



DEPARTAMENTO DE
**INGENIERÍA
INFORMÁTICA**

PROCESAMIENTO DE SEÑALES E IMÁGENES - 13318

Unidades I y II - Análisis de señales en tiempo discreto

Profesor: Luis Corral

1-2025



Índice general

Índice general	I
1 Introducción	1
I Análisis en el dominio del tiempo	2
2 Señales discretas y muestreo	3
2.1. Señales en tiempo discreto	3
2.2. Señales exponenciales	3
2.3. Señales impulso y escalón unitarios	4
2.4. Señales discretas de largo finito	4
2.5. Operaciones sobre señales finitas	6
2.6. Operaciones sobre la variable temporal	7
2.7. Muestreo de señales continuas	8
2.8. Teorema del muestreo	8
3 Sistemas LIT y convolución	10
3.1. Sistemas LIT	10
3.2. Respuesta al impulso	11
3.3. Suma de convolución	12
3.4. Suma de convolución circular	13
3.5. Convolución circular mediante multiplicación de matrices . . .	15
II Análisis en el dominio de la frecuencia	16
4 Serie y transformada de Fourier discreta	17
4.1. Serie de Fourier discreta	17
4.2. Transformada de Fourier discreta	19
4.3. Análisis en el dominio de la frecuencia	21
4.4. Transformada rápida de Fourier	22
4.5. Propiedad de la convolución	25
5 Filtros digitales	26
5.1. Sistemas de ecuaciones en diferencia	26

5.2. La transformada Z	27
5.3. Diagrama de polos y ceros	27
5.4. Sistemas FIR e IIR	28
5.5. Filtros digitales	29
Appendices	32
A Demostraciones	33
A.1. Suma de convolución	33
Bibliografía	35

CAPÍTULO 1

Introducción

Este resumen está basado en el libro de Oppenheim et al. (1998) para el curso Procesamiento de Señales e Imágenes - 13318. Ya que el curso no contempla todo el material de este trabajo (principalmente solo parte del tiempo discreto), es recomendable realizar la lectura del presente documento antes de la cátedra y luego recurrir a la referencia en caso de desear profundizar en el contenido. El libro incluye comprobaciones a la formulación matemática y ejercicios. Adicionalmente, gran parte del contenido está basado en el curso RES.6-007 Signals and Systems¹ disponible en la web de MIT OCW. En este curso se pueden encontrar videos y material adicional.

El documento está estructurado en dos partes: I Análisis en el dominio del tiempo y II Análisis en el dominio de la frecuencia. El Capítulo 2: Señales discretas y muestreo, está basado en las secciones 1 Señales y Sistemas y 7 Muestreo. El Capítulo 3: Sistemas LIT y convolución, está basado en la sección 2 Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo. El Capítulo 4: Serie y transformada de Fourier discreta, está basado en las secciones 3 Representación de Señales Periódicas en Series de Fourier y 5 La Transformada de Fourier de Tiempo Discreto. Finalmente, el Capítulo 5: Filtros digitales, está basado en las secciones 2 Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo y 10 La Transformada Z.

Existen dos referencias a libros adicionales: Oppenheim et al. (1999) y Anand Kumar (2013). Esto es solo para la autoría del contenido y no es necesaria su lectura como material adicional. También existen varias notas al pie de página que otorgan información útil de fuentes menos tradicionales. Para las referencias a funciones de MATLAB es recomendable revisar la ayuda² que también está disponible desde el software de escritorio. Los códigos de MATLAB son de referencia y las clases de laboratorio profundizará el contenido de la cátedra.

¹<https://ocw.mit.edu/courses/res-6-007-signals-and-systems-spring-2011/>

²<https://la.mathworks.com/help/matlab/>

PARTE I

Análisis en el dominio del tiempo

CAPÍTULO 2

Señales discretas y muestreo

2.1. Señales en tiempo discreto

A diferencia de una señal en tiempo continuo $x(t)$, en tiempo discreto existen intervalos, en general igualmente espaciados, llamados muestras $x[n]$. Cada una de estas muestras representan el valor de la señal en el instante de tiempo donde fue capturada y la información entre estos intervalos no puede ser recuperada. Usualmente esta pérdida de información, como también la diferencia entre las dos señales, se representa utilizando graficas continuas y discretas (ver Figura 2.1).

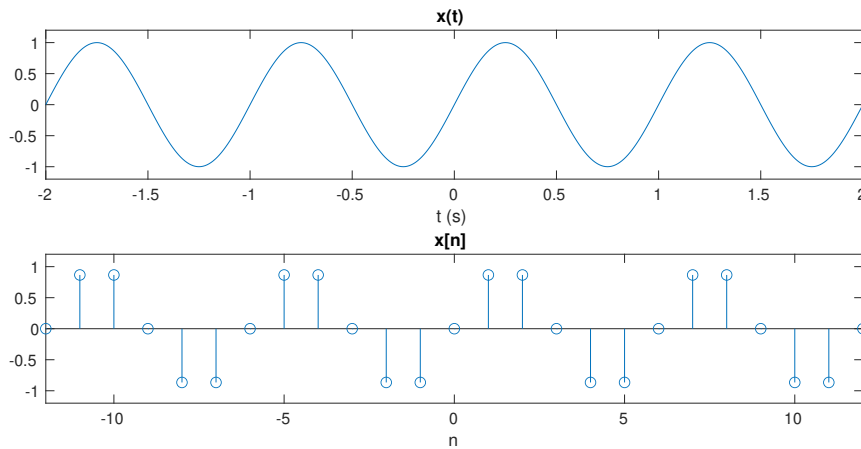


Figura 2.1: Señal continua $x(t)$ y discreta $x[n]$.

Así, las señales discretas están representadas en el tiempo por el índice n de cada una de sus muestras $x = [0, 0,87, 0,87, 0, -0,87, -0,87, 0, \dots]$.

2.2. Señales exponenciales

Las secuencias exponenciales juegan un papel crucial en el análisis de señales, ya que forman una base con la cual es posible generar muchas otras. La señal

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \quad (2.1)$$

2.3. Señales impulso y escalón unitarios

se relaciona con la fórmula de Euler¹

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n), \quad (2.2)$$

lo cual descompone la exponencial en una señal cosenoidal real y una senoidal de variable compleja. El valor de ω_0 se conoce como la frecuencia fundamental de la exponencial compleja (y de sus componentes coseno y seno)

$$\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}, \quad (2.3)$$

donde m es cualquier entero positivo mayor a cero. De esta relación se define una señal discreta periódica, donde N corresponde al periodo de la señal o la cantidad de muestras que se repiten (en la Figura 2.1 $N = 6$, por ejemplo, desde $n = 0$ a $n = N - 1$). Cualquier señal puede considerarse periódica si cumple la relación

$$x[n] = x[n + N]. \quad (2.4)$$

2.3. Señales impulso y escalón unitarios

Otro par de funciones muy útiles para el análisis de señales son el impulso unitario $\delta[n]$ y el escalón unitario $u[n]$. La primera posee valor uno para $n = 0$ y cero en el resto de las muestras, mientras que la segunda posee valor uno para $n \geq 0$ y cero para $n < 0$ (ver Figura 2.2).

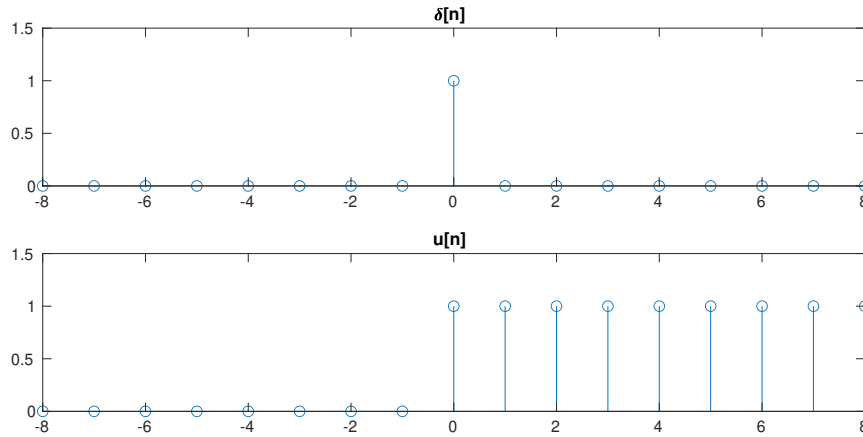


Figura 2.2: Señales impulso unitario $\delta[n]$ y escalón unitario $u[n]$.

2.4. Señales discretas de largo finito

A diferencia de las señales del apartado anterior, en general los datos provienen de un archivo **wav**. Este tipo de archivos contiene los datos de las muestras e información extra o metadatos. Los valores del eje x se asignan creando un arreglo que permite graficar las señales. Para esto es común ubicar

¹<https://mathworld.wolfram.com/EulerFormula.html>

2.4. Señales discretas de largo finito

la señal adquirida $x[n]$ en el origen. Para el análisis, se debe pensar en una señal $\tilde{x}[n]$ como la versión periódica con N igual al largo de la señal $x[n]$ que proviene del archivo `wav`.

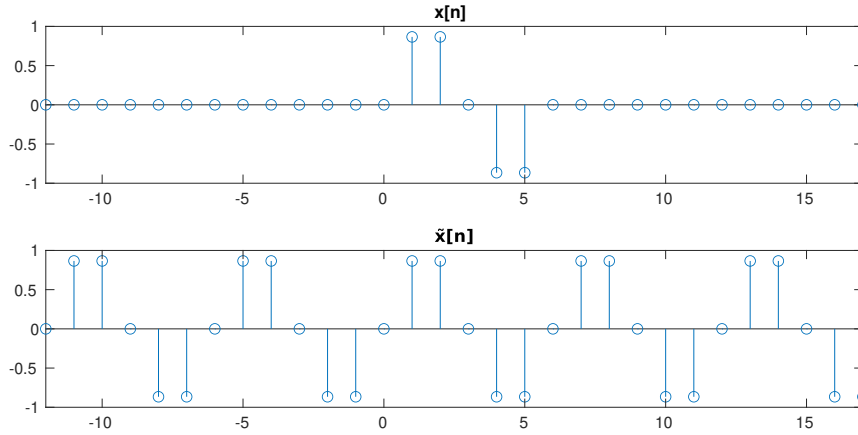


Figura 2.3: Señal $x[n]$ y su análoga periódica $\tilde{x}[n]$.

En MATLAB los archivos `wav` se leen por defecto en formato `double` normalizados entre -1 y 1. El detalle de los rangos de valores posibles depende del `dataType` y su detalle se puede encontrar en la documentación². Algunos resultados nos entregaran arreglos de números complejos. Para trabajar con estos resultados se utilizan las funciones: `abs()` que entrega el valor absoluto o magnitud, `angle()` que entrega el ángulo o fase en radianes, `real()` que entrega la parte real e `imag()` que entrega la parte imaginaria (ver Figura 2.4 y `codigo2_1.m`).

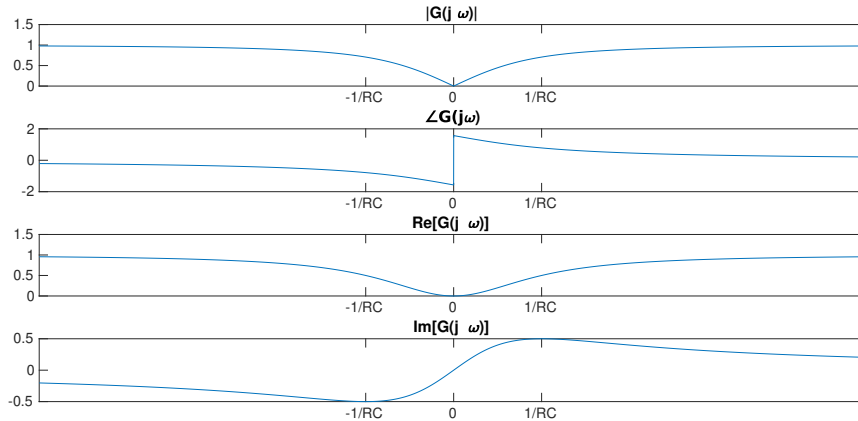


Figura 2.4: Magnitud, fase, parte real e imaginaria de una señal compleja.

²<https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/audioread.html>

codigo2_1.m

```
1 w = -15*pi:0.01:15*pi;
2 RC = 0.1;
3 G = (1i*w*RC)./(1+1i*w*RC);
4 figure
5 subplot(4,1,1)
6 plot(w,abs(G))
7 ylim([0 1.5])
8 xlim([-15*pi 15*pi])
9 xticks([-1/RC 0 1/RC])
10 xticklabels({'-1/RC','0','1/RC'})
11 title('|G(jw)|')
12 subplot(4,1,2)
13 plot(w,angle(G))
14 xlim([-15*pi 15*pi])
15 xticks([-1/RC 0 1/RC])
16 xticklabels({'-1/RC','0','1/RC'})
17 title('aG(jw)')
18 subplot(4,1,3)
19 plot(w,real(G))
20 ylim([0 1.5])
21 xlim([-15*pi 15*pi])
22 xticks([-1/RC 0 1/RC])
23 xticklabels({'-1/RC','0','1/RC'})
24 title('Re[G(jw)]')
25 subplot(4,1,4)
26 plot(w,imag(G))
27 xlim([-15*pi 15*pi])
28 xticks([-1/RC 0 1/RC])
29 xticklabels({'-1/RC','0','1/RC'})
30 title('Im[G(jw)]')
```

2.5. Operaciones sobre señales finitas

Muchas veces se necesita información respecto de la magnitud de una señal sobre un periodo determinado. Para una señal senoidal sus valores oscilan entre 1 y -1 (si la leemos de un archivo **wav**) y es más complicado aun si la señal es de variable compleja. Tres de los valores más comunes para representar una señal real discreta $x[n]$ son el valor peak, peak-to-peak y root mean square:

$$peak(x[n]) = \max(x[n]), \quad (2.5)$$

$$peak - to - peak(x[n]) = \max(x[n]) + |\min(x[n])|, \quad (2.6)$$

$$rms(x[n]) = \sqrt{\frac{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2}{N}}. \quad (2.7)$$

2.6. Operaciones sobre la variable temporal

Es común expresar estos valores en decibels, pero dado que no es una expresión del todo estandarizada, utilizaremos la siguiente formula:

$$dB = 10 \log_{10}(v). \quad (2.8)$$

donde v representa el valor de una muestra (o una serie de muestras) o los valores peak, peak-to-peak y root mean square. Notar que en esta escala $v = 1$ corresponde a 0 dB, no existe resultado para $v = 0$ y valores de $v < 0$ da un resultado en variable compleja.

2.6. Operaciones sobre la variable temporal

Dos operaciones bastante comunes en el análisis de señales son la inversión de la variable temporal y el desplazamiento, que matemáticamente las representamos por $x[-n]$ y $x[n + n_0]$ respectivamente. En la Figura 2.5 se aprecia una señal original $x[n]$ (con el valor correspondiente a $n = 0$ destacado en rojo) y su posición luego de la inversión temporal $x[-n]$, su posición luego de un retraso de dos muestras $x[n - 2]$ y su posición luego un adelanto de dos muestras $x[n + 2]$. En MATLAB se puede utilizar la versión periódica $\tilde{x}[n]$ de $x[n]$ y utilizar la función `circshift()`, notando que el retraso se especifica con un valor positivo y el adelanto con uno negativo.

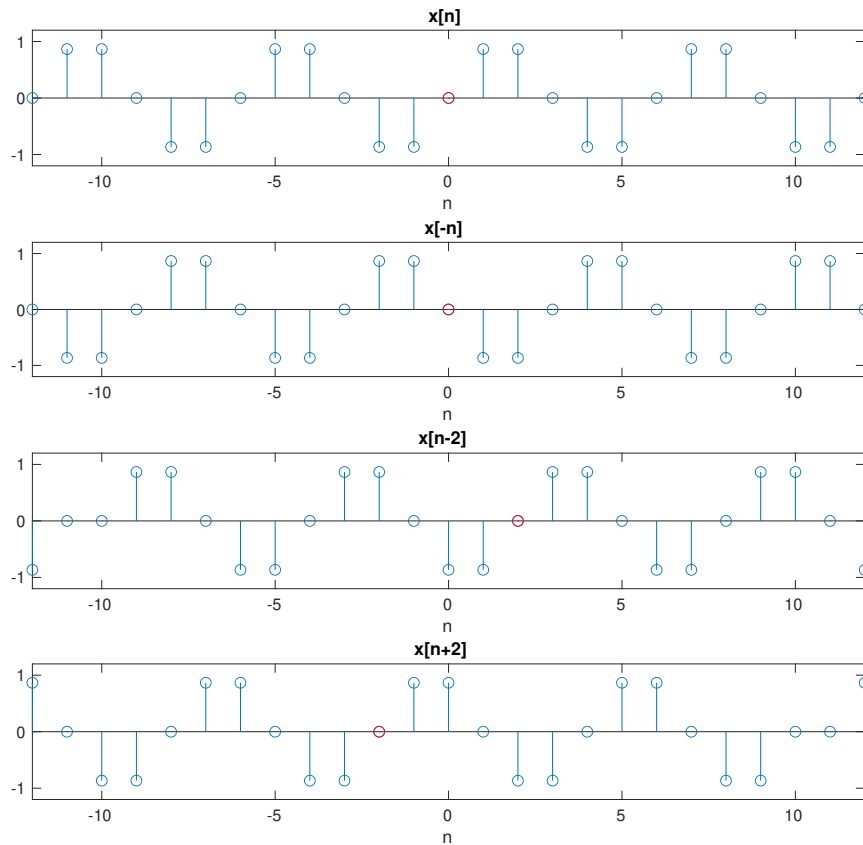


Figura 2.5: Inversión, retraso y adelantamiento de una señal $x[n]$.

2.7. Muestreo de señales continuas

El muestreo de una señal continua se representa matemáticamente con la relación:

$$x[n] = x(nT), \quad (2.9)$$

donde T se conoce como el periodo de muestreo en segundos. Es común expresar este valor como la frecuencia de muestreo, su inverso $f_s = 1/T$ en Hz. En la Figura 2.6, se aprecia una senoidal $x(t)$ continua, cuyo periodo fundamental corresponde a 1 ms. Si la frecuencia de muestreo con la que se obtuvo $x[n]$ es $f_s = 6000$, se puede obtener los valores del eje x para la señal muestreada, la cual tiene el mismo periodo fundamental de 1 ms. Para esta señal su frecuencia fundamental (el inverso del periodo fundamental) en Hz es 1000 (no se debe confundir con la frecuencia de muestreo).

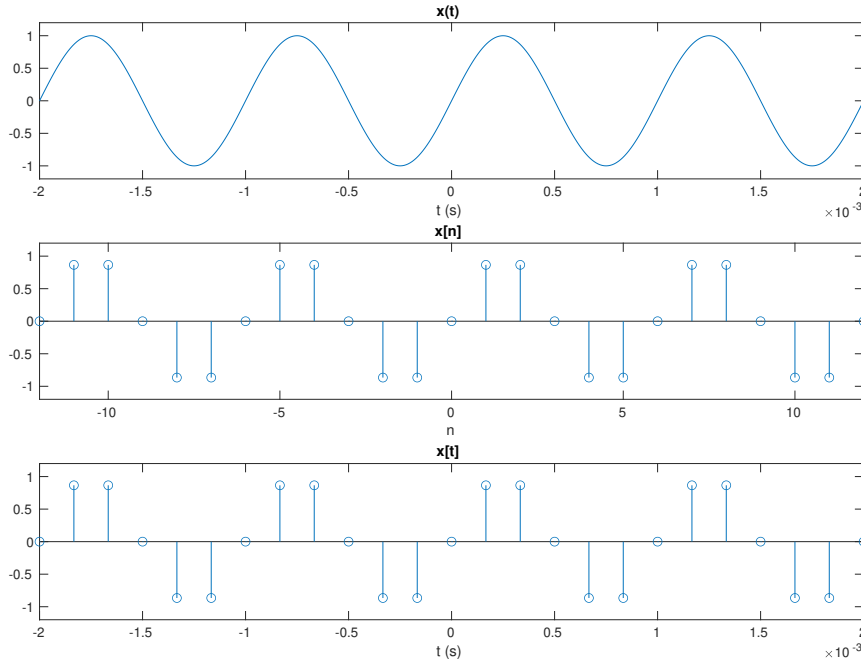


Figura 2.6: Muestreo de una señal $x(nT)$.

2.8. Teorema del muestreo

Existe una relación entre la frecuencia fundamental de una señal continua y la frecuencia de muestreo con la cual se debe adquirir una señal. Esta relación, conocida como el teorema del muestreo, indica que la frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima f_m de los componentes de la señal (en el capítulo 4 se explican los componentes de una señal). Descrito de forma matemática, $2f_m$ se conoce como la frecuencia de Nyquist:

$$f_s \geq 2f_m. \quad (2.10)$$

2.8. Teorema del muestreo

En la Figura 2.7 se aprecia el muestreo de una señal con frecuencia fundamental 4000 Hz y la misma frecuencia de muestreo $f_s = 6000$. Se puede observar que la señal muestreada $x[n]$ no es la señal continua, su periodo es 0.5 ms (2000 Hz) y su fase es distinta. Esta señal que no corresponde a su versión en tiempo continuo $x(t)$ se conoce como señal alias (el fenómeno completo se conoce como aliasing).

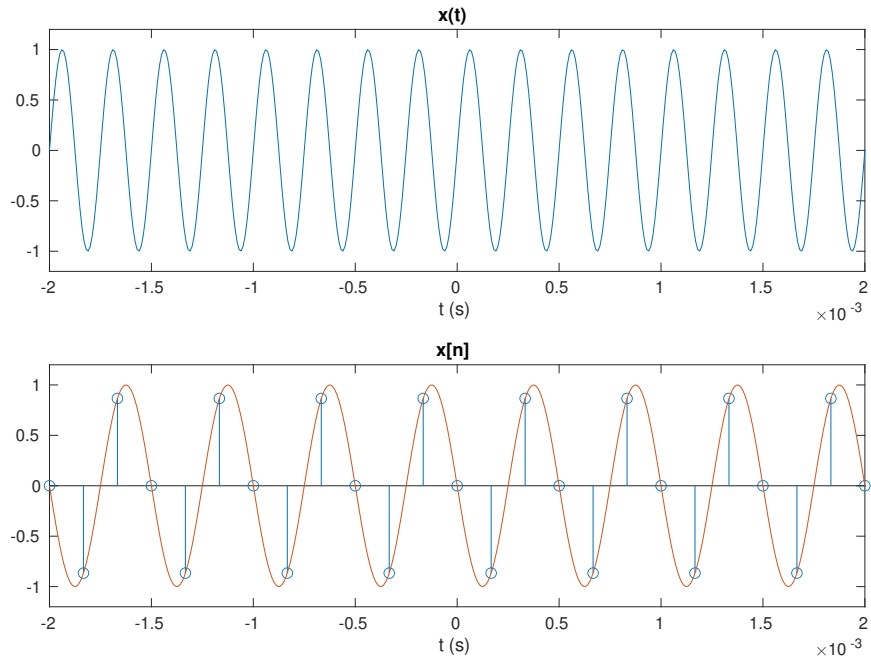


Figura 2.7: Muestreo de una señal $x(nT)$ con aliasing.

CAPÍTULO 3

Sistemas LIT y convolución

3.1. Sistemas LIT

Definiremos un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo (sistema LIT) como una caja negra que transforma las muestras de una señal de entrada $x[n]$ en muestras de una señal de salida $y[n]$ (pp. 38). Usualmente utilizamos diagramas de bloques para definir un sistema como en la Figura 3.1.



Figura 3.1: Sistema lineal e invariante en el tiempo LIT.

Un ejemplo simple de un sistema LTI es un amplificador de constante $\alpha = 2$, donde la salida es $y[n] = \alpha x[n]$ (ver Figura 3.2).

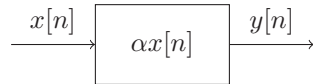
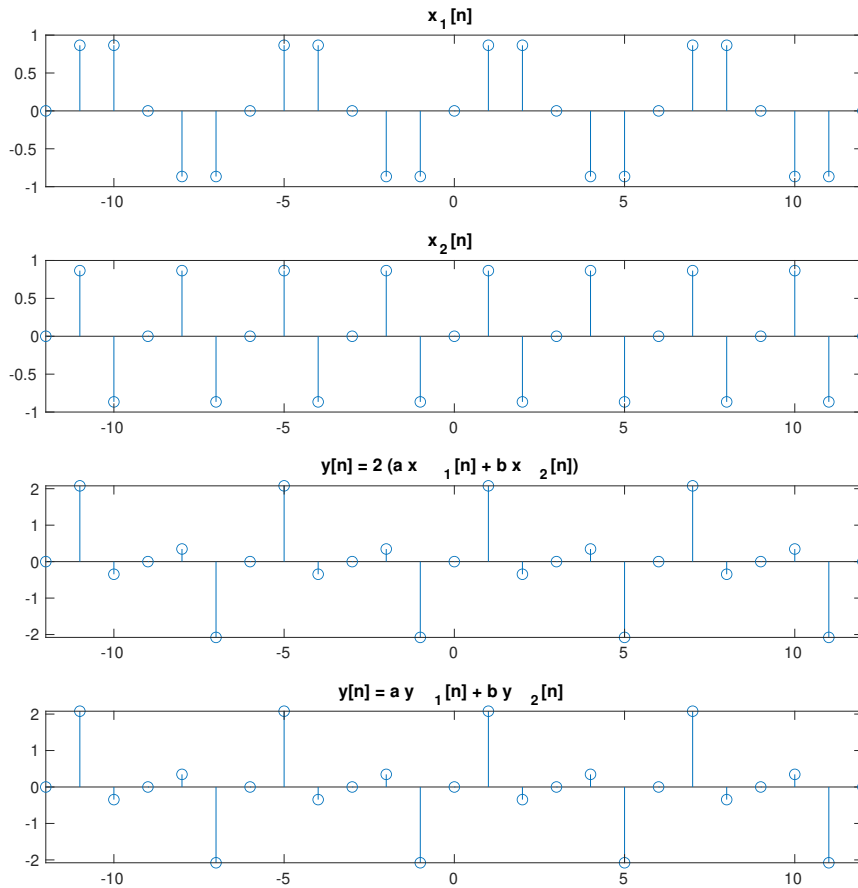


Figura 3.2: Sistema LIT $y[n] = \alpha x[n]$.

Así, la salida será cada una de las muestras multiplicadas por α . Este sistema nos permite analizar las dos propiedades más importantes y que le dan su nombre: la linealidad y la invariancia en el tiempo. La linealidad de un sistema se determina por dos condiciones:

1. La respuesta para la entrada $x_1[n] + x_2[n]$ es $y_1[n] + y_2[n]$.
2. La respuesta a la entrada $\alpha x[n]$ es $\alpha y[n]$.

En palabras simples, si sumo dos señales antes de ingresarla a un sistema LIT su salida debe ser igual a la suma de las salidas de cada una de las señales si entraran por separado al sistema y si multiplico una señal por una constante antes de ingresarla a un sistema LIT su salida debe ser igual a la salida de la señal al entrar al sistema multiplicado por la misma constante. Para dos constantes $a = 0,5$ y $b = 0,7$ podemos observar la linealidad del sistema $y[n] = \alpha x[n]$ en la Figura 3.3.

Figura 3.3: Linealidad del sistema $y[n] = \alpha x[n]$.

Para la invariancia en el tiempo de un sistema podemos observar que si $y[n]$ es la salida de un sistema cuando $x[n]$ es la entrada, entonces $y[n - n_0]$ es la salida cuando se aplica un retraso de n_0 muestras en la entrada $x[n - n_0]$. En la Figura 3.4 podemos ver una señal $x[n]$ y su retraso en dos muestras $x[n - 2]$, la salida cuando la entrada es la señal retrasada y la salida retrasada dos muestras $y[n - 2]$ cuando la entrada no esta retrasada.

3.2. Respuesta al impulso

Una relación extremadamente útil de los sistemas LIT es la posibilidad de obtener la salida $y[n]$ de un sistema a partir de una señal que se denomina la respuesta al impulso $h[n]$ (ver Figura 3.5). En términos generales, $h[n]$ corresponde a la salida del sistema cuando la entrada es una señal de impulso unitario $\delta[n]$. Una opción para obtener la respuesta al impulso al sistema es medir la salida (dependiendo del sistema podemos medir voltaje, presión, aceleración, etc.) luego de ingresar al sistema una señal de impulso unitario.

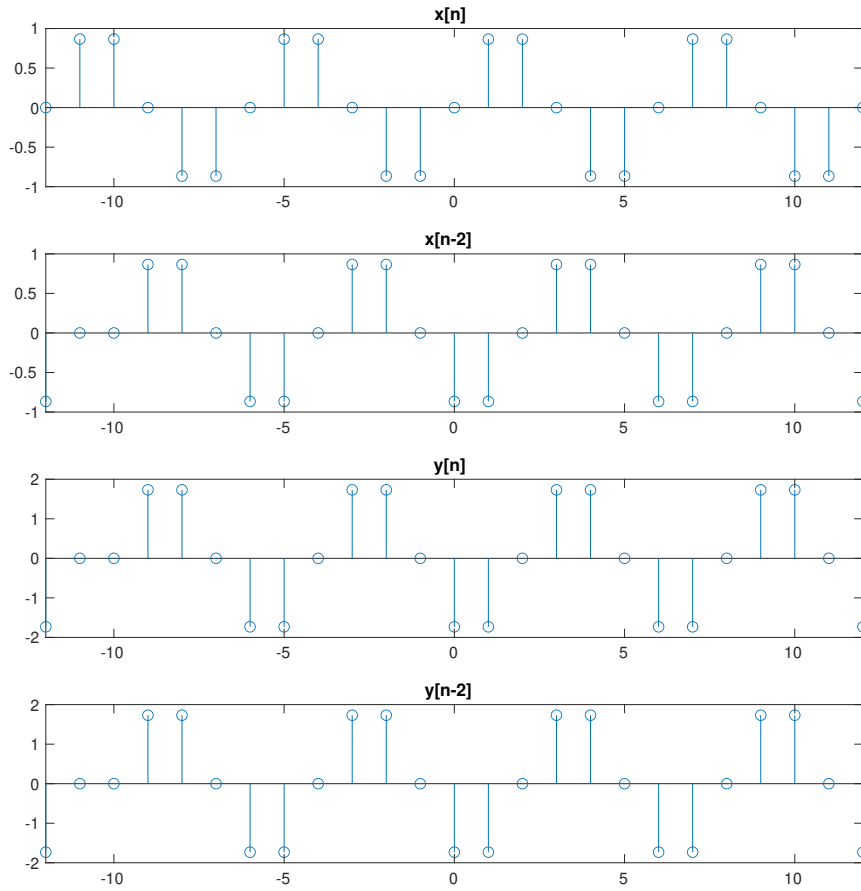


Figura 3.4: Invariancia en el tiempo del sistema $y[n] = \alpha x[n]$



Figura 3.5: Respuesta al impulso de un sistema LIT.

3.3. Suma de convolución

Para obtener la salida $y[n]$ de un sistema LTI a partir de su respuesta al impulso $h[n]$, utilizaremos una formula llamada la suma de convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k], \quad (3.1)$$

también descrita como $y[n] = x[n] * h[n]$. Veamos un ejemplo visual para dos señales $x[n]$ y $h[n]$ arbitrarias en la Figura 3.6. La sumatoria recorre los valores de las señales en los índices k , donde la señal $x[k]$ no se ve afectada por los valores del índice n . Por otra parte, al calcular los valores de $y[n]$, cada índice n actúa como un retardo (ver Figura 3.7) y la señal $h[n-k]$ se ve reflejada sobre el origen (valor negativo de k). Para valores de $n < 0$ y $n > 3$, el retardo de la

3.4. Suma de convolución circular

señal invertida $h[n - k]$ provoca que la sumatoria de la multiplicación de las señales sea nula y los valores de $y[n]$ sean cero.

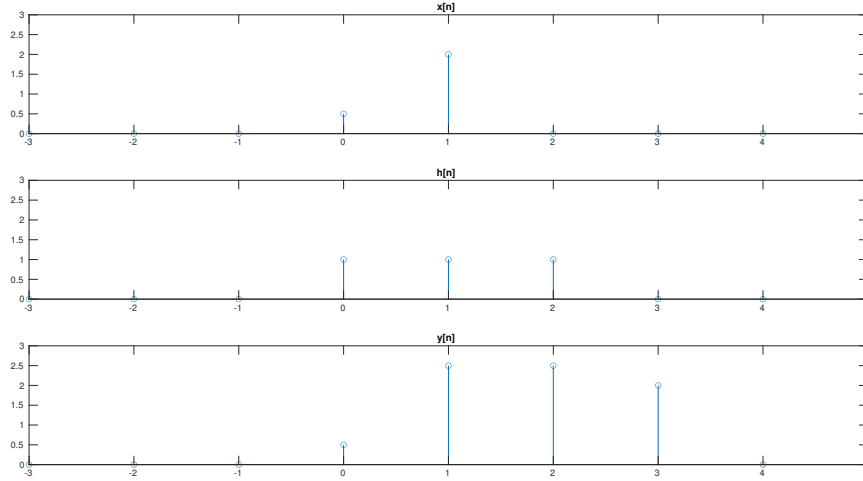


Figura 3.6: Señales de entrada $x[n]$, $h[n]$ y salida $y[n]$.

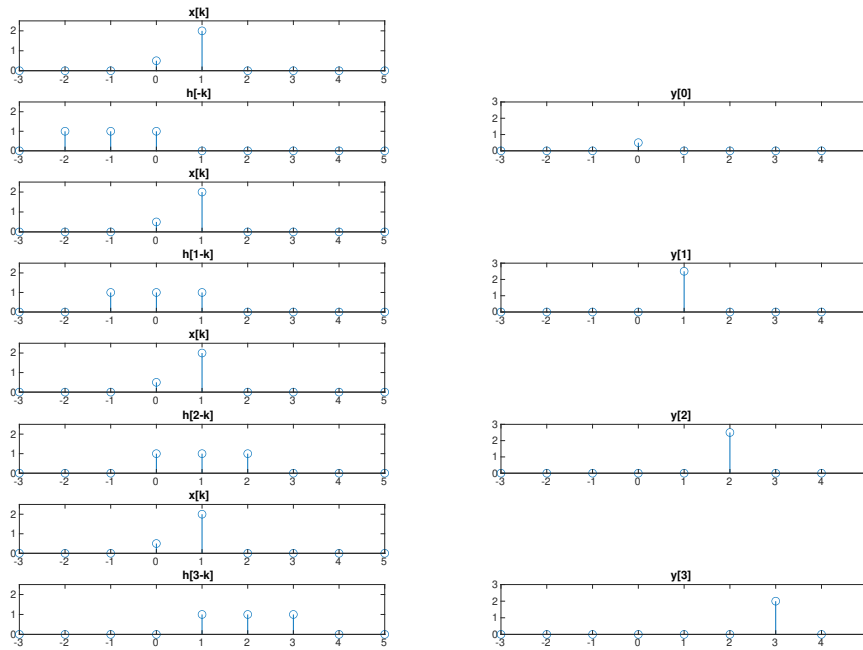


Figura 3.7: Pasos de la suma de convolución para $n = 0, \dots, 3$.

3.4. Suma de convolución circular

Dado que las señales no siempre tendrán valores cero antes y luego de la información almacenada en ellas, recurriremos a las señales periódicas para determinar la suma de convolución. Podemos apreciar el periodo $N_1 = 2$ para

3.4. Suma de convolución circular

$x[n]$ y $N_2 = 3$ para $h[n]$ del ejemplo anterior. En la Figura 3.3 podemos ver las versiones periódicas con $N = N_1 + N_2 - 1$.

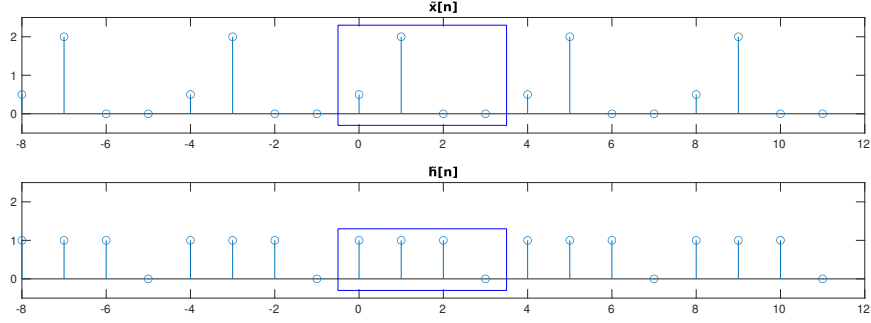


Figura 3.8: Señales periódicas $\tilde{x}[n]$ y $\tilde{h}[n]$.

Podemos ver la inversión en $h[n - k]$ (por el valor negativo de k) en la Figura 3.4. Además, podemos ver el primer desplazamiento para $n = 1$, que para señales periódicas se conoce como desplazamiento circular. La suma de convolución circular de N puntos, usualmente denominada $y[n] = x[n] \circledast h[n]$, se realiza dentro del periodo determinado anteriormente

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} x[k]h[n - k], \quad (3.2)$$

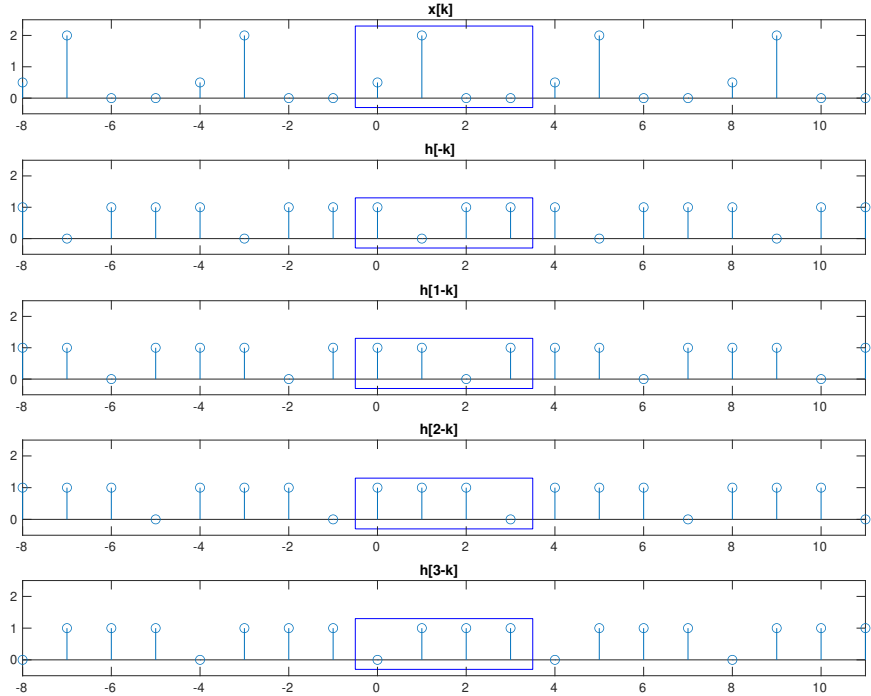


Figura 3.9: Suma de convolución circular de N puntos $y[n] = x[n] \circledast h[n]$.

3.5. Convolución circular mediante multiplicación de matrices

donde $\langle N \rangle$ indica que los valores de k corresponden a un periodo. En MATLAB podemos obtener el resultado con la función `conv(x,h)` (ver `codigo3_1.m`).

`codigo3_1.m`

```
1 x = [0.5 2];  
2 h = [1 1 1];  
3 y = conv(x,h);
```

3.5. Convolución circular mediante multiplicación de matrices

Otra forma de obtener el resultado de una convolución circular de N puntos es utilizar la multiplicación de matrices. Primero se genera una matriz de $N_1 + N_2 - 1 \times N_1$ que se multiplica por un vector columna con los valores de $x[n]$ de $N_1 \times 1$. El resultado es un vector columna $N_1 + N_2 - 1 \times 1$ con los valores de $y[n]$. La matriz se llena por columnas con los valores de $h[n]$ desplazándolo una fila por cada columna. Para el ejemplo de la Figura 3.6 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

PARTE II

Análisis en el dominio de la frecuencia

CAPÍTULO 4

Serie y transformada de Fourier discreta

4.1. Serie de Fourier discreta

La serie discreta de Fourier nos permite obtener un conjunto de coeficientes a_k con los cuales es posible descomponer una señal periódica en una sumatoria de exponenciales complejas (pp. 213). Los coeficientes de la serie discreta de Fourier a_k de una señal periódica discreta $x[n]$ se obtienen a partir de la siguiente formula:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad (4.1)$$

Una vez obtenidos los valores de a_k es posible reconstruir $x[n]$ a partir de la siguiente formula:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} . \quad (4.2)$$

En la Figura 4.1 se muestra un ejemplo para una onda cuadrada periódica $x[n]$ donde el rectángulo rojo marca un periodo de la señal.

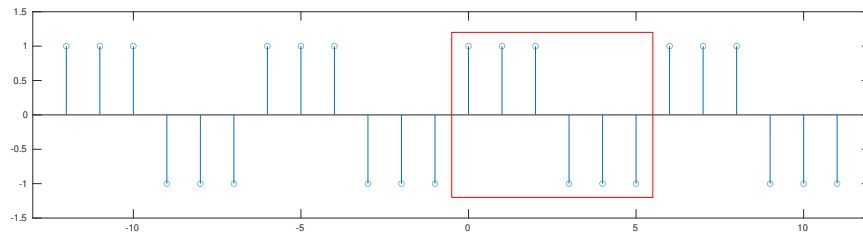


Figura 4.1: Señal de onda cuadrada periódica $x[n]$.

Se cumple la condición $x[n] = x[n + N]$ con periodo es $N = 6$, lo que permite obtener la misma cantidad de valores de $k = 0, \dots, N - 1$. Para obtener los valores de a_k se utilizan los índices $n = 0, \dots, N - 1$ de la secuencia y con estos valores se obtiene la señal reconstruida `xr` (ver `codigo4_1.m`).

codigo4_1.m

```

1 N = 6;
2 n = 0:N-1;
3 x = (mod(n,N) < N/2) + (mod(n,N) > (N/2)-1)*(-1);
4 xr = zeros(1,length(n));
5 for k = 0:N-1
6     ak = (1/N)*sum((x).*exp(-1i*k*((2*pi)/N)*n));
7     if abs(ak) < 0.005, ak = round(abs(ak),3); end
8     xr = xr + ak*exp(1i*k*((2*pi)/N)*n);
9 end

```

Se considera solo la parte real para los cálculos ya que como podemos apreciar en la Figura 4.2 la parte imaginaria es nula.

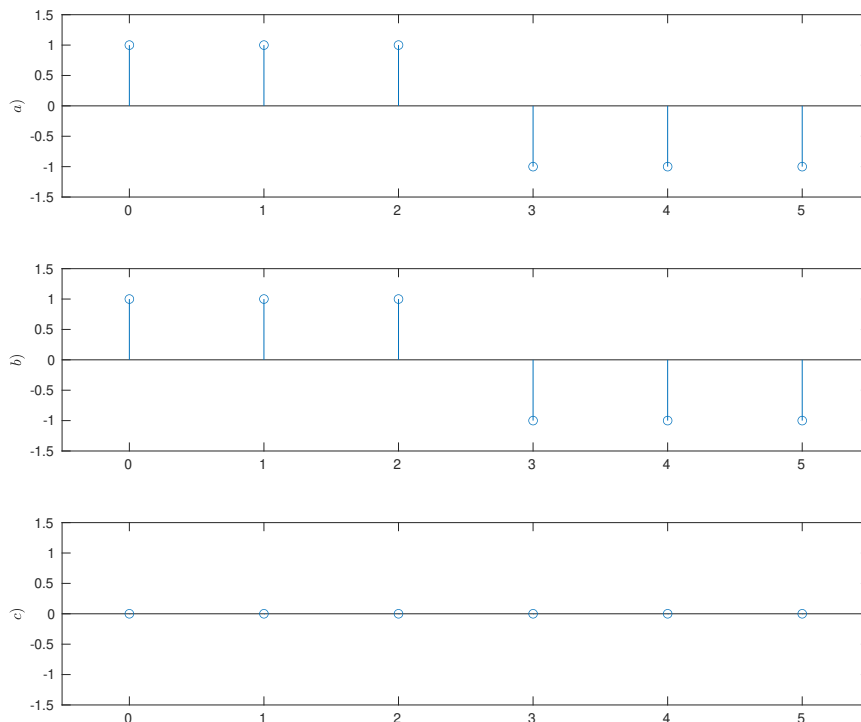


Figura 4.2: Señal de onda cuadrada original a) y reconstruida: parte real b) y parte imaginaria c).

Podemos apreciar en la Figura 4.3 que para $k = 0$ y los que resultan pares, los valores de a_k son nulos, lo que es consistente con la solución al problema en tiempo continuo¹. En tiempo discreto, la solución es exacta para un número finito $k = N$ de valores de a_k . Esta descomposición es válida para cualquier señal discreta periódica.

¹<https://mathworld.wolfram.com/FourierSeriesSquareWave.html>

4.2. Transformada de Fourier discreta

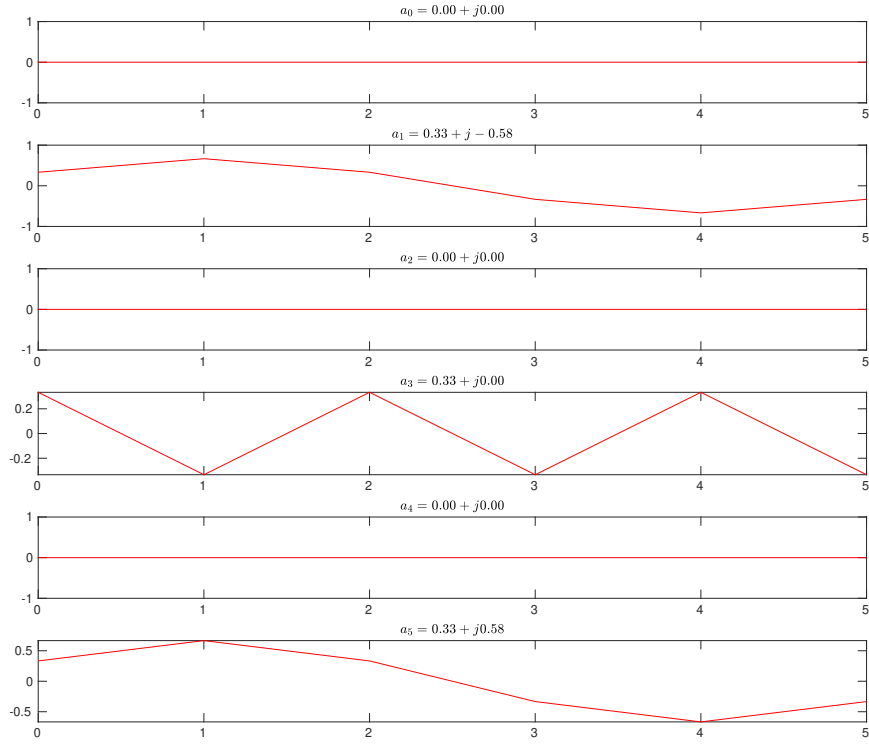


Figura 4.3: Coeficientes de la serie de Fourier de $x[n]$ (parte real).

4.2. Transformada de Fourier discreta

La transformada de Fourier discreta $X(e^{j\omega})$ de una señal periódica $x[n]$ corresponde a una nueva señal (de valores complejos), donde hemos reemplazado el dominio del tiempo por el dominio de la frecuencia (pp. 369). Podemos obtener los valores de $X(e^{j\omega})$ utilizando los valores de a_k de la serie de Fourier a partir de la siguiente formula:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right), \quad (4.3)$$

donde ω se conoce como la frecuencia angular. Para hacer sentido de la ecuación 4.3, vemos que el valor de la función δ solo será distinto de cero cuando se cumple

$$\omega = \frac{2\pi k}{N}. \quad (4.4)$$

Como el análisis de la serie de Fourier discreta de una señal periódica $x[n]$ resulto en un numero finito $k = 0, \dots, N-1$ de coeficientes a_k , tendremos de igual forma N valores de ω que obtendremos con la ecuación 4.4 y finitos valores de k (a diferencia de lo indicado en la ecuación 4.3). Esto se expresa de manera general con las ecuaciones ($X(e^{j\omega}) = X[k]$)

4.2. Transformada de Fourier discreta

$$X[k] = \sum_{k=\langle N \rangle} 2\pi a_k, \quad (4.5a)$$

$$\omega[k] = \frac{2\pi k}{N}. \quad (4.5b)$$

Como ya se obtuvieron los coeficientes a_k para la onda cuadrada periódica $x[n]$, analicemos la señal resultante de su transformada de Fourier (ver `codigo4.2.m`).

`codigo4.2.m`

```
1 N = 6;  
2 n = 0:N-1;  
3 x = (mod(n,N) < N/2) + (mod(n,N) > (N/2)-1)*(-1);  
4 X = zeros(1,length(n));  
5 w = (2*pi*(0:N-1))/N;  
6 for k = 0:N-1  
7     ak = (1/N)*sum((x).*exp(-1i*k*((2*pi)/N)*n));  
8     if abs(ak) < 0.005, ak = round(abs(ak),3); end  
9     X(1,k+1) = 2*pi*ak;  
10 end
```

Podemos ver que los valores nulos de a_k vuelven cero los resultados de la transformada. Notar que el eje x en las gráficas ya no corresponde a los índices de la señal $x[n]$, si no que a los nuevos valores de frecuencia de la señal.

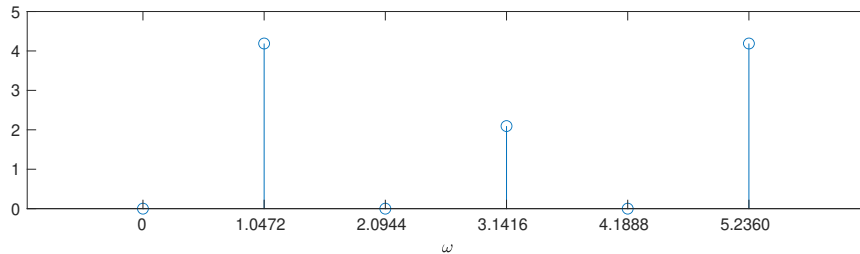


Figura 4.4: Transformada de Fourier de la señal $x[n]$ (valor absoluto).

Al realizar análisis en el dominio de la frecuencia mediante transformadas de Fourier, debemos recordar que estamos trabajando con señales periódicas (ver Figura 4.1). Así, el resultado de la **transformada de Fourier también es periódica**, y su magnitud es simétrica en torno al origen. Podemos ver una gráfica de la Transformada de Fourier de la señal $x[n]$ en la Figura 4.5. El recuadro rojo indica los primeros $0, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$ valores ($\lfloor x \rfloor$ indica redondeo hacia el entero inferior). Los valores del recuadro azul de la derecha, $\lfloor N/2 \rfloor + 1, \dots, N - 1$ corresponden a la simetría hacia los valores de ω negativos, los cuales no se consideran válidos. La señal resultante de la transformada de Fourier corresponde al recuadro verde con valores $0, \dots, N - 1$ y consideramos como parte válida el recuadro rojo. La transformada inversa de Fourier discreta, corresponde a la reconstrucción realizada mediante la ecuación 4.1, recordando que según la ecuación 4.3 los valores de $X(e^{j\omega})$ y a_k difieren en un factor 2π .

4.3. Análisis en el dominio de la frecuencia

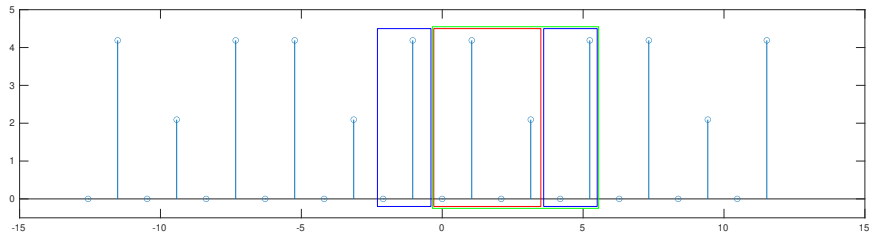


Figura 4.5: Transformada de Fourier de la señal $x[n]$ extendida (valor absoluto).

4.3. Análisis en el dominio de la frecuencia

Para secuencias de largo finito, vamos a considerar el valor de N como la cantidad de muestras de la señal, es decir es periódica sobre su largo completo. Es común escalar el eje x de frecuencias en Hz, para lo cual se utiliza la relación $\omega = 2\pi f$. Utilizando la frecuencia de muestreo f_s , la ecuación 4.5b en

$$f[k] = \frac{k f_s}{N}. \quad (4.6)$$

Los resultados de la transformada de Fourier se deben escalar por un factor $2/N$ para poder graficar su magnitud. Esto es debido a que la magnitud de la transformada de Fourier es directamente proporcional a N y la simetría sobre el origen divide la energía de la señal en dos partes iguales. Para una frecuencia de 1000 Hz muestreada con $f_s = 44100$, se puede apreciar la transformada de Fourier para $N = 1000$, el escalamiento en frecuencia y magnitud (en decibels) y la fase en la Figura 4.6. El detalle del cálculo se muestra en el código `codigo4_3.m`.

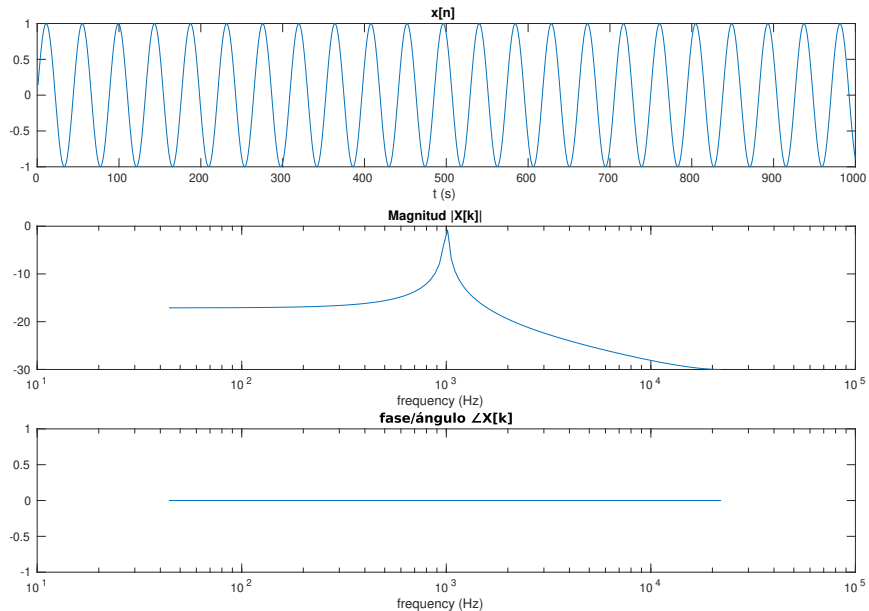


Figura 4.6: Señal senoidal $x[n]$ y la magnitud y fase de $X[k]$.

codigo4_3.m

```

1 fs = 44100;
2 f0 = 1000;
3 t = (1:1000)*(1/fs);
4 x = sin(2*pi*f0*t);
5 N = length(x);
6 X = fft(x);
7 X = 2*abs(X(1:(N/2)+1)/N);
8 f = ((0:(N/2))*fs)/N;

```

4.4. Transformada rápida de Fourier

Para los cálculos anteriores de la transformada de Fourier discreta, se realizaron k repeticiones ($k = N$ coeficientes) que deben realizar N operaciones (ver sumatoria en ecuación 4.1). Esto corresponde a una complejidad computacional $\mathcal{O}(N^2)$. Existe una variedad de algoritmos de tipo radix-2 que se conoce como la transformada rápida de Fourier (o FFT por sus siglas en ingles) que permiten reducir la cantidad de sumas y multiplicaciones complejas. Se define una ecuación más general para la transformada de Fourier

$$X[k] = \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] W_N^{nk}, \quad (4.7)$$

donde $W_N = e^{-j2\pi/N}$. La señal $x[n]$ se puede dividir en sus índices pares $x_1[2n]$ e impares $x_2[2n+1]$ y utilizando la periodicidad de las exponenciales complejas se tienen las transformaciones $W_N^{2nk} = W_{N/2}^{kn}$ y $W_N^{(2n+1)k} = W_N^k W_{N/2}^{nk}$. Esto nos limita a secuencias finitas de largos 2^m con $m > 0$. Finalmente, la transformada de Fourier discreta se puede expresar como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n] W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n] W_{N/2}^{kn}. \quad (4.8)$$

Hasta el momento tenemos la misma cantidad de sumas y multiplicaciones complejas, la verdadera reducción se logra al aplicar el mismo criterio de separación de índices pares e impares a cada una de las señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$. Este proceso se llama decimación y se puede realizar m veces. Veamos un ejemplo para la onda cuadrada de periodo $N = 4$ de la Figura 4.7

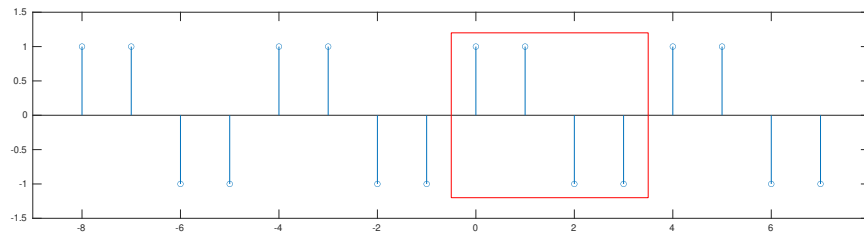


Figura 4.7: Señal cuadrada periódica $x[n]$.

La secuencia $x = [1, 1, -1, -1]$ de largo $N = 4$ se debe separar en índices pares e impares de largo $N/2 = 2$ y estos a su vez en índices pares e impares

4.4. Transformada rápida de Fourier

de largo $N/4 = 1$. Este proceso se generaliza con una técnica conocida como bit-reverse, donde los índices de la secuencia original n se transforman a bits se invierten de derecha a izquierda y luego se ordenan de mayor a menor para obtener los índices de la señal (ver Cuadro 4.1).

$x[n]$	n	bits	bit reversed	n reversed	orden
1	0	000	000	0	1
1	1	001	100	4	-1
-1	2	010	010	2	1
-1	3	011	110	6	-1

Cuadro 4.1: Resultados del ordenamiento bit reverse.

Los cálculos mediante la ecuación 4.8 se representan utilizando un gráfico de mariposa donde las flechas indican un numero a multiplicar y los nodos indican suma. En la Figura 4.8 se aprecia el cálculo de la primera etapa, es decir las dos transformadas rápidas de Fourier de largo $N/2 = 2$ y en la ecuación 4.9 el detalle del cálculo.

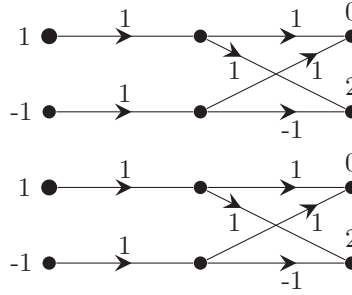


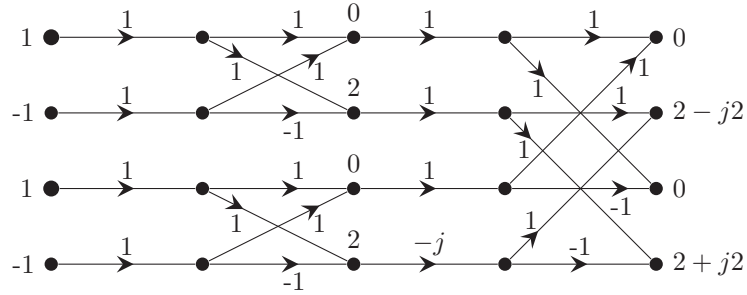
Figura 4.8: Diagrama de las 2 FFT de largo $N/2 = 2$.

$$\begin{aligned} X[0] &= 1W_1^0 + W_2^0 \{(-1)W_1^0\} = 0 \\ X[1] &= 1W_1^0 + W_2^1 \{(-1)W_1^1\} = 2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

La segunda parte del cálculo (ver ecuación 4.10) incluye los resultados de la FFT completa. En la Figura 4.9 se aprecia que el cálculo de la etapa anterior (FFT de largo $N/2 = 2$) está contenido dentro del diagrama de mariposa de la FFT completa de largo $N = 4$.

$$\begin{aligned} X[0] &= 1W_2^0 + (-1)W_2^0 + W_4^0 \{1W_2^0 + (-1)W_2^0\} = 0 \\ X[1] &= 1W_2^0 + (-1)W_2^1 + W_4^1 \{1W_2^2 + (-1)W_2^3\} = 2 - j2 \\ X[2] &= 1W_2^0 + (-1)W_2^2 + W_4^2 \{1W_2^4 + (-1)W_2^6\} = 0 \\ X[3] &= 1W_2^0 + (-1)W_2^3 + W_4^3 \{1W_2^6 + (-1)W_2^9\} = 2 + j2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

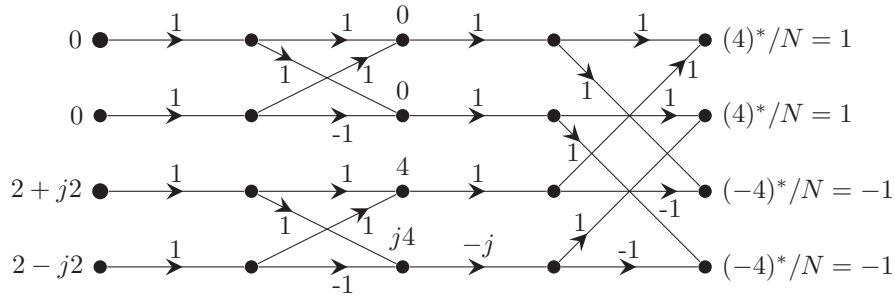
En general para una FFT se realizan m etapas de cálculo, cada una con N operaciones, lo que resulta en una complejidad computacional de $\mathcal{O}(N \log_2(N))$.


 Figura 4.9: Diagrama de la FFT de largo completo $N = 4$.

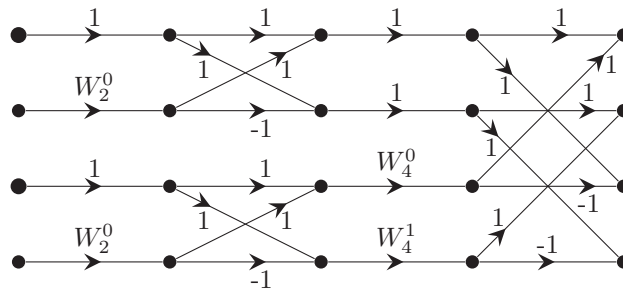
La FFT inversa (IFFT) se obtiene siguiendo los siguientes pasos:

1. Obtener el complejo conjugado $X^*[n]$ de $X[n]$.
2. Calcular la FFT de $X^*[n]$ incluyendo bit-reverse.
3. Calcular el complejo conjugado dividido por N del resultado.

Para el ejemplo anterior se obtiene con bit-reverse $X^*[n] = [0, 0, 2 + j2, 2 - j2]$ y el detalle del cálculo se encuentra en la Figura 4.10.


 Figura 4.10: Diagrama de la IFFT de largo completo $N = 4$.

El diagrama completo y simétrico de la FFT de largo completo $N = 4$ se muestra en la Figura 4.11.


 Figura 4.11: Diagrama general de la FFT de largo $N = 4$.

4.5. Propiedad de la convolución

A partir del análisis de Fourier, se puede utilizar la propiedad de la convolución para obtener la salida de sistemas LIT a partir de su respuesta al impulso

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y[k] = X[k]H[k] \quad (4.11)$$

donde $Y[k]$, $X[k]$ y $H[k]$ son las transformadas de Fourier de la señal de salida, la señal de entrada y la respuesta al impulso respectivamente. La ecuación 4.11 demuestra que la convolución entre dos señales equivale a la multiplicación elemento a elemento en el dominio de la frecuencia. Una relación muy útil es la función de respuesta en frecuencia

$$H[k] = \frac{Y[k]}{X[k]} \quad (4.12)$$

la que nos permite obtener la respuesta al impulso a partir de la transformada inversa de Fourier $h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} H[k]$ de la razón entre las transformadas de Fourier de las señales de entrada $X[k]$ y salida $Y[k]$.

CAPÍTULO 5

Filtros digitales

5.1. Sistemas de ecuaciones en diferencia

Existe un conjunto de sistemas basados en ecuaciones en diferencia de coeficientes constantes de orden N

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k], \quad (5.1)$$

los que de forma más general se describen por la ecuación

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}. \quad (5.2)$$

Estas ecuaciones aparecen del análisis discreto de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes. En general no se les da solución de la misma forma que se estudia en un curso de ecuaciones diferenciales, si no que se utilizan sus características para realizar un análisis o un diseño de un sistema en particular.

Un ejemplo de un sistema de primer orden es la ecuación

$$y[n] = b_0 x[n] + a_1 y[n-1], \quad (5.3)$$

donde la constante $a_0 = 1$ usualmente es omitida. Una representación alternativa son los diagramas de bloques donde el recuadro “D” representa un retardo de una muestra.

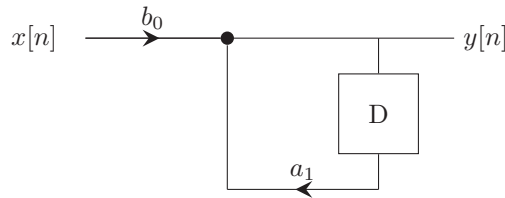


Figura 5.1: Diagrama de la ecuación 5.3

5.2. La transformada Z

El análisis en el dominio del tiempo de las ecuaciones en diferencia de coeficientes constantes no entrega mucha información respecto al comportamiento del sistema, por lo que a partir de la transformada Z $X(z)$, podremos estudiar su respuesta. Para las ecuaciones en diferencia de coeficientes constantes basta con un conjunto de propiedades para obtener $X(z)$ (ver Cuadro 5.1).

Propiedad	Señal	Transformada Z
Linealidad	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
Desplazamiento	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$

Cuadro 5.1: Propiedades de la transformada Z.

Así, la transformada Z de la ecuación 5.3

$$Y(z) = b_0 X(z) + a_1 z^{-1} Y(z), \quad (5.4)$$

se reescribe usualmente como

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}}. \quad (5.5)$$

La relación $Y(z)/X(z)$ se conoce como la función de transferencia $H(z)$ y corresponde a la transformada Z de la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema.

5.3. Diagrama de polos y ceros

Una vez obtenida la función de transferencia $H(z)$ de un sistema, es posible analizar su respuesta a partir de un diagrama de polos y ceros. Para esto, se debe expresar $H(z)$ como una relación de polinomios en z . Para la ecuación 5.5 se obtiene

$$H(z) = \frac{b_0 z}{z - a_1}, \quad (5.6)$$

luego de multiplicar el numerador y el denominador por z . Las raíces del polinomio del numerador se conocen como ceros y las raíces del polinomio del denominador se conocen como polos. En otras palabras, los ceros hacen $H(z)$ igual a cero y los polos la indeterminan. Como para todo polinomio, los polos y ceros pueden ser números complejos. Usualmente graficamos sus valores en el plano complejo con un círculo \circ para los ceros, una equis \times para los polos y un círculo unitario. Para el ejemplo, existe solo un cero en $z = 0$ y un polo en $z = a_1$. En la Figura 5.2 se muestra el diagrama de polos y ceros para $a_1 = 0,8$.

Existe una relación muy útil entre la transformada de Fourier discreta y la transformada Z. Al evaluar los valores de la transformada Z $H(z)$ en $z = e^{j\omega}$, se obtienen los valores de la transformada de Fourier discreta

$$H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega}). \quad (5.7)$$

Así, para el ejemplo de la ecuación 5.6 con $a_1 = 0,8$, la magnitud de su respuesta en frecuencia es simétrica entre los valores $-\pi$ y π (ver Figura 5.2) que corresponden a los ángulos del círculo unitario en el diagrama de polos y

ceros. Algo más difícil de ver, es que el cero corresponde a un mínimo en la frecuencia $\omega = \pm\pi$ y el polo al máximo en $\omega = 0$.

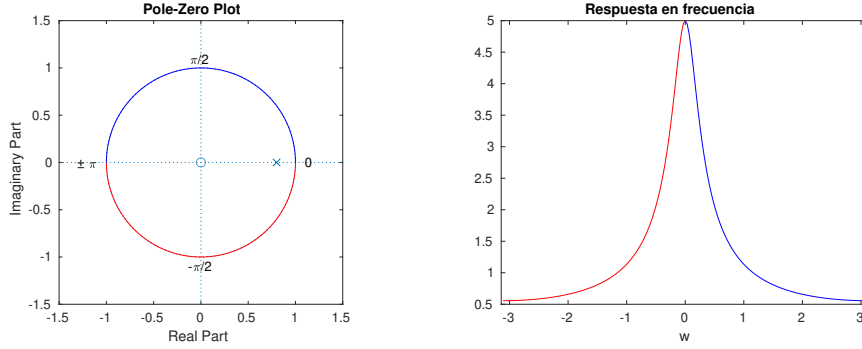


Figura 5.2: Diagrama de polos y ceros de la ecuación 5.6 y su respuesta en frecuencia

5.4. Sistemas FIR e IIR

A partir de la definición general de las ecuaciones en diferencia de coeficientes constantes, ecuación 5.2, podemos analizar el caso especial cuando $N = 0$

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k], \quad (5.8)$$

el cual se conoce como sistema de respuesta al impulso finita (FIR por sus siglas en ingles). Su nombre tiene relación con los valores de su respuesta al impulso $h[n]$, los cuales toman el valor b_n/a_0 para $0 \leq n \leq M$ y cero para el resto.

Por otro lado, un sistema descrito por la ecuación 5.1 con $N \geq 1$ se considera un sistema de respuesta al impulso infinita (IIR por sus siglas en ingles), lo cual es difícil de representar en un número acotado de muestras. Al igual que las condiciones iniciales para una ecuación diferencial, un sistema IIR requiere de condiciones auxiliares. La más común se conoce como reposo inicial y se describe como $x[n] = 0$ para $n < n_0$ entonces la salida será $y[n] = 0$ para $n < n_0$.

Ambos sistemas, de respuesta FIR descrito por la ecuación 5.8 y de respuesta IIR descrito por ecuación 5.1 con reposo inicial, describen un grupo de sistemas LIT denominados causales. Existen versiones no causales de ambas respuestas pero no serán parte de nuestro estudio. Una característica de los sistemas LIT causales FIR e IIR es la estabilidad, lo que quiere decir que para entradas acotadas tiene salidas acotadas. A partir del diagrama de polos y ceros, los sistemas LIT causales FIR e IIR son estables si todos sus polos se encuentran dentro del círculo unitario.

Una vez diseñado un sistema, ya sea FIR o IIR, su implementación se puede obtener mediante la convolución, el teorema de convolución o implementando directamente las ecuaciones en diferencia de coeficientes constantes.

5.5. Filtros digitales

El diseño de filtros digitales es un tema de estudio para un curso completo. Para un análisis simplificado, se definen los cuatro tipos de filtros más comunes y los conceptos que todos comparten.

Los primeros dos tipos de filtros corresponden a los denominados pasa-bajos y pasa-altos. Como indica su nombre, atenúan una banda de frecuencias sobre o bajo la denominada frecuencia de corte f_c . En la Figura 5.3 se muestra un filtro pasa bajo $H[k]$ con $f_c = 1000$ Hz sobre una señal de ruido blanco (energía constante en el dominio de la frecuencia) $X[k]$ y la salida del sistema $y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y[k] = X[k]H[k]$ al aplicar el filtro. Se define la banda de paso como los valores de frecuencia $f \leq f_c$ o la parte de la señal que no es atenuada por el filtro y el ancho de banda $\Delta f = f_c$. En la Figura 5.4 se muestra un filtro pasa alto con banda de paso $f_c \leq f \leq f_s/2$ y ancho de banda $\Delta f = f_s/2 - f_c$ con frecuencia de muestreo f_s .

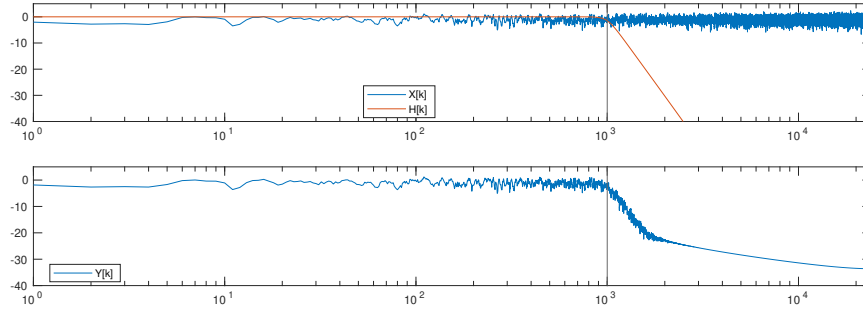


Figura 5.3: Filtro pasa bajo $f_c = 1000$ Hz.

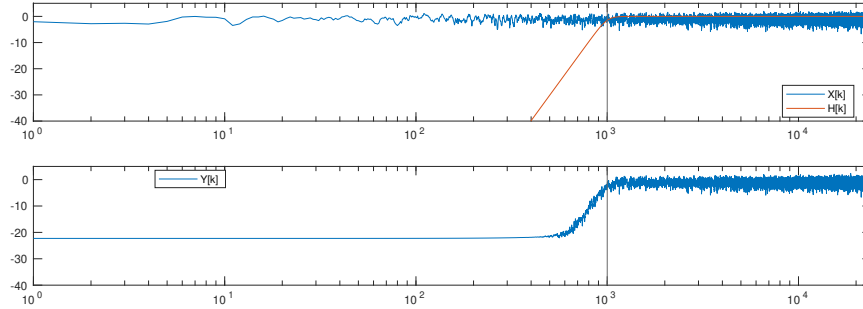


Figura 5.4: Filtro pasa alto $f_c = 1000$ Hz.

Los dos últimos tipos de filtros corresponden a los denominados pasa-banda y rechaza-banda. Como indica su nombre, atenúan una banda de frecuencias entre o alrededor de la frecuencia inferior f_l y la frecuencia superior f_u . En la Figura 5.5 se muestra un filtro pasa-banda $h[n]$ con $f_l = 100$ Hz y $f_u = 1000$ Hz sobre una señal de ruido blanco (energía constante en el dominio de la frecuencia) $x[n]$ y la salida del sistema $y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y[k] = X[k]H[k]$ al aplicar el filtro. Se define la banda de paso como los valores de frecuencia $f_l \leq f \leq f_u$ o la parte de la señal que no es atenuada por el filtro y el ancho de banda $\Delta f = f_u - f_l$. En la Figura 5.6 se muestra un filtro rechaza-banda, con

banda de paso $f \leq f_l \cup f_u \leq f \leq f_s/2$ y ancho de banda $\Delta f = f_l + (f_s/2 - f_u)$ con frecuencia de muestreo f_s .

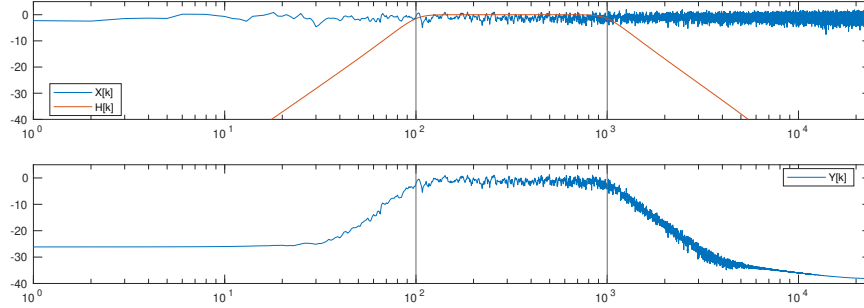


Figura 5.5: Filtro pasa banda $f_l = 100$ Hz $f_h = 1000$ Hz.

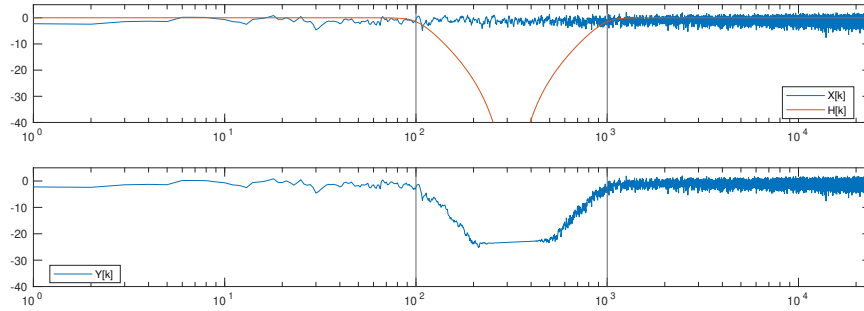


Figura 5.6: Filtro rechaza banda $f_l = 100$ Hz $f_h = 1000$ Hz.

La fase se un filtro se analiza de manera simple mediante señales de frecuencia única. En la Figura 5.7 se aprecia una señal de 478 Hz $x[n]$ (arriba) y su versión procesada $y[n]$ con el filtro pasa bajos con $f_c = 1000$ Hz (abajo) en la Figura 5.3. Se puede apreciar en rojo (imagen del medio) el desfase del filtro en la frecuencia correspondiente a $-\pi$.

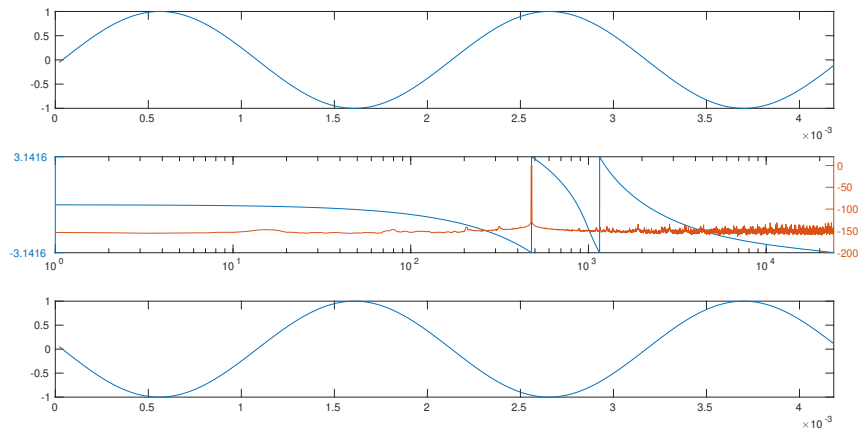


Figura 5.7: Fase de un filtro pasa bajo $f_c = 1000$ Hz.

En MATAB se puede obtener el diagrama de polos y ceros con la función `zplane()`, la respuesta en frecuencia del filtro con `freqz()` y la salida del sistema $y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y[k] = X[k]H[k]$ con la función `filter()` (ver `codigo5_1.m`).

`codigo5_1.m`

```
1 fs = 48000;
2 f0 = 500;
3 t = (1:fs)*(1/fs);
4 x = sin(2*pi*f0*t);
5 a = [1 -0.8];
6 b = 1;
7 zplane(b,a)
8 n = fs;
9 [h,f] = freqz(b,a,n,fs);
10 y = filter(b, a, x);
```

Apéndice

APÉNDICE A

Demostraciones

A.1. Suma de convolución

Una señal cualquiera $x[n]$ se puede expresar como una suma de impulsos unitarios desplazados en el tiempo

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k], \quad (\text{A.1})$$

como se puede apreciar en la Figura A.1.

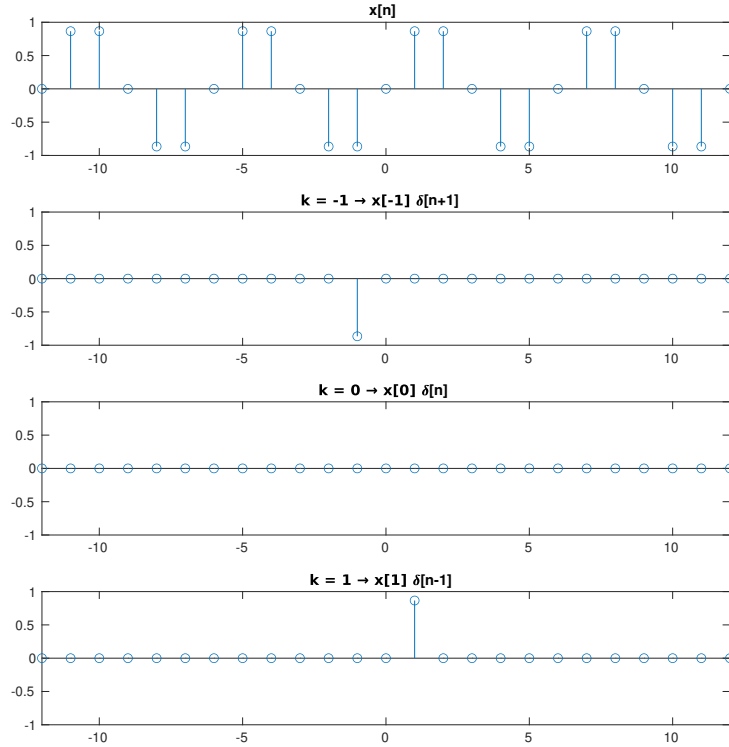


Figura A.1: Detalle de la sumatoria de $x[n]$.

Aquí, cada valor de n en $x[n]$ se compone de la suma de un valor, donde $n = k$ y el valor de $\delta[n - k]$ se multiplica por el valor de $x[k]$. Por otra parte,

tomamos la definición de la respuesta al impulso $h[n]$ de un sistema LTI como la salida del sistema cuando la entrada es la señal impulso unitario $\delta[n]$. Como el sistema es lineal e invariante en el tiempo podemos considerar cada una de las señales en la sumatoria de la ecuación A.1 como un impulso unitario desplazado y multiplicado por un escalar. Para un sistema LIT con entrada $\delta[n - n_0]$, la salida es $h[n - n_0]$. Para el mismo sistema con entrada $\delta[n]$ y salida $h[n]$, la multiplicación por un escalar $\alpha\delta[n]$ en la entrada debe ser igual a la salida de la entrada original multiplicado por el mismo escalar $\alpha h[n]$. Con esto, consideramos la entrada al sistema como una combinación lineal de impulsos unitarios multiplicados por un escalar correspondiente a cada una de las muestras de la señal de entrada. Su salida corresponde a la señal impulso unitario desplazada y multiplicada por el mismo escalar, correspondiente a cada una de las muestras de la señal de entrada (ver Figura A.2).

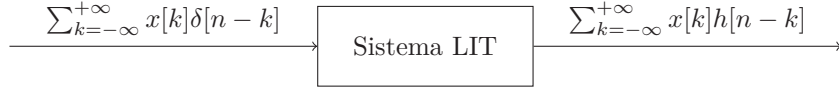


Figura A.2: Respuesta del sistema LIT a una combinación de impulsos.

Finalmente expresamos la salida del sistema LIT como la sumatoria de la señal respuesta al impulso desplazada y multiplicada por las muestras de la señal de entrada

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (\text{A.2})$$

Con esta definición se puede apreciar la necesidad que un sistema tenga comportamiento lineal e invariante en el tiempo para que su salida se pueda expresar como la suma de convolución de una señal entrada con la respuesta al impulso del sistema.

Bibliografía

Anand Kumar, A. (2013). *Digital Signal Processing*, (1st ed.). PHI Learning.

Oppenheim, A., Schafer, R., & Buck, J. (1999). *Discrete-Time Signal Processing*, (2nd ed.). Prentice Hall.

Oppenheim, A., Willsky, A., & Nawab, S. (1998). *Signals and Systems*, (2nd ed.). Prentice Hall. [Hernández, G.M. (Tr.), originalmente publicado en inglés].