199	0,999556

Tabla 4.9: Valores del factor de modificación para el pino oregón.

Por otro lado, el factor de modificación por duración,  $K_D$ , se aplica a través de la ec. 4.2.6, donde la duración de la carga  $t$  se aplica en segundos. También, la norma incluye el gráfico de  $K_D$  siendo una opción para su cálculo. Los valores admisibles que se señalan en la norma corresponden a una vida útil de 10 años de duración, sin embargo, para una vida útil indefinida el valor de  $K_D$  corresponde a 0,9. Este factor de modificación no afecta al módulo de elasticidad ni a la tensión admisible de compresión normal.

$$K_D = \frac{1,747}{t^{0,0464}} + 0,295 \quad (4.2.6)$$

### Viga principal, A

Es la viga que soporta la carga de las pletinas que sostienen a la máquina y a su vez descansa la carga en los pilares B. Para realizar los cálculos de esfuerzo se consideró un doble empotramiento en cada extremo, con tres cargas distribuidas que representan la

carga de las pletinas de acero,  $q_{pl}$ , las cuales se determinarán según la ec. 4.2.7, y el peso propio de la madera.

$$q_{pl} = \frac{q_{mag} c + q_{ac} L}{2b_p} \quad (4.2.7)$$

El diagrama y la distribución de la carga se puede apreciar en la fig. 4.13. Por otro lado, el esfuerzo máximo se presenta en los extremos de la viga. Las ecuaciones 4.2.8a y 4.2.8b, muestran la obtención de las reacciones y del momento flector máximo.

$$R_0 = g \left( q_{pl} \cdot b_p + \frac{L \cdot q_{mad}}{2} \right) \quad (4.2.8a)$$

$$M_0 = \left( \frac{q_{pl} \cdot g \cdot b_p}{L^2} \right) \left( l_2 l_6^2 + l_6 l_2^2 - \frac{b_p^2}{12} (l_6 + l_2) \right) + \frac{R_0 \cdot L}{6} \quad (4.2.8b)$$

Donde los valores obtenidos son:

- $R_0 = Q = 795$  [N]
- $M_0 = M_{max} = 122,26$  [Nm]

Así, la tensión de trabajo  $f_f$  se calcula según la ec. A.2.1, obteniéndose el valor:

$$f_f = 0,551 \text{ (MPa)} \quad (4.2.9)$$

De este modo, la tensión de diseño en la zona flexo-traccionada y flexo-comprimida que se calcula a partir de las ecuaciones A.2.2a y A.2.2b, respectivamente. Para la zona flexo-traccionada se debe calcular el factor de modificación por altura y para la flexo-traccionada el factor de modificación por volcamiento. El primero se obtiene con la ec. A.2.3a, obteniéndose el valor de  $K_{hf} = 0,916$ . Para el factor de volcamiento, se deben verificar el caso que corresponde como se señala en el anexo A, el cual da un valor de  $K_v = 1$ . Por lo tanto, el valor de  $F_{ft,dis}$  y  $F_{fv,dis}$  son:

$$F_{ft,dis} = 7,08 \text{ (MPa)} \quad (4.2.10a)$$

$$F_{fv,dis} = 7,74 \text{ (MPa)} \quad (4.2.10b)$$

Por otro lado, la tensión de trabajo en cizalle se obtiene a partir de la ec. A.2.5 y la de diseño en cizalle por A.2.6. Dado que  $K_r = 1$  al no haber rebaje de la viga, entonces el valor obtenido para ambas tensiones son:

$$f_{cz} = 0,098 \text{ (MPa)} \quad (4.2.11)$$

$$F_{cz,dis} = 0,774 \text{ (MPa)} \quad (4.2.12)$$

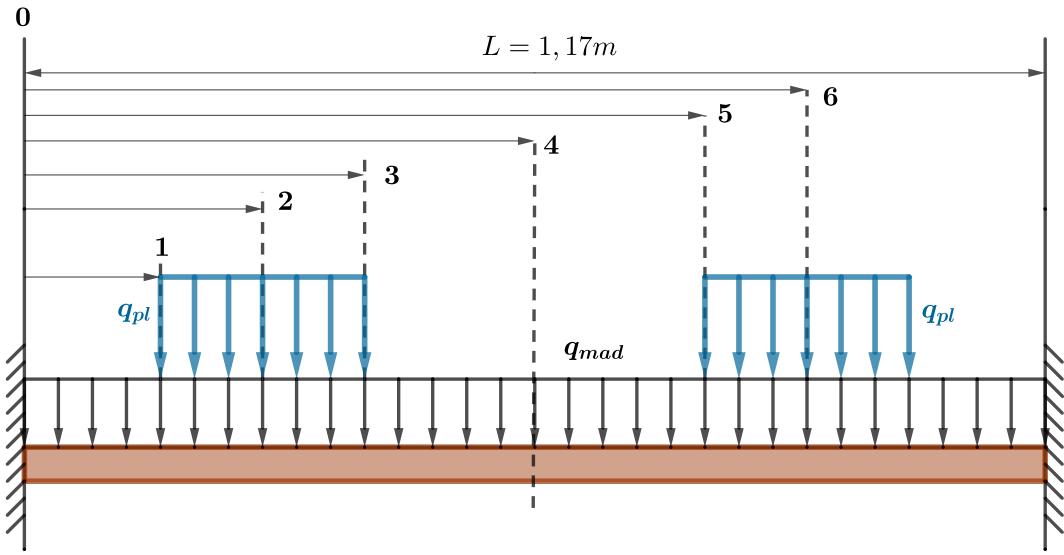


Figura 4.13: Diagrama de las cargas soportadas por la viga A.

### Pilar de apoyo, B

El pilar B representa los cuatro apoyos de la estructura, recibiendo la carga de la máquina y su operación desde la viga principal y transmitiéndola hasta el piso. Por la disposición del cuartón, estará sometido a compresión paralela (sección A.2.3). Al igual que en la viga principal, se debe calcular la tensión de trabajo ( $f_{cp}$ ) y la tensión de diseño en compresión paralela ( $F_{cp,dis}$ ). Al ser el mismo formato y especie maderera de la viga principal, su área transversal se mantiene, mientras que el largo del pilar ( $L_v$ ) corresponde a 790 mm.

Para el primero, se obtiene a través de la ecuación A.2.7, donde la carga  $N$  será igual a la reacción obtenida en la ec. 4.2.8a. Así, su valor es:

$$f_{cp} = 0,0657 \text{ (MPa)} \quad (4.2.13)$$

El valor de  $f_{cp}$  será posteriormente corregido una vez que se seleccionen las dimensiones de las uniones mecánicas, recalculando la tensión de trabajo con el área neta.

Para el segundo, el cálculo de la tensión de diseño dependerá de la inestabilidad lateral dado por la esbeltez  $\lambda$ . La longitud efectiva de pandeo se obtiene a través de la tabla 18 de la norma, de la cual se escogerá la configuración de apoyo con impedimento de giros y desplazamiento por un extremo y, para el otro lado, impedimento de giro con libertad de

desplazamiento, es decir,  $l_p/L_v = 1,5$ . De esta forma, los valores obtenidos son:

$$l_p = 1,5 \cdot L_v = 1,185 \text{ (m)}$$

$$i = \sqrt{\frac{\bar{I}}{A}} = \sqrt{\frac{0,11^4}{12 \cdot 0,11^2}} = 0,032 \text{ (m)}$$

$$\lambda = \frac{l_p}{i} = 37,32 (-)$$

Como  $\lambda > 5$ , entonces la tensión de trabajo de compresión paralela se debe calcular según la ec. A.2.8b y se debe evaluar el factor de modificación por esbeltez  $K_\lambda$  a partir de la ec. A.2.9. El coeficiente de proporcionalidad para una madera de grado n° 4 es  $c = 0,8$  y el módulo de elástico de diseño es  $E_{dis} = 6206,2 \text{ (MPa)}$ . Por otro lado, la tensión de diseño  $F_{cp,dis}$  se obtiene a partir de los factores de modificación  $K_D$  y  $K_H$  y la ecuación A.2.8a.

$$F_{cp,dis} = 5,936 \text{ (MPa)} \quad (4.2.14)$$

Con esto, los valores de las constantes serán  $A = 2,852 \text{ (-)}$ ,  $B = 3,754 \text{ (-)}$  y el factor de modificación por esbeltez  $K_\lambda = 0,759 \text{ (-)}$ . La tensión de diseño en compresión paralela considerando inestabilidad lateral  $F_{cp,\lambda,dis}$  será:

$$F_{cp,\lambda,dis} = 4,506 \text{ (MPa)} \quad (4.2.15)$$

### Viga transversal, C

Para esta viga se realizará el mismo procedimiento que para la viga A, sin embargo, las solicitudes son menores y la única carga a la que está sometida es la de su propio peso. Las dimensiones nominales de la tabla son 1x8" cepillada, es decir, según las tablas A.3 y A.2 son de 19x185 mm y su largo es de 800 milímetro. La carga distribuida de su peso es de  $q_{tabla} = 1,5 \text{ [kg/m]}$ .

Debido a lo bajo de las solicitudes, las tensiones de trabajo en flexión son:

$$f_f = 3,804 \text{ (kPa)} \quad (4.2.16)$$

Por otro lado, por las dimensiones de la madera usada, el factor de modificación por altura y volcamiento son los siguientes:

$$K_{hf} = 0,864 \text{ (-)}$$

$$K_v = 0,586 \text{ (-)}$$

El cálculo de  $K_v$  se realiza con la ecuación A.2.4, porque la esbeltez del límite elástico es menor a la esbeltez de volcamiento.

$$\lambda_v = 23,38 (-)$$

$$\lambda_{vo} = 21,95 (-)$$

Así, la tensión de diseño en flexión de esta viga es de:

$$F_f = 3,9235 \text{ (MPa)} \quad (4.2.17)$$

#### 4.2.4. Uniones

Las uniones en madera se deben diseñar siguiendo las indicaciones establecidas en la sección 10 de la norma NCh1198, uniones en la madera estructural. Esta considera la condición de la madera en operación, el tipo de unión, la dirección de la solicitación respecto a la dirección de la fibra, el número de elementos de unión, el distanciamiento entre los elementos de unión y el tipo de cizalle. Para el diseño de la estructura se utilizaron tres elementos de unión distintos: tirañados, pernos y, en menor medida, clavos.

##### Acero - madera

Para la unión entre la pletina de acero y la viga principal de madera, se utilizaron dos pernos de grado 2 de  $5\frac{1}{2}$ " de largo y  $1/4"$  de diámetro. Como se explica en la sección A.4.4, el mínimo de pernos por unión debe ser dos, con la excepción de que el único perno no esté solicitado en un porcentaje superior al 50 % de su capacidad de diseño. La unión está compuesta por la pletina de acero, seguido por la viga de madera con la dirección de sus fibras normal a las solicitudes y nuevamente una placa de acero. Finalmente, para el cálculo de la capacidad de carga admisible y tensión admisible de aplastamiento nominal, se recurrirá a las ecuaciones A.4.5 y A.4.6, respectivamente.

Para calcular la capacidad de carga admisible,  $P_{ad}$ , se utilizaron las indicaciones para cizalle simple, las cuales indican que se determina como el menor valor de la mitad de la carga admisible de cizalle doble entre una pieza central de espesor igual a la pieza más grande y una pieza central igual al doble del espesor de la pieza más delgada. Para este diseño el valor menor consiste en considerar el espesor central ficticio  $e^*$  como dos veces el espesor menor, es decir, el espesor lateral  $e_l$ , así el valor de esbeltez del perno es:

$$\lambda_u = \frac{2 \cdot e^*}{D} = \frac{2 \cdot 8 \text{ mm}}{9,525 \text{ mm}} = 1,679 (-)$$

Para obtener  $F_{ap}$  se utiliza la ecuación A.4.6. El valor del factor de reducción de zona elástica se obtiene a partir de la densidad anhidra de la madera (tabla 4.7), siendo  $\eta = 2,2$ . Por otro lado el ángulo  $\theta$  es de  $\pi/2$  al estar las fuerzas en dirección normal a la fibra de madera. Con esto, se obtiene:

$$F_{ap} = 3,402 \text{ (MPa)} \quad (4.2.18)$$

$$P_{ad,simple} = \frac{P_{ad,doble}}{2} = 259,24 \text{ (MPa)} \quad (4.2.19)$$

Para terminar, se debe corroborar que se cumple la desigualdad de la ecuación A.4.5, así:

$$Z \cdot D^2 = 2131,94 \text{ (MPa)} \geq 259,24 \text{ (MPa)}$$

**Espaciamiento** El espaciamiento entre los pernos se especifica en la sección A.4.4, de las cuales se obtiene la distancia entre pernos y los bordes es:

$$S_{bcn} = 1,5 \text{ mm}$$

$$S_{bdn} = 0,75 \text{ mm}$$

$$S_p = 2,625 \text{ mm}$$

## Madera - Madera

Existen distintos componentes de unión para la conexión de elementos de madera. En este trabajo se utilizó el tirafondo, perno y clavo como elementos principales de unión. Cada uno de ellos tiene distintas características que los vuelven ventajosos en ciertas situaciones. La utilización del tirafondo se utiliza para unir la viga C con el pilar B y la viga A, por su capacidad de “empujar” una madera contra la otra de manera eficiente. Los pernos, por otro lado, se utilizaran para la unión de herrajes entre la viga D y el pilar B, como también en los herrajes de anclaje del pilar B con el piso. En el caso de los clavos, estos se ocupan en los ángulos de apoyo entre las vigas A y B, para evitar su movimiento transversal. Para estos dos últimos elementos de unión, su elección está supeditada a las recomendaciones del fabricante de los herrajes o ángulos, quienes incluyen los valores de carga en la elección de los elementos de unión. Por lo mismo, la caracterización de estos elementos se realizará en la sección de conectores.

## Tirafondos

Las indicaciones para el cálculo, espaciamiento e instalación de los tirafondos se encuentran en la sección A.4.5. Al igual que el proceso de selección de vigas de madera, se iteró con distintas dimensiones de largo y diámetro. De esta manera, el tirafondo escogido fue de  $1/4 \times 1\frac{1}{2}$ ", lo cual se traduce a partir del anexo M de la norma en las medidas expuestas en la tabla 4.10.

Nomenclatura tirafondo	Diámetro Nominal $(D_v \text{ o } D)$ [mm]	Diámetro de rosca $(D_R)$ [mm]	Largo roscado $(R)$ [mm]	Largo vástago $(V)$ [mm]	Largo punta $(P)$ [mm]
$1/4 \times 3\frac{1}{2}$ "	6,4	4,4	51	38	4,8

Tabla 4.10: Dimensiones del tirafondo utilizado

Para su instalación, la norma indica que es necesario realizar perforaciones guías, las cuales están en función de sus características. Así el agujero tendrá dimensiones para la zona del vástago y otra para la zona con rosca. Para la zona del vástago, el agujero deberá tener las dimensiones del diámetro nominal  $D_v$  y el largo V. Para la segunda zona, la madera de pino oregón se categoriza en el grupo B según su densidad anhidra, a partir de la tabla 38 de la norma. Con esta información el largo del agujero debe ser de R - P y el diámetro del entre el 60 % y el 70 % de  $D_v$ .

**Solicitudes de extracción lateral** La carga admisible de extracción lateral se calcula según la ecuación A.4.7. El valor K se obtiene a partir de la tabla 39 de la norma dependiendo de si la madera utilizada es conífera o latifoliada y su densidad anhidra. El pino oregón es una madera conífera y, según su densidad, el valor de K es de 11,7. Así el valor obtenido es de  $P_{el,ad} = 0,48$  (kN). Sin embargo, la norma establece tres condiciones que se deben cumplir para que la expresión A.4.7 sea aplicable, de las cuales no se cumple que el espesor  $e_L$  de la pieza lateral atravesada por el tirafondo sea igual a  $3,5 \cdot D$ . Por esto se debe mayorar el valor de la carga admisible por factores de modificación que pueden penalizar o ayudar, dependiendo de la configuración de la unión.

**Factor de modificación por espesor de la pieza lateral.** El factor se obtiene a partir de la tabla 40 de la norma, debido a que  $e_L \neq 3,5 \cdot D$ . El valor  $K_{te} = 0,93$  se obtiene al ingresar a la tabla con la razón  $e_L/D \approx 3$ .

**Factor de modificación por penetración del vástago en la pieza principal.** De manera análoga, el factor se obtiene en la tabla 41 de la norma a partir de la razón entre

la penetración del vástago en la pieza,  $P_v$ , y el diámetro del tirafondo. El valor de este es  $P_v/D \approx 5$ , lo cual da que  $K_v = 1,36$

**Factor de modificación por diámetro.** Por último, este factor se obtiene directamente del diámetro nominal del tirafondo, a través de la tabla 42 de la norma. El valor corresponde a  $K_{tD} = 0,97$ .

Además de los factores de modificación expuestos, el eje del tirafondo se encuentra en dirección paralela a las fibras de la madera de la pieza principal, por lo tanto se debe multiplicar el valor de la carga admisibles por  $\frac{2}{3}$ . En conclusión, la carga admisible es igual a :

$$P_{el,ad} = \frac{2}{3} \cdot K_{te} \cdot K_{tv} \cdot K_{tD} \cdot K \cdot D^2 = 391,966 \text{ (N)} \quad (4.2.20)$$

**Solicitudes de extracción directa** Para el caso de la extracción directa es la ecuación A.4.8 la que determina la carga admisible de tirafondos colocados con su eje normal a las fibras de la madera. Dado que este no es el caso, como se señaló en la sección de extracción lateral, la carga admisible a considerar se debe multiplicar por  $\frac{3}{4}$ . Por otra parte, el valor de la longitud crítica de penetración  $l_{crit} = 10 \cdot D_R$  se obtuvo de la tabla 43 de la norma. Sin embargo, la longitud real de penetración de la zona roscada (R-P) es menor a la longitud crítica, por lo tanto en la ecuación se reemplaza  $l_{crit}$  por  $l = R - P$ . Entonces el valor obtenido para la carga admisible es:

$$P_{ed,ad} = 6,37 \text{ (kN)} \quad (4.2.21)$$

## Conectores

La elección de los conectores utilizados se basó en tres aspectos principales: la disponibilidad de los productos en la región, la compatibilidad con los elementos de madera y con las cargas que pueden resistir según el fabricante. Estos consisten en un elemento de metal, acero generalmente, que permite la unión de dos o más piezas de madera para soportar determinadas cargas. Existen en distintas geometrías y, el mecanismos de conexión entre acero y madera, es a través de elementos de unión mecánica, es decir, pernos, clavos y tornillos, principalmente. Para este trabajo se utilizaron tres tipos, los cuales une las vigas A-B, B-D y B con el suelo del laboratorio, todos fabricados por la marca Simpson Strong-Tie.

Para la unión entre A y B se utilizó en el diseño un ángulo de unión modelo A44, donde la longitud de sus brazos es de  $4\frac{9}{16}$ " y  $4\frac{3}{8}$ " de largo y su ancho de 1,5 pulgadas.

Los elementos de unión a utilizar son clavos de 0,148" de diámetro y 3" de largo. Las fuerzas que soportan, de acuerdo a la imagen 4.14, son de  $F_1 = 3,45$  kN y  $F_2 = 1,23$  kN.

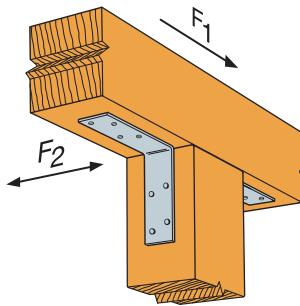


Figura 4.14: Representación de un ángulo de unión A44 y A66. [? ]

Para la unión del pilar B y la viga D se utilizó el ángulo A66. Este se une a través cada brazo de 5 7/8" a través de unos pernos de diámetro de 3/8". Estos buscan soportar la carga provocada por el propio peso y evitar los desplazamientos horizontales. Su disposición se puede ver en los planos del anexo ??, donde se aprecia cómo se utilizan dos ángulos por conexión.

Por último, la unión entre el piso y el pilar B se escogió un ángulo de anclaje A24. Utiliza un perno de anclaje y uno de sujeción de 1/2" para el piso y otro normal que es adosado en el otro extremo del pilar por un segundo ángulo de anclaje, de manera similar a la unión B-D. El plano del anexo ?? muestra en detalle el diseño de la conexión.

#### 4.2.5. Simulaciones

Las simulaciones de la máquina se utilizaron como apoyo y contraparte de los cálculos realizados manualmente. Éstas se realizaron en el software Inventor AutoCAD, en el ambiente “*Stress Analysis*”. A través de esto, se busca confirmar que los resultados obtenidos en los cálculos estáticos se encuentran fuera de los rangos de falla y obtener las frecuencias naturales de la estructura, utilizando “*Static and Modal Analysis*”.

Debido a las limitantes del programa utilizado, se debieron adaptar las propiedades mecánicas ortotrópicas de la madera, las cuales no era posible simular directamente. Para esto, se utilizaron los valores mínimos del Módulo de Young y las tensiones admisibles en las direcciones de mayor solicitud de cada elemento, buscando representar de manera segura las propiedades ortotrópicas en una configuración isotrópica.

Como condición del problema, en ambas simulaciones, las restricciones de los pilares de apoyo B se consideran empotrados (*fixed*), impidiendo cualquier grado de movimiento en su base. Además, las uniones se consideraron perfectas y sin desplazamientos. La carga fue aplicada en forma de presión sobre la parte superior de la máquina de fatiga para tener una distribución adecuada del peso de la misma, tomando en consideración la masa calculada en la ec. 4.1.1 de 200 kg.

### Análisis modal

La configuración utilizada para realizar esta simulación consistió en<sup>1</sup>.

- Número de modos: 6
- Rango de frecuencias: 0 - 120 Hz
- Precisión mejorada (*Enhanced Accuracy*)
- Contactos:
  - Tolerancia: 0,1 mm
  - Tipo: *Bonded*
- Malla:
  - Tamaño medio del elemento: 0,08
  - Tamaño mínimo del elemento: 0,15
  - Factor de modificación: 1,5 (default)
  - Ángulo máximo de giro: 60 grados (default)
  - Calcular modos precargados
  - Utilizar la medida para la malla según la pieza base del ensamblaje

### Análisis estático

Para realizar la simulación estática se retiraron todos los elementos de unión, es decir, pernos, tirafondos, conectores y ángulos, conservando solo las vigas de madera y las pletinas de acero. El fin de esto es analizar específicamente los esfuerzos a los que están sometidos estos elementos a la carga de la máquina de fatiga. La configuración principal de la simulación consiste en<sup>1</sup>:

- Detectar y eliminar modos de cuerpo rígido
- Separar tensiones en superficies de contacto

La configuración de los contactos y la malla se conservó igual a la establecida en el análisis modal.

<sup>1</sup>La definición de cada opción se encuentra en el manual de Autodesk Inventor. [? ]

## 4.3. Modelo dinámico del sistema

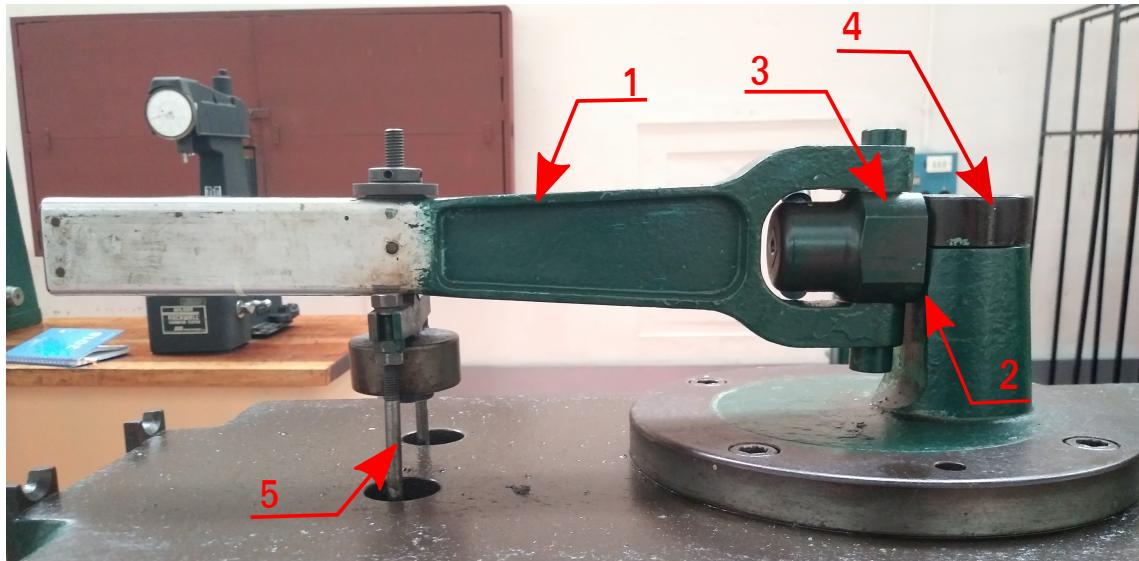
Luego del levantamiento de información, se busca analizar y predecir el comportamiento de la máquina en sus distintas configuraciones. Para esto se utiliza la información disponible para realizar un modelo del funcionamiento de la máquina de fatiga, en específico, de la carga aplicada a la probeta en función de la velocidad de rotación del disco y las distintas combinaciones de contrapesos. El disco se encuentra en voladizo, cuyo desequilibrio a partir de los contrapesos colocados produce una fuerza que es transmitida hacia un brazo de carga. Este, a su vez, aplica un momento de flexión sobre una probeta que está doblemente empotrada por mordazas.

Para obtener el comportamiento y la fuerza que produce el desbalanceo en el disco sobre la probeta, se modelará un sistema de dos grados de libertad para representar el movimiento de la máquina y sus componentes, realizando ciertas simplificaciones y suposiciones. Se utilizará el método de energía derivar las ecuaciones de movimiento del sistema.

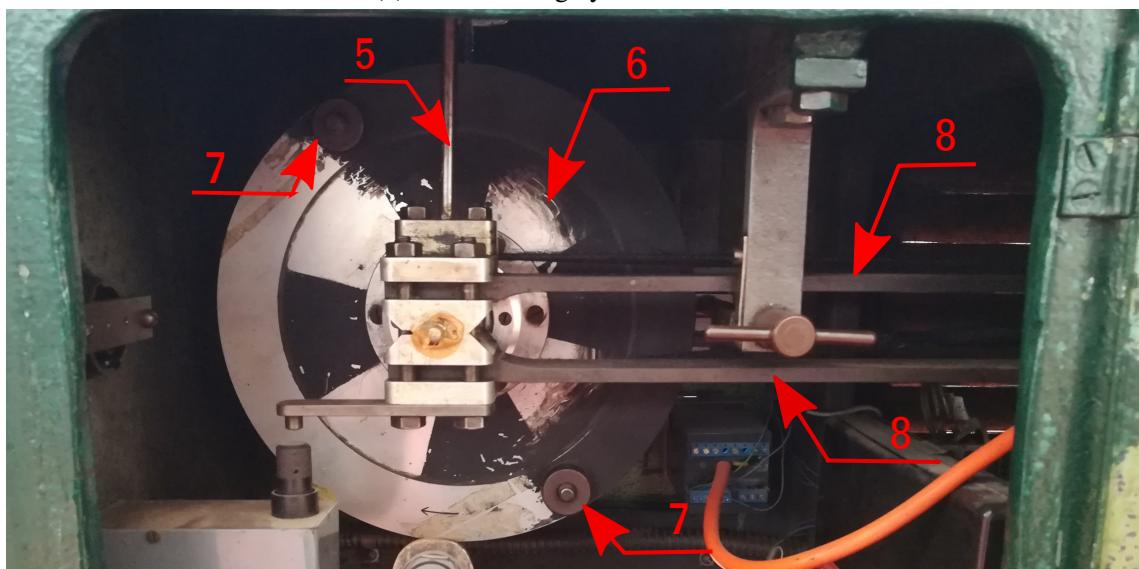
A través de esto, se pretende obtener la posición en reposo de la máquina y la deformación máxima que sufre la probeta según cada configuración. En concreto, la posición en reposo de la máquina, es decir, la deformación producto de la gravedad, entregará información sobre cual es la carga media y esfuerzo medio que sufre la probeta. En cambio, la deformación máxima es la información relativa a la carga alterna que se le aplica a la probeta y su correspondiente esfuerzo alterna. Por ello, el modelo deberá partir de una posición a conveniencia en un tiempo inicial y sin fuerzas externas interviniendo. Posteriormente, una vez que se haya alcanzado la posición de equilibrio, la fuerza externa producida por el disco desbalanceado comenzará a funcionar hasta que vibre de manera estacionaria. Al respecto, al ser la fuerza dependiente de la velocidad angular del disco, se introducirá una función que llamaremos  $\phi$  la cual controlará la aceleración y velocidad del disco.

### 4.3.1. Elementos del sistema

La fig. 4.15 muestra todas los elementos que participan en el funcionamiento de la máquina y que afectan su comportamiento. Sin embargo, estos se llevarán a un diagrama que representará los elementos y las simplificaciones utilizadas para modelar el movimiento de la máquina, en específico, del brazo de carga.



(a) Barra de carga y sus elementos



(b) Disco desbalanceado en voladizo

Figura 4.15: En las imágenes (a) y (b) se enumeran los elementos que fueron considerados al modelar el sistema vibratorio. (1) Barra de carga. (2) Probeta ( $k_2$ ), que se encuentra cubierta por ambas mordazas. (3) Mordaza sujeta al brazo de carga. (4) Mordaza empotrada a la máquina. (5) Barra de transmisión de la carga. (6) Disco desbalanceado. (7) Soportes de contrapeso. (8) Sistema de vigas en voladizo ( $k_1$ ).

### 4.3.2. Modelo del sistema

Como se señaló, para poder crear un modelo del sistema y obtener soluciones, se realizaron simplificaciones y suposiciones que permiten llegar a una solución. Así, la fig. 4.16 muestra el diagrama que se modelará con las ecuaciones de movimiento. Parte de estas simplificaciones es la exclusión de las fuerzas horizontales, en dirección de la coordenada  $x$  de acuerdo a la referencia utilizada. Para esto, también es necesario quitarle los grados de libertad a la barra de transmisión de la carga y simplificar la carga producida por la rotación del disco, explicado en la sección siguiente. Por último, se asumirá que el movimiento angular del brazo de carga será lo suficientemente pequeño como linealizar la función trigonométrica del ángulo  $\theta$ , aproximándose  $\sin(\theta) = \theta$  y  $\cos(\theta) = 1$ .

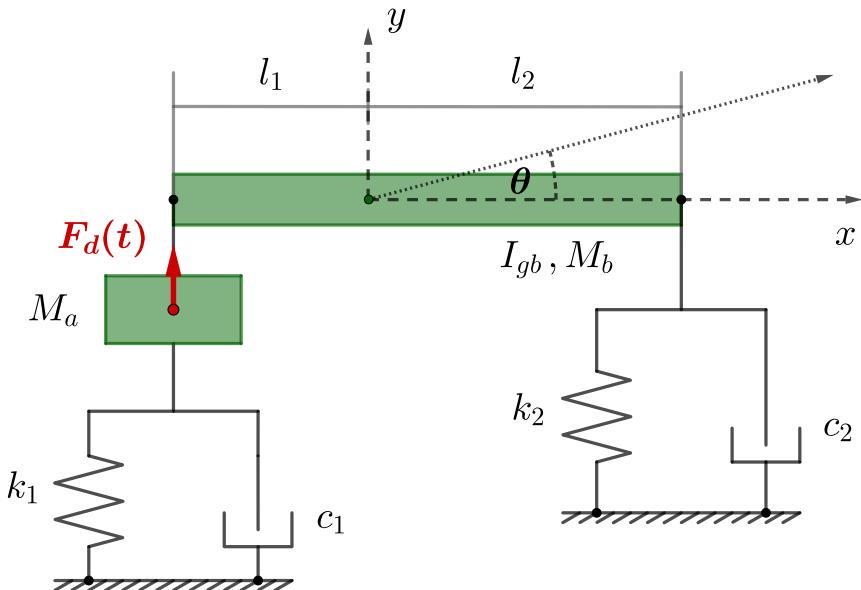


Figura 4.16: Diagrama del modelo utilizado y el sistema de coordenadas.

Los sistemas de coordenadas  $y(t)$  y  $\theta(t)$  definen la posición y el movimiento del brazo de carga en cualquier instante  $t$ . Al ser independientes entre sí y no depender de ninguna restricción, es que las coordenadas generalizadas serán  $q_1 = y$  y  $q_2 = \theta$ . A modo de conveniencia se establecerán las variables  $y_1$  e  $y_2$ , las cuales describen el movimiento en ambos extremos del brazo.

$$y_1(t) = y(t) - l_1\theta(t) \quad (4.3.1)$$

$$y_2(t) = y(t) + l_2\theta(t) \quad (4.3.2)$$

Si  $t_0 = 0$ , entonces cuando  $y(t_0) = 0$  y  $\theta(t_0) = 0$  la deformación en ambos resortes será cero, por lo tanto las variables  $y_1$  e  $y_2$  son equivalentes a la deformación de los resortes. La rigidez de cada resorte se denotarán como  $k_1$ , relativo a las vigas en voladizo, y  $k_2$ , relativo a la probeta.

Por otro lado, la velocidad de las coordenadas se definirán como  $\dot{y}(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  y, de manera análoga, la aceleración como  $\ddot{y}(t)$  y  $\ddot{\theta}(t)$ . A partir de las ecuaciones 4.3.1 y 4.3.2 se obtiene que:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \dot{y}(t) - l_1\dot{\theta}(t) & ; \quad \ddot{y}_1(t) &= \ddot{y}(t) - l_1\ddot{\theta}(t) \\ y_2(t) &= \dot{y}(t) + l_2\dot{\theta}(t) & ; \quad \ddot{y}_2(t) &= \ddot{y}(t) + l_2\ddot{\theta}(t) \end{aligned}$$

La variable  $M_a$  representa la masa total del disco, que se expresa como:

$$M_a = M_d + m_1 + m_2 \quad (4.3.3)$$

Donde  $M_d$  es la masa del disco y  $m_1$  y  $m_2$  la suma de los contrapesos colocados en cada soporte.

Las constantes del brazo de carga,  $M_b$  es la masa total del brazo de carga e  $I_{gb}$  el momento de inercia con respecto al centro de masa. Las longitudes  $l_1$  y  $l_2$  corresponden a la distancia entre el centro de masa y la unión con la barra y la probeta, respectivamente. Por último, las constantes  $c_1$  y  $c_2$  son los amortiguamientos correspondientes a cada resorte.

## Modelo del disco

Frente a la eliminación de las fuerzas horizontales del modelo, se simplificó la carga producida por el disco desbalanceado a una fuerza variable en el tiempo, que actúa solo en dirección vertical y es externa al sistema. Esta fuerza queda expresada de la siguiente forma:

$$F_d(t) = M_a e_{ga}(\dot{\phi}^2 \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \phi) \quad (4.3.4)$$

La variable  $e_{ga}$  corresponde a la excentricidad del centro de masa del disco provocada por el desequilibrio entre  $m_1$  y  $m_2$ , el cual se detallará en la sección siguiente. También, la función  $\phi$ , con su respectiva velocidad y aceleración, es la coordenada angular del disco respecto al tiempo, la que será explicada en la sección 4.3.4.

## Ecuaciones de movimiento

Utilizando el diagrama expuesto, entonces es posible escribir las ecuaciones que describen el movimiento del sistema utilizando el método de energía. Para esto, es necesario identificar los sistemas que actúan como parte de la energía cinética y potencial del sistema, además de las fuerzas externas que interactúan.

Se sabe que los elementos que actúan como resortes tienen el comportamiento de almacenar energía potencial, como se definió en la sección de rigidez. Por lo tanto, a partir de la ecuación 3.3.2, expresa los elementos que interactúan en el sistema:

$$U_k = \frac{1}{2} (k_1 \cdot y_1^2 + k_2 \cdot y_2^2) \quad (4.3.5)$$

La energía potencial gravitatoria se obtiene al utilizar la ecuación 3.3.16, por lo tanto, se obtiene:

$$U_g = g \cdot (M_a y_1 + M_b y) \quad (4.3.6)$$

Por otro lado, la energía cinética se calcula según la ecuación 3.2.5 para cada masa del sistema.

$$T = \frac{1}{2} (M_a \dot{y}_1^2 + M_b \dot{y}^2) \quad (4.3.7)$$

La energía disipada por el amortiguamiento viscoso se modela utilizando la ecuación 3.3.4, llamada función de disipación de Reyleigh.

$$R = \frac{1}{2} (c_1 \dot{y}_1^2 + c_2 \dot{y}_2^2) \quad (4.3.8)$$

Por último, la fuerza generalizada  $Q_i$  es la fuerza variable de la ec. 4.3.4 proveniente del disco desbalanceado.

Con esto, el método de Lagrange define al lagrangiano  $L$  como la resta entre la energía cinética  $T$  y la energía potencial total  $U$ , la cual según la ecuación 3.3.14, es la suma de la energía potencial elástica y gravitatoria. Así, la ecuación de energía para un sistema con amortiguamiento y forzado, a través del método de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.3.9)$$

Al reemplazar y derivar cada término para cada coordenada generalizada, quedan las siguientes expresiones:

$$M_b \ddot{y} + M_a \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + k_2 y_2 + M_a g + M_b g = F_d(t) - c_1 \dot{y}_1 - c_2 \dot{y}_2 \quad (4.3.10a)$$

$$I_{gb} \ddot{\theta} - M_a y_1 l_1 - k_1 y l_1 + k_2 y_2 l_2 - M_a g l_1 = F_d(t) \cdot l_1 + c_1 \dot{y}_1 l_1 - c_2 \dot{y}_2 l_2 \quad (4.3.10b)$$

Al reemplazar las variables  $y_1$  e  $y_2$  y reacomodando los términos, se obtienen las dos ecuaciones de movimiento del brazo de carga:

$$\begin{aligned} \ddot{y}(M_a + M_b) - \ddot{\theta} M_a l_1 + k_1(y - l_1 \theta) + k_2(y + l_2 \theta) + \dots \\ M_a g + M_b g = F_d(t) - c_1(\dot{y} - l_1 \dot{\theta}) - c_2(\dot{y} + l_2 \dot{\theta}) \end{aligned} \quad (4.3.11a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}(I_{gb} - M_a l_1) - \ddot{y} M_a l_1 + k_1(y - l_1 \theta) \cdot l_1 + k_2(y + l_2 \theta) \cdot l_2 + \dots \\ M_a g l_1 = F_d(t) \cdot l_1 + c_1(\dot{y} - l_1 \dot{\theta}) \cdot l_1 - c_2(\dot{y} + l_2 \dot{\theta}) \cdot l_2 \end{aligned} \quad (4.3.11b)$$

Estas se pueden reescribir de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M_a + M_b & -M_a l_1 \\ -M_a l_1 & I_{gb} - M_a l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_2 l_2 - c_1 l_1 \\ c_2 l_2 - c_1 l_1 & c_2 l_2^2 - c_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \dots \\ \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_2 l_2^2 - k_1 l_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d(t) - g(M_a + M_b) \\ F_d(t) \cdot l_1 + g M_a l_1 \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

### 4.3.3. Cálculo de constantes características del sistema

#### Rigidez y amortiguamiento

Las constantes de rigidez de las barras en voladizo  $k_1$  y de la probeta  $k_2$  se obtuvieron simulando su deformación elástica a través del software Inventor Autodesk. Para ello, se empotraron en un extremo y se les aplicaron distintas niveles de carga en el otro. Con los datos obtenidos fue posible ajustar una curva en una gráfica de deformación versus fuerza aplicada, donde la pendiente obtenida es la constante de rigidez del elemento.

Además, se realizaron cálculos para comprobar el orden de magnitud obtenido a través del software. Para esto se utilizó la ecuación 3.3.1, para una viga en voladizo. La tabla 4.11 muestra los resultados de ambos métodos. Los datos utilizados en el modelo corresponden a los obtenidos por simulación.

Por otro lado, los valores de  $c_1$  y  $c_2$  se estimaron de manera cualitativa, visualizando

Método	Barras en voladizo	Probeta
Simulación Inventor	$9,889 \cdot 10^4$ [N/m]	$1,809 \cdot 10^6$ [N/m]
Cálculo	$9,216 \cdot 10^4$ [N/m]	–

Tabla 4.11: Valores obtenidos mediante un modelo de elementos finitos y por media de la ec. 3.3.1 de la rigidez de las vigas en voladizo y la probeta de acero

la curvas de  $y(t)$  y  $\theta(t)$  para buscar que la vibración inicial se disipa antes del inicio de la función de aceleración del disco. Así, los valores utilizados son:

- $c_1 = 100$
- $c_2 = 100$

### Segundo momento de área de la probeta y las vigas en voladizo

El segundo momento de área o segundo momento de inercia, se calculó para obtener la rigidez de los dos elementos anteriores. Para el segundo momento de inercia de la probeta se utilizará la sección transversal de la sección media de la probeta. Así, su valor es:

$$\bar{I}_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 330,994 \text{ mm}^4 \quad (4.3.13)$$

Para las vigas en voladizo, el segundo momento de área se calculó en la sección 4.1.3, el cual es:

$$\bar{I}_{barras} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \quad (4.3.14)$$

### Momento de inercia del brazo de carga

El momento de inercia del brazo de carga se obtuvo a través del modelo CAD del mismo, respecto a su centro de masa. Su valor es  $I_{gb} = 5,6718 \cdot 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

### Longitud, masa y módulo de elasticidad

Los elementos del sistema explicados en la sección 4.3.2, dimensiones y propiedades que se midieron como parte del levantamiento de información.

**Brazo de carga.** La distancia correspondiente a cada extremo respecto al centro de masa es:

- $l_1 = 42,43 \text{ mm}$
- $l_2 = 158,07 \text{ mm}$

Además, la masa  $M_b$  corresponde a la masa medida del brazo de carga, como se especificó en la sección 4.1.3:

- $M_b = 2,305 \text{ Kg}$

**Masa del disco.** Por otro lado, la masa  $M_a$  como se señaló en la ecuación 4.3.3, corresponde a la suma de tres elementos. El primero de ellos, la masa del disco, tiene un valor de:

- $M_d = 19,2029 \text{ kg}$

Los valores correspondientes a  $m_1$  y  $m_2$  son variables y pueden ir desde 0 g hasta 92,3469 g de acuerdo a la configuración escogida. Las distintas combinaciones y valores que pueden tener se encuentran en la tabla del anexo ??.

**Módulo de elasticidad de la probeta.** Corresponde al del material de la probeta que actualmente se utiliza. Al ser acero, su valor es:

- $E_p = 200 \text{ GPa}$

## Excentricidad

La excentricidad del centro de masa  $e_{ga}$  se calculó utilizando los datos del disco, la distancia de los soportes y la configuración de masas. Por lo tanto, se define como:

$$e_{ga} = \frac{R_d \cdot (m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \quad (4.3.15)$$

### 4.3.4. Función de aceleración del disco

La filosofía detrás de la función  $\phi$  es poder controlar el tiempo de retraso de la rotación del disco, que se designará como  $T_i$ , y suavizar la aceleración del mismo hasta que llega a la velocidad de rotación máxima  $\omega_{max}$ . Para esto, la función de la aceleración  $\ddot{\phi}(t)$  se formuló como una función por partes, como se ve en la fig. 4.17, donde el parámetro  $T$  indicará la suavidad con la que es acelerado el disco. Estas tres constantes,  $T_i$ ,  $\omega_{max}$  y  $T$ , son valores de entrada que se eligen dependiendo de los resultados que se deseen. Así, la

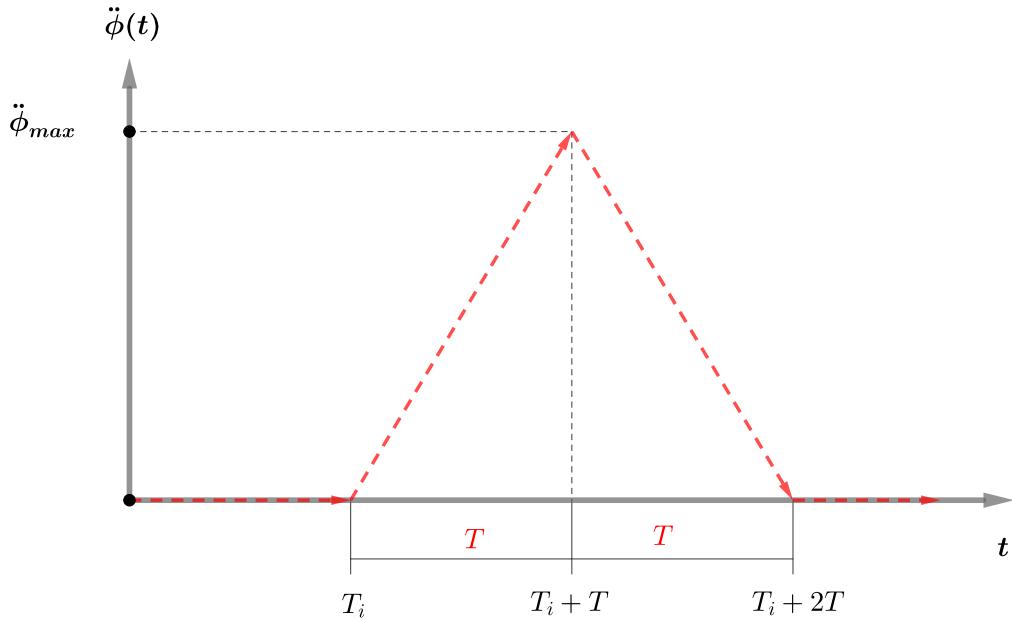


Figura 4.17: Función por parte de la aceleración del disco

función  $\ddot{\phi}$  adquiere la forma:

$$\ddot{\phi}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_i \\ \left(\frac{\omega_{max}}{T^2}\right)(t - T_i) & T_i < t \leq T_i + T \\ \left(\frac{\omega_{max}}{T}\right)\left(2 - \frac{t - T_i}{T}\right) & T_i + T < t \leq T_i + 2T \\ 0 & T_i + 2T < t \end{cases}$$

Para obtener la función de la velocidad  $\dot{\phi}(t)$  se debe integrar la función anterior, donde las constantes de integración se obtienen por los valores extremos conocidos, es decir,  $\dot{\phi}(T_i) = 0$  y  $\dot{\phi}(T_i + 2T) = \omega_{max}$ . Entonces, la función se define como:

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_i \\ \left(\frac{\omega_{max}}{2T^2}\right)(t^2 - 2T_i \cdot t + T_i^2) & T_i < t \leq T_i + T \\ \left(\frac{\omega_{max}}{T}\right)\left(2t - 2T_i - 3T + \frac{4T^2 - T_i^2 - t^2 + 2T_i \cdot t}{2T}\right) & T_i + T < t \leq T_i + 2T \\ \omega_{max} & T_i + 2T < t \end{cases}$$

El resultado de la función  $\dot{\phi}(t)$ , se muestra en la fig. 4.18.

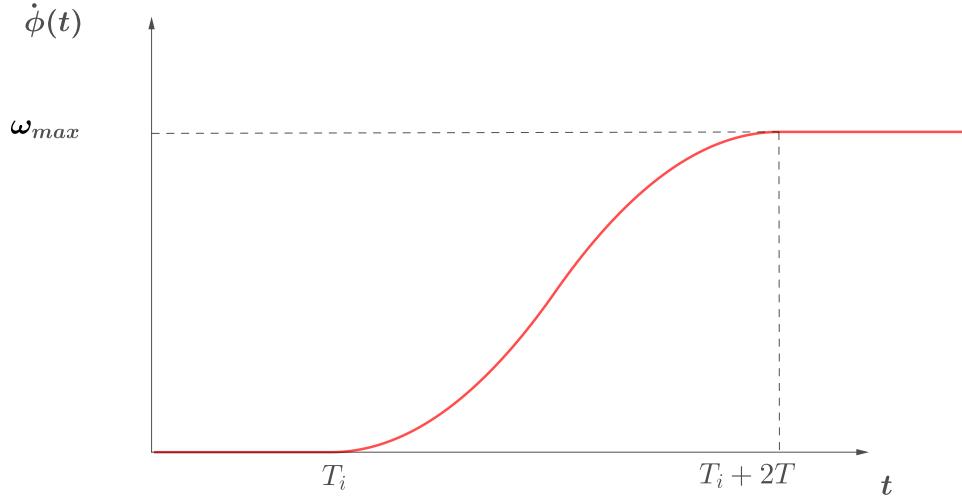


Figura 4.18: Función por parte de la velocidad angular del disco

Para concluir, se repite el mismo procedimiento anterior para obtener la función  $\phi(t)$ , sin embargo, para conocer las constantes de integración, los puntos conocidos serán cuando  $\phi(T_i) = 0$  y la igualdad de la función en el punto  $T_i + T$ . Así, es obtiene:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & t \leq T_i \\ \left(\frac{\omega_{max}}{6T^2}\right)(t^3 - 3T_i \cdot 2t + 3T_i^2 \cdot t - T_i^3) & T_i < t \leq T_i + T \\ \Phi_3 & T_i + T < t \leq T_i + 2T \\ \omega_{max}t - \omega_{max}(T + T_i) & T_i + 2T < t \end{cases}$$

La función  $\phi_3$  correspondiente al dominio cuando  $t$  es mayor a  $T_i + T$  y menor a  $T_i + 2T$  es:

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \left(\frac{\omega_{max}}{T}\right) \left( t^2 - 2T_i \cdot t - 3T \cdot t + \left(\frac{1}{2T}\right) \left( 4T^2 \cdot t - T_i^2 \cdot t - \frac{t^3}{3} + T_i \cdot t^2 \right) \right) \dots \\ & + \left(\frac{1}{6T^2}\right) (2\omega_{max}T^3 + 6\omega_{max}T^2T_i + 6\omega_{max}TT_i + \omega_{max}T_i^3) \end{aligned}$$

Para el desarrollo de este trabajo, el tiempo de retraso de la aceleración del disco será de  $T_i = 2$ , instante en el que la barra se encuentra en un estado de reposo en consecuencia del valor de los amortiguamientos  $c_1$  y  $c_2$ . Por otro lado, se definirá  $T = 2,5$  como un valor que logra suavizar la aceleración, pero sin dilatar en exceso la llegada al punto de velocidad máxima. Finalmente,  $\omega_{max}$  el valor por defecto corresponderá a la velocidad

actual de la máquina de 25 [rad/s] (1500 revoluciones por minuto), sin embargo, este se puede variar dependiendo de los resultados que se deseen obtener.

### 4.3.5. Solución del modelo

Para resolver el sistema de ecuaciones 4.3.12, se utilizará el solver de ecuaciones diferenciales ordinarias de MATLAB, `ode45`, que se basa en el método de Runge-Kutta con un espacio de tiempo variable para resolver sistemas de EDOs de primer orden y con condición inicial. [?]

Para resolverlo es necesario ingresar datos de entrada al sistema. Para esto, primero se debe escoger la configuración de contrapesos  $m_1$  y  $m_2$  a partir de la tabla de cargas. El segundo de ellos es el tiempo que define los límites de integración de la función, el que se escogerá según la cantidad de información que se deseé obtener. En tercer lugar, se deben ingresar los valores de la condición inicial correspondiente a cada variable. Por último, es opcional añadir valores de tolerancia relativa y absoluta.

Al ser el sistema de ecuaciones de segundo orden, es necesario realizar un cambio de variables para poder resolverlo. Se añadirán las nuevas variables  $\gamma$  y  $\beta$ , realizando la siguiente derivación:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \dot{y} \\ \beta = \dot{\theta} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \ddot{y} = \dot{\gamma} \\ \ddot{\theta} = \dot{\beta} \end{array}$$

Para esto es necesario despejar los valores de  $\ddot{y}$  y  $\ddot{\theta}$ , entonces la función a resolver estará dada por los elementos  $(\gamma, \dot{\gamma}, \beta, \dot{\beta})$  y los resultados obtenidos serán  $(y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$ . A partir de los resultados, es posible calcular la fuerza sobre la probeta utilizando la deformación  $y_2$  y la constante de rigidez  $k_2$ .

$$F(t) = k_2 \cdot y_2 = k_2(y + l_2\theta) \quad (4.3.16)$$

### 4.3.6. Matriz de carga sobre la probeta según velocidad del motor

Una vez que se puede resolver el sistema de ecuaciones para un configuración y velocidad del motor específica, entonces es posible obtener una matriz del valor de la fuerza máxima ( $F_{max}$ ), media ( $F_m$ ) y su amplitud ( $F_a$ ) para cada una de las configuraciones existentes en la tabla de carga a una velocidad angular  $\omega_{max}$  determinada.

Para esto se itera la solución anterior para cada una de las 201 configuraciones de contrapeso existentes para distintas velocidades. De estas iteraciones se almacenan los valores de  $F_{max}$ ,  $F_m$ ,  $F_a$ , la diferencia de masa de los contrapeso  $\Delta m$  y la multiplicación

entre la masa total  $M_a$  y la excentricidad del centro de masa del disco  $e_{ga}$ , la cual se definirá como la variable  $\Psi = M_a \cdot e_{ga}$ .

### Carga máxima, media y amplitud

La información que se busca de estos resultados corresponde a la carga que es producto de la fuerza del disco desbalanceado sobre la probeta, es decir,  $F(t)$ . Producto del comportamiento con el que se diseñó el modelo donde el sistema se deja caer hasta su posición de equilibrio, se utiliza una variable auxiliar  $F_{aux}$  que extrae los datos de  $F(t)$  desde el inicio de la aceleración angular del disco hasta el final de la integración para evitar que las fuerzas de la transición entre la posición inicial y el reposo den resultados incorrectos. Así, la carga máxima, media y la amplitud se definen:

$$F_{max} = \max(|F_{aux}|) \quad (4.3.17)$$

$$F_m = \frac{\max(F_{aux}) + \min(F_{aux})}{2} \quad (4.3.18)$$

$$F_a = \frac{\max(F_{aux}) - \min(F_{aux})}{2} \quad (4.3.19)$$

## 4.4. Simulación de carga máxima

Con los datos de la carga máxima  $F_{max}$ , obtenidos a partir de la solución del modelo expuesto anteriormente, para cada combinación de contrapesos, se realizará un análisis estático de los esfuerzos asociados a cada configuración, en otras palabras, se buscará relacionar cada combinación con los esfuerzos respectivos a una velocidad angular máxima  $\omega_{max}$  de 25 [rad/s]. Para esto, se simulará la probeta a través del software de elementos finitos ANSYS con el fin de obtener el esfuerzo máximo equivalente (o de von Mises), el esfuerzo máximo cortante, normal y sus respectivas deformaciones. Finalmente, se compararán los resultados de este análisis con la tabla de cargas existente. Debido a lo alto de las cargas obtenidas, sólo se considerarán las simulaciones que lleven a la probeta lo más cercano al punto de esfuerzo último, por lo tanto, la probeta será sometida a 77 cargas distintas, donde la carga 77 excede el esfuerzo último del material.

### 4.4.1. Tipo de simulación

Al llevar a la probeta a cargas que sobrepasan el esfuerzo de fluencia del material, es necesario utilizar un modelo elasto-plástico para el correcto desarrollo de la simulación.

En consecuencia, se utilizará el modelo de plasticidad multilineal de endurecimiento isotrópico (MISO), utilizado comúnmente para el análisis en grandes deformaciones. Este modelo se debe alimentar con los datos de distintos puntos de esfuerzo y deformación plástica real de un ensayo de tracción del material, creando una curva con los distintos puntos introducidos donde la primera pendiente es la zona elástica. Este modelo no permite que en la zona plástica hayan pendientes más grandes que en la zona elástica ni pendientes negativas.

#### 4.4.2. Propiedades del material

##### Medición de la dureza

Para conocer a qué acero correspondía el utilizado en las probetas que existen actualmente, se realizó un ensayo de dureza del material. Este ensayo se realizó en los laboratorios de tecnología mecánica en un medidor de dureza de escala Rockwell, marca Wilson del año 1970. Se realizaron tres mediciones en distintas caras de la probeta en la configuración de Rockwell B, de las cuales se obtuvieron:

$$H_1 = 54 \text{ HRB}$$

$$H_2 = 56 \text{ HRB}$$

$$H_3 = 54 \text{ HRB}$$

Por lo tanto se considerará una dureza del material de  $H = 54,6$  HRB. Sin embargo, debido a la antiguedad del equipo, la norma **ISO 18265:2013 - Conversion of hardness values** [?] establece que se debe realizar una corrección a estos valores debido a una actualización en el indentador utilizado y una reducción del tiempo de fuerza aplicado durante la medición. De esta forma, la dureza final promedio que se obtuvo corresponde a  $H = 54,8$  HRB. Por último, en base a esta misma norma, se puede realizar la conversión a dureza Vickers, siendo  $H = 98,3 \approx 100$  HV y obtener el valor de un esfuerzo último de referencia  $\sigma_u(@\text{HV} = 100) = 315 \text{ MPa}$ .

##### Curva de esfuerzo-deformación del acero

A causa de lo bajo del valor de dureza obtenido, sumado al hecho que en los únicos aceros utilizados en el laboratorio son SAE 1020 y 1040, es que se decide tomar las propiedades mecánicas del primero de estos. Los datos utilizados se obtuvieron de un ensayo de tracción realizado por la Universidad de Washington de un acero SAE 1020 laminado en caliente (AISI 1020 HR)[?]. Estos datos contienen la fuerza aplicada, la deformación sufrida y el diámetro original de la probeta, para los cuales se utilizaron las ecuaciones 3.4.3 y 3.4.4 para obtener los esfuerzos y deformaciones reales y el factor de

corrección de Bridgman (ec. 3.4.6). En la fig. 4.19, se pueden apreciar la curva original de esfuerzo-deformación ingenieril y la curva de esfuerzo-deformación real.

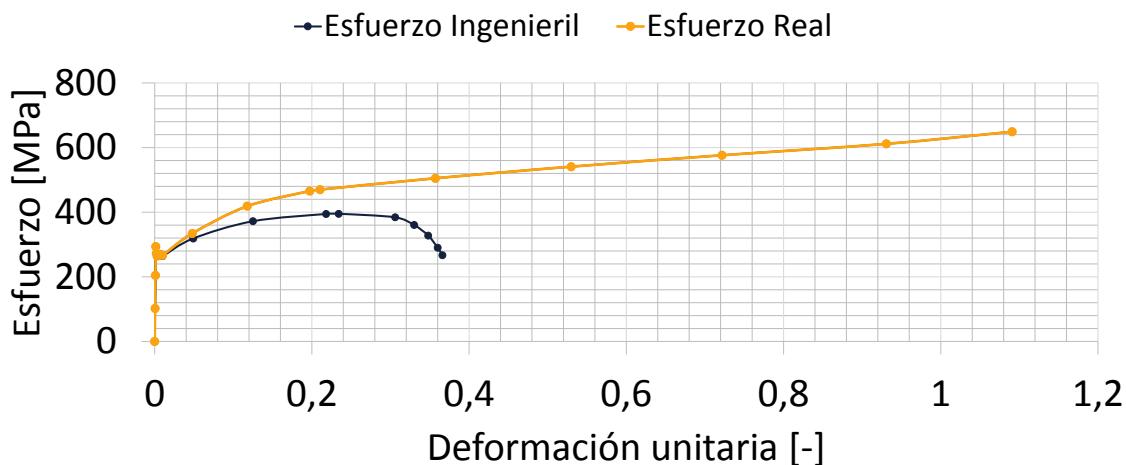


Figura 4.19: Curva de esfuerzo-deformación del material AISI 1020 en valores ingenieriles y reales.

Sin embargo, debido a las características del modelo MISO, se deben utilizar exclusivamente los puntos de la zona plástica y estos no pueden tener una pendiente menor a cero entre dos puntos ingresados, por lo tanto, la tabla 4.12 muestra los datos utilizados. Por otra parte, el último punto corresponde al esfuerzo de ruptura, pero no se ingresó un modelo de ruptura al no ser relevante para el trabajo.

Por último, para la deformación elástica se usará un modulo de elasticidad  $E = 200$  GPa, el esfuerzo de fluencia es  $\sigma_y = 293,5$  MPa y el esfuerzo último  $\sigma_u = 418,5$  MPa.

Deformación unitaria plástica real $\tilde{\varepsilon}$ (-)	Esfuerzo real corregido $\tilde{\sigma}_B$ (MPa)
0	293,5
0,0462	334,3
0,1157	418,5
0,1949	465,3
0,2079	469,8
0,3547	505,0
0,5271	540,9
0,7190	576,2
0,9278	611,5
1,0877	649,1

Tabla 4.12: Datos utilizados del ensayo de esfuerzo-deformación del acero AISI 1020 HR en el modelo MISO.

#### 4.4.3. Generación de la malla

Producto de lo irregular de la geometría de la probeta y la importancia que tienen para los resultados la zona media, por sobre los agarres, es que se opta por mallar para cada sección. En configuración general del mallado se utilizaron parámetros que buscan mejorar su calidad<sup>2</sup>.

- Sizing
  - Transition: Slow
  - Span Angle Center: Fine
- Quality
  - Error Limits: Aggressive Mechanical
  - Target Quality: 1 (-)
  - Smoothing: High

Para obtener los resultados de una malla que se adapte a los requisitos, se utiliza el *body sizing* y el *face sizing*. Así, la configuración utilizada para cada sección es la siguiente<sup>3</sup>:

- Probeta completa
  - Body sizing
  - Tamaño elemento: 0,01 mm
- Sección intermedia (fig. 4.20a)
  - Face sizing
  - Tamaño elemento: 0,001 mm
- Sección transversal media (fig. 4.20b)
  - Face sizing
  - Tamaño elemento: 0,0001 mm

<sup>2</sup>La definición de cada opción se encuentra en el manual de ANSYS. [? ]

<sup>3</sup>Ibíd.

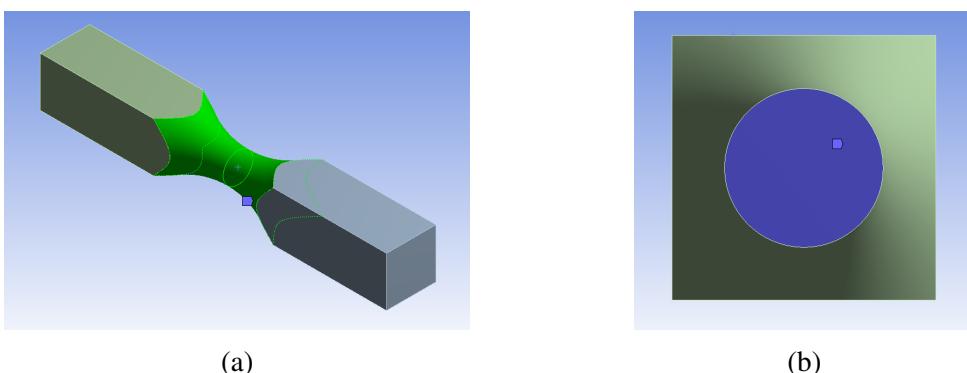


Figura 4.20: La zona verde de la imagen (a) corresponde a la zona intermedia de la probeta y la zona azul de la imagen (b) a la sección transversal en la mitad de la probeta.

Con esta configuración la malla está compuesta por 951.151 nodos y 684.131 elementos. Los valores promedios de los parámetros que indican la calidad de la malla, expuestos en la sección 4.4.3, son:

- Calidad del elemento = 0,839
  - Relación de aspecto = 1,817
  - Calidad ortogonal = 0,772
  - Oblicuidad = 0,22667

Estos valores muestran que la malla utilizada es aceptable. Al utilizar la tabla 3.2 como referencia, el valor de oblicuidad nos indica que la malla se encuentra en el rango “Excelente”.

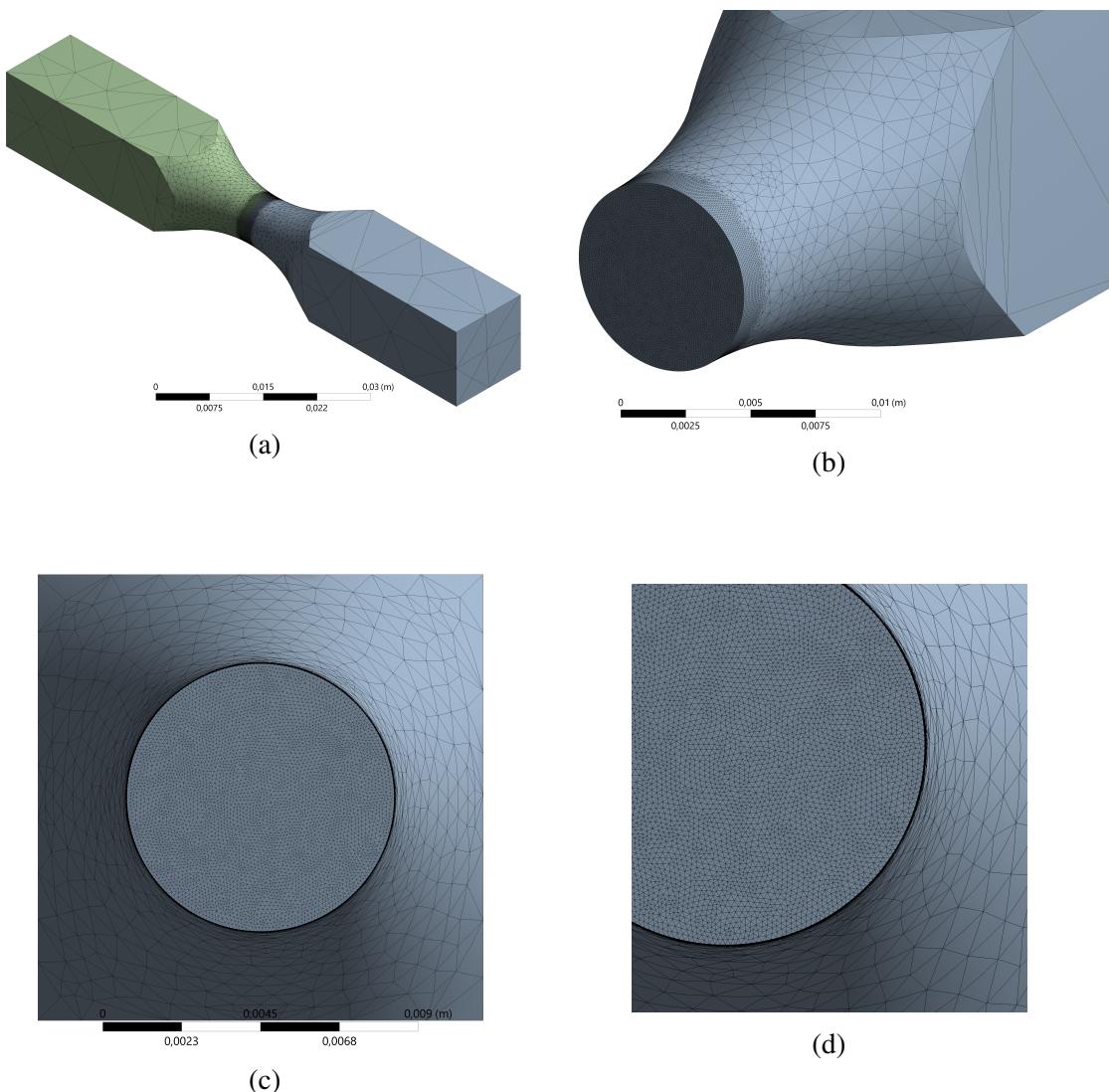


Figura 4.21: (a) Vista isométrica general de la malla. (b) Detalle en isométrico de la zona media y la sección transversal. (c) Malla de la sección transversal media. (d) Detalle de la malla de la sección transversal media.

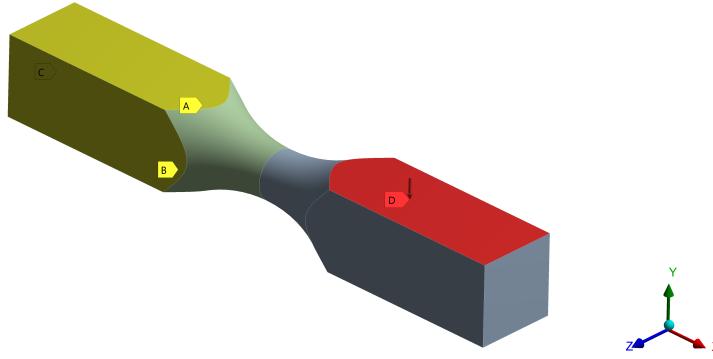


Figura 4.22: Condiciones de contorno aplicadas en la probeta. Las caras amarillas representan las restricciones de desplazamiento y la cara roja la presión aplicada.

#### 4.4.4. Configuración de la simulación estática

##### Condiciones de contorno

El doble empotramiento al cual está sometida la probeta se aplicará restringiendo el movimiento en cada cara de uno de sus extremos. Utilizando la fig. 4.22 como referencia, las caras amarilla se encuentran restringidas de desplazamiento en el eje normal a su plano. Así, ambas caras paralelas al plano  $xz$  tienen una restricción de desplazamiento de  $\Delta y = 0$ , las caras del plano  $xy$  están restringidas de desplazamiento en el eje  $z$  con  $\Delta z = 0$  y la cara posterior del plano  $yz$  su desplazamiento es  $\Delta x = 0$ .

Por otro lado, el otro extremo empotrado se le aplicarán las cargas máximas que se obtuvieron del modelo del sistema vibratorio,  $F_{max}$ . Sin embargo, no se aplicará como una carga puntual, sino como una presión sobre la cara roja de la probeta, según la imagen 4.22. Para esto, se transformará la carga puntual a presión utilizando la relación:

$$P_{max} = \frac{F_{max}}{A_{cara,l}} \quad (4.4.1)$$

Donde  $P_{max}$  es la presión aplicada sobre la cara y  $A_{cara,l}$  el área de la cara lateral sobre el cual se aplica la carga, es decir la sección roja. Al medir esta área a través del modelo CAD, se obtiene  $A_{cara,l} = 402,792 \text{ mm}^2$

### Selección de elementos

Dado que los esfuerzos máximos se encuentran en la sección media de la probeta, los resultados de la simulaciones se tomarán en los puntos específicos P, Q y R, cuya ubicación es mostrada en la fig. 4.23. Para esto, se seleccionarán los elementos que están en esa ubicación para posteriormente graficar sus resultados respecto a cada carga.

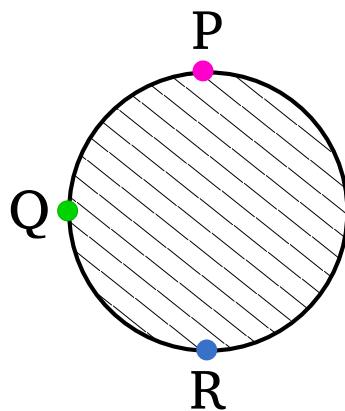


Figura 4.23: Ubicación de los elementos seleccionados

### Obtención de resultados

En base a los elementos seleccionados, los resultados que se necesitan son:

- Esfuerzo equivalente o de von Mises ( $\sigma_{vm}$ )
- Esfuerzo máximo cortante ( $\tau_{max}$ )
- Esfuerzo máximo normal en dirección  $x$  ( $\sigma_x$ ), según referencia de la fig. 4.22.
- Deformación unitaria equivalente total ( $\varepsilon_{vm,t}$ )
- Deformación unitaria normal elástica ( $\varepsilon_x$ ), según referencia de la fig. 4.22.

Además, a modo de referencia se utilizarán los resultados globales:

- Esfuerzo equivalente
- Deformación en dirección  $y$ , según referencia de la fig. 4.22

---

# Apéndice A

## Norma de cálculo en madera - NCh1198

La norma NCh 1198 - Cálculo de construcciones en madera - establece los métodos y procedimientos de diseño estructural que determinarán las condiciones mínimas que debe cumplir cada elemento de la estructura. Esta incluye las construcciones de madera aserrada, elaborada, laminada-encolada y postes de madera, como también las uniones a través de elementos mecánicos, tales como: clavos, tira fondos, pernos, barras de acero, tornillos y conectores para madera.

### A.1. Propiedades de la madera y factores de modificación

#### A.1.1. Contenido de humedad

El contenido de humedad de una madera debe ser considerado por su susceptibilidad a los cambios de forma, volumen y para la determinación de las tensiones admisibles debido a que es un material higroscópico. Para esto, se debe tomar en cuenta su humedad durante la construcción ( $H_c$ ), como también, la humedad a la que estará en servicio ( $H_s$ ) o humedad de equilibrio. La humedad de equilibrio depende de la ubicación que tengan los elementos. Si se encuentra en un recinto cerrado sin calefacción o intermitente  $H_s = 12\%$ . Si es un recinto cerrado continuamente calefactado, entonces  $H_s = 9\%$ . Si es un recinto cubierto abierto, entonces la humedad de equilibrio será igual a la humedad medida del lugar donde se ubicará. Finalmente, si los elementos se encuentran a la interperie, se puede utilizar la tabla que se encuentra en el anexo D, de la norma NCh 1198, para las diferentes regiones geográficas de Chile.

Así la tabla A.1 se utiliza de criterio para clasificar la madera como verde o seca, las cuales se designan con las letras E y ES, respectivamente. Además, son agrupadas con un

número que clasifica las especies madereras que crecen en Chile, de acuerdo a la norma NCh 1989 - Agrupamiento de especies madereras según su resistencia - mostrada en el anexo A de la norma NCh 1198. Para el pino radiata se considera la clasificación de la norma NCh 1207 - Pino radiata, clasificación visual para uso estructural, especificaciones de los grados de calidad.

Ítem	Condición de humedad de la madera		Condición considerada para la madera en la determinación de su(s)	
	Durante la construcción	En servicio	Tensiones admisibles	Módulo de elasticidad
1	$H_c \geq 20\%$	$H_s \geq 20\%$	Verde	Verde
2	$H_c \geq 20\%$	$H_s \leq 12\%$	Seca (H=12 %)	Seca (H=12 %)
3	$H_c \leq 12\%$	$H_s \leq 12\%$	Seca (H=12 %)	Seca (H=12 %)
4	$H_c \leq 12\%$	$H_s \geq 12\%$	Verde	Seca (H=12 %)

Tabla A.1: Condiciones que se deben considerar en la determinación de tensiones admisibles y módulo de elasticidad. [? ]

### A.1.2. Densidad

Debido a la característica higroscópica de la madera, su masa y volumen varían respecto al contenido de humedad. Por lo tanto, existen distintos tipos de densidad dependiendo de la información que sea necesaria o de los cálculos que se realicen. De acuerdo a la norma NCh 176/2, se definen los siguientes valores de densidad:

- Densidad anhidra: Relaciona la masa y el volumen de la madera completamente seca (anhidra)
- Densidad normal: Aquella que relaciona la masa y el volumen de la madera con un contenido de humedad del 12 %.
- Densidad básica: Relaciona la masa anhidra de la madera y su volumen con humedad igual o superior al 30 %.
- Densidad nominal: Es la que relaciona la masa anhidra de la madera y su volumen con un contenido de humedad del 12 %.
- Densidad de referencia: Aquella que relaciona la masa y el volumen de la madera ambos con igual contenido de humedad.

### A.1.3. Tensiones admisibles y módulo de elasticidad

La madera es un material no homogéneo constituido por fibras naturales que mantienen su dirección, las cuales inciden en que su comportamiento mecánico, su flexibilidad y la resistencia a los esfuerzos sea distinta respecto al eje en que se usa, siendo un material ortotrópico donde su resistencia es mayor en el eje paralelo a las fibras que el normal a las fibras.

Además, sus propiedades varían respecto a la especie del árbol, su edad, condiciones climáticas, humedad y la presencia de defectos, como nudos, rajaduras o agujeros. Para esto, la norma NCh 1970/1 y 1970/2 - Clasificación visual para uso estructural, especificaciones de los grados de calidad - junto a la norma NCh 1207, determinan el grado estructural desde el N°1 al N°4, a partir de una inspección visual de la madera procesada. Con esta clasificación, junto a la clasificación de madera seca o verde, determinan la clase estructural de la madera aserrada. Finalmente, con esta información es posible obtener la tensión admisible en flexión ( $F_f$ ), compresión paralela a las fibras ( $F_{cp}$ ), tracción paralela a las fibras ( $F_{tp}$ ), cizalle ( $F_{cz}$ ), compresión normal a las fibras ( $F_{cn}$ ) y el módulo de elasticidad en flexión ( $E_f$ ), de las tablas 4.a para todas las especies y 4.b para el pino radiata.

### A.1.4. Factores de modificación

Existen otras variables externas a la madera que pueden afectar su correcto desempeño. Para esto, existen los factores de modificación que buscan corregir la tensión admisible para las distintas condiciones a las que puede estar sometido el elemento. Estas son:

- Factor de modificación por contenido de humedad,  $K_H$ .
- Factor de modificación por duración de la carga,  $K_D$ .
- Factor de modificación por trabajo conjunto,  $K_C$ .
- Factor de modificación por temperatura.
- Factor de modificación por tratamiento químico

## A.2. Diseño de piezas

Para el diseño de piezas es necesario calcular las tensiones de diseño, que se determinan como el producto de las tensiones admisibles por los factores de modificación que

resulten pertinentes y que se definen para cada tipo de solicitudación a la que está sometida cada pieza de la estructura. Por lo tanto, las tensiones de trabajo no pueden ser superiores a las de diseño, debiendo establecerse, un factor de seguridad para los cálculos. A continuación se expondrán las solicitudes utilizadas para el diseño de la mesa.

### A.2.1. Flexión

La tensión de trabajo de flexión de la fibra extrema de una viga simple de madera se debe determinar de acuerdo con la expresión:

$$f_f = \frac{M_{max}}{W_n} \quad (\text{MPa}) \quad (\text{A.2.1})$$

Donde  $M_{max}$  es el momento máximo de flexión en  $\text{N} \cdot \text{mm}$  y  $W_n$  el módulo de flexión de la sección transversal neta respecto al eje neutro en mm.

Para el diseño de elementos en flexión, se debe calcular la tensión de diseño en flexión en la zona flexo-traccionada ( $F_{ft,dis}$ ) y flexo-comprimida ( $F_{fv,dis}$ ). Que se definen según las ecuaciones A.2.2a y A.2.2b.

$$F_{ft,dis} = F_f \cdot K_H \cdot K_D \cdot K_C \cdot K_{hf} \quad (\text{MPa}) \quad (\text{A.2.2a})$$

$$F_{fv,dis} = F_f \cdot K_H \cdot K_D \cdot K_C \cdot K_V \quad (\text{MPa}) \quad (\text{A.2.2b})$$

Donde:

$K_{hf}$ : Factor de modificación por altura.

$K_V$ : Factor de modificación por volcamiento.

#### Factor de modificación por altura, $K_{hf}$ .

Para todas las especies forestales, con excepción del pino radiata, en piezas traccionadas o vigas rectangulares de ancho o altura superior de 50 mm, este factor se evalúa de acuerdo con la expresión A.2.3a. Para pieza de Pino radiata de altura superior a 90 mm, se considera la expresión A.2.3a.

$$K_{hf} = \left( \frac{50}{h} \right)^{\frac{1}{9}} \quad (\text{A.2.3a})$$

$$K_{hf,radiata} = \left( \frac{90}{h} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (\text{A.2.3b})$$

Donde  $h$  es el ancho de la viga traccionada o altura de la viga, en mm.

### Factor de modificación por volcamiento, $K_V$ .

Aquellos elementos estructurales que estén sometidos a flexión deben estar apoyados lateralmente en sus extremos para impedir desplazamientos laterales y rotaciones en el eje axial, donde se denomina luz a la distancia entre puntos de apoyo de un elemento de estructura. Para esto existen tres posibles casos dependiendo de la configuración, donde  $h$  es la altura de la viga y  $b$  su ancho.

1. Cuando los elementos en flexión cumplen con las especificaciones de la **Tabla 11**, de la sección **8.2.2.4** de la norma,  $K_V = 1$ .
2. Si los elementos no poseen apoyos laterales a lo largo de su luz,  $K_V = 1$ , si la razón  $(h/b) < 2$ .
3. Si en el punto anterior  $(h/b) > 2$ ,  $H_V$  se calcula en función de la esbeltez de volcamiento  $\lambda_V$ , de acuerdo a la sección **8.2.1.8**, la **Tabla 10** y **Tabla 12** de la norma.

En aquellos casos en los que la esbeltez de volcamiento ( $\lambda_V$ ) sea mayor a la esbeltez del límite elástico ( $\lambda_{vo}$ ), el factor de modificación se calcula como:

$$K_v = \frac{0,4 \cdot E_{f,dis}}{\lambda_v^2 \cdot F'_{f,dis}} \quad (\text{A.2.4})$$

### A.2.2. Cizalle en vigas simples

La tensión de trabajo máximo de cizalle longitudinal en elementos flexionados de madera, se calcula mediante la siguiente expresión:

$$f_{cz} = \frac{1,5 \cdot Q}{b \cdot h} \quad (\text{MPa}) \quad (\text{A.2.5})$$

Donde  $Q$  es el esfuerzo cortante máximo y  $b$  y  $h$  la base y altura en mm, respectivamente. La tensión de diseño de cizalle longitudinal se determina de la expresión **A.2.6**. El cizalle transversal no es necesario calcular o verificar debido a que nunca va a fallar por este esfuerzo, según la sección **8.2.3.1** de la norma.

$$F_{cz.dis} = F_{cz} \cdot K_H \cdot K_D \cdot K_C \cdot K_r \quad (\text{MPa}) \quad (\text{A.2.6})$$

Donde  $K_r$  es el factor de modificación por rebaje (inferior o superior), calculado según la sección 8.2.3.5 de la norma. Debido a que no es una condición que se encuentra en este trabajo, no se profundizará en este factor.

### A.2.3. Compresión paralela a la fibra

La tensión de trabajo de una columna simple sometida a compresión paralela a su fibra, se calcula:

$$f_{cp} = \frac{N}{A} \cdot 10^{-3} \quad (\text{MPa}) \quad (\text{A.2.7})$$

Donde  $N$  es la carga axial aplicada en kN, y  $A$  el área de la sección transversal en  $\text{mm}^2$ .

El cálculo de la tensión de diseño en compresión paralela ( $F_{cp,dis}$ ) dependerá de la inestabilidad lateral ( $\lambda$ ), la cual, dependiendo de su valor, será necesario calcular un factor de modificación por esbeltez, como también pondrá restricciones al diseño. Así, se puede obtener  $F_{cp,dis}$  a partir de las ecuaciones A.2.8a y A.2.8b.

La esbeltez se define como  $\lambda = l_p/i$ , donde  $l_p$  es la longitud efectiva de pandeo, e  $i$  corresponde al radio de giro. Para el cálculo de la longitud efectiva de pandeo, se pueden utilizar los valores de la **Tabla 18** o las recomendaciones establecidas en el anexo K, según la norma.

$$F_{cp,dis} = F_{cp} \cdot K_H \cdot K_D \cdot K_C \quad (\text{A.2.8a})$$

$$F_{cp,\lambda,dis} = F_{cp,dis} \cdot K_\lambda \quad (\text{A.2.8b})$$

Donde  $K_\lambda$  es el factor de modificación por esbeltez. Si  $\lambda < 5$ , la tensión de diseño se calculará según A.2.8a. Por otro lado, si  $\lambda \geq 5$ , entonces determina mediante la ecuación A.2.8b debido a que el elemento presenta inestabilidad lateral.

El factor  $K_\lambda$  se evalúa según la expresión:

$$K_\lambda = A - \sqrt{A^2 - B} \quad (\text{A.2.9})$$

con:

$$A = \frac{B \cdot c \cdot (1 + \frac{\lambda}{200}) + 1}{2c} \quad (\text{A.2.10})$$

$$B = \frac{4 E_{dis}}{c \cdot \lambda^2 \cdot F_{cp,dis}} \quad (\text{A.2.11})$$

en que:

- $c$ : Corresponde al coeficiente de proporcionalidad y cuyos valores se obtienen de la tabla 19 de la norma a partir del grado estructural de la madera.
- $E_{dis}$ : Módulo elástico de diseño, calculado como el módulo elástico en flexión  $E_f$  por los factores de modificación que resulten pertinentes.
- $F_{cp,dis}$ : Tensión de diseño en compresión paralela calculada según A.2.8a, excluyendo el factor de modificación por trabajo conjunto,  $K_C$ , en MPa.

#### A.2.4. Compresión normal a la fibra

La tensión de trabajo por aplastamiento en superficies de apoyo, solicitadas ortogonalmente a la fibra, se determina según la siguiente expresión:

$$f_{cn} = \frac{R}{A_n} \quad (\text{MPa}) \quad (\text{A.2.12})$$

Donde  $R$  es la carga aplicada y  $A_n$  la sección neta aplastada.

La tensión de diseño en compresión normal, se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$F_{cn,dis} = F_{cn} \cdot K_H \cdot K_C \cdot K_{cn} \quad (\text{A.2.13})$$

Donde  $K_{cn}$  es el factor de modificación por aplastamiento, que se calcula a partir de la sección 8.5.3 de la norma.

#### A.3. Nomenclatura y tipos de madera

Más allá de la especie, en el mercado es posible encontrar madera con distintas terminaciones y dimensiones. Las principales diferencias se definen respecto al grado de manipulación del material y su uso final. Los tipos de madera relevantes a este trabajo son los siguientes:

- Madera dimensionada: Tal como dice su nombre, es una madera cortada sin cepillar, conservando sus dimensiones en bruto.

- Madera cepillada: Es el siguiente paso a la madera dimensionada. Recibe su nombre por el uso de la herramienta cepillo, la cual desbasta la superficie de la madera para suavizarla. Este formato mantiene sus dimensiones nominales en bruto, sin embargo, pierde sección respecto a la madera dimensionada.
- Madera laminada: También conocida como laminada-encolada, es la unión de tablas similares, de canto o de tope, manteniendo la misma dirección de las fibras, utilizando adhesivos sobre sus caras.

Por otro lado, existen distintas configuraciones dependiendo de la escuadría y la forma de la sección [?]:

- Listón: Elemento de escuadría 1x2”, 2x2”, 2x3” y 2x4”.
- Tabla: Elemento donde prevalece el alto por sobre el espesor, comúnmente de escuadrías 1x4”, 1x5” o 1x6”.
- Tablón: Elemento más grueso que una tabla, de escuadría 2x6”, 2x8” o 2x10”.
- Cuartón: Elemento de sección cuadrada. Su nombre se debe a la sección 4x4”, pero puede ser de 5x5” o 6x6”.
- Base: Elemento de escuadría de 10x10” o superior.

Todas las dimensiones, independiente del formato o el tipo, son respecto a la madera en bruto. Por lo tanto, a pesar que las dimensiones reales de una madera cepillada o dimensionada son menores, se sigue denominando según su escuadría original. Así, las tablas A.3 y A.2 muestran los valores reales para cada dimensión nominal.

Espesor Nominal [in]	Dimensionado [mm]		Cepillado [mm]
	Verde	Seco	Seco
1	23	22	19
2	48	45	41
Tolerancia [mm]	0/+2	0/+3	0/+2

Tabla A.2: Espesor nominal y real de la madera según el tratamiento recibido.

Ancho Nominal [in]	Dimensionado [mm]		Cepillado [mm]
	Verde	Seco	Seco
2	48	45	41
3	73	69	65
4	99	94	90
5	127	120	115
6	150	142	138
8	200	190	185
10	248	235	230
Tolerancia [mm]	0/+2	0/+3	0/+2

Tabla A.3: Ancho nominal y real de la madera según el tratamiento recibido.

## A.4. Uniones en la madera estructural

Existen diversas formas de unir dos o más elementos de madera. Uno de ellos es el ensamble entre las piezas, en cual, modificando la geometría de ambos elementos, se busca unirlas sin añadir objetos externos. Sin embargo, actualmente se opta por el uso de elementos externos para unir elementos de tipo estructural. Así, la norma NCh 1198 dispone de un capítulo para el correcto uso de estos elementos mecánicos.

### A.4.1. Generalidades

Antes de comenzar a hablar de las expresiones que determinan el comportamiento de las uniones mecánicas, se deben realizar definiciones previas.

1. Elementos mecánicos de unión: Son aquellos que, al quedar solicitados por fuerza de cizalle, admiten corrimientos relativos entre las piezas conectadas. Dependiendo de su disposición pueden quedar solicitados en su dirección axial también.
2. Borde cargado: Borde de la pieza de madera que se encuentra afectado por la acción de la fuerza que transmite el elemento de unión o por alguna de las fuerzas de las componentes de esta.
3. Borde descargado: Borde que no está sometido a las fuerzas señaladas en el punto anterior.

4. Espaciamientos: Es la distancia entre centros de elementos de unión adyacentes o entre centros de elementos de unión vecinos a un borde y éste, los que se clasifican de la siguiente manera:

- a) Espaciamiento mínimo entre elementos de unión medido en dirección paralela a la fibra de la pieza:  $s_p$ .
- b) Espaciamiento mínimo entre elementos de unión medido en dirección normal a la fibra de la pieza:  $s_n$ .
- c) Espaciamiento mínimo entre un elemento de unión y un borde cargado medido en dirección paralela a la fibra de la pieza:  $s_{bcp}$ .
- d) Espaciamiento mínimo entre un elemento de unión y un borde cargado medido en dirección normal a la fibra de una pieza:  $s_{bcn}$ .
- e) Espaciamiento mínimo entre un elemento de unión y un borde descargado medido en dirección paralela a la fibra de la pieza:  $s_{bdp}$ .
- f) Espaciamiento mínimo entre un elemento de unión y un borde descargado medido en dirección normal a la fibra de la pieza:  $s_{bdn}$ .

Y se muestran en la figura A.1.

- 5. Duración de la carga: Las cargas admisibles definidas en este capítulo son aplicables para cargas de una duración de 10 años. Para valores distintos, se debe seguir las indicaciones de la norma en la sección 7.1.2.
- 6. Extracción directa: Se refiere a cuando una unión está siendo solicitada axialmente respecto al eje del elemento de unión.
- 7. Extracción lateral: Se refiere a cuando una unión está siendo solicitada perpendicularmente al eje del elemento de unión, sometiéndolo a esfuerzos de cizalle en su sección transversal, siendo el tipo de solicitud más común.
- 8. Condición de la madera: En relación a los medios de unión, se define respecto al contenido de humedad (H) en la madera, así se establecen tres casos:
  - a) Seca: Si su contenido de humedad es menor a 20 % ( $H < 20 \%$ ).
  - b) Semiseca: Si su contenido de humedad está comprendido entre 20 % y el punto de saturación de la fibra (P.S.F.), ( $20 \% \geq PSF$ ).
  - c) Verde: Si su contenido de humedad es igual o superior a PSF. ( $H \leq PSF$ )

9. Punto de saturación de la fibra (PSF): Corresponde al valor del contenido de humedad en el cual una madera ha perdido teóricamente toda su agua libre y sus paredes celulares están saturadas de agua higroscópica, representando el punto donde la madera se comprime o hincha, en procesos de secado o adsorción respectivamente. Su valor depende de distintos factores, como el tipo de secado o el tipo de madera, sin embargo, la norma asume un valor  $H = 28\%$  como PSF. [? ]

Las cargas admisibles especificadas en el capítulo 10 de la norma son para uniones colocadas en madera seca y que se mantendrá seca después de su construcción. Para madera semiseca o verde durante su construcción y madera seca que durante su servicio aumenta su contenido de humedad por sobre el 19 %, se le deberá aplicar el factor de modificación  $K_{UH}$  señalado en las tablas 28 y 29, de la sección **10.1.7** de la norma.

#### A.4.2. Verificaciones tensionales

##### Sección transversal neta

La capacidad soportante de carga de las piezas debe verificarse en la menor sección transversal neta que condiciona la ejecución de las uniones, deduciendo de la sección transversal bruta las áreas de perforaciones o de cualquier otra remoción de madera.

Así, el área neta requerida en piezas traccionadas y comprimidas, se determina dividiendo la carga total que se traspasa a través de la sección transversal neta crítica, por los correspondientes valores de diseño  $F_{tp,dis}$  o  $F_{cp,dis}$ . Para las solicitudes donde existen elementos de unión alineados de forma alternada, estos se deben considerar dispuestos en una misma sección transversal, a excepción que el espaciamiento entre estos sea mayor o igual a:

- 8 diámetros para pernos, barras de acero y tirafondos.
- 2 diámetros en caso de conectores.

##### Tensiones de cizalle

En uniones de pernos, barras de acero, tirafondos o conectores, solicitadas por fuerzas de corte, se debe verificar que las tensiones de cizalle de trabajo  $f_{cz}$  no excedan los siguientes valores indicados:

- En uniones separadas del extremo de la pieza, por una distancia  $s_{bp}$  mayor o igual

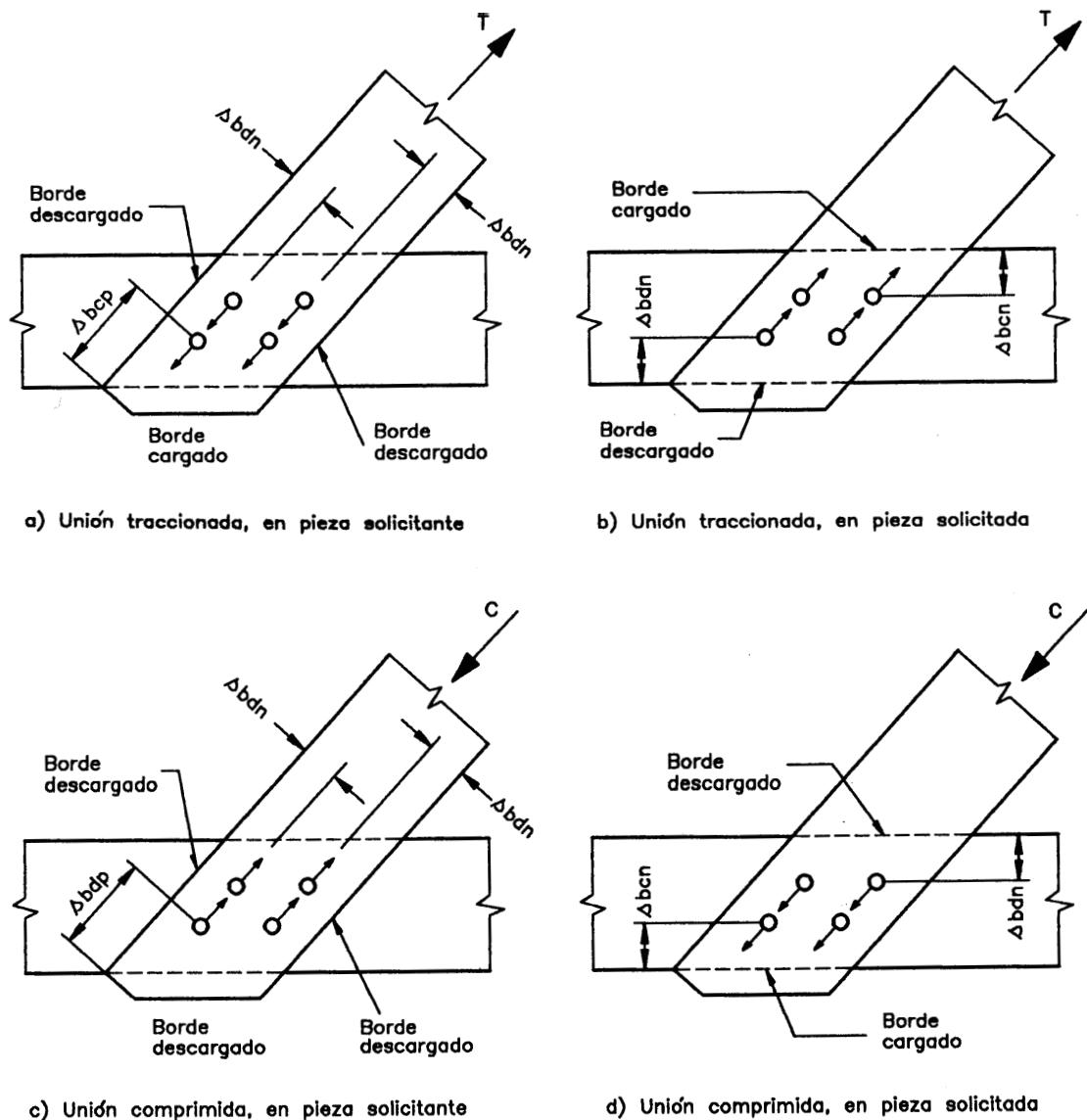


Figura A.1: Designaciones de espaciamientos y bordes. [? ]

que 5 veces la altura de la misma:

$$f_{cz} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot b \cdot h_e} \leq 1,5 \cdot F_{cz,dis} \quad (\text{A.4.1})$$

- En uniones separadas del extremo de la pieza, por una distancia  $s_{bp}$  menor que 5 veces la altura de la misma:

$$f_{cz} = \frac{3Q}{2bh_e} \frac{h}{h_e} \leq F_{cz,dis} \quad (\text{A.4.2})$$

- Se debe verificar que la sección transversal bruta cumple con la relación:

$$f_{cz} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot b \cdot h} \leq F_{cz,dis} \quad (\text{A.4.3})$$

Los valores  $h$  y  $h_e$  se muestran en la figura A.2. El valor  $h_e$  será distinto para conectores o para pernos, barras de acero y tirafondos. Para conectores  $h_e$  corresponde a la altura de la pieza menos la distancia desde el borde descargado hasta el borde del conector más cercano, mientras que en el caso del resto de las uniones, se evalúa deduciendo de la altura, la distancia entre el borde descargado y el centro de la unión más próxima.

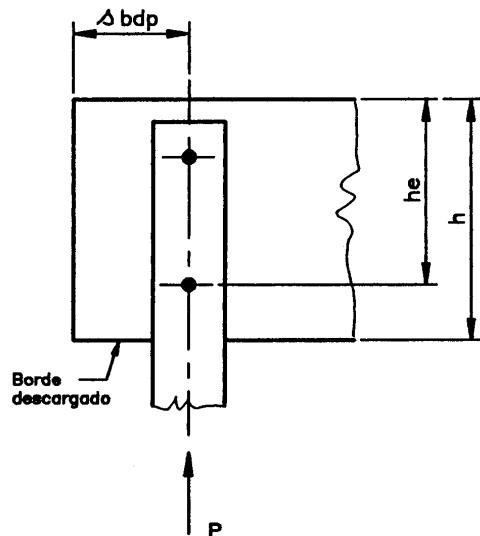


Figura A.2: Valor de  $h_e$ , para los distintos elementos de unión. [? ]

### A.4.3. Número de elementos de unión

Las cargas admisibles que se indican en esta norma, rigen para un elemento de unión individual, según las solicitudes correspondientes. Una hilera de elementos de unión consiste en dos o más elementos del mismo tipo y tamaño alineados. En madera, es usual el uso de más de un elemento para unir dos o más maderas, debido a las restricciones existentes en su tamaño y distanciamiento.

#### Carga admisible y factor de modificación por longitud de hilera

La capacidad de carga admisible de una hilera es la suma de las capacidades de cada elemento que constituye la unión, sin embargo, no debe sobrepasar el valor  $P_h$ , determinado por la ecuación A.4.4.

$$P_h = K_u \cdot \sum P_i \quad (\text{A.4.4})$$

Donde  $\sum P_i$  es la suma de los valores admisibles de los elementos de unión individuales existentes en la hilera y  $K_u$  es el factor de modificación por longitud de hilera, señalado en la sección 10.3.2.2 y las tablas 30 y 31 de la norma.

### A.4.4. Uniones con perno

Las especificaciones para pernos son aplicables para cualquier elemento cilíndrico de acero que atreviese perpendicularmente los planos de cizalle de la unión y que quedan solicitados preponderantemente en flexión induciendo sobre la madera tensiones de aplastamiento.

Para su correcta instalación es necesario que los agujeros y las arandelas cumplan con ciertas dimensiones. El diámetro del agujero se debe mayorar respecto al del perno en función del tamaño del perno y las condiciones de humedad de servicio, siguiendo la tabla 33 de la sección 10.5.1.2 de la norma. Para las arandelas o golillas, se debe seleccionar primero si se utilizará una de forma circular o cuadrada, dando preferencia a esta última por ofrecer mayor resistencia al incrustamiento en la madera. Luego, sus respectivas dimensiones están en función del diámetro del perno, siguiendo la tabla 34 de la norma.

Respecto a las características del perno, su diámetro nominal debe estar entre los 10 y 30 mm. Además, se exige una disposición mínima de dos pernos, exceptuando los casos donde un único perno no queda solicitado en un porcentaje superior al 50 % de su capacidad de diseño.

## Cargas admisibles para un perno

Las cargas admisibles para este tipo de unión solo son aplicables cuando la dirección de la solicitud es perpendicular a su eje para duración normal y de madera seca que permanecerá seca en servicio. Para casos distintos es necesario aplicar los factores de modificación correspondientes. Por otro lado, en esta norma existen condiciones distintas para cizalle simple, doble o múltiple, sin embargo, cizalle simple y múltiple se calculan realizando modificaciones al cizalle doble, por lo tanto, sólo se efectuara una explicación de este caso.

La capacidad de carga admisible ( $P_{ad}$ ) se calcula estableciendo que la unión está establecida por la unión de tres piezas de la misma especie, con las piezas laterales paralelas entre sí y cada una de ellas de espesor igual a la mitad del espesor de la pieza central,  $e$ , como se muestra en la figura A.3. Así, es posible obtenerla a través de la tensión admisible de aplastamiento nominal,  $F_{ap}$  (A.4.6), la esbeltez de la unión  $\lambda_u$  y el diámetro del perno ( $D$ ), de acuerdo a la siguiente expresión:

$$P_{ad} = F_{ap} \cdot \lambda_u \cdot D^2 \leq Z \cdot D^2 \quad (\text{A.4.5})$$

Y la tensión admisible de aplastamiento nominal se define como:

$$F_{ap} = \frac{0,00065 \cdot \rho_{12,k} \cdot (100 - D)}{\eta(2,75 \cdot \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta))} \quad (\text{MPa}) \quad (\text{A.4.6})$$

Donde:

- $\rho_{12,k}$  : Es la densidad normal característica de la especie forestal, en  $\text{kg/m}^3$ , según tabla E2 del anexo E de la norma.  $D$  es el diámetro del perno, en mm.
- $D$  : Diámetro del perno, en mm
- $\eta$  : Es el factor de reducción de la zona elástica, según tabla 35 de la norma.
- $\theta$  : Es la desangulación fuerza-fibra.
- $\lambda_u = \frac{e}{D}$  : Esbeltez del perno en la pieza central
- $Z = 1,15 \cdot \sqrt{\frac{F_{ap} \cdot F_y}{\eta}}$  (MPa)
- $F_y$  : Tensión de fluencia del acero, usando 240 MPa como referencia

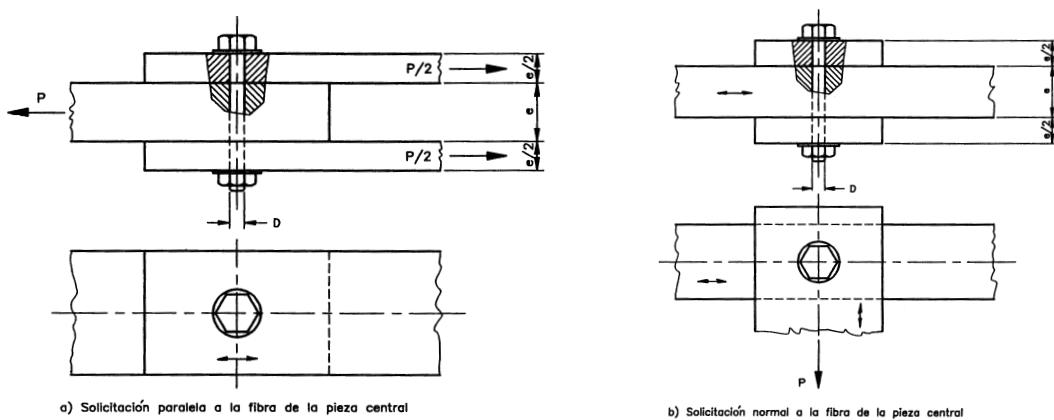


Figura A.3: Uniones en cizalle doble. [?]

Para casos distintos al establecido anteriormente, se deben realizar arreglos en la forma de calcular  $P_{ad}$ . En caso que las piezas laterales tengan un espesor menor que la mitad del espesor de la pieza central  $e$ , la carga admisibles es igual a la de una unión de cizalle doble con una pieza central de espesor ficticio,  $e^*$ , equivalente al doble del espesor de la pieza lateral más delgada. Si las piezas laterales están constituidas de una especie maderera distinta a la pieza central, se debe considerar la menor entre:

- El valor determinado para una unión equivalente con todas sus piezas de la especie usada en las piezas laterales.
- El valor determinado para una unión equivalente con todas sus piezas constituidas con la especie de la pieza central.

Cuando se usen planchas de acero como piezas laterales, las cargas admisibles para solicitudes orientadas según la dirección de la fibra, se pueden mayorar en un 25 %, sin embargo estas mayoraciones no se permiten para las cargas admisibles calculadas con solicitudes normales a la fibra.

El valor obtenido de  $P_{ad}$  según la ecuación A.4.5, considera el eventual aflojamiento de tuercas inherentes a la contracción de la madera.

Finalmente, para cizalle simple existen dos casos a considerar. Cuando la unión está constituida por dos piezas de espesores diferentes, la carga admisible se determina como el menor valor entre:

- La mitad de la carga admisible de una unión de cizalle doble con una pieza central de espesor igual al de la pieza más gruesa.
- La mitad de la carga admisible de una unión de cizalle doble con una pieza central de espesor igual al doble del espesor de la pieza más delgada.

El segundo caso, cuando las piezas son de igual espesor, la carga admisible equivale a la mitad de la correspondiente a la de una unión de cizalle doble con una pieza central de espesor igual al de cada pieza.

### Espaciamientos mínimos para pernos

Los espaciamientos mínimos que se deben respetar en las uniones con pernos se esquematizan en la figura A.4. El espaciamiento mínimo entre los pernos y los bordes cargados o descargados se establecen en función del diámetro del mismo, determinados por la tabla 36 de la sección 10.5.4 de la norma. El espaciamiento mínimo entre los pernos mismos, se establecen en la tabla 37 de la misma sección.

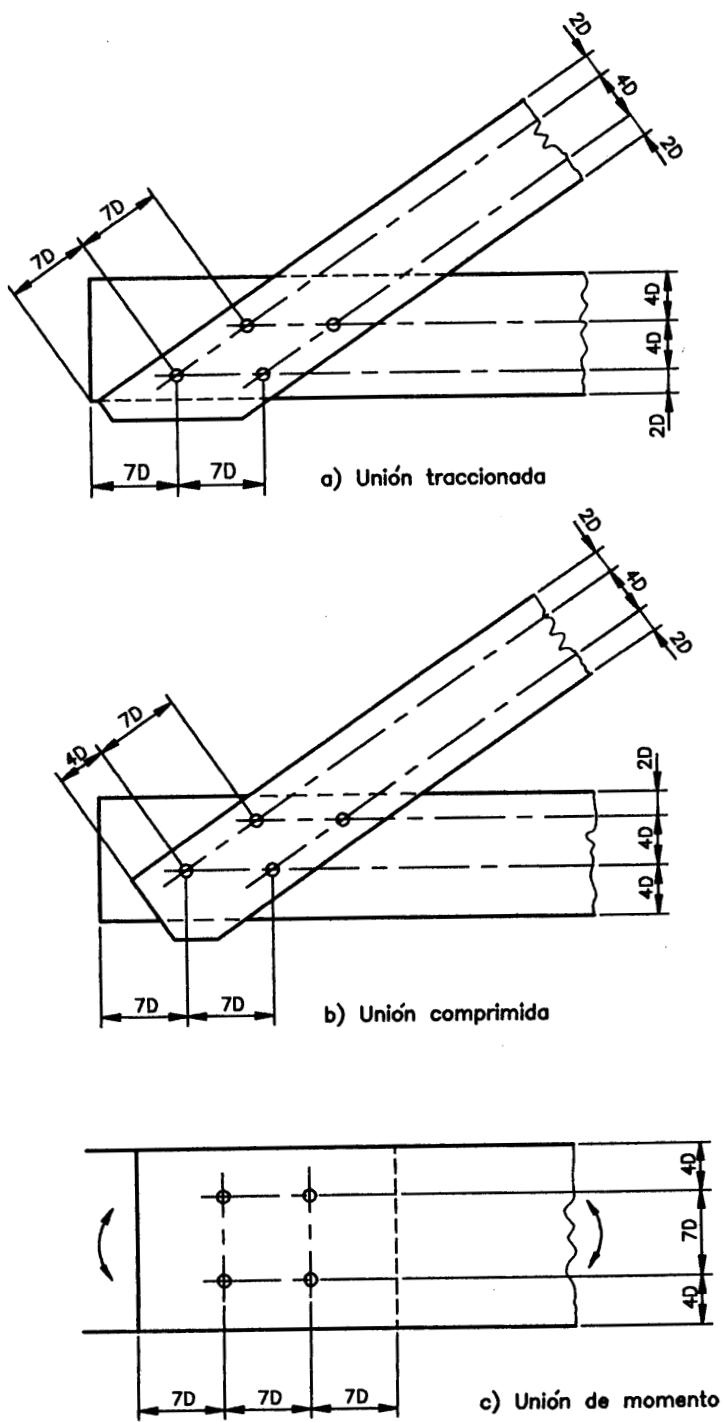
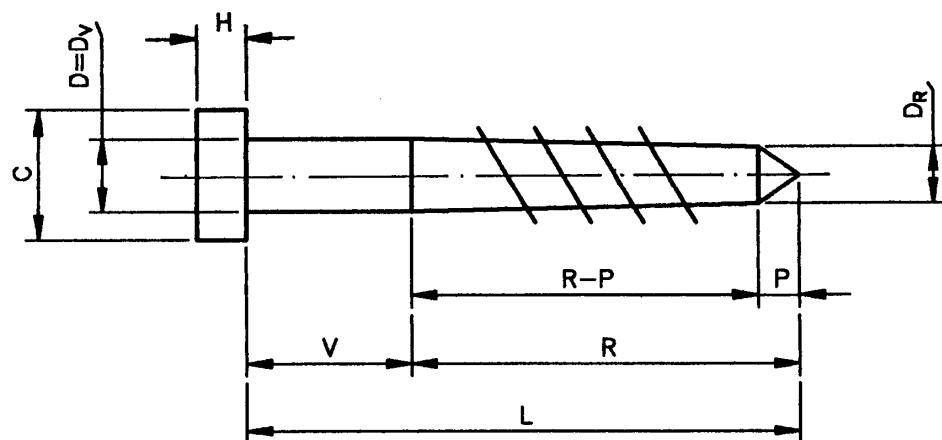


Figura A.4: Espaciamientos mínimos entre pernos, barras de acero, tirafondos y a los bordes. [? ]

### A.4.5. Uniones con tirafondos

Los tirafondos son un tipo de unión mecánica similar a un tornillo, del cual se diferencia porque su longitud total está dividida en una zona roscada y otra lisa llamada vástago, como se muestra en la figura A.5. Las especificaciones y cálculos indicados en esta norma son válidos para tirafondos que cumplan con las características del anexo M de la norma.

Para obtener los valores de diseño para este tipo de unión, es necesario clasificar las especies madereras utilizadas según su densidad anhidra  $\rho_o$  (obtenidas en el anexo E), de acuerdo a la tabla 38 de la norma.



D	=	diámetro nominal = $D_v$ = diámetro del vástago sin roscas
$D_R$	=	diámetro del vástago central en la zona roscada
C	=	lado de la cabeza cuadrada
H	=	espesor de la cabeza
V	=	longitud del vástago
L	=	longitud nominal
R	=	longitud roscada total
P	=	longitud de la punta aguzada

Figura A.5: Esquema de un tirafondo. [? ]

## Perforaciones guía

Los tirafondos deben ser instalados en perforaciones guías con las características siguientes:

- El agujero en donde se alojará el vástago del tirafondo debe tener el mismo diámetro  $D$  de dicho vástago y una profundidad igual a la longitud,  $V$ , de la zona sin rosca del tirafondo.
- El agujero para la zona con rosca del tirafondo debe tener una profundidad de al menos igual a la longitud de la zona roscada del tirafondo,  $R - P$  y un diámetro comprendido entre:
  - 40 % - 70 % del diámetro del vástago para las especies del grupo A de la tabla 38 de la norma.
  - 60 % - 75 % de dicho diámetro para las especies del grupo B.
  - 65 % - 85 % para las de los grupos C y D.

Para tirafondos de diámetros iguales o mayores que 3/4" (ver anexo M) ocupar los porcentajes del límite superior de los intervalos señalados. Cuando los tirafondos con diámetros menores o iguales a 3/8" colocados en maderas del grupo A y B son sometidos a extracción directa, se puede evitar la perforación guía si los espaciamientos entre tirafondos y las distancias a los bordes de la pieza cumplen con las secciones **10.5.4.1** y **10.5.4.2**. La zona con rosca debe ser colocada en la perforación guía con una llave de tuerca. Se prohíbe la aplicación de golpes de martillo en esta operación. Para facilitar la introducción y evitar daños en el tirafondo se acepta el empleo de lubricantes en la rosca o en la perforación.

## Arandelas

Las arandelas siguen las especificaciones de la tabla 34 de la norma, señaladas en la sección de la unión con pernos, excepto que se dispongan planchas de acero.

## Solicitudes de extracción lateral

La carga admisible de extracción lateral de tirafondos colocados en su eje normal a las fibras de la madera y sometidos a una carga paralela a dichas fibras, se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$P_{el,ad} = K \cdot D^2 \cdot 10^{-3} \quad (\text{kN}) \quad (\text{A.4.7})$$

Donde  $P_{el,ad}$  es la carga admisible de extracción lateral,  $D$  el diámetro del vástago del tirafondo, en mm, y  $K$  es la constante que depende de la densidad anhidra y cuyo valor se puede obtener de la tabla 39 de la norma. Las cargas admisibles son aplicables sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. El espesor  $e_L$  de la pieza lateral atravesada por el tirafondo es igual a  $3,5D$ .
2. La profundidad mínima de penetración en la pieza principal (la que recibe la punta del tirafondo), asciende a:
  - $7D$  en maderas de los grupos C y D.
  - $11D$  en maderas de los grupos A y B.
3. La penetración del vástago es completa en la pieza lateral, sin que él penetre en la pieza principal, como se muestra en la figura 29 de la norma.

En caso de no cumplirse las condiciones señaladas, es necesario multiplicar el valor  $P_{el,ad}$  obtenido en la ecuación A.4.7 por los factores de modificación correspondientes.

#### 1. Factor de modificación por espesor de la pieza lateral, $K_{te}$

Para espesores de piezas laterales diferentes a  $3,5D$ , se debe utilizar la tabla 40 de la norma.

#### 2. Factor de modificación por penetración del vástago en la pieza principal, $K_{tv}$

Cuando el vástago toca la pieza principal, se debe utilizar el factor de modificación señalado en la tabla 41 de la norma, utilizando la razón  $P_v/D$  como dato de entrada, donde  $P_v$  se especifica en la figura 30 de la norma.

Además, siempre se debe multiplicar la carga admisible a la extracción lateral de la ecuación A.4.7 por el factor de modificación por diámetro,  $K_{tD}$ , que se entrega en la tabla 42 de la norma.

Cuando  $P_{el,ad}$  es calculado para tirafondos colocados con su eje paralelo a las fibras de la madera de la pieza principal y sometidos a una carga normal a dichas fibras se debe considerar igual a  $2/3$  de la multiplicación de  $P_{el,ad} \cdot K_{tD}$ . Por otro lado, cuando se usen cubrejuntas metálicas, la carga admisible de extracción lateral se debe ampliar en un 25 % para cargas paralelas de la dirección de la fibra. Esta mayoración no se aplica sobre la carga admisible normal a la dirección de la fibra.

### Solicitaciones de extracción directa

La carga admisible de extracción directa de tirafondos colocados con su eje normal a las fibras de la madera, se determina con la expresión:

$$P_{ed,ad} = \frac{\rho_o^{1,5} \cdot D^{0,75} \cdot l_{crit}}{978} \cdot 10^{-3} \quad (\text{kN}) \quad (\text{A.4.8})$$

Donde:

$P_{ed,ad}$  = carga admisible de extracción directa

$\rho_o$  = Densidad anhidra de la madera en  $\text{kg}/\text{m}^3$

$D$  = Diámetro del vástago del tirafondo en mm

$l$  = Longitud de penetración de la zona roscada del tirafondo (R-P) en la madera, en mm

$l_{crit}$  = Longitud de penetración de la zona roscada que desarrolla la capacidad admisible de tracción en la sección transversal crítica del tirafondo, según tabla 43 de la norma.

En caso que la solicitud de la extracción directa quede con su eje colocado paralelo a las fibras de la madera, se debe considerar una carga admisible igual al 75 % de aquella calculada para tirafondos colocados con su eje normal a las fibras de la madera.

### Combinación de solicitudes de extracción directa y lateral

Cuando un tirafondo esté solicitado tanto en extracción directa como lateral, el análisis se realiza por separado, no debiendo exceder la carga de diseño de extracción para ninguno de los dos casos.

### Espaciamiento

Las distancias entre tirafondos y entre tirafondos y bordes debe seguir lo establecido en la tabla 36 del capítulo de pernos de la norma, donde se reemplaza el diámetro del perno por el diámetro del vástago.