Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT255I - Análisis Funcional
2º semestre 2023

MAT255I
Análisis Funcional

Sebastián Guerra (sebastian.guerrap@uc.cl)
Profesor: Nikola Kamburov (nikamburov@mat.uc.cl)

Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir

Versión: 23 de agosto de 2023

Índice general

Capítulo 2

Espacios de Banach

2.1. Nociones básicas

Definición 2.1.1 (Espacios métricos)**.** Un espacio métrico (X, d) y $d : X \times X \to [0, \infty)$ la métrica que satisface:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría) $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definición 2.1.2. Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en V es una función $||\cdot|| : V \to [0, \infty)$ que satsiface:

1. $||v|| = 0 \iff v = 0$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. (Desigualdad triangular) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Una función $||\cdot|| : V \to [0, \infty)$ que satisface solo 2. y 3. se llama semi-norma .

Una espacio vectorial V con una norma se llama Espacio normado $(V, ||\cdot||)$.

Proposición 2.1.1. $(V, ||\cdot||)$ *define un espacio métrico con métrica* $d(v, w) := ||v - w||$.

Ejemplo:

- $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

- En $\mathbb{R}^2$, $|(x_1, x_2)| := |x_1|$ define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1,\ldots,n} \{x_k\}$ es una norma.
-

$$|x|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

Seba *Añadir dibujos de norma infinito y norma 1*

Proposición 2.1.2. *En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ todas normas son equivalentes: si $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ son 2 normas, existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{1}{c}||v||_2 \leq ||v||_1 \leq c||v||_2, \quad \forall v \in V$$

Definición 2.1.3. Sea X un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

Ejemplo: $C_\infty([0,1]) = C([0,1])$ (funciones continuas)

Proposición 2.1.3. $||f||_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ *define una norma en $C_\infty(X)$.*

Demostración.

1. $||f||_\infty = 0 \iff f(x) = 0\, \forall x \in X$.

2.
$$\begin{aligned} ||\lambda f||_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot ||f||_\infty \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en $||\cdot||_\infty$

$$f_n \to f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Ejemplo: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{\{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : ||a||_p < \infty\}$$

donde

$$||a||_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{f : X \to \mathbb{K}\, \sigma\text{-medibles, tales que} ||f||_{L^p} < \infty\}$$

donde

$$||f||_{L^p} := \left(\int |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}$$

$$||f||_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_x |f|$$

Ejemplo: $X = [0, 1]$, $\sigma =$ medida de Lebesgue. En $C([0, 1])$ definimos

$$||f||_\infty = \sup |f(x)|$$
$$||f||_{L^1} = \int |f(x)| \, dx$$

Estas 2 normas no son equivalentes

Definición 2.1.4. Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)
$L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es un espacio de Banach (cuando $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es completo).

Proposición 2.1.4. *$C_\infty(X)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$ de Cauchy.

1. Adivinar el límite f.
2. Probar la convergencia:
$$||f_n - f|| \to 0$$
3. f está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tal que

$$||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo $x \in X$ fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es $\{f_n(x)\}_n$ es Cauchy en $\mathbb{C}$.

$$\implies f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies ||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es $f_n \to f$ uniformemente sobre X.

$\implies f$ es continua sobre X.

¿Por qué f es acotada?

Considere $\varepsilon = 1$

$$\implies ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \leq 1$$

cuando $n \geq \bar{N} := N(1)$.

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \\ &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

Definición 2.1.5. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es sumable si

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} v_n$$

converge.
$\displaystyle\sum_n v_n$ es absolutamente sumable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||v_n||$$

converge.

■

Proposición 2.1.5. *Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es absolutamente sumable, entonces, $\{S_m\}$ es Cauchy*

Teorema 2.1.6. *Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

Demostración. $\Longleftarrow$:

1. Tome una sucesión $\{v_n\}$ de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge. $v_{n_k} \to v$ en V. Fije $\varepsilon > 0$. $\implies$ $||v_m - v|| \leq \underbrace{||v_m - v_{n_k}||}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{||v_{n_k} - v||}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$, tomando k, m suficientemente grandes.

2. Dos trucos: Podemos "acelerar" la convergencia. Existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$||v_{n_{k+1}} - v_{n_k}|| \leq 2^{-k} \tag{2.1}$$

$$||v_n - v_m|| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$n_k := N_1 + \ldots + N_k$

Afirmamos que $\{v_{n_k}\}$ converge.

Truco de la suma telescopica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^{m} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \to \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \to \infty} S \in V$$

$$\implies v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \to \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

2.2. Operadores y funcionales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} T : C([0,1],\mathbb{C}) &\to C([0,1],\mathbb{C}) \\ f &\to F(x) = \int_0^x f(y)\,dy \end{aligned}$$

T es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y<x\}} f(y)\,dy$$

Definición 2.2.1. V, W son 2 espacios vectoriales.
$T : V \to W$ es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} T : C([0,1]) &\to C([0,1]) \\ f &\to \int_0^1 \underbrace{K(x,y)}_{\text{Kernel}} f(y)\,dy := Tf(x) \end{aligned}$$

operador integral. Cuando $K \in C([0,1]^2), T$ está bien definida.

En dim ∞ vamos a exigir que los operadores lineales sean continuos .

Definición 2.2.2. $T : V \to W$, V, W son espacios métricos. Decimos que T es continuo si

$$T^{-1}(O) \overset{ab}{\subseteq} V,\ \forall O \overset{ab}{\subseteq} V$$

$$\iff T^{-1}(C) \overset{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \overset{cerr}{\subseteq} W$$

$\iff$ $v_n \to v$ en V entonces $Tv_n \to Tv$ en W.

Teorema 2.2.1. *Sean V, W espacios normados. Entonces $T : V \to W$ operador lineal es continuo si y solo si*

$$||Tv||_W \leq C||v|| \quad \forall v \in V \tag{2.2}$$

para alguna constante C.

Definición 2.2.3. Operador lineal que satisface 1,2 se llama acotado .

Demostración. $\implies$: Sea T continuo. $B := \{||w||_W < 1\}$

$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : ||v||_V < r\}$$

pues $T^{-1}(B)$ es abierto

$$\implies T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : ||v||_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio $\frac{r}{2}$.

$$||T\bar{v}||_W < 1$$

Todo $v \in V, v \neq 0$ se puede escribir como $v = \frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V$

Para algún $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$||Tv||_W = ||T(\frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V)||_W$$

$$= ||\frac{2}{r}||v||_V T(\bar{v})||_W$$

$$= \frac{2}{r}||v||_V||T\bar{v}||_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r}||v||_V \quad \forall v \neq 0$$

∎

Ejemplo:

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$$

es acotado en $(C([0,1]), ||||_\infty)$

$$\begin{aligned}|Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y)|}_{\leq M} |f(y)|\,dy \\ &\leq M\int_0^1 |f(y)|\,dy \leq M||f||_\infty \quad \forall x \implies ||Tf||_\infty \leq M||f||_\infty\end{aligned}$$

Definición 2.2.4. Sean V, W espacios normados. Defina $\mathcal{B}(V,W)$ como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de V a W.
Obviamente $\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio vectorial.

Norma operador $T : V \to W$:

$$||T|| := \sup_{||v||=1} ||Tv||$$

Obviamente, $T \in \mathcal{B}(V,W), ||T|| < \infty$

$$||Tv|| \leq C \underbrace{||v||}_{1} = C$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

De hecho, para $T \in \mathcal{B}(V,W)$

$$\begin{aligned}||T|| &= \sup_{v\neq 0} \frac{||Tv||}{||v||} = \sup_{||v||\leq 1} ||Tv|| \\ &= \text{ínf}\{C > 0 : ||Tv|| \leq C||v|| \quad \forall v \in V\}\end{aligned}$$

Tenemos $||Tv|| \leq ||T||||v||$

Teorema 2.2.2. *$\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio normado bajo la norma operador.*

Demostración. 1. $||T|| = 0 \implies ||Tv|| = 0 \forall v \in V$

$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$

2. $||\lambda T|| = |\lambda|||T||$

3. Sea $v \in V, ||v|| = 1$. $\forall T, S \in \mathcal{B}(V, W)$,

$$\begin{aligned} ||(T+S)v|| &= ||Tv + Sv|| \\ &\leq ||Tv|| + ||Sv|| \\ &\leq ||T||||v|| + ||S||||v|| = (||T|| + ||S||)||v|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies ||(T+S)v|| \leq ||T|| + ||S|| \\ &\implies ||T+S|| \leq ||T|| + ||S|| \end{aligned}$$

■

¿Cuándo es $\mathcal{B}(V, W)$ completo?

Teorema 2.2.3. *$\mathcal{B}(V, W)$ es Banach cuando W es Banach.*

Demostración. $T_n \in \mathcal{B}(V, W)$ Cauchy. Queremos demostrar que converge en $|| \cdot ||_{\mathcal{B}(V,W)}$.

1. $\forall v \in V, \{T_n v\}$ es Cauchy en W pues

$$||T_n v - T_n v|| \leq ||T_n - T_w|| \cdot ||v||$$

$\implies$ $\{T_n v\}$ converge. Definimos

$$Tv := \lim_{n\to\infty} T_n v$$

2. ¿Por qué $T \in \mathcal{B}(V, W)$? $\to$ lineal:

$$T(\lambda v) = \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n\to\infty} T_n v = \lambda T(v)$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$\to$ acotado:

$\{T_n\}$ es Cauchy.

$\{||T_n||\}$ es Cauchy en $[0, \infty)$

$$|||T_n|| - ||T_m||| \leq ||T_n - T_w||$$
$$\implies ||T_n|| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $v \in V, ||v|| = 1$.

$$\begin{aligned} ||Tv|| &= ||\lim_{n\to\infty} T_n v|| \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{||T_n v||}_{\leq C||v||=C} \leq C \end{aligned}$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

3. Convergencia: $T_n \to T$ en norma operador. Sea $v \in V, ||v|| = 1$.

$$||(T_n - T)v||$$

$T_m v \to Tv$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m\to\infty} ||(T_n - T_m)v|| \\ &\leq \underbrace{||T_n - T_m||}_{\leq\varepsilon} \cdot ||v|| \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \\ &\implies ||T_n - T|| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

2.2.1. Aplicaciones

Definición 2.2.5. Sea V un espacio normado sobre $\mathbb{K}$.

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio dual de V.

Teorema 2.2.4. *Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (completos) V^* es un espacio de Banach*

Elementos de V^* se llaman funcionales en V.

Ejemplo: $[\ell^p(\mathbb{C})]^* =?, p \in [1, \infty)$
Resulta que $? = l^q(\mathbb{C})$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Si $v \in \ell^p, w \in \ell^q$
podemos definir un funcional en ℓ^p

$$\ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$
$$v = \{v_k\} \to \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k$$

$$|\ell_w| \leq ||w||_{\ell^q} ||v||_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$ $(\ell^2)^* \simeq \ell^2$

Nota: $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$

Cuando $V = W$ espacio de Banach, entonces $B(V, V)$ es un espacio de Banach. Es también álgebra .

$$T, S \in B(V, V) \implies TS \in B(V, V)$$

$$\begin{aligned} ||TS|| = \sup_{||v||=1} ||T(Sv)|| &\leq ||T|| \cdot ||Sv|| \\ &\leq ||T|| \cdot ||S|| \cdot ||v|| \leq ||T|| \cdot ||S|| \end{aligned}$$

Cómo resolver ecuaciones del tipo

$$(T - \lambda I)u = v$$

donde $v \in V \leftarrow$ un espacio de Banach, $T \in B(V, V)$, $\lambda \neq 0$.

Queremos construir el operador inverso

$$S := (T - \lambda I)^{-1}$$

Cuando $|\lambda| > ||T||$, S se puede construir a través de la serie de Neumann

$$-\lambda(I - \underbrace{\frac{T}{\lambda}}_{||T/\lambda||<1})u = v$$

Sabemos que

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Definimos

$$S := -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \tag{2.3}$$

2.3 define $S \in B(V, V)$ ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

es sumable pues es absolutamente sumable en el espacio de Banach $B(V, V)$.

$\rightarrow$ ¿por qué $(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$?

Para verificar que $S(T - \lambda I) = I$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

$$\begin{aligned} S_N(T-\lambda I) = S_N T - S_N \lambda &= \sum_{n=0}^{N} -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{N} -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n} \\ &= \underbrace{-\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{N+1}}_{\rightarrow 0 \text{ en } B(V,V)} + I \end{aligned}$$

¿Cómo obtener espacios normados/Banach de otros espacios?

Definición 2.2.6 (Espacio cociente)**.** Sea W un subespacio del espacio vectorial V.

$$V/W := \{[v], v \in V\}$$

$[\cdot]$ se define a través $v_1 \sim v_2$ si $v_1 - v_2 \in W$.
Se nota también $V \mod W$ y se llama el espacio cociente.

Es útil denotar $[v] = v + W$

Una construcción de subespacio $W \subseteq V$ tal que V/W es normado es a través de una semi-norma definida en V.

Ejemplo: $V = C^1([0,1])$ = espacio de funciones en $[0,1]$ con derivadas continuas en $[0,1]$.

$$||f|| := \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

$$||f|| = 0 \iff f = \text{const}$$

Teorema 2.2.5. *Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio vectorial semi-normado. Entonces $Z := \{v \in V : ||v|| = 0\}$ es un subespacio de V y*

$$||v + Z||_{V/Z} := ||v|| \tag{2.4}$$

define una norma en V/Z.

Demostración.

1. Z es un subespacio vectorial.

$$z_1, z_2 \in Z \implies z_1 + z_2 \in Z$$

$$||z_1 + z_2|| \leq ||z_1|| + ||z_2|| = 0$$

$$z \in Z \implies \lambda z \in Z$$

   Así, V/Z tiene la estructura de un espacio vectorial.

2. Tenemos que comprobar que 2.4 es una buena definición:

   Si v_1, v_2 son 2 representantes de $[v]$:

$$v_1 = v_2 + z, \quad z \in Z$$

$$\begin{aligned} ||v_1|| \leq ||v_2|| + ||z|| &\implies ||v_1|| \leq ||v_2|| \\ ||v_2|| \leq ||v_1|| &\implies ||v_1|| = ||v_2|| \end{aligned}$$

$$||v + z||_{V/Z} = 0$$
$$\implies v + Z = Z \implies v \in Z$$

Las otras 2 proposiciones se heredan de manera obvia

■

$C^1([0,1])/const$ es un espacio normado con la norma inducida.

Otra construcción similar:

Proposición 2.2.6. *Si* $W \overset{cerr}{\subseteq} V$ *subespacio cerrado de un espacio normado* $(V, ||\cdot||)$, *entonces* V/W *tiene una norma:*

$$||[v]||_{V/W} := \inf_{w \in W} ||v - w||$$

Demostración. En ayudantía ■

Completación de espacios normados

Definición 2.2.7. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. La completación de V es un espacio de Banach $(\tilde{V}, ||\cdot||_{\tilde{V}})$ con una aplicación lineal

$$\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \to \tilde{V}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$ es uno a uno
2. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$ es denso en $\tilde{V}$
3. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$ es una isometría:

$$||\mathcal{J}_{\tilde{V}}(v)||_{\tilde{V}} = ||v||_V \quad \forall v \in V$$

Teorema 2.2.7. *Todo espacio normado V tiene una completación. Esta es única en el siguiente sentido:*
Seba *hacer dibujo*
$\tilde{V} = \{sucesiones\ de\ Cauchy\ en\ V\ que\ convergen\}$
$\{v_n\} \sim \{w_n\}$ *si* $||v_n - w_n|| \to 0$
Sea $\tilde{v} \in \tilde{V}$
Seba *ESTOY HASTA EL PICO*

2.3. El teorema de Baire

(X, d) espacio métrico.

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$
$$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

$O \subseteq X$ es abierto si $\forall x \in O, \exists B_r(x) \in O$. $\bigcup_\alpha O_\alpha$ es abierto.

$F \subseteq X$ es cerrado si F^c es abierto. $\bigcap_\alpha F_\alpha$ es cerrado.

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$$

$$\mathring{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$$

$$E \overset{denso}{\subseteq} X \text{ si } \overline{E} = X$$

Definición 2.3.1. a Seba *arreglar*

esencialmente, denso en ninguna parte E significa que E no contiene bolas abiertas.

Ejemplo: $E = \{x\}$ es denso en niguna parte.

Proposición 2.3.1. *F es cerrado y denso en ninguna parte $\iff$ F^c es abierto y denso.*

La noción de categoria de Baire

Definición 2.3.2. $E \subseteq X$ cat I si $E = \bigcup_k E_k$ donde E_k es denso en ninguna parte.

Ejemplo: $\mathbb{Q}$ es cat I.

Definición 2.3.3. Si G tiene G^c que es cat I, decimos que G es **genérico**.

Definición 2.3.4. E es de cat II si no es de primera categoría.

Observaciones

1. Si E es cat I, y $F \subseteq E$ es cat I

$$\begin{aligned} & F \subseteq E \subseteq \bigcup_k E_k \\ \Longrightarrow \; & F = \bigcup_k E_k \cap F, \quad \overline{E_k \cap F} \subseteq \overline{E_k} \\ \Longrightarrow \; & E_k \cap F \text{ son densos en niguna parte.} \end{aligned}$$

2. Si $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de cat I, $\bigcup_k E_k = \bigcup_k \bigcup_l \underbrace{E_{kl}}_{\text{denso en NP}}$ es una unión contable.

3. No hay conexión entre conjuntos de cat I y conjuntos despreciables del punto de vista de teoría de la medida.

Ejemplo: $G_j = \bigcup_n (q_n - 2^{-(n+j+1)}, q_n + 2^{-(n+j+1)})$
$\{q_j\}$ enumeración de $\mathbb{Q}$.
G_j es abierto y denso en $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \; & E_j = G_j^c \text{ es cerrado y denso en NP} \\ \Longrightarrow \; & E := \bigcup_j E_j \text{ es cat I} \end{aligned}$$

y de plena medida en $\mathbb{R}$.
$\iff$ E^c es de medida 0 de Lebesgue.

$$
\begin{aligned}
|E^c| &= |\bigcap E_j^c| \\
&= |\bigcap G_j| \leq |G_j| \\
|G_j| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+j+1)} \\
&= 2^{-j} \xrightarrow{j\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

Teorema 2.3.2 (Teorema de Baire)**.** *Sea (X, d) **completo**. Entonces, X es de la cat II en sí mismo.*

Demostración. Supongamos que X es de cat I en sí:

$$X = \bigcup_k \underbrace{E_k}_{\text{densos en NP}} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k}}_{=F_k \text{ denso en NP y cerrado}}$$

Llegaremos a una contradicción si demostramos que hay un $x \notin F_k, \quad \forall k$.

$F_1 \neq X$. $\overline{B_{r_1}}(x_1) \subseteq F^c$, $\overline{B_{r_2}}(x_2) \subseteq F_2^c$.

De esta manera obtenemos bolas cerradas $\overline{B_{r_k}}(x_k)$ tales que

1. $$\overline{B_{r_{k+1}}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_k}}(x_k)$$

2. $$\overline{B_{r_k}}(x_k) \subseteq F_k^c$$

3. $$r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2} \implies r_k \to 0$$

$\{x_k\}$ es Cauchy pues:

$$\forall k, l \geq n, x_k, x_l \in \overline{B_{r_n}}(x_n)$$

$$\implies |x_k - x_l| \leq 2r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\implies x_k \to x \in X$$

Como $x_k \in \overline{B_{r_k}} \quad \forall k \geq n$,

$$\implies x = \lim x_k \in \overline{B_{r_n}}(x_n) \subseteq F_n^c$$

Por lo que $x \notin F_n \quad \forall n$.

■

Corolario 2.3.2.1. *$G \subseteq X$ es **genérico** $\implies$ denso en X, con X completo.*

Demostración. Asumimos que G genérico no es denso, entonces hay una bola B

$$\implies \overline{B} \subseteq G^c = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup \overline{E_k}$$

$$\implies \overline{B} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k} \cap \overline{B}}_{\text{cerrados y densos en NP}}$$

Pero $\overline{B}$ es un espacio métrico completo, contradicción con el teorema de Baire. ■

Corolario 2.3.2.2. *X completo, $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$ cerrado.*
Entonces, por lo menos uno F_k contiene una bola.

2.3.1. Aplicaciones

Teorema 2.3.3. *El conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ que no son derivable en nigún punto es **denso** en $C([0,1])$*

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{f \in C([0,1]) : f'(x_*) \text{ existe en un punto } x_* \in [0,1]\}$

Queremos demostrar que $\mathcal{D}$ es cat I en $C([0,1])$.

Por 2.3.2.1, $\mathcal{D}^c$ es genérico $\implies$ denso en $C([0,1])$.

Si $f \in \mathcal{D} \implies f'(x_*)$ existe

$$\implies \lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

existe.

$$\implies |f(x) - f(x_*)| \leq M|x - x_*| \quad \forall x \in [0,1]$$

para algún $M > 0$.

$$\implies \mathcal{D} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

$E_N := \{f \in C([0,1]) : |f(x) - f(x_*)| \leq N|x - x_*| \text{ para algún } x_* \in [0,1]\}$

Estaremos listos si probamos que:

1. E_N es cerrado en $C([0,1])$
2. E_N es denso en ninguna parte.

■