# 3. Causalización de Sistemas de DAEs

Dinámica de los Sistemas Físicos

Departamento de Control, Escuela de Ingeniería Electrónica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario.

# Organización de la Presentación

# Organización de la Presentación

# Organización de la Presentación

# Modelos Implícitos

Consideremos el circuito RLC con el sistema de DAEs que definen sus relaciones constitutivas y estructurales, donde $v(t)$ representa una función del tiempo conocida.

$$
\begin{aligned}
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0 \quad (3.1a)\\
\dot{q}(t) - i_C(t) &= 0 \quad (3.1b)\\
q(t) - C\ u_C(t) &= 0 \quad (3.1c)\\
\dot{\phi}(t) - u_L(t) &= 0 \quad (3.1d)\\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \quad (3.1e)\\
u_S(t) - v(t) &= 0 \quad (3.1f)\\
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0 \quad (3.1g)\\
i_L(t) - i_R(t) &= 0 \quad (3.1h)\\
i_C(t) - i_L(t) &= 0 \quad (3.1i)\\
i_S(t) - i_R(t) &= 0 \quad (3.1j)
\end{aligned}
$$

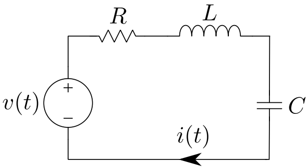


Figura 3.1: Circuito RLC Serie

# Simulación de Modelos Implícitos

- Si quisiéramos simular este sistema con Forward Euler, tendríamos que implementar un algoritmo que despeje las derivadas de los estados.
- Calcular las derivadas implica resolver un sistema de ecuaciones algebraicas con 10 incógnitas.
- Este algoritmo debería ejecutarse cada vez que recalculamos las derivadas (en Forward Euler esto ocurriría una vez por paso).

Veremos dos funciones simples de Matlab/Octave que brindan una manera de realizar esto.

# Modelo Implícito en Matlab/Octave

```
function res=circuit_dae(x,dx,a,t)
  R=1; C=1; L =1; %parametros
  q=x(1); phi=x(2); %estados
  der_q=dx(1); der_phi=dx(2); %derivadas de estados
  uR=a(1); iR=a(2); iC=a(3); uC=a(4); uL=a(5); iL=a(6);
  res=zeros(10,1);  %residuo (debera ser cero)
  res(1) = uR - R * iR;
  res(2) = der_q - iC;
  res(3) = q - C * uC;
  res(4) = der_phi - uL;
  res(5) = phi - L * iL;
  res(6) = uS - sin(t);
  res(7) = uL + uR + uC - uS;
  res(8) = iL - iR;
  res(9) = iC - iL;
  res(10) = iS - iR;
end
```

# Modelo Implícito en Matlab/Octave

La siguiente función sería vista como un modelo de Ecuaciones de Estado:

```
function dx=circuit_ode(x,t)
  F = @(z) circuit_dae(x,z(1:2),z(3:10),t);
  z0=zeros(10,1);
  z=fsolve(F,z0);
  dx=z(1:2);
end
```

y podemos entonces simular invocando:

```
  [t,x]=feuler(@circuit_ode,[0;0],0.1,0,10);
  plot (t,x)
```

Esto funcionará pero será muy costoso desde el punto de vista computacional.

# Modelo Explícito

Nuestro objetivo entonces será transformar el sistema de DAEs en algo equivalente al sistema de Ecuaciones de Estado:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= \frac{1}{L}\,\phi(t) \\ \dot{\phi}(t) &= -\frac{1}{C}\,q(t) - \frac{R}{L}\,\phi(t) + v(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

Buscaremos tener expresiones explícitas para las derivadas de los estados en función de los propios estados y de las entradas.

# Modelo Explícito

Una opción con expresiones explícitas es la siguiente, donde:

- El símbolo $:=$ indica una asignación (no una igualdad).
- En el lado izquierdo se calcula una variable que no fue calculada previamente.
- En el lado derecho se usan variables previamente calculadas o estados.

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C} \tag{3.3a}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \tag{3.3b}$$

$$u_S(t) := v(t) \tag{3.3c}$$

$$i_R(t) := i_L(t) \tag{3.3d}$$

$$i_C(t) := i_L(t) \tag{3.3e}$$

$$i_S(t) := i_R(t) \tag{3.3f}$$

$$u_R(t) := R\ i_R(t) \tag{3.3g}$$

$$u_L(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) \tag{3.3h}$$

$$\dot{q}(t) := i_C(t) \tag{3.3i}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t) \tag{3.3j}$$

# Modelo Explícito en Matlab/Octave

```
function dx=circuit(x,t)
  q=x(1); phi=x(2);  % estados
  R=1; L=1; C=1;  % parametros
  v=sin(t);  % entrada
  uC=q/c;
  iL=phi/L;
  uS=v;
  iR=iL;
  iC=iL;
  iS=iR;
  uR=R*iR;
  uL=uS-uR-uC;
  der_q=iC;
  der_phi=uL;
  dx=[der_q; der_phi];  % vector de derivadas
end
```

# Modelo Explícito en Matlab/Octave

La función anterior es equivalente a la que se obtiene directamente de usar las Ecuaciones de Estado (3.2).

```
function dx=circuit2(x,t)
  q=x(1); phi=x(2); %estados
  R=1; L=1; C=1; %parametros
  v=sin(t); %entrada
  der_q=phi/L;
  der_phi=-q/C-R/L*phi+v;
  dx=[der_q; der_phi]; %vector de derivadas
end
```

Los modelos explícitos son mucho más eficientes que los implícitos ya que no involucran iteraciones para calcular las derivadas.

# Organización de la Presentación

# Ordenamiento Horizontal y Vertical

El pasaje del sistema de ecuaciones implícitas (3.1) al sistema de ecuaciones explícitos (3.3) implica:

- Ordenar las ecuaciones horizontalmente para decidir que variable se despeja de cada ecuación.
- Ordenar las ecuaciones verticalmente para decidir en qué orden se realizan las asignaciones.

Veremos un procedimiento que en muchos casos permite resolver este problema de ordenamiento causalizando un sistema de DAEs y convirtiéndolo en una secuencia de asignaciones que equivale a un sistema de Ecuaciones de Estado.

# Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical

En un caso general, tendremos un sistema de DAEs de la forma:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,a_1,\ldots,a_r,v_1,\ldots,v_m,t) &= 0\\
f_2(x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,a_1,\ldots,a_r,v_1,\ldots,v_m,t) &= 0\\
&\vdots\\
f_{n+r}(x_1,\ldots,x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,a_1,\ldots,a_r,v_1,\ldots,v_m,t) &= 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde las variables $x_i$ serán (en principio) los estados, las $a_i$ son variables algebraicas y las entradas $v_i$ se asumen conocidas.

# Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical

El objetivo del algoritmo será ordenar vertical y horizontalmente las ecuaciones de manera de poder calcular las derivadas de los estados $\dot{x}_i$. Para esto, tomaremos en cuenta lo siguiente:

- Tendremos un sistema de $n+r$ ecuaciones y $n+r$ incógnitas.
- Las incógnitas son las $n$ derivadas de los estados y las $r$ variables algebraicas desconocidas.
- En general no aparecerán todas las incógnitas en todas las ecuaciones.
- Asumiremos que de cada función $f_i$ es posible despejar una incógnita (siempre y cuando esta aparezca en la función).
- No tendremos en cuenta (por el momento) las expresiones de las $f_i$, sino sólo de qué variables dependen.

# Algoritmo de Ordenamiento Horizontal y Vertical

El algoritmo que utilizaremos se basará en las siguientes reglas:

Regla 1 Si una ecuación $(E_i)$ contiene una única incógnita $u_j$:

- $u_j$ debe despejarse de $(E_i)$ (ordenamiento horizontal). De lo contrario no podríamos utilizar dicha ecuación para otra cosa.
- La ecuación $(E_i)$ debe colocarse al principio (ordenamiento vertical) ya que no depende de otra incógnita.

Regla 2 Si una incógnita $u_j$ aparece en una única ecuación $(E_i)$:

- $u_j$ debe despejarse de $(E_i)$ (ordenamiento horizontal) porque no hay otra ecuación para calcular $u_j$.
- La ecuación $(E_i)$ debe colocarse al final (ordenamiento vertical), ya que la incógnita $u_j$ no será necesaria en ninguna otra ecuación.

Tras aplicar cada regla, la incógnita despejada dejará de ser incógnita y la ecuación utilizada se removerá.

# Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$
\begin{aligned}
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0 \\
\dot{q}(t) - i_C(t) &= 0 \\
\boxed{q(t) - C\ u_C(t) = 0} \\
\dot{\phi}(t) - u_L(t) &= 0 \\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \\
u_S(t) - v(t) &= 0 \\
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0 \\
i_L(t) - i_R(t) &= 0 \\
i_C(t) - i_L(t) &= 0 \\
i_S(t) - i_R(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

# Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$\begin{aligned}
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0 \\
\dot{q}(t) - i_C(t) &= 0 \\
q(t) - C\ u_C(t) &= 0 \\
\boxed{\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0} \\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \\
u_S(t) - v(t) &= 0 \\
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0 \\
i_L(t) - i_R(t) &= 0 \\
i_C(t) - i_L(t) &= 0 \\
i_S(t) - i_R(t) &= 0
\end{aligned}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$
$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0$$
$$q(t) - C\ u_C(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\boxed{\phi(t) - L\ i_L(t) = 0}$$
$$u_S(t) - v(t) = 0$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$
$$\dot{q}(t) - i_C(t) = 0$$
$$q(t) - C\ u_C(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$
$$\boxed{u_S(t) - v(t) = 0}$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := v(t)$$
$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0$$
$$\boxed{\dot{q}(t) - i_C(t) = 0}$$
$$q(t) - C\ u_C(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$
$$u_S(t) - v(t) = 0$$
$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$
$$i_L(t) - i_R(t) = 0$$
$$i_C(t) - i_L(t) = 0$$
$$i_S(t) - i_R(t) = 0$$

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$
$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$u_S(t) := v(t)$$

$$\dot{q}(t) := i_C(t)$$
$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Algoritmo de Ordenamiento: Ejemplo

$$
\begin{aligned}
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0 \\
\dot{q}(t) - i_C(t) &= 0 \\
q(t) - C\ u_C(t) &= 0 \\
\dot{\phi}(t) - u_L(t) &= 0 \\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \\
u_S(t) - v(t) &= 0 \\
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0 \\
i_L(t) - i_R(t) &= 0 \\
i_C(t) - i_L(t) &= 0 \\
i_S(t) - i_R(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_C(t) &:= \frac{q(t)}{C} \\
i_L(t) &:= \frac{\phi(t)}{L} \\
u_S(t) &:= v(t) \\
i_R(t) &:= i_L(t) \\
i_C(t) &:= i_L(t) \\
i_S(t) &:= i_R(t) \\
u_R(t) &:= R\ i_R(t) \\
u_L(t) &:= u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) \\
\dot{q}(t) &:= i_C(t) \\
\dot{\phi}(t) &:= u_L(t)
\end{aligned}
$$

# Algoritmo de Ordenamiento

- Las ecuaciones ordenadas de la Ec.(3.3) pueden utilizarse para simular usando un código explícito.
- También pueden usarse para obtener las Ecuaciones de Estado y de ahí, ya que este caso es lineal, la Función Transferencia.
- Dado que en cada paso del algoritmo ordenamos una ecuación, en un caso genérico como el de la Ec.(3.4) el procedimiento finalizaría tras $n + r$ pasos.
- Tanto para simplificar el ordenamiento como para generar un código más corto y eficiente para evaluar las derivadas del estado, se suelen eliminar las ecuaciones triviales del modelo,

# Organización de la Presentación

# Eliminación de Ecuaciones Triviales

- Las ecuaciones triviales son las que tienen la forma $a_i - a_j = 0$ (o sea, $a_i = a_j$).
- En tal caso se dice que las variables algebraicas $a_i$ y $a_j$ son alias y se puede eliminar una de ellas junto con la ecuación.

En la Ec.(3.1) podríamos eliminar las últimas tres ecuaciones reemplazando todas las corrientes por $i_L$:

$$
\begin{aligned}
u_R(t) - R\ i_L(t) &= 0 \\
\dot{q}(t) - i_L(t) &= 0 \\
q(t) - C\ u_C(t) &= 0 \\
\dot{\phi}(t) - u_L(t) &= 0 \\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \\
u_S(t) - v(t) &= 0 \\
u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) &= 0
\end{aligned}
$$

# Eliminación de Ecuaciones Triviales

Podemos también eliminar $i_L(t)$ y $u_L(t)$ ya que ambas son iguales a dos derivadas de los estados. En tal caso, el sistema se reduce a

$$u_R(t) - R\ \dot{q}(t) = 0 \tag{3.6a}$$

$$q(t) - C\ u_C(t) = 0 \tag{3.6b}$$

$$\phi(t) - L\ \dot{q}(t) = 0 \tag{3.6c}$$

$$u_S(t) - v(t) = 0 \tag{3.6d}$$

$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0 \tag{3.6e}$$

que sólo contiene tres variables algebraicas.

# Organización de la Presentación

# Obtención de las Ecuaciones de Estado

Una vez ordenado horizontal y verticalmente un sistema de DAEs, la obtención de las EE es directa ya que se pueden reemplazar las variables algebraicas tomando en orden las ecuaciones. Consideremos el sistema ordenado que se obtiene del sistema reducido (sin ecuaciones triviales) de la Ec.(3.6):

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C} \tag{3.7a}$$

$$\dot{q}(t) := \frac{\phi(t)}{L} \tag{3.7b}$$

$$u_S(t) := v(t) \tag{3.7c}$$

$$u_R(t) := R\ \dot{q}(t) \tag{3.7d}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) \tag{3.7e}$$

(3.7f)

# Obtención de las Ecuaciones de Estado

A partir del sistema ordenado podemos proceder como sigue:

$$u_C(t) := \frac{q(t)}{C}$$

$$\dot{q}(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$u_S(t) := v(t)$$

$$u_R(t) := R\ \dot{q}(t) = R\ \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_S(t) - u_R(t) - u_C(t) = v(t) - R\ \frac{\phi(t)}{L} - \frac{q(t)}{C}$$

de manera que las EE son:

$$\dot{q}(t) = \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) = v(t) - R\ \frac{\phi(t)}{L} - \frac{q(t)}{C}$$

# Organización de la Presentación

# Organización de la Presentación

# Ejemplo Introductorio

La Figura 3.2 muestra un circuito RL con sus relaciones constitutivas y estructurales.

$$u_{R_1}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0 \qquad (3.8a)$$
$$u_{R_2}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0 \qquad (3.8b)$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0 \qquad (3.8c)$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0 \qquad (3.8d)$$
$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0 \qquad (3.8e)$$
$$u_{R_1}(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (3.8f)$$
$$u_L(t) - u_{R_2}(t) = 0 \qquad (3.8g)$$

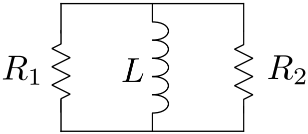


Figura 3.2: Circuito RL Paralelo

Veremos que ocurre al aplicar el algoritmo de ordenamiento en este sistema de DAEs.

# Ejemplo Introductorio - Algoritmo de Causalización

$$u_L(t) - R_1 \ i_{R_1}(t) = 0$$
$$u_L(t) - R_2 \ i_{R_2}(t) = 0$$
$$\boxed{\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0}$$
$$\phi(t) - L \ i_L(t) = 0$$
$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Ejemplo Introductorio - Algoritmo de Causalización

$$u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0$$
$$u_L(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\boxed{\phi(t) - L\ i_L(t) = 0}$$
$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Ejemplo Introductorio - Algoritmo de Causalización

$$
\begin{aligned}
u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) &= 0 \\
u_L(t) - R_2\ i_{R_2}(t) &= 0 \\
\dot{\phi}(t) - u_L(t) &= 0 \\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \\
i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

Tras dos pasos, no podemos aplicar ninguna de las reglas:

- todas las ecuaciones contienen al menos dos incógnitas,
- todas las incógnitas aparecen en al menos dos ecuaciones.

# Ejemplo Introductorio - Lazo Algebraico

$$
\begin{aligned}
u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) &= 0 \\
u_L(t) - R_2\ i_{R_2}(t) &= 0 \\
\dot{\phi}(t) - u_L(t) &= 0 \\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0 \\
i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &:= \frac{\phi(t)}{L} \\
u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) &= 0 \\
u_L(t) - R_2\ i_{R_2}(t) &= 0 \\
i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) &= 0 \\
\dot{\phi}(t) &:= u_L(t)
\end{aligned}
$$

- Nos quedó un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas ($i_{R_1}$, $i_{R_2}$ y $u_L$ ) que deben resolverse simultáneamente.
- Estas ecuaciones constituyen un lazo algebraico.

# Simulación de un Modelo con Lazos Algebraicos

- Podríamos resolver el problema implementando algo similar al código de Matlab/Octave para el modelo implícito del circuito RLC.
- Si hacemos esto directamente sobre la Ec.(3.8) tendríamos un sistema de 7 ecuaciones y 7 incógnitas.
- Eliminando las ecuaciones triviales el sistema se reduciría a 5 ecuaciones e incógnitas.
- Utilizando lo que nos quedó tras el proceso de causalización incompleto, tendremos un problema con 3 ecuaciones e incógnitas.

# Código de Octave de un Modelo con Lazo Algebraico

```
function res=rlcircuit_loop(uL,iR1,iR2,iL)
  R1=1;R2=2;L=1;  % parametros

  % la siguiente funcion debe ser 0
  res=zeros(3,1);
  res(1)=uL-R1*iR1;
  res(2)=uL-R2*iR2;
  res(3)=iL+iR1+iR2;
end
```

# Código de Octave de un Modelo con Lazo Algebraico

```
function dx=rlcircuit(x,t)
  R1=1; R2=2; L=1;  % parametros
  phi=x;  % estado
  iL=phi/L;

  F = @(z)  rlcircuit_loop(z(1),z(2),z(3),iL);
  z0=zeros(3,1);
  z=fsolve(F,z0);
  uL=z(1);  iR1=z(2);  iR2=z(3);

  der_phi=uL;  dx=der_phi;
end
```

Esto es más eficiente que usar un sistema de 7 ecuaciones como el que resulta al colocar directamente la DAE, pero podemos reducirlo aún más.

# Organización de la Presentación

# Algoritmo de Rasgado

Cuando en el procedimiento de ordenamiento nos encontramos con un lazo algebraico, podemos proceder como sigue:

- Suponemos que conocemos una incógnita del lazo (la llamaremos variable de rasgado).
- Guardamos una ecuación donde aparezca dicha incógnita (ecuación de rasgado).
- Continuamos el proceso de ordenamiento hasta que queden calculadas las demás incógnitas de la ecuación de rasgado.

Si esto funciona, tendremos un sistema con una única incógnita (la variable de rasgado).

# Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

Suponemos conocida $u_L(t)$ y reservamos la ecuación $u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0$.

$$\boxed{u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0}$$
$$\boxed{u_L(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0}$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$
$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

Suponemos conocida $u_L(t)$ y reservamos la ecuación $u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0$.

$$\boxed{u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0}$$
$$u_L(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$
$$\boxed{i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0}$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2}$$
$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t)$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

Tras este paso, la ecuación de rasgado $u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0$ no tiene más incógnitas.

$$\boxed{u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0}$$
$$u_L(t) - R_2\ i_{R_2}(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) - u_L(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ i_L(t) = 0$$
$$i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 0$$

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L}$$
$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2}$$
$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t)$$
$$u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) := u_L(t)$$

# Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

El lazo algebraico tiene una única incógnita $u_L$ y se puede resolver usando el siguiente código de Matlabl/Octave.

```
function res=rlcircuit_loop2(uL,iL)
  R1=1; R2=2; L=1; % parametros

  iR2=uL/R2;
  iR1=-iR2-iL;
  res=uL-R1*iR1; % expresion que debe ser 0
end
```

# Algoritmo de Rasgado – Ejemplo

El código que evalúa la derivada queda finalmente:

```
function dx=rlcircuit2(x,t)
  R1=1; R2=2; L=1; %parametros
  phi=x; %estado
  iL=phi/L;
  %la siguiente funcion debe ser 0
  F = @(uL) rlcircuit_loop2(uL,iL);
  uL=fsolve(F,0);
  der_phi=uL;
  dx=der_phi;
end
```

# Algoritmo de Rasgado

El algoritmo de rasgado permite reducir el número de incógnitas de los lazos algebraicos.

- En ocasiones, se necesita más de una variable de rasgado para romper un lazo algebraico.
- El número de variables de rasgado necesarias determinará el costo computacional de las iteraciones.
- El número de variables de rasgado necesarias depende en general de la elección de las mismas.

# Organización de la Presentación

# Obtención de las Ecuaciones de Estado

A partir del sistema ordenado

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \tag{3.9a}$$

$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2} \tag{3.9b}$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t) \tag{3.9c}$$

$$u_L(t) - R_1 \; i_{R_1}(t) = 0 \tag{3.9d}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t) \tag{3.9e}$$

podemos obtener las Ecuaciones de Estado reemplazando las variables algebraicas en orden hasta llegar a la ecuación de rasgado.

# Obtención de las Ecuaciones de Estado

Reemplazando en orden, se obtiene

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \tag{3.10a}$$

$$i_{R_2}(t) := \frac{u_L(t)}{R_2} \tag{3.10b}$$

$$i_{R_1}(t) := -i_{R_2}(t) - i_L(t) = -\frac{u_L(t)}{R_2} - i_L(t) \tag{3.10c}$$

$$u_L(t) - R_1\ i_{R_1}(t) = u_L(t) - R_1\ \left(-\frac{u_L(t)}{R_2} - i_L(t)\right) = 0 \tag{3.10d}$$

y de la última ecuación se puede despejar

$$u_L(t) = -\frac{R_1}{1 + \frac{R_1}{R_2}}\ i_L(t). \tag{3.11}$$

# Obtención de las Ecuaciones de Estado

Queda entonces el sistema explícito:

$$i_L(t) := \frac{\phi(t)}{L} \tag{3.12a}$$

$$u_L(t) := -\frac{R_1}{1+\dfrac{R_1}{R_2}}\, i_L(t) \tag{3.12b}$$

$$\dot{\phi}(t) := u_L(t). \tag{3.12c}$$

y finalmente la Ecuación de Estados es

$$\dot{\phi}(t) = -\frac{R_1}{1+\dfrac{R_1}{R_2}}\, \frac{\phi(t)}{L}. \tag{3.13}$$

# Organización de la Presentación

# Organización de la Presentación

# Ejemplo Introductorio

Consideremos ahora el circuito RC de la figura y el correpondiente sistema de DAEs (3.14).

$$C_1\ \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0 \qquad (3.14a)$$
$$C_2\ \dot{u}_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0 \qquad (3.14b)$$
$$u_R(t) - R\ i_R(t) = 0 \qquad (3.14c)$$
$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \qquad (3.14d)$$
$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \qquad (3.14e)$$
$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0 \qquad (3.14f)$$

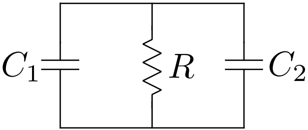


Figura 3.3: Circuito RC Paralelo

Puede verse fácilmente que la última ecuación no tiene incógnitas y por lo tanto no podremos finalizar el ordenamiento.

# Ecuaciones de Restricción

- El problema se debe a que estamos caracterizando con dos variables de estado ($u_{C_1}$ y $u_{C_2}$) un modelo de primer orden.
- Es de primer orden porque conociendo $u_{C_1}$ podemos calcular cualquier otra variable (no podemos asignar dos condiciones iniciales independientes).
- Una ecuación que se queda sin incógnitas durante la causalización se denomina Ecuación de Restricción.

La presencia de Ecuaciones de Restricción indica que el orden del modelo es menor que el número de supuestas variables de estado y decimos que el modelo tiene una Singularidad Estructural.

# Simulación de Modelos con Singularidades

Ya que no podemos causalizar el modelo, intentaremos simularlo directamente como hicimos al principio con el circuito RLC.

```
function res=rc_circuit_dae(x,dx,a,t)
  C1=1;C2=2;R=1;  % parametros
  uC1=x(1); uC2=x(2);    % estados
  der_uC1=dx(1); der_uC2=dx(2); % derivadas de estados
  uR=a(1);iR=a(2);iC1=a(3);iC2=a(4);  % algebraicas
  res=zeros(6,1);  % residuo (debe ser cero)
  res(1) = C1*der_uC1-iC1;
  res(2) = C2*der_uC2-iC2;
  res(3) = uR-R*iR;
  res(4) = iR+iC1+iC2;
  res(5) = uC1-uR;
  res(6) = uC1-uC2;
end
```

# Simulación de Modelos con Singularidades

```
function dx=rccircuit_ode(x,t)
  F = @(z) rccircuit_dae(x,z(1:2),z(3:6),t);
  z0=zeros(6,1);
  z=fsolve(F,z0);
  dx=z(1:2);
end
```

Esta idea tampoco funciona, ya que el sistema de ecuaciones es singular y no se puede encontrar un conjunto de derivadas y variables algebraicas que lo verifique.

# Organización de la Presentación

# Algoritmo de Pantelides

La idea básica, debida a Constantino Pantelides, es derivar respecto al tiempo las ecuaciones de restricción:

- Si $u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$, luego debe cumplirse también que $\dot{u}_{C_1}(t) - \dot{u}_{C_2}(t) = 0$.
- Agregaremos entonces esta última ecuación al sistema.
- Dado que ahora tenemos una ecuación más, necesitamos también una incógnita más.
- Esto lo lograremos decidiendo que una de las variables de estado de la Ecuación de Restricción no sea más variable de estado.

# Algoritmo de Pantelides - Derivadas Ficticias

Suponiendo que $u_{C_2}$ no es más un estado, el sistema queda:

$$C_1 \; \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0 \tag{3.15a}$$
$$C_2 \; du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0 \tag{3.15b}$$
$$u_R(t) - R \; i_R(t) = 0 \tag{3.15c}$$
$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0 \tag{3.15d}$$
$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0 \tag{3.15e}$$
$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0 \tag{3.15f}$$
$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0 \tag{3.15g}$$

- Lo que antes llamábamos $\dot{u}_{C_2}$ ahora es una variable algebraica $du_{C_2}$.
- Diremos que $du_{C_2}$ es una derivada ficticia (*dummy derivative*).

Intentaremos causalizar entonces el nuevo sistema.

# Algoritmo de Pantelides

$$C_1 \ \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0$$
$$C_2 \ du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0$$
$$u_R(t) - R \ i_R(t) = 0$$
$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0$$
$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0$$
$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$$
$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0$$

# Algoritmo de Pantelides

$$
\begin{aligned}
C_1\ \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) &= 0 \\
C_2\ du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) &= 0 \\
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0 \\
i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) &= 0 \\
u_{C_1}(t) - u_R(t) &= 0 \\
u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) &= 0 \\
\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$u_R(t) := u_{C_1}(t)$$

# Algoritmo de Pantelides

$$
\begin{aligned}
C_1\ \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) &= 0 \\
C_2\ du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) &= 0 \\
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0 \\
i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) &= 0 \\
u_{C_1}(t) - u_R(t) &= 0 \\
u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) &= 0 \\
\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_R(t) &:= u_{C_1}(t) \\
u_{C_2}(t) &:= u_{C_1}(t)
\end{aligned}
$$

# Algoritmo de Pantelides

$$C_1 \; \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0$$
$$C_2 \; du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) = 0$$
$$u_R(t) - R \; i_R(t) = 0$$
$$i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) = 0$$
$$u_{C_1}(t) - u_R(t) = 0$$
$$u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) = 0$$
$$\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) = 0$$

$$u_R(t) := u_{C_1}(t)$$
$$u_{C_2}(t) := u_{C_1}(t)$$
$$i_R(t) := \frac{u_R(t)}{R}$$

# Algoritmo de Pantelides

$$
\begin{aligned}
C_1\ \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) &= 0\\
C_2\ du_{C_2}(t) - i_{C_2}(t) &= 0\\
u_R(t) - R\ i_R(t) &= 0\\
i_R(t) + i_{C_1}(t) + i_{C_2}(t) &= 0\\
u_{C_1}(t) - u_R(t) &= 0\\
u_{C_1}(t) - u_{C_2}(t) &= 0\\
\dot{u}_{C_1}(t) - du_{C_2}(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_R(t) &:= u_{C_1}(t)\\
u_{C_2}(t) &:= u_{C_1}(t)\\
i_R(t) &:= \frac{u_R(t)}{R}
\end{aligned}
$$

- Encontramos ahora un lazo algebraico.
- Utilizaremos entonces como variable de rasgado a $\dot{u}_{C_1}$ reservando la primera ecuación.

# Algoritmo de Pantelides - Resolución del Lazo

El resultado (tras 3 pasos) es el sistema de la Ec.(3.16) que resulta en iteraciones en una única variable.

$$u_R(t) := u_{C_1}(t) \tag{3.16a}$$

$$u_{C_2}(t) := u_{C_1}(t) \tag{3.16b}$$

$$i_R(t) := \frac{u_R(t)}{R} \tag{3.16c}$$

$$du_{C_2}(t) := \dot{u}_{C_1}(t) \tag{3.16d}$$

$$i_{C_2}(t) := C_2 \; du_{C_2} \tag{3.16e}$$

$$i_{C_1}(t) := -i_R(t) - i_{C_2}(t) \tag{3.16f}$$

$$C_1 \; \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = 0 \tag{3.16g}$$

# Simulación en Matlab/Octave

```
function dx=rccircuit2(x,t)
  C1=1;C2=2;R=1;  %parametros
  uC1=x;  %estado
  uR=uC1;
  uC2=uC1;
  iR=uR/R;
  %la siguiente funcion debe ser 0
  F = @(dot_uC1) rccircuit_loop2(dot_uC1,iR);
  dot_uC1=fsolve(F,0);
  dx=dot_uC1;
end

function res=rccircuit_loop2(dot_uC1,iR)
  C1=1;C2=2;R=1;  %parametros
  duC2=dot_uC1;
  iC2=C2*duC2;
  iC1=-iR-iC2;
  %la siguiente funcion debe ser 0
  res=C1*dot_uC1-iC1;
end
```

# Obtención de las Ecuaciones de Estado

Reemplazando en orden en las ecuaciones del lazo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
u_R(t) &:= u_{C_1}(t) \\
u_{C_2}(t) &:= u_{C_1}(t) \\
i_R(t) &:= \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u_{C_1}(t)}{R} \\
du_{C_2}(t) &:= \dot{u}_{C_1}(t) \\
i_{C_2}(t) &:= C_2 \; du_{C_2} = C_2 \; \dot{u}_{C_1}(t) \\
i_{C_1}(t) &:= -i_R(t) - i_{C_2}(t) = -i_R(t) - C_2 \; \dot{u}_{C_1}(t)
\end{aligned}$$

$$C_1 \; \dot{u}_{C_1}(t) - i_{C_1}(t) = C_1 \; \dot{u}_{C_1}(t) - \left( -\frac{u_{C_1}(t)}{R} - C_2 \; \dot{u}_{C_1}(t) \right) = 0$$

de donde la Ecuación de Estados resulta

$$\dot{u}_{C_1}(t) = -\frac{u_{C_1}(t)}{R\,(C_1 + C2)} \tag{3.17}$$

# Algoritmo de Pantelides

El algoritmo de Pantelides se puede resumir mediante los siguientes pasos:

- Reemplazar las variables algebraicas por sus expresiones en función de los estados en las ecuaciones de restricción (esto no fue necesario en el ejemplo).
- Derivar respecto al tiempo las ecuaciones de restricción, agregarlas al sistema y transformar una variable de estado en algebraica por cada restricción.
- Al derivar, llamar $\dot{x}_i(t)$ a las derivadas de los estados $x_i(t)$ y $dx_j(t)$ a las derivadas de las variables algebraicas $x_j(t)$ que dejaron de ser estados.
- Verificar que el nuevo sistema sea causalizable. Si no lo es, se debe aplicar nuevamente el procedimiento.

# Organización de la Presentación

# El índice de perturbación de una DAE

- Los sistemas de DAEs que no contienen lazos algebraicos y que pueden causalizarse completamente utilizando las Reglas 1 y 2 se denominan DAEs de índice 0.
- Un sistema con lazos algebraicos del cual se puede obtener la derivada del vector de estados $\dot{x}$ sin modificar el sistema se denomina DAE de índice 1.
- Cuando un sistema bien formulado no se puede causalizar se dice que es una DAE de índice alto.
- El circuito RC de la Ec.(3.14) tiene índice 2 ya que fue necesario aplicar una única vez el algoritmo de Pantelides para que nos quede un sistema de índice 1.
- Si en un sistema debemos aplicar dos veces el algoritmo para llegar a una DAE de índice 1, entonces diremos que el sistema tiene índice 3, y así sucesivamente.

# Ejemplo con Restricciones Mecánicas

El modelo del péndulo de la Fig.3.4 está dado por el sistema de DAEs de la Ec.(3.18).

$$\dot{x}(t) - v_x(t) = 0 \qquad (3.18a)$$
$$\dot{y}(t) - v_y(t) = 0 \qquad (3.18b)$$
$$m\ \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L}\ F(t) = 0 \qquad (3.18c)$$
$$m\ \dot{v}_y(t) + \frac{y(t)}{L}\ F(t) - m\ g = 0 \qquad (3.18d)$$
$$x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 = 0 \qquad (3.18e)$$

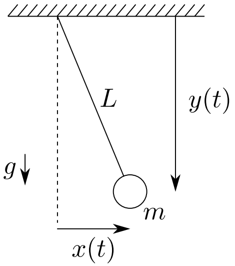


Figura 3.4: Péndulo

Al igual que en el circuito RC, la última ecuación no tiene incógnitas.

# Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Siguiendo el algoritmo de Pantelides y derivando la ecuación de restricción, se obtiene

$$\dot{x}(t) - v_x(t) = 0 \tag{3.19a}$$
$$dy(t) - v_y(t) = 0 \tag{3.19b}$$
$$m\ \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L}\ F(t) = 0 \tag{3.19c}$$
$$m\ \dot{v}_y(t) + \frac{y(t)}{L}\ F(t) - m\ g = 0 \tag{3.19d}$$
$$x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 = 0 \tag{3.19e}$$
$$2\ x(t)\ \dot{x}(t) + 2\ y(t)\ dy(t) = 0 \tag{3.19f}$$

donde decidimos además que $y(t)$ no sea más variable de estado por lo que $dy(t)$ es una derivada ficticia.

# Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Tras tres pasos de ordenamiento sobre el sistema (3.19) resulta

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) - v_x(t) &:= 0 \\
dy(t) - v_y(t) &= 0 \\
m\ \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L}\ F(t) &= 0 \\
m\ \dot{v}_y(t) + \frac{y(t)}{L}\ F(t) - m\ g &= 0 \\
x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 &= 0 \\
2\ x(t)\ \dot{x}(t) + 2\ y(t)\ dy(t) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &:= \sqrt{L^2 - x(t)^2} \\
\dot{x}(t) &:= v_x(t) \\
dy(t) &:= -\frac{x(t)}{y(t)}\ \dot{x}(t)
\end{aligned}
$$

Ahora tenemos una nueva ecuación de restricción. Deberemos aplicar entonces nuevamente Pantelides.

# Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Primero reemplazamos las variables algebraicas de la ecuación de restricción $dy(t) - v_y(t) = 0$ en función de las variables de estado aprovechando las ecuaciones ya causalizadas:

$$
\begin{aligned}
y(t) &:= \sqrt{L^2 - x(t)^2} \quad \text{(está bien porque } x(t) \text{ es estado).} \\
\dot{x}(t) &:= v_x(t) \quad \text{(está bien porque } v_x(t) \text{ es estado).} \\
dy(t) &:= -\frac{x(t)}{y(t)}\,\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{\sqrt{L^2 - x(t)^2}}\,v_x(t)
\end{aligned}
$$

con lo que la ecuación de restricción queda

$$
dy(t) - v_y(t) = -\frac{x(t)}{\sqrt{L^2 - x(t)^2}}\,v_x(t) - v_y(t) = 0 \tag{3.20}
$$

que depende sólo de las variables de estado.

# Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Tras este paso, eliminamos $v_y$ de la lista de variables de estado y su derivada que era $\dot{v}_y$ será ahora la derivada ficticia $dv_y$. Luego, derivando la ecuación de restricción (3.20) obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}\left(-\frac{x(t)}{\sqrt{L^2 - x(t)^2}}\, v_x(t) - v_y(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \\ = -h\left(x(t), \dot{x}(t), v_x(t), \dot{v}_x(t)\right) - dv_y(t) = 0 \tag{3.21}$$

donde $h(x(t), \dot{x}(t), v_x(t), \dot{v}_x(t))$ es la expresión de la derivada del primer término, cuya obtención queda como ejercicio.

# Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Agregando entonces la Ec.(3.21) al sistema de ecuaciones de la Ec.(3.19), tenemos

$$\dot{x}(t) - v_x(t) = 0 \tag{3.22a}$$

$$dy(t) - v_y(t) = 0 \tag{3.22b}$$

$$m\ \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L}\ F(t) = 0 \tag{3.22c}$$

$$m\ dv_y(t) + \frac{y(t)}{L}\ F(t) - m\ g = 0 \tag{3.22d}$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 = 0 \tag{3.22e}$$

$$2\ x(t)\ \dot{x}(t) + 2\ y(t)\ dy(t) = 0 \tag{3.22f}$$

$$-h(x(t), \dot{x}(t), v_x(t), \dot{v}_x(t)) - dv_y(t) = 0 \tag{3.22g}$$

Puede verse que el procedimiento de causalización en este sistema finaliza encontrando un lazo algebraico en 3 variables ($\dot{v}_x(t)$, $F(t)$, $dv_y(t)$).

# Ejemplo con Restricciones Mecánicas

Usando como variable de rasgado $\dot{v}_x(t)$ se obtiene:

$$\dot{x}(t) := v_x(t) \tag{3.23a}$$

$$y(t) := \pm\sqrt{L^2 - x^2} \tag{3.23b}$$

$$dy(t) := \frac{x(t)}{y(t)}\ \dot{x}(t) \tag{3.23c}$$

$$v_y(t) := dy(t) \tag{3.23d}$$

$$dv_y(t) := -h(x(t), \dot{x}(t), v_x(t), \dot{v}_x(t)) \tag{3.23e}$$

$$F(t) := \frac{m\ L}{y(t)}\ (g - dv_y(t)) \tag{3.23f}$$

$$m\ \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L}\ F(t) = 0 \tag{3.23g}$$

# Organización de la Presentación

# Elección de las Variables de Estado

Si observamos el sistema de la Ec.(3.23) podemos ver ciertos problemas:

- El signo de $y(t)$ no queda bien definido.
- La variable $y(t)$ aparece dividiendo en varias ecuaciones.

Mientras asumamos que el péndulo no alcanza un ángulo de $90$ grados respecto de vertical, no habrá problemas ya que podemos tomar siempre la solución positiva para $y(t)$ y nunca ocurrirá que $y(t) = 0$.

Si hubiésemos elegido $y(t)$ como variable de estado en lugar de $x(t)$ tendríamos un problema más grave, por las divisiones por $0$ y por la falta de unicidad de la solución.

La elección de las variables de estado es crucial en los sistemas No Lineales con restricciones.

# Organización de la Presentación

# Organización de la Presentación

# Diagramas de Bloques y Relaciones Causales

Los Diagramas de Bloques permiten expresar de manera gráfica relaciones matemáticas entre variables, agregando relaciones causales entre las mismas. Dada una relación

$$K\ a_1(t) - a_2(t) = 0$$

se asume que $a_2(t) := K\ a_1(t)$ o bien que $a_1(t) := \frac{a_2(t)}{K}$, lo que se traduce en los dos posibles Diagrama de Bloques de la Figura 3.5.

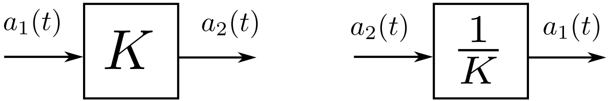


Figura 3.5: Dos posibles Diagramas de Bloques para $K\ a_1(t) - a_2(t) = 0$.

# Diagramas de Bloques y Relaciones Causales

- La falta de unicidad en la representación de las relaciones matemáticas hace que los DBs no sean una herramienta muy adecuada para construir modelos.
- Asumir una determinada causalidad entre variables de un modelo puede provocar que luego no podamos conectar dicho modelo con otro.
- Por esto, las DAEs y los lenguajes acausales en general son las representaciones más adecuadas para las tareas de modelado.

Sin embargo, los DBs son una herramienta útil en muchos casos ya que permiten analizar de manera simple algunas propiedades importantes de los modelos que representan.

# Organización de la Presentación

# Procedimiento para obtener un DB desde una DAE

1. Elegir una variable de la DAE y colocar una flecha en el DB con dicha señal.
2. Tomar una señal del DB que no esté calculada por ningún bloque.
3. Buscar una ecuación de la DAE donde aparezca dicha variable:
   - Si es un estado $x_i(t)$ usar la ecuación $x_i(t) = \int \dot{x}_i(t)$.
   - Si es una derivada $\dot{x}_i(t)$ y no quedara otra ecuación, usar $\dot{x}_i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_i(t)$.
4. Agregar un bloque que calcule la señal según la ecuación elegida.
5. Eliminar la ecuación utilizada de la DAE.
6. Si las variables de entrada al bloque agregado ya están calculadas en el DB como salida de otro bloque, conectarlas.
7. Si queda alguna variable en el DB que aún no es salida de ningún bloque, volver al paso 2.

# De la DAE al DB - Ejemplo

Veremos entonces estos pasos sobre el modelo del circuito RLC serie de la Ec.(3.1), simplificado tras eliminar las ecuaciones triviales:

$$u_R(t) - R\ \dot{q}(t) = 0 \tag{3.24a}$$

$$q(t) - C\ u_C(t) = 0 \tag{3.24b}$$

$$\phi(t) - L\ \dot{q}(t) = 0 \tag{3.24c}$$

$$u_S(t) - v(t) = 0 \tag{3.24d}$$

$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0 \tag{3.24e}$$

# De la DAE al DB - Ejemplo

$$u_R(t) - R\ \dot{q}(t) = 0$$
$$q(t) - C\ u_C(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ \dot{q}(t) = 0$$
$$u_S(t) - v(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

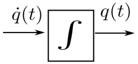


Figura 3.6: Construcción del DB a partir del sistema de DAEs de la Ec.(3.24).

# De la DAE al DB - Ejemplo

$$u_R(t) - R\ \dot{q}(t) = 0$$
$$q(t) - C\ u_C(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\ \dot{q}(t) = 0$$
$$u_S(t) - v(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

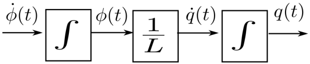


Figura 3.7: Construcción del DB a partir del sistema de DAEs de la Ec.(3.24).

# De la DAE al DB - Ejemplo

$$u_R(t) - R\,\dot{q}(t) = 0$$
$$q(t) - C\,u_C(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\,\dot{q}(t) = 0$$
$$u_S(t) - v(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

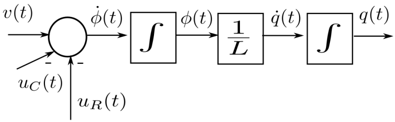


Figura 3.8: Construcción del DB a partir del sistema de DAEs de la Ec.(3.24).

# De la DAE al DB - Ejemplo

$$u_R(t) - R\,\dot{q}(t) = 0$$
$$q(t) - C\,u_C(t) = 0$$
$$\phi(t) - L\,\dot{q}(t) = 0$$
$$u_S(t) - v(t) = 0$$
$$\dot{\phi}(t) + u_R(t) + u_C(t) - u_S(t) = 0$$

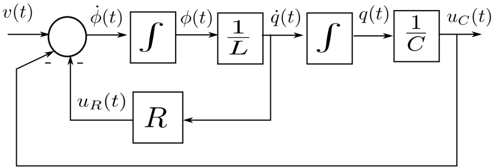


Figura 3.9: Construcción del DB a partir del sistema de DAEs de la Ec.(3.24).

# Organización de la Presentación

# Diagramas de Bloques y Lazos Algebraicos

Consideremos nuevamente el ejemplo del circuito RL que contenía un lazo algebraico, dado por la Ec.(3.8). Eliminando las ecuaciones triviales y alias obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(t) - R_1\ i_{R_1}(t) &= 0\\
\dot{\phi}(t) - R_2\ i_{R_2}(t) &= 0\\
\phi(t) - L\ i_L(t) &= 0\\
i_L(t) + i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) &= 0
\end{aligned}$$

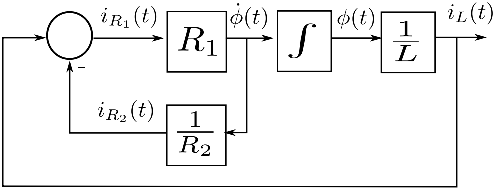


Figura 3.10: DB con lazo algebraico.

El lazo algebraico se refleja en el DB en un camino cerrado a través de bloques estáticos.

# Organización de la Presentación

# Diagramas de Bloques y Sistemas de Índice Alto

Si construimos ahora un Diagrama de Bloques para el modelo del péndulo obtenemos el que se muestra en la Figura 3.11.

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) - v_x(t) &= 0 \\
\dot{y}(t) - v_y(t) &= 0 \\
m\ \dot{v}_x(t) + \frac{x(t)}{L}\ F(t) &= 0 \\
m\ \dot{v}_y(t) + \frac{y(t)}{L}\ F(t) - m\ g &= 0 \\
x(t)^2 + y(t)^2 - L^2 &= 0
\end{aligned}$$

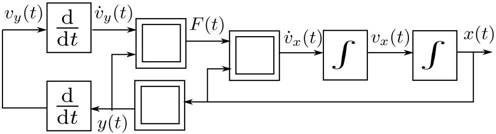


Figura 3.11: Diagrama de Bloques a partir de la Ec.(3.18).

El problema de índice alto se refleja en la presencia de derivadores.