# ECO5008 Modelos predictivos

**Clase 03 - Modelos Predictivos en la Gestión de Inventario Médico**

Sebastián Egaña Santibáñez

---

## Enlaces del profesor

https://segana.netlify.app

https://github.com/sebaegana

https://www.linkedin.com/in/sebastian-egana-santibanez/

---

## Clase 03

## Conceptos iniciales

### ¿Qué es la gestión de inventarios?

Proceso de **planificar, controlar y optimizar** la disponibilidad de insumos médicos para:

- Evitar quiebres de stock (falta de insumos críticos).
- Reducir sobreinventario y costos asociados.
- Asegurar la continuidad de las operaciones clínicas y hospitalarias.

### Importancia en salud

- Medicamentos, reactivos, guantes, vacunas, etc.
- Vencimientos y control de temperatura.
- Costo de oportunidad de un quiebre: puede afectar una cirugía o atención crítica.
- Balance entre **seguridad del paciente** y **eficiencia operativa**.

### Componentes de un sistema de inventario

| Concepto | Definición | Ejemplo |
|---|---|---|
| **Demanda (D)** | Cantidad requerida en un período. | Guantes por día |
| **Lead time (L)** | Tiempo entre emitir y recibir un pedido. | 4 días |
| **Costo de ordenar (K)** | Costo fijo por orden | Trámite y transporte |
| **Costo de mantener (h)** | Costo anual por unidad almacenada. | Refrigeración, espacio |
| **Costo de quiebre (p)** | Costo de no disponer de stock. | Suspensión de atención |

### Tipos de políticas

| Tipo | Descripción | Notación |
|---|---|---|
| **Revisión continua** | Se repone cuando el inventario baja a un umbral $R$ | Política (Q, R) |
| **Revisión periódica** | Se revisa en intervalos fijos de tiempo. | Política (s, S) |

Usaremos **revisión continua (Q,R)**:
- $Q$: cantidad que se pide cada vez.
- $R$: punto que activa el pedido.

### Tipos de demanda

| Tipo | Característica | Aplicación |
|---|---|---|
| **Determinística** | Conocida con certeza. | Insumos rutinarios. |
| **Probabilística** | Aleatoria, con distribución. | Medicamentos urgentes. |

En contextos médicos, la demanda suele modelarse como **Poisson**:

$$X_t \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

donde $\lambda$ = tasa promedio diaria de consumo.

### Variables principales

| Símbolo | Nombre | Interpretación |
|---|---|---|
| $D$ | Demanda anual | $\lambda \times$ días por año |
| $K$ | Costo de ordenar | Costo fijo por pedido |
| $h$ | Costo de mantener | Por unidad-año |
| $Q$ | Cantidad pedida | Tamaño del pedido |
| $R$ | Punto de pedido | Nivel que activa la orden |
| $L$ | Lead time | Tiempo de entrega |
| $CSL$ | Cycle Service Level | Probabilidad de no quiebre |

#### ¿Qué es el costo del pedido?

Corresponde a **todos los costos fijos asociados a emitir y recibir una orden de compra**, independientes de cuántas unidades se pidan.

$$K = \text{Costo fijo por pedido (no depende de la cantidad pedida)}$$

#### Ejemplos hospitalarios

| Tipo de costo | Descripción | Ejemplo |
|---|---|---|
| **Administrativo** | Tiempo y personal para emitir la orden de compra. | Funcionario que gestiona el pedido. |
| **Transporte y recepción** | Gastos fijos de entrega. | Camión o courier. |
| **Inspección y registro** | Control y registro del lote recibido. | Verificación de guantes o vacunas. |
| **Procesamiento interno** | Costos de sistema o contabilidad. | Registro en ERP o SIGA. |
| **Oportunidad operativa** | Tiempo que se detiene por el proceso de compra. | Coordinación con bodega y proveedor. |

Estos costos ocurren **cada vez que se hace un pedido**, sin importar el tamaño.

### Modelo EOQ (Economic Order Quantity)

Minimiza el **costo total anual**:

$$C(Q) = \frac{KD}{Q} + \frac{hQ}{2}$$

- Primer término → costo de ordenar
- Segundo término → costo de mantener

El punto óptimo ocurre cuando ambos costos son iguales:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

### Punto de pedido $R$

Durante el lead time puede haber demanda aleatoria. Por eso se define el **punto de pedido**:

$$R = \text{Demanda esperada en el lead time} + \text{Stock de seguridad}$$

El **stock de seguridad (SS)** se ajusta al nivel de servicio deseado:

$$SS = z \cdot \sigma_L \quad \text{o, para demanda Poisson,} \quad R = qpois(CSL, \lambda L)$$

### Rol de los modelos predictivos

Los modelos predictivos permiten estimar: - La demanda futura $\hat{D}$ o $\hat{\lambda}$ - El riesgo de quiebre y niveles óptimos de servicio - Los costos esperados bajo distintas políticas (Q, R)

Así respondemos a tres preguntas clave:

1. **¿Cuánto pedir?** ($Q$)
2. **¿Cuándo pedir?** ($R$)
3. **¿Qué nivel de servicio ofrecer?** ($CSL$)

### En resumen

- La gestión de inventario médico combina **logística y analítica**
- Los modelos predictivos ayudan a anticipar la demanda
- EOQ y Poisson permiten decidir racionalmente **cantidad y momento óptimo** de pedido
- En la siguiente parte: aplicaremos estas ideas en un **caso práctico**

## Ejercicio: EOQ y punto de pedido con demanda Poisson

### Objetivo de la clase

Aplicar modelos predictivos para **optimizar el inventario médico** mediante:

- Cálculo de la **Cantidad Económica de Pedido (EOQ)**
- Determinación del **Punto de Pedido (R)** con demanda Poisson
- Interpretación del **nivel de servicio (CSL)**

### Contexto del caso

Un hospital gestiona guantes estériles.

| Parámetro | Valor | Descripción |
|---|---|---|
| | 15 unid/día | Demanda promedio (Poisson) |
| Días/año | 300 | Operaciones anuales |
| L | 4 días | Lead time de reposición |
| K | $120 | Costo de ordenar |
| h | $8 | Costo anual por unidad almacenada |
| CSL | 95% | Nivel de servicio deseado |

## 1 Demanda anual

$$D = \lambda \times 300 = 15 \times 300 = 4{,}500 \text{ unidades/año}$$

## 2 EOQ – Cantidad económica de pedido

**Fórmula general:**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

**Cálculo:**

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(120)(4500)}{8}} = \sqrt{135{,}000} \approx 367$$

Se recomienda pedir **367 unidades por orden**.

## 3 Demanda durante el lead time

Demanda aleatoria:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda L)$$

$$\mathbb{E}[X] = 15 \times 4 = 60$$

Buscamos el **punto de pedido R** tal que:

$$\Pr(X \leq R) \geq 0.95$$

---

## 4 Cálculo del punto de pedido

### Aproximación Normal

$$R \approx 60 + 1.64\sqrt{60} = 72.7 \approx 73$$

**Cálculo exacto (cuantil Poisson):**

$$R = qpois(0.95, 60) = 73$$

**Stock de seguridad:**

$$SS = R - \lambda L = 73 - 60 = 13$$

---

## 5 Costo total anual

$$C(Q^*) = \frac{KD}{Q^*} + \frac{hQ^*}{2}$$

$$C(Q^*) = \frac{120(4500)}{367} + \frac{8(367)}{2} \approx 1{,}470 + 1{,}470 = 2{,}940$$

**Costo total anual:** $2.940

---

### Resultados clave

| Concepto | Valor | Interpretación |
|---|---|---|
| (Q^*) | 367 unid | Tamaño óptimo del pedido |
| (R) | 73 unid | Punto de reposición |
| (SS) | 13 unid | Colchón de seguridad |
| (C(Q^*)) | $2.940 | Costo anual mínimo |

---

### Código en R

```r
lambda <- 15
days <- 300
D <- lambda * days
L <- 4
```

```r
K <- 120
h <- 8
CSL <- 0.95

Q_star <- sqrt(2*K*D/h)
R <- qpois(CSL, lambda*L)
C_annual <- K*D/Q_star + h*Q_star/2

list(Q_star=Q_star, R=R, C_annual=C_annual)
```

```
$Q_star
[1] 367.4235

$R
[1] 73

$C_annual
[1] 2939.388
```

```r
# Parámetros
lambda <- 15      # demanda diaria
days   <- 300
D      <- lambda * days
L      <- 4
K      <- 120
h      <- 8
CSL    <- 0.95

# 1) EOQ
Q_star <- sqrt(2*K*D/h)

# 2) Punto de pedido con Poisson
R <- qpois(CSL, lambda = lambda*L)

# 3) Costo anual con Q*
C_annual <- K*D/Q_star + h*Q_star/2

list(Q_star = Q_star, R = R, C_annual = C_annual)
```

```
$Q_star
```

```
[1] 367.4235

$R
[1] 73

$C_annual
[1] 2939.388
```

```r
# ---- Simulación simple de 1 año (demanda diaria Poisson, política (Q*,R)) ----
set.seed(123)
Q <- round(Q_star)
inv <-  Q           # inventario inicial
on_order <- 0       # unidades en tránsito
lt_queue <- integer(0) # cola de llegadas: días restantes hasta arribo

stockouts <- 0
orders <- 0

for (t in 1:days) {
  # Arribos
  if (length(lt_queue) > 0 && lt_queue[1] == 0) {
    inv <- inv + on_order
    on_order <- 0
    lt_queue <- lt_queue[-1]
  }
  lt_queue <- lt_queue - 1

  # Demanda del día
  d <- rpois(1, lambda)
  if (d <= inv) {
    inv <- inv - d
  } else {
    # quiebre (sin backorder en esta versión)
    stockouts <- stockouts + (d - inv)
    inv <- 0
  }

  # Revisión continua: si inventario <= R y no hay pedido en tránsito, ordenar Q
  if (inv <= R && on_order == 0) {
    on_order <- Q
    lt_queue <- c(lt_queue, L) # llega en L días
    orders <- orders + 1
```

```r
  }
}

list(orders = orders, stockouts = stockouts, end_inventory = inv)
```

```
$orders
[1] 12

$stockouts
[1] 16

$end_inventory
[1] 312
```

```r
library(dplyr)
library(ggplot2)
library(tidyr)

# Parámetros
lambda <- 15      # demanda diaria
days   <- 300
D      <- lambda * days
L      <- 4
K      <- 120
h      <- 8
CSL    <- 0.95

# 1) EOQ y R
Q_star <- sqrt(2*K*D/h)
Q <- round(Q_star)
R <- qpois(CSL, lambda = lambda*L)

# 2) Simulación diaria (revisión continua (Q,R))
set.seed(123)
inv <- Q                  # inventario on-hand (inicial: un pedido completo)
on_order <- 0             # unidades en tránsito (0 al inicio)
lt_queue <- integer(0)    # cola de días hasta arribo de cada pedido

df <- tibble(
  day        = integer(),
  demand     = integer(),
```

```r
  inv_onhand = integer(),
  inv_pos    = integer(), # posición: on-hand + on-order
  order_placed = integer(),
  arrival      = integer(),
  stockout_units = integer()
)

orders <- 0
cum_stockouts <- 0

for (t in 1:days) {

  arrival_flag <- 0
  # Arribo si corresponde (primero comprobamos arribo de pedidos previos)
  if (length(lt_queue) > 0 && lt_queue[1] == 0) {
    inv <- inv + on_order
    on_order <- 0
    lt_queue <- lt_queue[-1]
    arrival_flag <- 1
  }
  # Luego, corremos el reloj de los pedidos en tránsito
  if (length(lt_queue) > 0) lt_queue <- lt_queue - 1

  # Demanda Poisson del día
  d <- rpois(1, lambda)
  stockout_today <- 0
  if (d <= inv) {
    inv <- inv - d
  } else {
    stockout_today <- d - inv
    inv <- 0
  }
  cum_stockouts <- cum_stockouts + stockout_today

  # Política (Q,R): si inv <= R y NO hay pedido en tránsito, emitir pedido Q
  order_flag <- 0
  if (inv <= R && on_order == 0) {
    on_order <- Q
    lt_queue <- c(lt_queue, L)  # llegará en L días
    orders <- orders + 1
    order_flag <- 1
```

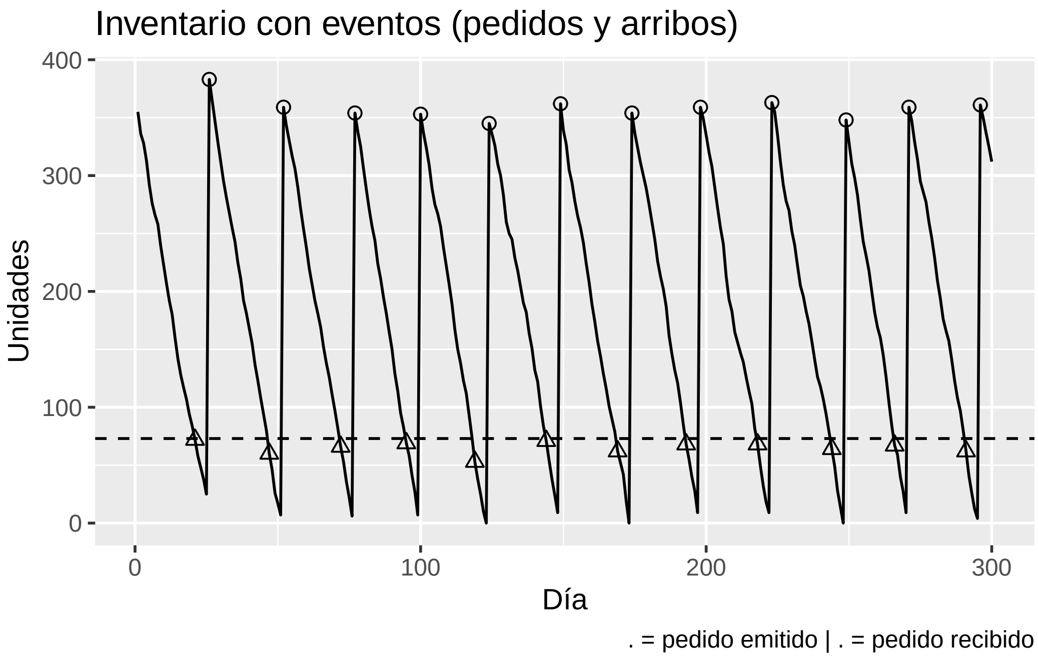
```r
    }

    inv_pos <- inv + on_order

    df <- bind_rows(df, tibble(
      day = t,
      demand = d,
      inv_onhand = inv,
      inv_pos = inv_pos,
      order_placed = order_flag,
      arrival = arrival_flag,
      stockout_units = stockout_today
    ))
  }

  df <- df %>% mutate(cum_stockouts = cumsum(stockout_units))
  resumen <- list(
    Q_star = Q_star, R = R,
    orders = orders,
    end_inventory = df$inv_onhand[days],
    total_stockouts = sum(df$stockout_units)
  )
  resumen
```

```
$Q_star
[1] 367.4235

$R
[1] 73

$orders
[1] 12

$end_inventory
[1] 312

$total_stockouts
[1] 16
```

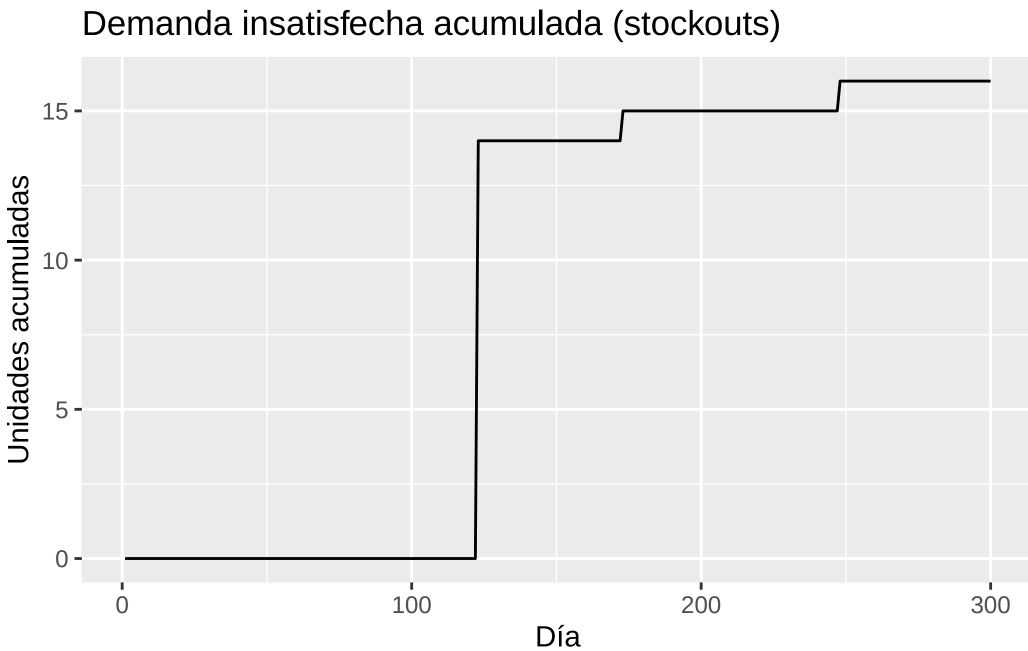
```r
ggplot(df, aes(day, inv_onhand)) +
geom_line() +
```

```
geom_hline(yintercept = R, linetype = 2) +
labs(title = "Trayectoria del inventario (on-hand)",
x = "Día", y = "Unidades") +
annotate("text", x = max(df$day)*0.85, y = R + 5, label = paste0("R = ", R))
```

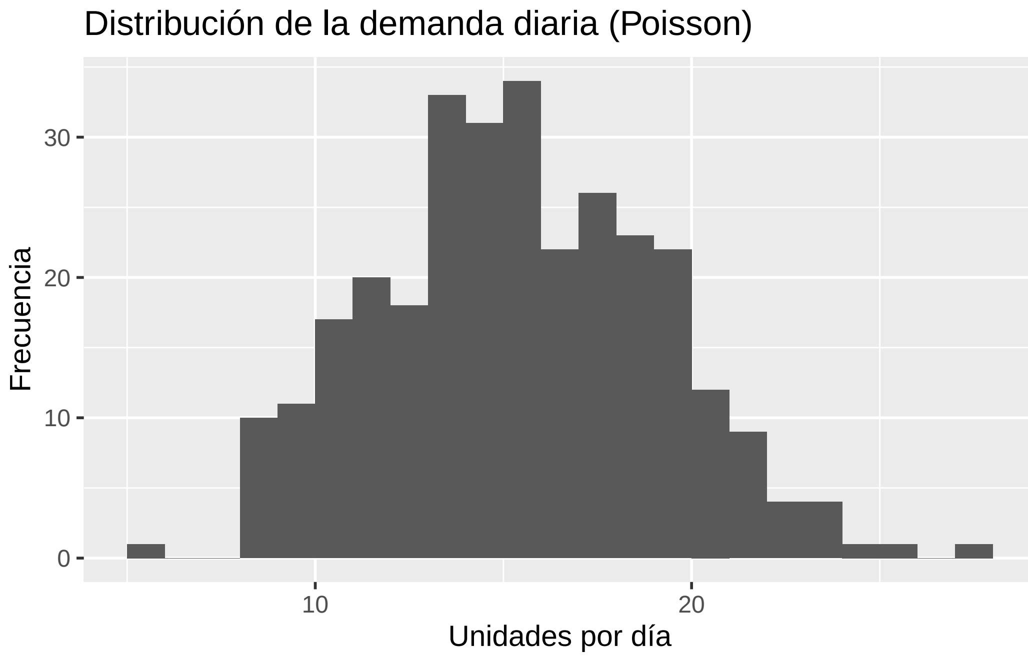

```
ggplot(df, aes(day, inv_onhand)) +
geom_line() +
geom_point(data = df %>% filter(order_placed == 1),
aes(day, inv_onhand), shape = 24, size = 2) +  # triángulo: pedido
geom_point(data = df %>% filter(arrival == 1),
aes(day, inv_onhand), shape = 21, size = 2) +  # círculo: arribo
geom_hline(yintercept = R, linetype = 2) +
labs(title = "Inventario con eventos (pedidos y arribos)",
x = "Día", y = "Unidades",
caption = "  = pedido emitido |   = pedido recibido")
```




```
ggplot(df, aes(day, cum_stockouts)) +
geom_line() +
labs(title = "Demanda insatisfecha acumulada (stockouts)",
x = "Día", y = "Unidades acumuladas")
```




```
ggplot(df, aes(demand)) +
geom_histogram(binwidth = 1, boundary = 0, closed = "left") +
labs(title = "Distribución de la demanda diaria (Poisson)",
x = "Unidades por día", y = "Frecuencia")
```




**Notas didácticas:**

- La **línea discontinua** indica el **punto de pedido R**. Verás que los **pedidos** se emiten justo cuando el inventario baja a ese nivel.
- El **salto** en el inventario coincide con un **arribo** tras $L$ días.
- El gráfico de **stockouts** te muestra si, pese al $CSL = 95\%$, hubo demanda no atendida (debería ser baja/ocasional).
- El **histograma** ayuda a explicar por qué necesitamos **stock de seguridad**: la demanda diaria fluctúa.