Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT255I - Análisis Funcional
2º semestre 2023

MAT255I
Análisis Funcional

Sebastián Guerra (sebastian.guerrap@uc.cl)
Profesor: Nikola Kamburov (nikamburov@mat.uc.cl)

Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir

Versión: 13 de noviembre de 2023

Índice general

Capítulo 1

Intro al Análisis Funcional

1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ campo de escalares tiene dimensión infinita si $\forall n \in \mathbb{N}$ hay n elementos de V que son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$

Ejemplo: $V = C([0,1], \mathbb{R})$ = funciones reales continuas en $[0,1]$.
$\{1, x, \ldots, x^{n-1}\} \subseteq V$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Reconocemos que existe la operación $\frac{d}{dx}$ definida en $C^\infty([0,1], \mathbb{R})$, funciones suaves, y la operación evaluar en $x = 0$.

Evaluando en $x = 0 \to a_0 = 0$. Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en $x = 0$:

$$a_1 = 0$$

... ■

Demostración alternativa. Reconocemos que hay un producto interno en $V = C([0,1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

$\{f_k = \sin(\pi k x)\}_{k=1}^{n} \subseteq V$

$$\langle \sin(\pi kx), \sin(\pi lx)\rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_k\rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_0, f_l\rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \dots, n$$

■

1.2. Motivación

Ejemplo (Ecuación de Poisson)**:**

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Seba *Aañdir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \to Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución $u \in X$ para ciertos espacios X, Y apropiados.

El Análaisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que comparten las mismas características topológicas/algebraicas/métricas.

1.3. Objeto central: espacio de Banach

Definición 1.3.1 (Espacio de Banach)**.** $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es un espacio normado completo (clave para sacar límites).

$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle\cdot,\cdot\rangle) completos\} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, ||\cdot||)\} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) co$

Seba *Arreglar*

Lógica de inclusiones

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una norma $||\cdot||$

$$||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$$

2. $||\cdot||$ induce una métrica $d(\cdot,\cdot)$

$$d(v, w) = ||v - w||$$

1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

Ejemplo: Cada funcional lineal en $\mathbb{R}$ ($l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) se puede representar como $l(v) = v \cdot w$ para algún vector (único) $w \in \mathbb{R}^n$.
En la situación de dimensión ∞, se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

Teorema 1.4.1 (Representación de Riesz)**.** *Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio de Hilbert y $l : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo . Entonces existe un único $w \in V$, tal que*

$$l(v) = \langle v, w\rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. contraintuitivos .

Ejemplo: $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacta (Heine-Borel).
En $\dim V = \infty$, este teorema es falso.

Proposición 1.4.2. *Sea V un espacio de Banach y sea $B = \{v \in V : ||v|| \leq 1\}$. B es compacto en $V \iff \dim V < \infty$*

Ejemplo: En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subseteq L^p([0,1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.
$\Longrightarrow$ motiva la definición de topologías débiles.

Capítulo 2

Espacios de Banach

2.1. Nociones básicas

2.1.1. Espacios Normados

Definición 2.1.1 (Espacios métricos)**.** Un espacio métrico (X, d) y $d : X \times X \to [0, \infty)$ la métrica que satisface:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría) $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definición 2.1.2. Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en V es una función $|| \cdot || : V \to [0, \infty)$ que satsiface:

1. $||v|| = 0 \iff v = 0$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. (Desigualdad triangular) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Una función $|| \cdot || : V \to [0, \infty)$ que satisface solo 2. y 3. se llama semi-norma .

Una espacio vectorial V con una norma se llama Espacio normado $(V, || \cdot ||)$.

Proposición 2.1.1. $(V, ||\cdot||)$ *define un espacio métrico con métrica* $d(v, w) := ||v - w||$.

Ejemplo:

- $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

- En $\mathbb{R}^2$, $|(x_1, x_2)| := |x_1|$ define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} \{x_k\}$ es una norma.

- $$|x|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

Seba *Añadir dibujos de norma infinito y norma 1*

Proposición 2.1.2. *En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ todas normas son equivalentes: si $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ son 2 normas, existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{1}{c}||v||_2 \leq ||v||_1 \leq c||v||_2, \quad \forall v \in V$$

Definición 2.1.3. Sea X un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

Ejemplo: $C_\infty([0,1]) = C([0,1])$ (funciones continuas)

Proposición 2.1.3. $||f||_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ *define una norma en $C_\infty(X)$.*

Demostración.

1. $||f||_\infty = 0 \iff f(x) = 0\, \forall x \in X$.
2. $$\begin{aligned} ||\lambda f||_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot ||f||_\infty \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty \end{aligned}$$

∎

Convergencia en $||\cdot||_\infty$

$$f_n \to f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Ejemplo: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{\{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : ||a||_p < \infty\}$$

donde

$$||a||_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} & p \in [1,\infty) \\ \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ un espacio de medida.

$$L^p(x,\sigma) := \{f : X \to \mathbb{K}\, \sigma\text{-medibles, tales que} ||f||_{L^p} < \infty\}$$

donde

$$||f||_{L^p} := \left(\int |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}$$

$$||f||_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_x |f|$$

Ejemplo: $X = [0,1]$, $\sigma =$ medida de Lebesgue. En $C([0,1])$ definimos

$$||f||_\infty = \sup |f(x)|$$

$$||f||_{L^1} = \int |f(x)|\,dx$$

Estas 2 normas no son equivalentes

2.1.2. Espacios de Banach

Definición 2.1.4. Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma) $L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es un espacio de Banach (cuando $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es completo).

Proposición 2.1.4. *$C_\infty(X)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$ de Cauchy.

1. Adivinar el límite f.
2. Probar la convergencia:
$$||f_n - f|| \to 0$$
3. f está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tal que

$$||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo $x \in X$ fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es $\{f_n(x)\}_n$ es Cauchy en $\mathbb{C}$.

$$\implies f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies ||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es $f_n \to f$ uniformemente sobre X.

$\implies f$ es continua sobre X.

¿Por qué f es acotada?

Considere $\varepsilon = 1$

$$\implies ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \leq 1$$

cuando $n \geq \bar{N} := N(1)$.

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \\ &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

Definición 2.1.5. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es sumable si

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} v_n$$

converge.
$\sum_n v_n$ es absolutamente sumable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||v_n||$$

converge.

■

Proposición 2.1.5. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es absolutamente sumable, entonces, $\{S_m\}$ es Cauchy*

Teorema 2.1.6. *Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

Demostración. $\Longleftarrow$:

1. Tome una sucesión $\{v_n\}$ de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge. $v_{n_k} \to v$ en V. Fije $\varepsilon > 0$. $\implies$ $||v_m - v|| \leq \underbrace{||v_m - v_{n_k}||}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{||v_{n_k} - v||}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$, tomando k, m suficientemente grandes.
2. Dos trucos: Podemos "acelerar" la convergencia. Existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$||v_{n_{k+1}} - v_{n_k}|| \leq 2^{-k} \tag{2.1}$$

$$||v_n - v_m|| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$n_k := N_1 + \ldots + N_k$

Afirmamos que $\{v_{n_k}\}$ converge.

Truco de la suma telescopica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^{m} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \to \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \to \infty} S \in V$$

$$\implies v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \to \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

2.2. Operadores y funcionales

2.2.1. Operadores Lineales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} T : C([0,1],\mathbb{C}) &\to C([0,1],\mathbb{C}) \\ f &\to F(x) = \int_0^x f(y)\,dy \end{aligned}$$

T es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y<x\}} f(y)\,dy$$

Definición 2.2.1. V, W son 2 espacios vectoriales.
$T : V \to W$ es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} T : C([0,1]) &\to C([0,1]) \\ f &\to \int_0^1 \underbrace{K(x,y)}_{\text{Kernel}} f(y)\,dy := Tf(x) \end{aligned}$$

operador integral. Cuando $K \in C([0,1]^2), T$ está bien definida.

En dim ∞ vamos a exigir que los operadores lineales sean continuos .

Definición 2.2.2. $T : V \to W$, V, W son espacios métricos. Decimos que T es continuo si

$$T^{-1}(O) \overset{ab}{\subseteq} V, \forall O \overset{ab}{\subseteq} V$$

$$\iff T^{-1}(C) \overset{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \overset{cerr}{\subseteq} W$$

$\iff$ $v_n \to v$ en V entonces $Tv_n \to Tv$ en W.

Teorema 2.2.1. *Sean V, W espacios normados. Entonces $T : V \to W$ operador lineal es continuo si y solo si*

$$||Tv||_W \leq C||v|| \quad \forall v \in V \tag{2.2}$$

para alguna constante C.

Definición 2.2.3. Operador lineal que satisface (2,2) se llama acotado .

Demostración. $\Longrightarrow$: Sea T continuo. $B := \{||w||_W < 1\}$

$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : ||v||_V < r\}$$

pues $T^{-1}(B)$ es abierto

$$\Longrightarrow T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : ||v||_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio $\frac{r}{2}$.

$$||T\bar{v}||_W < 1$$

Todo $v \in V, v \neq 0$ se puede escribir como $v = \frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V$

Para algún $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$||Tv||_W = ||T(\frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V)||_W$$

$$= ||\frac{2}{r}||v||_V T(\bar{v})||_W$$

$$= \frac{2}{r}||v||_V||T\bar{v}||_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r}||v||_V \quad \forall v \neq 0$$

∎

Ejemplo:

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$$

es acotado en $(C([0,1]), ||||_\infty)$

$$\begin{aligned}|Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y)|}_{\leq M}|f(y)|\,dy \\ &\leq M\int_0^1 |f(y)|\,dy \leq M||f||_\infty \quad \forall x \implies ||Tf||_\infty \leq M||f||_\infty\end{aligned}$$

Definición 2.2.4. Sean V, W espacios normados. Defina $\mathcal{B}(V,W)$ como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de V a W.
Obviamente $\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio vectorial.

Norma operador $T : V \to W$:

$$||T|| := \sup_{||v||=1} ||Tv||$$

Obviamente, $T \in \mathcal{B}(V,W), ||T|| < \infty$

$$||Tv|| \leq C\underbrace{||v||}_{1} = C$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

De hecho, para $T \in \mathcal{B}(V,W)$

$$\begin{aligned}||T|| &= \sup_{v\neq 0}\frac{||Tv||}{||v||} = \sup_{||v||\leq 1}||Tv|| \\ &= \inf\{C > 0 : ||Tv|| \leq C||v|| \quad \forall v \in V\}\end{aligned}$$

Tenemos $||Tv|| \leq ||T||||v||$

Teorema 2.2.2. *$\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio normado bajo la norma operador.*

Demostración. 1. $||T|| = 0 \implies ||Tv|| = 0 \forall v \in V$

$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$

2. $||\lambda T|| = |\lambda| ||T||$

3. Sea $v \in V, ||v|| = 1$. $\forall T, S \in \mathcal{B}(V, W)$,

$$\begin{aligned} ||(T+S)v|| &= ||Tv + Sv|| \\ &\leq ||Tv|| + ||Sv|| \\ &\leq ||T|| ||v|| + ||S|| ||v|| = (||T|| + ||S||) ||v|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies ||(T+S)v|| \leq ||T|| + ||S|| \\ &\implies ||T+S|| \leq ||T|| + ||S|| \end{aligned}$$

■

¿Cuándo es $\mathcal{B}(V, W)$ completo?

Teorema 2.2.3. *$\mathcal{B}(V, W)$ es Banach cuando W es Banach.*

Demostración. $T_n \in \mathcal{B}(V, W)$ Cauchy. Queremos demostrar que converge en $|| \cdot ||_{\mathcal{B}(V,W)}$.

1. $\forall v \in V, \{T_n v\}$ es Cauchy en W pues

$$||T_n v - T_n v|| \leq ||T_n - T_w|| \cdot ||v||$$

$\implies \{T_n v\}$ converge. Definimos

$$Tv := \lim_{n \to \infty} T_n v$$

2. ¿Por qué $T \in \mathcal{B}(V, W)$? $\to$ lineal:

$$T(\lambda v) = \lim_{n \to \infty} T_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n \to \infty} T_n v = \lambda T(v)$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$\to$ acotado:

$\{T_n\}$ es Cauchy.

$\{||T_n||\}$ es Cauchy en $[0, \infty)$

$$||\,||T_n|| - ||T_m||\,|| \leq ||T_n - T_w||$$
$$\implies ||T_n|| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $v \in V, ||v|| = 1.$

$$\begin{aligned} ||Tv|| &= ||\lim_{n\to\infty} T_n v|| \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{||T_n v||}_{\leq C||v||=C} \leq C \end{aligned}$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

3. Convergencia: $T_n \to T$ en norma operador. Sea $v \in V, ||v|| = 1.$

$$||(T_n - T)v||$$

$T_m v \to Tv$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m\to\infty} ||(T_n - T_m)v|| \\ &\leq \underbrace{||T_n - T_m||}_{\leq \varepsilon} \cdot ||v|| \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \\ &\implies ||T_n - T|| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

2.2.2. Espacio Dual

Definición 2.2.5. Sea V un espacio normado sobre $\mathbb{K}$.

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio dual de V.

Teorema 2.2.4. *Cuando* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *(completos)* V^* *es un espacio de Banach*

Elementos de V^* se llaman funcionales en V.

Ejemplo: $[\ell^p(\mathbb{C})]^* =?, p \in [1, \infty)$
Resulta que $? = l^q(\mathbb{C})$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Si $v \in \ell^p, w \in \ell^q$
podemos definir un funcional en ℓ^p

$$\begin{aligned} \ell_w &: \ell^p(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ v &= \{v_k\} \to \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k \end{aligned}$$

$$|\ell_w| \leq ||w||_{\ell^q} ||v||_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$ $(\ell^2)^* \simeq \ell^2$

Nota: $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$

Cuando $V = W$ espacio de Banach, entonces $B(V, V)$ es un espacio de Banach. Es también álgebra .

$$T, S \in B(V, V) \implies TS \in B(V, V)$$

$$\begin{aligned} ||TS|| = \sup_{||v||=1} ||T(Sv)|| &\leq ||T|| \cdot ||Sv|| \\ &\leq ||T|| \cdot ||S|| \cdot ||v|| \leq ||T|| \cdot ||S|| \end{aligned}$$

Cómo resolver ecuaciones del tipo

$$(T - \lambda I)u = v$$

donde $v \in V \leftarrow$ un espacio de Banach, $T \in B(V, V)$, $\lambda \neq 0$.

Queremos construir el operador inverso

$$S := (T - \lambda I)^{-1}$$

Cuando $|\lambda| > ||T||$, S se puede construir a través de la serie de Neumann

$$-\lambda(I - \underbrace{\frac{T}{\lambda}}_{||T/\lambda||<1})u = v$$

Sabemos que

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Definimos

$$S := -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \tag{2.3}$$

2.3 define $S \in B(V, V)$ ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

es sumable pues es absolutamente sumable en el espacio de Banach $B(V, V)$.

$\rightarrow$ ¿por qué $(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$?

Para verificar que $S(T - \lambda I) = I$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

$$\begin{aligned} S_N(T - \lambda I) = S_N T - S_N \lambda &= \sum_{n=0}^{N} -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{N} -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \\ &= \underbrace{-\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{N+1}}_{\to 0 \text{ en } B(V,V)} + I \end{aligned}$$

2.2.3. Espacio cociente

¿Cómo obtener espacios normados/Banach de otros espacios?

Definición 2.2.6 (Espacio cociente)**.** Sea W un subespacio del espacio vectorial V.

$$V/W := \{[v], v \in V\}$$

$[\cdot]$ se define a través $v_1 \sim v_2$ si $v_1 - v_2 \in W$.
Se nota también $V \mod W$ y se llama el espacio cociente.

Es útil denotar $[v] = v + W$

Una construcción de subespacio $W \subseteq V$ tal que V/W es normado es a través de una semi-norma definida en V.

Ejemplo: $V = C^1([0,1])$ = espacio de funciones en $[0,1]$ con derivadas continuas en $[0,1]$.

$$||f|| := \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

$$||f|| = 0 \iff f = \text{const}$$

Teorema 2.2.5. *Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio vectorial semi-normado. Entonces $Z := \{v \in V : ||v|| = 0\}$ es un subespacio de V y*

$$||v + Z||_{V/Z} := ||v|| \tag{2.4}$$

define una norma en V/Z.

Demostración. 1. Z es un subespacio vectorial.

$$z_1, z_2 \in Z \implies z_1 + z_2 \in Z$$

$$||z_1 + z_2|| \leq ||z_1|| + ||z_2|| = 0$$

$$z \in Z \implies \lambda z \in Z$$

Así, V/Z tiene la estructura de un espacio vectorial.

2. Tenemos que comprobar que 2.4 es una buena definición:

   Si v_1, v_2 son 2 representantes de $[v]$:

$$v_1 = v_2 + z, \quad z \in Z$$

$$\begin{aligned} ||v_1|| \leq ||v_2|| + ||z|| &\implies ||v_1|| \leq ||v_2|| \\ ||v_2|| \leq ||v_1|| &\implies ||v_1|| = ||v_2|| \end{aligned}$$

$$||v + z||_{V/Z} = 0$$

$$\implies v + Z = Z \implies v \in Z$$

   Las otras 2 proposiciones se heredan de manera obvia

■

$C^1([0,1])/const$ es un espacio normado con la norma inducida.

Otra construcción similar:

Proposición 2.2.6. *Si* $W \overset{cerr}{\subseteq} V$ *subespacio cerrado de un espacio normado* $(V, ||\cdot||)$*, entonces* V/W *tiene una norma:*

$$||[v]||_{V/W} := \inf_{w \in W} ||v - w||$$

Demostración. En ayudantía ■

2.2.4. Completación de espacios normados

Definición 2.2.7. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. La completación de V es un espacio de Banach $(\tilde{V}, ||\cdot||_{\tilde{V}})$ con una aplicación lineal

$$\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \to \tilde{V}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$ es uno a uno
2. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$ es denso en $\tilde{V}$
3. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$ es una isometría:

$$||\mathcal{J}_{\tilde{V}}(v)||_{\tilde{V}} = ||v||_V \quad \forall v \in V$$

Teorema 2.2.7. *Todo espacio normado V tiene una completación. Esta es única en el siguiente sentido:*
Seba *hacer dibujo*
$\tilde{V} = \{\textit{sucesiones de Cauchy en } V \textit{ que convergen}\}$
$\{v_n\} \sim \{w_n\}$ *si* $||v_n - w_n|| \to 0$
Sea $\tilde{v} \in \tilde{V}$
Seba ESTOY HASTA EL PICO

2.3. El teorema de Baire

2.3.1. Categorias de Baire

(X, d) espacio métrico.

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

$O \subseteq X$ es abierto si $\forall x \in O, \exists B_r(x) \in O$. $\bigcup_\alpha O_\alpha$ es abierto.

$F \subseteq X$ es cerrado si F^c es abierto. $\bigcap_\alpha F_\alpha$ es cerrado.

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$$

$$\mathring{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$$

$$E \overset{denso}{\subseteq} X \text{ si } \overline{E} = X$$

Definición 2.3.1. $E \subseteq X$ es **denso en ninguna parte** si $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$.

esencialmente, denso en ninguna parte E significa que E no contiene bolas abiertas.

Ejemplo: $E = \{x\}$ es denso en niguna parte.

Proposición 2.3.1. *F es cerrado y denso en ninguna parte $\iff$ F^c es abierto y denso.*

La noción de categoria de Baire

Definición 2.3.2. $E \subseteq X$ cat I si $E = \bigcup_k E_k$ donde E_k es denso en ninguna parte.

Ejemplo: $\mathbb{Q}$ es cat I.

Definición 2.3.3. Si G tiene G^c que es cat I, decimos que G es **genérico**.

Definición 2.3.4. E es de cat II si no es de primera categoría.

Observaciones

1. Si E es cat I, y $F \subseteq E$ es cat I

$$\begin{aligned} & F \subseteq E \subseteq \bigcup_k E_k \\ \implies & F = \bigcup_k E_k \cap F, \quad \overline{E_k \cap F} \subseteq \overline{E_k} \\ \implies & E_k \cap F \text{ son densos en niguna parte.} \end{aligned}$$

2. Si $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de cat I, $\bigcup_k E_k = \bigcup_k \bigcup_l \underbrace{E_{kl}}_{\text{denso en NP}}$ es una unión contable.

3. No hay conexión entre conjuntos de cat I y conjuntos despreciables del punto de vista de teoría de la medida.

> **Ejemplo:** $G_j = \bigcup_n (q_n - 2^{-(n+j+1)}, q_n + 2^{-(n+j+1)})$
> $\{q_j\}$ enumeración de $\mathbb{Q}$.
> G_j es abierto y denso en $\mathbb{R}$.
>
> $$\begin{aligned} &\implies E_j = G_j^c \text{ es cerrado y denso en NP} \\ &\implies E := \bigcup_j E_j \text{ es cat I} \end{aligned}$$
>
> y de plena medida en $\mathbb{R}$.
> $\iff E^c$ es de medida 0 de Lebesgue.
>
> $$\begin{aligned} |E^c| &= |\bigcap E_j^c| \\ &= |\bigcap G_j| \leq |G_j| \\ |G_j| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+j+1)} \\ &= 2^{-j} \xrightarrow{j\to\infty} 0 \end{aligned}$$

> **Teorema 2.3.2** (Teorema de Baire)**.** *Sea (X,d)* ***completo****. Entonces, X es de la cat II en sí mismo.*

Demostración. Supongamos que X es de cat I en sí:

$$X = \bigcup_k \underbrace{E_k}_{\text{densos en NP}} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k}}_{=F_k \text{ denso en NP y cerrado}}$$

Llegaremos a una contradicción si demostramos que hay un $x \notin F_k, \quad \forall k$.

$F_1 \neq X$. $\overline{B_{r_1}}(x_1) \subseteq F^c$, $\overline{B_{r_2}}(x_2) \subseteq F_2^c$.

De esta manera obtenemos bolas cerradas $\overline{B_{r_k}}(x_k)$ tales que

1. $$\overline{B_{r_{k+1}}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_k}}(x_k)$$

2.
$$\overline{B_{r_k}}(x_k) \subseteq F_k^c$$

3.
$$r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2} \implies r_k \to 0$$

$\{x_k\}$ es Cauchy pues:

$$\forall k, l \geq n, x_k, x_l \in \overline{B_{r_n}}(x_n)$$

$$\implies |x_k - x_l| \leq 2r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\implies x_k \to x \in X$$

Como $x_k \in \overline{B_{r_k}} \quad \forall k \geq n$,

$$\implies x = \lim x_k \in \overline{B_{r_n}}(x_n) \subseteq F_n^c$$

Por lo que $x \notin F_n \quad \forall n$.

$\blacksquare$

Corolario 2.3.2.1. *$G \subseteq X$ es **genérico** $\implies$ denso en X, con X completo.*

Demostración. Asumimos que G genérico no es denso, entonces hay una bola B

$$\implies \overline{B} \subseteq G^c = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup \overline{E_k}$$

$$\implies \overline{B} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k} \cap \overline{B}}_{\text{cerrados y densos en NP}}$$

Pero $\overline{B}$ es un espacio métrico completo, contradicción con el teorema de Baire. $\blacksquare$

Corolario 2.3.2.2. *X completo, $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$ cerrado.*
Entonces, por lo menos uno F_k contiene una bola.

2.3.2. Aplicación

Teorema 2.3.3. *El conjunto de funciones continuas en* $[0,1]$ *que no son derivables en nigún punto es* ***denso*** *en* $C([0,1])$

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{f \in C([0,1]) : f'(x_*) \text{ existe en un punto } x_* \in [0,1]\}$

Queremos demostrar que $\mathcal{D}$ es cat I en $C([0,1])$.

Por 2.3.2.1, $\mathcal{D}^c$ es genérico $\implies$ denso en $C([0,1])$.

Si $f \in \mathcal{D} \implies f'(x_*)$ existe

$$\implies \lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

existe.

$$\implies |f(x) - f(x_*)| \leq M|x - x_*| \quad \forall x \in [0,1]$$

para algún $M > 0$.

$$\implies \mathcal{D} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

$E_N := \{f \in C([0,1]) : |f(x) - f(x_*)| \leq N|x - x_*| \text{ para algún } x_* \in [0,1]\}$

Estaremos listos si probamos que:

1. E_N es cerrado en $C([0,1])$
2. E_N es denso en ninguna parte.

1. $f_n \in E_N$ y $f_n \to f$, en $||\cdot||_\infty$.

   $[0,1] \ni x_n^* \to x^*$ (podemos extraer una subsucesión que converge)

$$|f_n(x) - f_n(x_n^*)| \leq N|x - x_n^*| \quad \forall x \in [0,1]$$

   Queremos demostrar que

$$|f(x) - f(x^*)| \leq N|x - x^*|$$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq ||f-f_n||_\infty \leq \varepsilon/2} + |f_n(x) - f_n(x^*)| + \underbrace{|f_n(x^*) - f(x^*)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x^*)| &\leq |f_n(x) - f_n(x^*)| + |f_n(x_n^*) - f_n(x^*)| \\ &\leq N|x - x_n^*| + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N(|x - x^*| + |x^* - x_n^*|) + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N|x - x^*| + \underbrace{2N|x_n^* - x^*|}_{\varepsilon/3} \end{aligned}$$

2. ¿Por qué E_N es denso en NP de X?

$$P_M = \{\text{funciones continuas en } [0,1] \text{ derivables a trozos, } |f'| = M\}$$

son funciones zig-zag. Cuando $M > N$, $P_M \cap E_N = \varnothing$. Además, P_M es denso en $C([0,1])$. Como consecuencia, E_N no puede tener interior no trivial ya que E_N no puede tener una bola abierta (hay funciones de P_M en E_N y P_M es denso).

Mostraremos que P_M es denso.

$$P = \{\text{las funciones continuas lineales a tozos}\} \overset{denso}{\subseteq} C([0,1])$$

Podemos aproximar cada $f \in P$ con una función $g \in P_M$ arbitrariamente bien.

■

2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta

Sean $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ espacios de Banach.

$$T \in \mathcal{B}(X,Y) \implies T^{-1}(O) \overset{ab}{\subseteq} X \quad \forall O \overset{ab}{\subseteq} Y$$

Si T es biyectiva adicionalmente, entonces $S := T^{-1}$ es lineal (no necesariamente acotada). Sin embargo, si S es continua, entonces $S^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq}, \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$

$$\iff T(U) \overset{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$$

Definición 2.3.5. Sea $T : X \to Y$ una aplicación. Decimos que T es abierta si

$$T(U) \overset{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$$

Si $T : X \to Y$ es lineal, continua y biyectiva, entonces $T^{-1} : Y \to X$ es lineal. ¿Es T^{-1} continua?

Lo será cuando T es abierta.

Teorema 2.3.4 (Aplicación Abierta)**.** *Si X, Y son espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y sobreyectiva, entonces T es abierta.*

Corolario 2.3.4.1. *Si X, Y son espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es biyectiva, entonces $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Existen $c, C > 0$ tales que*

$$c||x||_X \leq ||\underbrace{Tx}_{y}||_Y \leq C||x||_X \quad \forall x \in X$$

$$c||T^{-1}y||_X \leq ||y||_Y$$

Demostración del teorema 2.3.4.

1. Será suficiente demostrar que $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$. ($B_r^X = B_r^X(0)$)

   Por linealidad

$$\begin{aligned} T(B_r^X(x)) &= T(x + B_r^X) \\ &= Tx + T(B_r^X) = y + \frac{r}{2}T(B_2^X) \\ &\supseteq y + \frac{r}{2}B_\delta^Y = B_{\frac{\delta r}{2}}^Y(y) \end{aligned}$$

2. Vamos a demostrar que $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^X$ para algún $\delta > 0$

   Por la sobreyectividad:

$$catII \to Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^X)}$$

   Entonces, $\overline{T(B_n^X)} \supseteq B_r^Y(y)$ para algún $n \in \mathbb{N}, r > 0, y \in Y$. Tomamos $\tilde{y}$ tal que $|\tilde{y} - y| \leq \frac{r}{2}$ e $\tilde{y} = T\tilde{x}$ para algún $\tilde{x} \in B_n^X$.

$$T(B^x_{2n}(\tilde{x})) \supseteq \overline{T(B^X_n)} \supseteq B^Y_r(y) \supseteq B^Y_{\frac{r}{2}}(\tilde{y})$$

Restando $T\tilde{x}$

$$T(B^X_{2n}) \supseteq B^X_{\frac{r}{2}}$$

Reescalando

$$\overline{T(B^X_1)} \supseteq B^Y_{\frac{r}{4n}} \quad \delta = \frac{r}{4n}$$

3. Tenemos $\overline{T(B^X_1)} \supseteq B^Y_\delta$. Reescalando

$$\overline{T(B^X_{2^{-k}})} \supseteq B^Y_{\delta 2^{-k}}$$

¿Por qué $T(B^X_2) \supseteq B^Y_\delta$?

Fije $y_0 \in B^Y_\delta$. Podemos encontrar $x_0 \in B^X_1$ tal que

$$||y_0 - Tx_0||_Y < \frac{\delta}{2}$$

$$\implies y_1 := y_0 - Tx_0 \in B^Y_{\delta/2}$$

$\implies$ existe $x_1 \in B^X_{\frac{1}{2}}$ tal que

$$||y_1 - Tx_1|| < \frac{\delta}{4}$$

De esta manera construimos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$, tales que

a) $x_n \in B^X_{2^{-n}}, y_n \in B^Y_{\delta 2^{-n}}$

b) $y_{n+1} = y_n - Tx_n$

$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in X$ porque X es Banach. Veremos que $Tx = y$ y $x \in B^X_2$.

x es convergente puesto que es absolutamente convergente.

$$||x|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_k|| \leq 2$$

Afirmamos que $Tx = y_0$ por construcción.

$$\begin{aligned} Tx &= \lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{n=0}^{N} x_k\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \underbrace{Tx_k}_{y_k - y_{k+1}} \\ &= \lim_{N\to\infty} (y_0 - y_{N+1}) \\ &= y_0 \end{aligned}$$

ya que $y_{N+1} \to 0$.

■

2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado

Definición 2.3.6. Sean X, Y espacios métricos. Decimos que $T : X \to Y$ es **cerrada** si su grafo en $X \times Y$

$$G_T = \{(x, Tx) \in X \times Y\}$$

es cerrado en $X \times Y$.

En otras palabras,

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \in X \times Y \implies (x, y) \in G_T \iff y = Tx$$

Nota: $T : X \to Y$ es continua $\implies$ T es cerrada.

$$x_n \to x \implies Tx_n \to Tx \implies (x_n, Tx_n) \to (x, Tx)$$

Teorema 2.3.5. *Sean X, Y Banach. Entonces, $T \in \mathcal{B}(X, Y) \iff T$ es lineal y cerrada.*

Demostración. $\Longleftarrow$: Utilizaremos el hecho que si X, Y son Banach, entonces $X \times Y$ es Banach.

$$||(x,y)||_{X\times Y} := ||x||_X + ||y||_Y$$

$$G_T := \{(x,Tx)\} \subseteq X \times Y$$

1. G_T es un subespacio de $X \times Y$.
2. $G_T \overset{cerr}{\subseteq} X \times Y$

   Entonces G_T es un espacio de Banach en sí. Tenemos las proyecciones $\Pi_X : G_T \to X$ y $\Pi_Y : G_T \to Y$ continuas y lineales.

   $$T = \Pi_Y \circ (\Pi_X)^{-1}$$

   ya que Π_x es biyectiva, continua y lineal (en un espacio de Banach a otro Banach). Por el teorema 2,3,4,1, Π_X^{-1} es continua. Por lo que $T = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1}$ es continua.

■

Significado Si queremos demostrar que una aplicación lineal $T : X \to Y$ es continua, $x_n \to X \implies Tx_n \to T_x$

Podemos asumir adicionalmente que $TX_n \to Ty$, y demostrar que $y = Tx$

Capítulo 3

Espacios de Hilbert

3.1. Conceptos Básicos

Definición 3.1.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una función $H \times H \to \mathbb{K}$ que satisface

1. Linealidad en $\langle \cdot, y \rangle, \quad \forall y \in H$:

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$
$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

2. (Hermiticidad)

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

(En $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esto es simetría)

3. (Definidad) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = \implies x = 0$

Nota: 1. y 2., implican que $\langle x, \cdot \rangle$ es lineal conjugada en la segunda entrada.

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

Terminología Tal función se llama **forma sesquilineal**

Nota: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una **forma simétrica definida positiva**

Decimos que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio pre-Hilbertiano**

De 1. y 2., $\langle 0, y \rangle = 0$, $\langle x, 0 \rangle = 0$

Definimos $||x|| := \langle x, x \rangle^{1/2}$

Proposición 3.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea H un espacio pre-Hilbertiano*

$$|\, \langle x, y \rangle \,| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad \forall x, y \in H$$

Demostración. Si $y = 0$, la desigualdad es verdadera. Podemos asumir que $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle \\ &= ||x||^2 + \underbrace{\lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle}_{2\operatorname{Re}(\langle x,y \rangle \overline{\lambda})} + |\lambda|^2| \cdot |y||^2 \end{aligned}$$

Evaluando en $\lambda = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{||y||^2}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x||^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle \frac{-\overline{\langle x, y \rangle}}{||y||^2}) \\ 0 &\leq ||x||^2 - 2\frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} + \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} \\ &\implies ||x||^2 \geq \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

■

Proposición 3.1.2. $|| \cdot ||$ *define una norma* H*.*

Demostración. 1. Definidad ✓

2. $||\lambda x|| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \overline{\lambda} ||x||^2)^{1/2} = |\lambda| \cdot ||x||$
3. (Desigualdad triangular)

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + ||y||^2 &\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

■

Proposición 3.1.3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es continuo en* $H \times H$

Demostración. $x_n \to x$ en $||\cdot$ e $y_n \to y$ en $|| \cdot ||$

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq ||x_n - x|| \cdot ||y_n|| + ||x|| \cdot ||y_n - y|| \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

■

Definición 3.1.2. Decimos que $x \perp y$ en el espacio pre-Hilbertiano H si $\langle x, y\rangle = 0$. Si $E \subseteq H$ subconjunto, definimos el **espacio ortogonal**

$$E^\perp := \{x \in H : x \perp y \quad \forall y \in E\}$$

$E^\perp$ es un **subespacio** de H y es cerrado:

$x_n \in E^\perp$ y $x_n \to x$ en H entonces

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0 \quad \forall y \in E$$

Teorema 3.1.4 (Pitagoras)**.** *Si $x_1, \dots, x_n \in H$ (pre-Hilbertiano) son mutuamente ortogonales, entonces*

$$||x_1 + \cdots + x_n||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2$$

Proposición 3.1.5 (Ley del paralelogramo)**.**

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Demostración.

$$||x \pm y||^2 = ||x||^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

Sumando los 2 términos (diagonales), estamos listos. ■

Definición 3.1.3. Decimos que un espacio $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pre-Hilbertiano es un espacio de **Hilbert** si es **completo** respecto $||\cdot||$ inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Ejemplo: $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ es un espacio de Hilbert.

Ejemplo: $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. $\langle \{x_k\}, \{y_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

¿ℓ^p tiene una estructura de espacio de Hilbert? $\iff p = 2$

Ejemplo: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida, definimos

$$L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_X |f|^2 \, d\mu < \infty\}/_\sim$$

$f_1 \sim f_2$ si $\{f_1 \neq f_2\}$ es despreciable.

3.2. Teorema de la Proyección

Sea H un espacio de Hilbert. $C \subseteq R^n$ cerrado y convexo. Existe único $y \in C$ tal que y minimiza la distancia entre x y C.

Definición 3.2.1. Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V. Decimos que C es **convexo** en V si

$$\forall x, y \in C \quad (1-t)x + ty \in C \quad \forall t \in [0, 1]$$

Teorema 3.2.1. *Sea $C \subseteq H$ un subconjunto cerado y convexo del espacio de Hilbert H. Entonces $\forall x \in H, \exists! y = P_C x \in C$ que satisface:*

$$||x - P_C x|| = d(x, C) = \inf_{c \in C} ||x - c||$$

Además, $y = P_C x \iff \operatorname{Re} \langle c - y, x - y \rangle \leq 0, \quad \forall c \in C$

Demostración. Tome $\{y_n\} \subseteq C$, tal que

$$d_n := ||x - y_n|| \xrightarrow{n \to \infty} d := d(x_n, c)$$

$\{y_n\}$ será convergente si es Cauchy, ya que $y_n \to y \in H$. Ya que C es cerrado, de hecho $y \in C$.

Por la ley del paralelogramo, con $v = x - y_n, w = x - y_m$

$$\begin{aligned}
2d_n^2 + 2d_m^2 &= ||v-w||^2 + ||v+w||^2 \\
&= ||y_n - y_m||^2 + ||2x - (y_n + y_m)||^2 \\
&= ||y_n - y_m||^2 + 4\left|\left| x - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C} \right|\right|^2 \\
&\geq ||y_n - y_m||^2 + 4d^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
||y_n - y_m||^2 &\leq 2d_n^2 + d_m^2 - 4d^2 \\
&\xrightarrow{n,m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

por lo que $\{y_n\}$ es Cauchy.

$y = \lim_{n\to\infty} y_n$,

$$||x-y|| = \lim_{n\to\infty} \overbrace{||x-y_n||}^{d_n} = d$$

Este minimizador es el único!. Si hubiera otro $z \neq y$, aplicamos el mismo argumento a $\{y, z, y, z, \ldots\}$ que no converge por construcción, pero es Cauchy, lo que es una contradicción.

$\implies$: Sea $c \in C$ y considere $(1-t)y + tc$, $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
||x - (1-t)y - tc||^2 &= ||x - y - t(c-y)||^2 \\
&= ||x-y||^2 - 2t \operatorname{Re}\langle x-y, c-y\rangle + t^2||c-y||^2 \\
&\geq ||x-y||^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies 2t \operatorname{Re}\langle x-y, c-y\rangle \leq t^2||c-y||^2 \\
&\implies 2\operatorname{Re}\langle x-y, c-y\rangle \leq 0
\end{aligned}$$

$\impliedby$: Evalúe $||x - (1-t)y + tc||^2$ en $t = 1$.

$$\begin{aligned}||x-c||^2 &= ||x-y||^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-y, c-y\rangle + ||c-y||^2 \\ &\implies ||x-c||^2 - ||x-y||^2 = ||c-y||^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-y, c-y\rangle \\ &\implies ||x-c||^2 \geq ||x-y||^2 \quad \forall c \in C\end{aligned}$$

Tenemos igualdad $\iff c = y$. ■

Ejemplo: $W \subseteq H$ es un subespacio $\implies W$ es convexo.

Teorema 3.2.2. *Sea $F \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces $H = F \oplus F^{\perp}$, es decir, que todo $x \in H$ se puede escribir de manera única como $x = y + z$ con $y \in F$ y $z \in F^{\perp}$. Además $y = P_F x, z = P_{F^{\perp}} x$. y*

$$P_F : H \to H$$

es lineal, acotado y satisface:

- $||P_F|| \leq 1$ *(= 1 cuando $F = \{0\}$)*
- $P_F^2 = P_F$
- $\operatorname{Im} P_F = F$, $\ker P_F = F^{\perp}$
- $\langle P_F x_1, x_2\rangle = \langle x_1, P_F x_2\rangle$

Definición 3.2.2. P_F se llama la **proyección ortogonal**

Demostración. Ya que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, la unicidad se cumple.

$$y + z = y' + z' \implies y - y' = z' - z = 0$$

Tome $x \in H$. Define $y = P_F x$. Queremos demostrar que $x : x - y \in F^{\perp}$. Del teorema **??** sabemos que

$$\operatorname{Re}\langle c-y, x-y\rangle \leq 0 \quad \forall c \in F$$

.

$$\implies \operatorname{Re}\langle v, z\rangle \leq 0 \quad \forall v \in F$$

$$\implies \operatorname{Re}\langle \lambda v, z\rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\implies \operatorname{Re}\lambda\langle v, z\rangle \leq 0$$

Seba *añadir align*

tome $\lambda = \overline{\langle v, z\rangle}$

$$\begin{aligned} &\implies \operatorname{Re} |\langle v, z\rangle|^2 \leq 0 \\ &\implies |\langle v, z\rangle| = 0 \implies z \in F^{\perp} \end{aligned}$$

Propiedades de P_F: $x_1 = y_1 + z, \quad x_2 = y_2 + z_2$

$$\begin{aligned} \langle P_F x_1, x_2\rangle &= \langle y_1, x_2\rangle \\ &= \langle y_1, y_2 + z_2\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1, P_F x_2\rangle &= \langle y_1 + z_1, y_2\rangle \\ &= \langle y_1, y_2\rangle \end{aligned}$$

Por lo que P_F es lineal

$$\begin{aligned} \langle P_F(x_1 + x_2), x_3\rangle &= \langle x_1 + x_2, P_F x_3\rangle \\ &= \langle x_1, P_F x_3\rangle + \langle x_2, P_F x_3\rangle \\ &= \langle P_F x_1, x_3\rangle + \langle P_F x_2, x_3\rangle \\ &= \langle (P_F x_1 + P_F x_2), x_3\rangle \end{aligned}$$

$$\iff P_F(x_1 + x_2) = P_F x_1 + P_F x_2$$

$P_F(\lambda x) = \lambda P_F x$ de la misma manera.

$P_F/_F = \operatorname{Id}/_F$

$$\begin{aligned} &\implies P_F^2 x = P_F(P_F x) = P_F x \quad \forall x \in H \\ &\implies P_F^2 = P_F \end{aligned}$$

$||P_F x||^2 = ||y||^2 \leq ||x||^2$ mientras

$$||x||^2 \leq ||y||^2 + ||z||^2$$
$$\implies ||P_F|| \leq 1$$

■

3.3. Teorema de Representación de Riesz

Teorema 3.3.1. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $f \in H^*$ un funcional lineal acotado. Entonces existe único $u \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, u \rangle \quad \forall x \in H$$

Observaciones

1. $||f||_* = ||u||$ por Cauchy-Schwarz
2. $$\begin{aligned} H^* &\to H \\ f &\to u_f \end{aligned}$$

   es una isometría biyectiva, lineal-conjugada. Para todo $v \in H$ define $f_v(x) : \langle x, v \rangle$
3. $f_1 + f_2 \to u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2}$, ya que

   $$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) &= \langle x, u_{f_1} \rangle + \langle x, u_{f_2} \rangle \\ &= \langle x, u_{f_1} + u_{f_2} \rangle \implies u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2} \end{aligned}$$
4. ¿$\lambda f \to u_{\lambda f} = \lambda u_f$?

   $$[\lambda f](x) = \lambda(f(x)) = \lambda \langle x, u_f \rangle = \left\langle x, \overline{\lambda} u_f \right\rangle$$

Nota: Teorema falso. Cuando H es solo espacio pre-Hilbertiano, por ejemplo,

$$H = C([-1,1])$$

con producto interno usual.

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt \in H^*$$

Demostración. Si $f = 0 \implies u = 0$. Asumimos que $f \neq 0$ y consideramos $F := \ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. F es un subespacio de H cerrado. Si $f \neq 0 \implies F \neq H$. Por el teorema de la proyección (3.2.2)

$$H = F \oplus F^{\perp}$$

Elije $z \in F^{\perp} \setminus \{0\}$. Afirmamos que $u = \overline{f(z)} z |z|^2 \neq 0$ satisface $f = \langle \cdot, u \rangle$. Ya que

$$\begin{aligned} f(z)x - f(x)z &\in F \\ \implies f(z)x - f(x)z &\perp z \\ \langle f(z)x, z\rangle - \langle f(x)z, z\rangle &= 0 \\ \implies \left\langle x, \overline{f(z)}z \right\rangle &= f(x)||z||^2 \\ \implies f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(x)}z}{||z||^2} \right\rangle \end{aligned}$$

Entonces $u \in H$ que satisface $f = \langle \cdot, u \rangle$. Es único: si tenemos $u, u' \in H$

$$\begin{aligned} f(x) = \langle x, u\rangle &= \langle x, u'\rangle \\ &\implies \langle x, u - u'\rangle = 0 \quad \forall x \in H \\ &\implies u - u' \in H^{\perp} = \{0\} \end{aligned}$$

■

3.4. Bases Ortonormales

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es LI si $\forall I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A$,

$$\sum_{i\in I} c_i v_i = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i \in I$$

$$\text{Gen}(\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}) = \left\{ \sum_{i\in I} c_i u_i : I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A, c_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Definición 3.4.1. Sea H un espacio de Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es ortonormal (o.n.) si

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \delta \text{ de Kronecker}$$

Suponga que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es o.n.

$$F := \text{Gen}(\{e_i\}_i^n) \subseteq H$$

es un subespacio cerrado. Podemos definir P_F

$$P_F x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i}_{y}$$

Es suficiente demostrar que $x - y \perp F$.

$$\left\langle x - \sum_{x,e_i} e_i, e_k \right\rangle = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

$$||P_F x||^2 \leq ||x||^2$$

Por Pitagoras

$$= \sum_{i=1}^{n} || \langle x, e_i \rangle e_i ||^2 \leq ||x||^2$$
$$\implies \sum_{i=1}^{n} | \langle x, e_i \rangle |^2 \leq ||x||^2$$

Proposición 3.4.1 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sea* $S = \{e_\alpha\}_\alpha$ *un conjunto o.n. Entonces,*

$$\sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq ||x||^2$$

$$\sum_\alpha r_\alpha := \sup\left\{\sum_{i\in I} r_i : I \subseteq A\right\}$$

Demostración. Utilizando $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq ||x||^2$, y tomando supremo. ■

Consecuencias $\{\alpha : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{\alpha \in A : |\langle x, e_\alpha\rangle| \geq \frac{1}{n}\}$ es **contable**: Si es infinito: $|\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 > \frac{1}{n^2}, k = 1, \ldots$. Sumando suficientes términos superaríamos $||x||^2$, que no es posible por Bessel.

Definición 3.4.2.

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha\rangle$$

coeficientes de Fourier respecto a $\{e_\alpha\}$

$$\sum_\alpha |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq ||x||^2$$

¿Cuando tenemos igualdad?

Teorema 3.4.2. *Sea* $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *un subconjunto o.n. del espacio de Hilbert* H*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $$\sum_\alpha |\hat{x}(\alpha)|^2 = ||x||^2$$
2. $\mathcal{B}$ *es* ***maximal*** *en el sentido de:*
   Si $x \in H$*, tal que* $x \perp e_\alpha, \forall \alpha \in A \implies x = 0$
3. $\forall x \in H$,
   $$x = \sum_\alpha \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$$
   donde la suma en el lado derecho tiene solo un número contable de términos no ceros y la suma de estos converge a x *en* $||\cdot||$ *independiente de su orden.*
4. $\mathrm{Gen}(\mathcal{B})$ *es denso en* H

Definición 3.4.3. Decimos que un conjunto $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o.n. es una **base ortonormal** si satisface cualquiera de *1.-4.*

Demostración. 2. $\implies$ *3.* Sea $e_{\alpha_1},\ldots,e_{\alpha_n},\ldots$ una enumeración de los $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}}$ para los cuales $\hat{x}(\alpha)\neq 0$. Por Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}(\alpha_k)|^2 \leq ||x||^2 < \infty$$

$$\implies \sum_{k=n}^{m}|\hat{x}(\alpha_k)|^2 \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Por Pitagoras,

$$||\sum_{k=n^m}\langle x, e_{\alpha_k}\rangle\, e_{\alpha_k}|| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Sea $S_n=\sum_{k=1}^{n}\hat{x}(\alpha_k)e_{\alpha_k}$. $\{S_n\}$ es Cauchy en H

$$\implies S_n \xrightarrow{n\to\infty} S \quad \text{en } H$$

Además

$$\begin{aligned}\langle x-S, e_\alpha\rangle &= \langle x, e_\alpha\rangle - \langle S, e_\alpha\rangle\\ &= \langle x, e_\alpha\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle S_n, e_\alpha\rangle\\ &= \begin{cases}0 & \text{cuando } \alpha\in\mathcal{J}\\ 0 & \text{cuando } \alpha\notin\mathcal{J}\end{cases} \qquad \implies x-S=0 \implies x=S\end{aligned}$$

3. $\implies$ *1.*: Por continuidad de la norma

$$\begin{aligned}||x||^2 &= ||\lim_{n\to\infty}S_n||^2\\ &= \lim_{n\to\infty}||S_n||^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\hat{x}(\alpha_k)|^2\\ &= \sum_{\alpha}|\hat{x}(\alpha)|^2\end{aligned}$$

1. $\implies$ *2.*: obvio

$$||x||^2 = \sum_\alpha |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = 0 \implies x = 0$$

3. $\implies$ *4.*: Si $x \perp e_\alpha, \quad \forall \alpha,$

$$\begin{aligned} &\implies x \perp \text{Gen}(\{e_\alpha\}) \\ &\overset{\text{continuidad}}{\implies} x \perp \overline{\text{Gen}(\{e_\alpha\})} = H \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

■

Ejemplo: ℓ^2, $e_k = \{(0, \ldots, \underbrace{1}_{k}, 0, \ldots)\}, k \in \mathbb{N}$.

$$||x||^2 = \sum |x_i|^2 = \sum |\langle x, e_i \rangle|^2$$

Teorema 3.4.3. *Todo espacio de Hilbert tiene una* ***base ortonormal****.*

Demostración. Utiliza el Lema de Zorn ■

Definición 3.4.4. X espacio métrico es **separable** si existe un subconjunto $C \subseteq X$ contable y denso en X.

Ejemplo: $\ell^p, p \in [1, \infty)$ es separable.

$L^2([0,1])$ es separable. Polinomios con coeficientes $\in \mathbb{K} \overset{\text{denso}}{\subseteq} C([0,1]) \overset{\text{denso}}{\subseteq} L^2([0,1])$

Seba *Faltan los polinomios con coefs* $\in \mathbb{Q}$ cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Teorema 3.4.4. *H es separable si y solo si existe una* ***base ortonormal*** *para H que es* ***contable****. En este caso, toda base o.n. es contable.*

Demostración. $\implies$: $\{x_n\} \subseteq H$ es denso. $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ Descartando posiblemente términos, podemos asumir que $x_1, \ldots, x_n$ son LI $\forall n \in \mathbb{N}$ y todos los descartados pertenecen a $\text{Gen}(\{x_k\})$. De esta manera, $\text{Gen}(\{x_k\})$ es denso en H.

Por Gram-Schmidt producimos una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ tal que, $\text{Gen}(\{y_k\}_{k=1}^n) = \text{Gen}(\{x_k\}_{k=1}^n) \forall n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B} = \{y_k\}$ es un conjunto o.n.

$\mathcal{B}$ es o.n. y $\text{Gen}(\mathcal{B}) = \text{Gen}(\{x_k\})$ es denso en H. Entonces $\mathcal{B}$ es una base ortonormal contable.

$\Longleftarrow$: Sea $\{e_k\}_k$ una base o.n. contable.

$$G_n := \text{Gen}(\{e_k\}_{k=1}^n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}$$

$\Longrightarrow$ $\text{Gen}(\{e_k\}_k) = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$ es denso en H.

$$\bigcup_{n=1}^\infty \hat{G_n} \overset{\text{denso}}{\subseteq} \bigcup_{n=1}^\infty G_n$$

donde $\hat{G_n} = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_k \in \mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}\}$

Seba *añadir cases en vola*

Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ otra base o.n.

$$A_n = \left\{ \alpha \in \mathcal{A} : \left\langle \overbrace{x}^{e_n}, u_\alpha \right\rangle \neq 0 \right\} \text{ es contable}$$

Además, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\langle u_\alpha, e_k \rangle \neq 0 \text{ para algún } k$$

por la maximalidad de la base $\{e_n\}_n$ (que es contable). Entonces, $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ es contable. ■

Vamos a demostrar que todo espacio de Hilbert separable es $\ell^2 = \{\{x_k\} \in \mathbb{K}^n : \sum ||x_k|^2| < \infty\}$

Definición 3.4.5. Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert. Un **isomorfismo** $T : H_1 \to H_2$ se llama **unitario** si

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{H_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \quad \forall x_1, x_2 \in H_1$$

T unitario $\Longrightarrow$ T es una **isometría**:

$$||Tx||_{H_2}^2 = \langle Tx, Tx \rangle_{H_2} = \langle x, x \rangle_{H_1} = ||x||_{H_1}^2$$

Teorema 3.4.5. *Todo espacio de Hilbert separable es unitariamente isomorfo a ℓ^2.*

Demostración. Sea $\{e_n\}$ una base o.n. contable para H.

$$\begin{aligned} H &\to \ell^2 \\ x &\to \hat{x} = (\hat{x}(1), \hat{x}(2), \ldots) \end{aligned}$$

donde $\hat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle$.

Por Parseval,

$$||\hat{x}||_{\ell^2}^2 = \sum_k |\hat{x}(k)|^2 = ||x||^2 < \infty$$

$$\implies \hat{x} \in \ell^2 \implies T \text{ es bien definido}$$

es lineal, inyectivo (por maximalidad), sobreyectivo: si $c \in \ell^2, \sum_{k=1}^n c_k e_k \xrightarrow{H} x_c$, donde

$$\hat{x}_c(k) = \langle x_c, e_k \rangle = c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es una isometría: **Identidad de Parseval**.

$$||Tx||_{\ell^2}^2 = ||x||_H^2$$

Identidad de Polarización:
$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$
$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^1 - i||x-iy||^2)$

Por lo tanto, T preserva el producto interno:

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{\ell^2} = \langle x_1, x_2 \rangle_H$$

■

3.5. Series de Fourier

3.5.1. Series de Fourier y convergencia

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periódica de período 2π.

$F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{T}$ es el círculo unitario.

$$F(e^{i\theta}) = f(\theta)$$

$$\hookrightarrow \tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$$

con

$$\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$$

Vamos a asumir que $\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

$$f \in L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ medibles, periódicas-}2\pi \text{ t.q. } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx < \infty \right\} = L^2([-\pi, \pi])$$

Definimos

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Proposición 3.5.1. $\{e_n\}$ *es un conjunto ortonormal de* $L^2(\mathbb{T})$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n(x)\overline{e_m(x)}\,dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi} e^{inx} e^{-imx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{2\pi} = 1 & n = m \\ \left.\frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\right|_{x=-\pi}^{x=\pi} & n \neq m \end{cases}
\end{aligned}$$

■

Definición 3.5.1. Sea $f \in L^2(\mathbb{T})$. Defina

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \langle f, e_n \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\end{aligned}$$

coeficiente de Fourier.

$$f \to \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$$

serie de Fourier.

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \le N} \hat{f}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

suma de Fourier parcial.

Preguntas:

1. ¿Converge $S_n f$ a f en L^2?
2. ¿Converge $S_N f(x)$ a $f(x)$ puntualmente?

   Si falla para algún x, ¿es este comportamiento raro o genérico?
3. ¿Converge $S_N f$ a f en otras normas (e.g. L^p,p>1)?

Teorema 3.5.2. $f \in L^2(\mathbb{T})$, $S_N f \xrightarrow{L^2} f$ *cuando* $N \to \infty$.

Nota: El enunciado $\iff$, $\mathcal{B} = \{e_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base o.n. para $L^2(\mathbb{T})$

Entonces será suficiente demostrar que $\mathcal{B}$ es maximal:

$$\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies f = 0$$

Teorema 3.5.3. $f \in L^2(\mathbb{T})$. *Entonces,*

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t)\, dt$$

donde

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{2N+1}{2\pi} & x = 0 \\ \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\pi \sin\frac{x}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} S_n f &= \sum_{|n|\leq N} \langle f, e_n \rangle\, e_n(x) \\ &= \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int}\, dt \right) e^{inx} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\left(\sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-t)} \right)}_{D_N(x-t)} f(t)\, dt \end{aligned}$$

donde

$$D_N(x) = \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi} e^{inx}$$

Kernel de Dirichlet.

$$D_N(0) = \frac{2N+1}{2\pi}$$

Para $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2i \sin(N+\frac{1}{2})x}{2i \sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

■

Nota: $D_N(x)$ es 2π-periodico, par, suave y

$$\int_{\mathbb{T}} D_N(x)\,dx = 1$$

Seba *añadir foto del kernel de Dirichlet*

Es difícil demostrar directamente que $S_N f(x) \to f(x)$ ($D_N(x)$ cambia de signo y oscila muy rápidamente).

Desvío En lugar de demostrar que $S_N f \xrightarrow{L^2} f$ directamente, vamos a considerar la sucesión **media de Cesàro**

$$\sigma_N f = \frac{S_0 f + S_1 f + \cdots + S_{N-1} f}{N}$$

Nota: $S_N f$ converge a f, $\sigma_N f$ converge a f

Teorema 3.5.4 (Fejér).

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$$

Cuando $f \in C(\mathbb{T})$,

$$\sigma_N f \xrightarrow{unif.} f \text{ en } \mathbb{T}$$

Si $\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\implies S_n f \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies \sigma_N f \equiv 0$$

$$\overset{\text{Fejer}}{\implies} f = \lim_{N\to\infty} \sigma_N f = 0 \implies \text{Maximalidad de } \mathcal{B}$$

Proposición 3.5.5. *Sea $f \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces*

$$\sigma_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-t) f(t)\, dt$$

donde

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} N & x = 0 \\ \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2 \frac{x}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

es el Kernel de Fejér.

Demostración.

$$\sigma_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f$$

$$\downarrow$$

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$$

$x = 0$

$$\begin{aligned} F_N(0) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\frac{1}{2\pi}(2n+1)}^{D_n(0)} \\ &= \frac{1}{2\pi} N \end{aligned}$$

$x \neq 0$,

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sin(n + \frac{1}{2})x \sin \frac{x}{2}}_{\frac{1}{2}(\cos(nx) - \cos((n+1)x))} \\ &= \frac{2}{\pi N} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}(\cos(0x) - \cos(Nx))}_{\sin^2 \frac{Nx}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

■

Propiedades de $F_N(x)$

1. $F_N(x) \geq 0$, suave, periódico-2π, par
2. $$\int_{\mathbb{T}} F_N(x)\, dx = 1$$
   (como promedio de $D_N(x)$)
3. $$|F_N(x)| \leq \frac{1}{2\pi N \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad \delta \leq |x| \leq \pi$$

Seba *añadir foto pero borrarla pa zapit*

Notación

$$S_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} D_N(x-t) f(t)\, dt = D_N * f$$
$$\sigma_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} F_N(x-t) f(t)\, dt = F_N * f$$

Convolución: $f \in C(\mathbb{T})$, $g \in L^1(\mathbb{T})$

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t)\, dt$$

tomando $\tau = x - t$

$$f * g(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tau) g(x-\tau)\, d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) g(x-\tau) = g * f(x)$$

Definición 3.5.2. $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de buenos kernels en $L^1(\mathbb{T})$ si

1. $$\int_{\mathbb{T}} K_n(x)\, dx = 1$$
2. $$\sup_n \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)|\, dx < \infty$$
3. $$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)|\, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall \delta > 0$$

Nota: $\{F_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una familia de buenos kernels pero $\{D_N\}$ **no** lo es. Veremos que 2. falla para el kernel de Dirichlet.

Teorema 3.5.6. *Si $\{K_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una familia de buenos kernels en $L^1(\mathbb{T})$ y $f\in C(\mathbb{T})$, entonces*

$$K_N * f = f * K_N \to f$$

uniformemente en $\mathbb{T}$

Corolario 3.5.6.1.

$$\sigma_N f \xrightarrow[N\to\infty]{unif} f \text{ para } f\in C(\mathbb{T})$$

Demsotración del teorema 3.5.6.

$$\begin{aligned} K_n * f(x) - f(x) &= f * K_n(x) - f(x) \\ &= \int f(x-y)K_n(y)\,dy - f(x) \\ &= \int (f(x-y)-f(x))K_n(y)\,dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |K_n * f(x) - f(x)| &\le \int_{\mathbb{T}} |f(x-y)-f(x)||K_n(y)|\,dy \\ &= \int_{|y|<\delta} |f(x-y)-f(x)||K_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta} |f(x-y)-f(x)||K_n(y)|\,dy \\ &\le \varepsilon \int_{\mathbb{T}} |K_n(y)|\,dy + 2\max_{\mathbb{T}}|f| \int_{|y|>\delta} |K_n(y)|\,dy \\ &\le C\varepsilon \end{aligned}$$

cuando n es suficientemente grande. ■

Corolario 3.5.6.2. *Si $f\in C(\mathbb{T})$ y $\hat{f}(n)=0$ $\forall n\in\mathbb{Z} \implies f\equiv 0$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} &\sigma_N f \equiv 0 \\ &\downarrow \text{unif} \\ &f \equiv 0 \end{aligned}$$

■

Corolario 3.5.6.3. *Suponga que $f \in C(\mathbb{T})$ y su serie de Fourier converge absoluta y uniformemente, es decir:*

$$\sum_n |\hat{f}(n)e_n(x)| = \sum_n |\hat{f}(n)|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \infty$$

Entonces,

$$S_N f \to f \ unif$$

Demostración. Defina

$$g(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n(x) \in C(\mathbb{T})$$

por convergencia absoluta uniforme.

$$h(x) := g(x) - f(x)$$

$$\begin{aligned}\hat{h}(n) = \hat{g}(n) - \hat{f}(n) &= \left\langle \sum_k \hat{f}(k)e_k(x), e_n(x) \right\rangle - \hat{f}(n)\\ &= \hat{f}(n) - \hat{f}(n) = 0\end{aligned}$$

Se puede intercambiar la suma con la integral por convergencia uniforme y el corolario anterior, se concluye que $h \equiv 0$. ■

Tenemos la convergencia $\sigma_N f \xrightarrow{\text{unif}} f$ para $f \in C(\mathbb{T})$. Queremos pasar a convergencia en L^2. Vamos a utilizar la **densidad** de $C(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$. Vamos a necesitar la estimación adicional:

Proposición 3.5.7.

$$||\sigma_N f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}$$

Demostración. $\sigma_N f = \frac{1}{N}(S_0 f + \cdots + S_{N-1}f)$

$$||\sigma_N f||_{L^2} \leq \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} ||S_k f||_{L^2}$$

Tenemos,

$$||S_k f||_{L^2} \leq ||f||_{L^2} \text{ (Bessel)}$$

$S_k f =$ proyección de f en $\mathrm{Gen}(\{e_l\}_{|l|\leq k})$

$$||\sigma_N f||_{L^2} \leq \frac{1}{N} N ||f||_{L^2}$$

■

De hecho, tenemos

Proposición 3.5.8. *Si $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$||\sigma_N f||_{L^p} \leq ||f||_{L^p}$$

Teorema 3.5.9. *Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$. Entonces,*

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^p} f$$

Demostración. Fije $\varepsilon > 0$. Aproxime $f \in L^p(\mathbb{T})$ con $g \in C(\mathbb{T})$:

$$||f - g||_{L^p} \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \sigma_N f - f &= \sigma_N g - g + \sigma_N(f-g) - (f-g) \\ ||\sigma_N f - f||_{L^p} &\leq ||\sigma_N g - g||_{L^p} + ||\sigma_N(f-g)||_{L^p} + ||f-g||_{L^p} \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

Podemos elegir N suficientemente gtande, tal que

$$||\underbrace{\sigma_N g - g}_{h}||_\infty \leq \varepsilon$$

por convergencia uniforme.

$$\begin{aligned} ||h||_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{T}} |h|^p \, dx\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{T}} \varepsilon^p \, dx\right)^{1/p} = (2\pi)^{1/p}\varepsilon \end{aligned}$$

■

Corolario 3.5.9.1.

$$S_N f \xrightarrow{L^2} f$$

Demostración.

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$$

■

Lema 3.5.10 (Riemann-Lebesgue)**.** $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-inx}\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Demostración. Fije $\varepsilon > 0$. Utilizaremos que

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^1} f$$

Podemos encontrar N suficientemente grande, tal que

$$||\underbrace{f - \sigma_N f}_{g}||_{L^1} \leq \varepsilon$$

$n > N$,

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) &= \hat{f}(n) - \cancelto{0}{\widehat{\sigma_N f}(n)} \\ \implies |\hat{f}(n)| = |\hat{g}(n)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int |g(x)e^{-inx}|\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int |g|\,dx \leq \varepsilon/\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T}) &\to \ell^2_{\mathbb{Z}} = \{(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty\} \\ f &\to \hat{f} = (\ldots, \hat{f}_{(-1)}, \hat{f}_{(0)}, \hat{f}_{(1)}, \ldots) \end{aligned}$$

es un isomorfismo unitario.

$$L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0 = \{(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) : \lim_{|n|\to\infty} a_n = 0\}$$
$$f \to \hat{f}$$

Teorema 3.5.11. *$L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0$ es lineal, acotado e inyectivo.*

Demostración. lineal ✓

$$\begin{aligned} ||\hat{f}||_{\ell^\infty} &\leq ? \\ |\hat{f}(n)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)e^{-inx}|\, dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f||_{L^1} \end{aligned}$$

por lo que $||\hat{f}||_{\ell^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}||f||_{L^1}$

$\rightarrow$ inyectivo? Suponga que $\hat{f} = 0 \iff \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\sigma_N f \equiv 0 \\ &\downarrow L^1 \\ &f \equiv 0 \end{aligned}$$

pero $\mathcal{F}$ no es sobreyectiva. Si $\mathcal{F}$ fuera inyectivo, sería un isomorfismo continuo. Por teorema de aplicación abiert, tenemos que $\mathcal{F}^{-1}$ es acotada:

$$\begin{aligned} ||\mathcal{F}^{-1}\hat{f}||_{L^1} &\leq c||\hat{f}||_\infty \\ ||f||_{L^1} &\leq c||\hat{f}||_\infty \end{aligned}$$

Tomamos $f(x) = D_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n|\leq N} e_n(x)$.

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \langle f, e_n \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e_n, e_n \rangle \quad |n| \leq N \\ &= 0 \quad |n| > N \end{aligned}$$

$||\hat{f}||_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Proposición 3.5.12.
$$||D_N||_{L^1} \geq C \log N$$

Corolario 3.5.12.1. *$f_N := D_N$ contradice $||f||_{L^1} \leq c||\hat{f}||_\infty$*

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$
$$||D_N|| = \int_{-\infty}^{\infty} |D_N(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{|\sin(N+\frac{1}{2})|}{\sin\frac{x}{2}}$$
$$||D_N|| \geq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{x}\,dx$$

$u = (N+\frac{1}{2})x$

$$= \frac{2}{3\pi}\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u}\,du \geq \frac{2}{\pi}\int_0^{N\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,du$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin u|}{u}\,du$$
$$\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin u|\,du$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\underbrace{\int_0^\pi |\sin u|\,dy}_{c'}$$
$$= \frac{2c'}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \geq c\log N$$

Seba *añadir align* ■

Vimos que $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$, $S_N f \xrightarrow{L^2} f$.

Q. ¿Converge $S_n f \to f$ puntualmente?
A. ¡Generalmente no!

Q. ¿Converge $S_N f \to f$ c.t.p? Es fácil ver (si conocemos teoría de integración) que existe una subsucesión

$$S_{N_k} f \to f \quad \text{c.t.p}$$

(dada la convergencia $S_N f \xrightarrow{L^2} f$)
A. (Teorema de Carleson) Sí, $S_n f \to f \quad$ c.t.p (Difícil).

3.5.2. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Vieron en ayudantía un ejemplo de función $f \in C(\mathbb{T})$ tal que

$$S_N f(0) \not\to f(0)$$

De hecho, este ejemplo es **genérico**

Teorema 3.5.13. *Para todo $x \in \mathbb{T}$, existe un conjunto genérico $A_x \subseteq C(\mathbb{T})$ tal que*

$$\sup_N |S_N f(x)| = \infty$$

La demostración utiliza el marco del **principio de acotación uniforme**/Teorema de Banach-Steinhaus

Teorema 3.5.14 (Banach-Steinhaus)**.** *Sea X Banach, Y un espacio normado. Sean $T_k \in \mathcal{B}(X,Y)$, $k \in I$, no necesariamente contable. Entonces*

1. *o* $\sup_k ||T_k|| < \infty$
2. *o* $\sup_k ||T_k x|| = \infty$ *para todo $x \in A$, donde $A \subseteq X$ es un subconjunto genérico G_δ.*

Seba *cambiar enumerate a letras a., b.*

Nota: Si $\sup_k ||T_k x|| < \infty \ \forall x \in X$, entonces $||T_k||$ son uniformemente acotadas.

Corolario 3.5.14.1. *Sean X Banach, Y normado. Sean $T_k \in \mathcal{B}(X,Y)$. Suponga que $\forall x \in X$*

$$\lim_{k\to\infty} T_k x =: Tx \quad \textit{existe}$$

Entonces, $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y

$$||T|| \leq \liminf_{k\to\infty} ||T_k|| < \infty$$

Demostración. $\lim_{k\to\infty} T_k x = Tx$.

$$\implies \forall x \in X \quad \sup_k ||T_k x|| < \infty$$

(sucesión que converge es acotada)

$$\implies \sup_k ||T_k|| < \infty$$

Que T es lineal, fácil ✓

$$||Tx|| = ||\lim_{k\to\infty} T_k x|| = \ im_{k\to\infty} ||T_k x||$$
$$= \sup_n \inf_{k\geq n} ||T_k x|| \leq (\sup_n \inf_{k\geq n} ||T_k||)x = (\liminf_{k\to\infty} ||T_k||)||x||$$

Seba añadir align ■

Demostración del teorema de Banach-Steinhaus (3.5.14). Defina $\psi(x) := \sup_k ||T_k x||$.

$$U_n = \{x \in X : \psi(x) > n\} = \bigcup_k \underbrace{\{||T_k x|| > n\}}_{\text{abierto pues } T_k \text{ es continuo}}$$

Tenemos 2 posibilidades:

1. Si todos los U_n's son densos en X,

$$\implies A := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \quad \text{es genérico}, G_\delta$$

   $\forall x \in A$, $\psi(x) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\implies \psi(x) = \infty \quad (\text{caso } b.)$$

2. Si unos de los U_n's **no** es denso, entonces U_m^c contiene una bola $B = B_r(a)$.

$$\psi(x) \leq m \quad \forall x \in B_r(a)$$
$$\implies ||T_k x|| \leq m \quad \forall x \in B_r(a), \forall k$$
$$\implies ||T_k(a+y)|| \leq m \quad \forall y \in B_r(0), \forall k$$

$\forall y \in B_r(0)$

$$\begin{aligned} ||T_k y|| &\leq ||T_k a|| + ||T_k(y-a)|| \\ &= ||T_k a|| + ||T_k(a-y)|| \\ &\leq m + m = 2m \end{aligned}$$

$$\implies ||T_k y|| \leq \frac{2m}{r}||y|| \quad \forall y \in X, \forall k$$

■

Demostración del teorema 3.5.13. Será suficiente demostrar el teorema para $x = 0$. Aplicaremos el principio de acotación uniforme (Banach-Steinhaus) a

$$\begin{aligned} S_N^0 : C(\mathbb{T}) &\to \mathbb{C} \\ f &\to S_n f(0) \end{aligned}$$

Estaremos listos cuando probemos que

$$\sup_N ||S_N^0|| = \infty$$

$\iff$ estamos en la alternativa b.

$$\implies \sup_N |S_N f(0)| = \infty \forall f \in A, A \overset{gen.}{\subseteq} C(\mathbb{T})$$

Recordando que $(S_N f(x) = D_N * f(x))$

$$\begin{aligned} S_N^{(0)} &= S_N f(0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(0-y) f(y)\, dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(y)\, dy \end{aligned}$$

$$\implies |S_N f(0)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(y)| \cdot |f(y)|\, dy \leq ||D_N||_{L^1} ||f||_\infty$$

$$\implies ||S_N^0|| \leq ||D_N||_{L^1}$$

Pero, de hecho, afirmamos que

$$||S_N^0|| = ||D_N||_{L^1}$$

Noten que cuando ponemos $f(y) = \operatorname{sgn} D_n(y)$

$$S_N f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) \operatorname{sgn} D_N(y)\, dy = ||D_N||_{L^1}$$

$f = \operatorname{sgn} D_N \in L^1(\mathbb{T})$, $\implies$ podemos encontrar $f_k \in C(\mathbb{T})$:

$$||f_k - f||_{L^1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$S_N f_k(0) = \int D_N(y)(f_k - f)(y)\, dy + \underbrace{\int D_N(y) f(y)\, dy}_{||D_N||_{L^1}} \xrightarrow{k\to\infty} ||D_N||_{L^1}$$

mientras

$$\left| \int D_N(y)(f_k - f)(y)\, dy \right| \leq \max_{\mathbb{T}} |D_N| ||f_k - f||_{L^1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$\blacksquare$

3.6. Repaso/Crash course en teoría de la medida

$\Omega = \{M_1, \dots, M_{100}\}$ pila de monedas. $V : \Omega \to [0, \infty)$. En el caso de Chile tenemos $ImV = \{1, 5, 10, 50, 100, 500\}$. Queremos calcular el valor total de la pila de monedas. Hay 2 métodos:

1. Dividimos la pila en grupos de digamos 10 monedas: $M_1, \dots, M_{10}$ y así sucesivamente. Luego, sumamos los valores de cada grupo y sumamos los resultados. Esto corresponde con la integral de Riemann

2. Dividimos las monedas en grupos de acuerdo al valor

$$E_1 = \{M \in \Omega : V(M) = \alpha_1\}$$

$$E_2 = \{M \in \Omega : V(m) = \alpha_2\}$$

$$\vdots$$

E_N

Luego, $S = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k(\#E_k)$. Esto corresponde con la integral de Lebesgue.

3.6.1. Espacios de medida y funciones medibles

Definición 3.6.1 (Espacio de medida)**.** un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$.

Definición 3.6.2 (σ-álgebra)**.** Una colección $\mathcal{M}$ de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si

1. $\Omega \in \mathcal{M}$
2. $E \in \mathcal{M} \implies E^c := \Omega \setminus E \in \mathcal{M}$
3. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M} \implies \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$

Podemos ver que $\varnothing \in \mathcal{M}$, $\bigcap_k E_k \in \mathcal{M}$ si $\forall E_k \in \mathcal{M}$ y $E \setminus F \in \mathcal{M}$ si $E, F \in \mathcal{M}$.

Ejemplo: $\Omega = \{a, b\}$,

$$\mathcal{M}_1 = \{\varnothing, \Omega\}$$
$$\mathcal{M}_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

son σ-álgebras.

Ejemplo: Si Ω es un espacio métrico (topológico más general).

$$\mathcal{B}_\Omega \to \sigma\text{-álgebra de Borel}$$

definida como la menor σ-álgebra que contiene todos los abiertos de Ω.

Definición 3.6.3. Una medida $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ que satisface:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de conjuntos en $\mathcal{M}$ mutuamente disjuntos,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_m)$$

Esto se llama σ-aditividad

Las siguientes propiedades son consecuencias fáciles de la definición:

1. (Aditividad finita)
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} E_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(E_k)$$

2. Si $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subseteq B$
$$\implies \mu(B) = \mu(A \cup B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

3. (subaditividad) Si $\{E_k\} \subseteq \mathcal{M}$, no necesariamente disjuntos,
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

4. $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{k+1} \subseteq \cdots$, sucesión creciente de medibles,
$$E = \bigcup_{k} E_k, E_k \uparrow E$$
$$\mu(E) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$$

5. $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$
$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \downarrow E$$
$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_k)$$

   si $\mu(E_1) < \infty$

Ejemplo: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$,
$$\mu(E) = \sum_{n\in E} \mu_n \leftarrow \text{pesos} \in [0, \infty)$$
Cuando todos los $\mu_n \equiv 1$, μ es la medida de contar.

Teorema 3.6.1. *Existe una σ-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y*

$$|\cdot| : \mathcal{M} \to [0, \infty]$$

con las siguientes propiedades:

1. *$\mathcal{M}$ contiene todos los abiertos ($\supseteq B_{\mathbb{R}^n}$)*
2. *$|B| =$ Vol(B) para toda la bola abierta $B \subseteq \mathbb{R}^n$*
3. *(completitud) Si $A \subseteq B$, donde $B \in \mathcal{M}$ y $|B| = 0$, entonces $A \in \mathcal{M}$ y $|A| = 0$.*

Conjuntos de medida 0 = conjuntos **despreciables**.

Notación: Una propiedad se cumple para x c.t.p (en casi todas partes) si se cumple para todo $x \in E^c$ donde E es despreciable.

La medida producto : $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ y $\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2$. Existe una única medida $\mu : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \to [0, \infty]$ donde $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 :=$ la menor σ-álgebra que contiene todos los $E_1 \times E_2$ con $E_1 \in \mathcal{M}, E_2 \in \mathcal{M}_2$ tal que

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

Ejemplo: $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, |\cdot| = \lambda_n)$ y $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}, |\cdot| = \lambda_m)$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}$$

$$\lambda := \lambda_n \times \lambda_m = \lambda_{m+n}$$

que es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{m+n}$.

Definición 3.6.4. $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ es **medible** si $\{x \in \Omega : f(x) > r\} \in \mathcal{M} \quad \forall r \in [-\infty, \infty]$

$$\iff f^{-1}(I) \in \mathcal{M} \quad \forall I \subseteq [-\infty, \infty]$$

$$\iff f^{-1}(O) \in \mathcal{M} \quad \forall O \overset{ab}{\subseteq} [-\infty, \infty]$$

Esta clase de funciones con valores reales es cerrada bajo las operaciones usuales: $+, \times$ y tomar $\sup_k$,$\inf_k$,$\limsup_k$,$\liminf_k$. Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesión de funciones medibles, entonces $\sup_k f_k$, $\inf_k f_k$, $\liminf_k f_k$, $\limsup_k f_k$ son medibles.

Ejemplo: La funciones simples

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$$

De hecho toda función medible es límite de funciones simples $s_n(x)$ tal que

$$|s_n(x)| \nearrow |f(x)|$$

Descomponemos $f = f^+ - f^-$,

$$0 \leq f^+ = \max\{f, 0\}$$
$$0 \leq f^- = \max\{-f, 0\}$$

$|f| = f^+ + f^-$.
Cuando $f \geq 0$ es medible, podemos aproximarla con

$$s_n(x) = n\chi_{\{f>n\}} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}}$$

$s_n(x) \nearrow f(x), \quad n \to \infty$

3.6.2. La integral de Lebesgue

Funciones simples

$$\int_\Omega s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i)$$

donde $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$

Funciones medibles

$$\int f\, d\mu := \sup\{\int s\, d\mu : 0 \leq s \leq f\}$$

Propiedades

1. $$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

2. $$\int cf\, d\mu = c\int f\, d\mu, \quad c \geq 0$$

3.
$$\int f\, d\mu = 0 \iff f \equiv 0 \quad \text{c.t.p.}$$

4.
$$\int f\, d\mu < \infty \implies f < \infty \quad \text{c.t.p.}$$

Propiedades de convergencia

1. Teorema de Convergencia Monotona:

$$0 \leq f_n \nearrow f \quad \text{c.t.p.} \implies \int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

2. Lema de Fatou:

$$f_n \geq 0 \qquad \int \liminf_n f_n\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n$$

Funciones reales $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$, $f = f^+ - f^-$

$$\int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$$

si uno de estos dos términos $< \infty$.

Cuando ambos son finitos,

$$\iff \int |f|\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu < \infty$$

decimos que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ es integrable.

En $\mathcal{L}^1(\mu)$, la integral es un funcional lineal (POS) que es ≥ 0 cuando $f \geq 0$. Como consecuencia, para $f, g \in \mathcal{L}^1$:

1.
$$\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$$

cuando $f \geq g$ c.t.p.

2.
$$\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$$

3.
$$|f| < \infty \quad \text{c.t.p.}$$

Funciones complejas

Definición 3.6.5. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible si $u := \operatorname{Re} f$, $v := \operatorname{Im} f$ son medibles.

$$\int f\,d\mu := \int u\,d\mu + i\int v\,d\mu$$

Definición 3.6.6. $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ si $|f|$ es integrable $\iff$ $u, v \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

Teorema 3.6.2 (Convergencia Dominada)**.** *$f_n \to f$ c.t.p. y $|f_n| \leq g$ c.t.p. donde $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, entonces*

$$\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu$$

De hecho,

$$\int |f_n - f|\,d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Teorema 3.6.3 (Tonelli)**.** *$(\Omega_1, \mathcal{M}_2, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ espacio de medida $\sigma-$finitos. $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mu = \mu_1 \times \mu_2)$. Sea $f(x, y)$ $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2-$medible y no negativa. Entonces, denotando $f^y(x) = f(x, y)$ para y fijo es una función en Ω_1, $f_x(y) = f(x, y)$ para x fijo es una función en Ω_2,*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,d\mu &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f^y(x)\,d\mu_1(x)\right)d\mu(y)\\ &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f_x(y)\,d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)\end{aligned}$$

donde toda función integrada es medible en el espacio correspondiente.

Teorema 3.6.4 (Fubini)**.** *Es posible cambiar el orden de integración cuando* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$*:*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f\,d\mu &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f^y(x)\,d\mu_1(x)\right)d\mu(y)\\ &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f_x(y)\,d\mu_2(y)\right)d\mu_1(x)\end{aligned}$$

3.7. Espacios de Lebesgue L^p

3.7.1. Espacios L^p

Defina:

$$||f||_p := \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty)$$

$$||f||_\infty := \text{ínf}\{M > 0 : |f| \le M \quad \text{c.t.p.}\}$$

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \{\text{funciones medibles} : \Omega \to \mathbb{K} : ||f||_p < \infty\}$$

Proposición 3.7.1. $||\cdot||_p$ *es una* ***semi-norma*** *en* $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$*. Además,*

$$||f||_p = 0 \iff f = 0 \quad \textit{c.t.p.}$$

Corolario 3.7.1.1. $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mu) = \{f = 0 \quad \textit{c.t.p.}\}$*. Entonces,*

$$L^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)/\mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\mu)$$

es un espacio ***normado*** *con norma* $||\cdot||_p$*.*

Demostración de la proposición 3.7.1. $||\lambda f||_p = |\lambda|\cdot||f||_p$.

Desigualdad triangular = desigualdad de Minkowski

$$||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p$$

($p = 1, \infty$ es obvio) ■

Teorema 3.7.2 (Desigualdad de Hölder)**.**

$$\int |fg|\,d\mu \leq ||f||_p ||g||_q$$

donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y $p, q \in [1, \infty]$

Demostración. Podemos asumir que

$$0 < ||f||_p, ||g||_q < \infty$$

$p = 1, q = \infty$. $0 < ||f||_1 < \infty$, $0 < ||g||_\infty < \infty$.

$$\begin{aligned} \int |fg|\,d\mu &\leq \int (|f|\,d\mu)||g||_\infty \\ &\leq |f| \cdot ||g||_\infty \quad \text{c.t.p.} = ||f||_1 \cdot ||g||_\infty \end{aligned}$$

Para los demás, $1 < p, q < \infty$. Podemos asumir $||f||_p = 1$, $||g||_q = 1$ y será suficiente demostrar

$$\int |fg|\,d\mu \leq 1$$

Aplicamos Young (lo que viene después) a $a = |f|$, $b = |g|$

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

$$\int |fg|\,d\mu \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int |f|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int |g|^q}_{=1}$$

■

Teorema 3.7.3 (Desigualdad de Young)**.** $0 \leq a, b \leq \infty$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad 1 < p, q < \infty$$

Demostración. Podemos asumir $a, b > 0$.

$$ab = e^{\log(ab)} = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q)}$$

$e^{sx+(1-s)y} \leq se^x + (1-s)e^y$ (convexidad de e^x)

por lo que

$$\leq \frac{1}{p}e^{\log(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\log(b^q)}$$

■

Desigualdad de Minkowski. en $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} |f+g|^p &= |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \\ &\leq |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1} \\ \int |f+g|^p \, d\mu &\leq \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} \end{aligned}$$

■

Teorema 3.7.4 (Riesz-Fischer)**.** *$L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. $f_k \in L^p(\mu)$, $k \in \mathbb{N}$. Queremos demostrar que si

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||f_k||_p =: M < \infty$$

$$\implies \sum_{k=1}^{n} f_k \xrightarrow{L^p} F \in L^p$$

$p = \infty$ (ejercicio). Sea $p \in [1, \infty)$

$$G_n(x) := \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \quad \text{medible}, \geq 0 \nearrow_{n\to\infty} G(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

Por teorema de convergencia monotona,

$$\int G(x)^p \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int G_n(x)^p \, d\mu$$

$$\left(\int G_n(x)^p \, d\mu \right) = ||G_n||_p \leq \sum_{k=1}^{n} ||f_K||_p \leq M$$

por Minkowski.

$$\implies \int G_n(x)^p \, d\mu \leq M^p$$

$$\implies G^p \in L^1 \quad (G \in L^p)$$

En particular, $0 \leq G^p(x) < \infty \quad \mu - \text{c.t.p.}$

$$\implies G(x) < \infty \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

es decir, $\mu -$ c.t.p., $\sum |f_k(x)|$ converge. Defina

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) & x \text{ tal que } G(x) < \infty \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

F es medible y $F \in L^p(\mu)$ pues

$$|F(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = G(x) \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies |F(x)|^p \leq G(x)^p \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies \int |F(x)|^p \leq \int G(x)^p < \infty$$

Falta establecer la convergencia en L^p:

$$\left\| F - \sum_{k=1}^{N} f_k \right\|_p \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

$$\left| F - \sum_{k=1}^{n} f_k \right|(x) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k|(x) \leq G(x) \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies \left| F - \sum_{k=1}^{N} f_k \right|^p \leq G^p \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Por definición de F,

$$|F - \sum_{k=1}^{N} f_k| \xrightarrow{N\to\infty} 0 \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Por el teorema de convergencia dominada

$$\int \left| F - \sum_{k=1}^{N} f_k \right|^p d\mu \xrightarrow{N\to\infty} \int 0 \, d\mu = 0$$

■

3.7.2. Los espacios L^p y dualidad

$1 \leq p \leq \infty$, $q \to$ exponente dual: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$p = 1 \to q = \infty$
$p = 2 \to q = 2$
$p = \infty \to q = 1$

Se puede definir un **emparejamiento** entre L^p y L^q.

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^p(\mu) \times L^q(\mu) &\to \mathbb{K} \\ f, g \to \langle f, g \rangle &:= \int fg \, d\mu \end{aligned}$$

es bien definido:

$$f \in L^p, g \in L^q \implies |fg| \in L^1$$

$$\left(\int |fg|\, d\mu\right) \leq ||f||_p ||g||_q < \infty$$
$$\implies fg \in L^1$$
$$\implies |\langle f, g\rangle| = \left|\int fg\right| \leq \int |fg| \leq ||f||_p ||g||_q$$

Debido a esto podemos definir $\ell_g \in (L^p)^*$

$$\begin{aligned} \ell_g : L^p(\mu) &\to \mathbb{K} \\ f &\to \langle f, g\rangle \end{aligned}$$

es lineal y acotado con

$$||\ell_g||_{(L^p)^*} \leq ||g||_q$$

De esta manera tenemos una aplicación

$$\begin{aligned} \phi : L^q(\mu) &\to [L^p(\mu)]^* \\ g &\to \ell_g \end{aligned}$$

ϕ es lineal, acotada e inyectiva ($\ell_g = 0 \implies g = 0$).

3.7.3. Teorema de Representación de Riesz

Teorema 3.7.5. *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ $\sigma-$finito. Sea $1 \leq p < \infty$*
Entonces ϕ es un ***isomorfismo isométrico****:*

$$\forall \ell \in (L^p(\mu))^*, \exists! g \in L^q(\mu) \text{ tal que } \ell(f) = \langle f, g\rangle \quad \forall f \in L^p$$

con $||\ell||_{(L^p)^*} = ||g||_q$.

Nota: 1. Incluye el caso $p = 2$ (Espacio de Hilbert).
2. $\Omega : \mathbb{N}, \mu =$ medida de contar

$$L^p(\mu) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{K} : \left(\sum |f_k|^p\right)^{1/p} < \infty\} = \ell^p$$

3. El teorema dice que

$$(\ell^p)^* \simeq \ell^q \quad p \in [1, \infty)$$

4. $p = \infty$: $(L^\infty)^* \not\simeq L^1$

$$\phi : L^1 \not\twoheadrightarrow (L^\infty)^* \quad \text{no es sobreyectiva}$$

La demostración requiere la herramienta del Teorema de Radon-Nikodym.

Definición 3.7.1. $(\Omega, \mathcal{M})$ y medidas $\mu, \nu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$. Decimos que ν es **absolutamente continua** respecto a μ si

$$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$$

y escribimos $\nu \ll \mu$.

Ejemplo: Si $h \geq 0, h \in L^1(\mu)$ podemos definir $\nu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$

$$\nu(E) := \int h\chi_E \, d\mu =: \int_E h \, d\mu$$

ν es una medida.

$$\text{“}d\nu = h \, d\mu\text{''} \quad h \text{ es densidad}$$

$\nu \ll \mu$ pues $\mu(E) = 0$

$$\implies \nu(E) = \int h\chi_E \, d\mu = 0$$

Teorema 3.7.6 (Radon-Nikodym)**.** *Sean μ y ν medidas en $(\Omega, \mathcal{M})$ σ-finitas. Si $\nu \ll \mu$, entonces $\exists! h \geq 0$ medible tal que $\nu(E) = \int_E h \, d\mu$.*
(h es única μ-c.t.p.)

$(d\nu = h \, d\nu)$, $h = [\frac{d\nu}{d\mu}]$ derivada de Radon-Nimkodym.

Demostración. **Unicidad:**

$$\int h_1\chi_E \, d\mu = \int h_2\chi_E \, d\mu = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

$$\int (h_1 - h_2)\chi_E \, d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

$$E = \{h_1 > h_2\}$$

$$0 = \int_{\{h_1 - h_2 > 0\}} (h_1 - h_2) \, d\mu \implies \mu(\{h_1 > h_2\}) = 0 \implies \mu(\{h_1 \neq h_2\}) = 0 \implies h_1 = h_2 \quad \mu\text{−c.t.p.}$$

Existencia: (argumento de Von Neumann) que utiliza el Teorema de Representación de Riesz en L^2.

idea: $\lambda = \mu + \nu$. Suponga que $\mu(\Omega), \nu(\Omega) < \infty$

$$\mu(E) = 0 \iff \lambda(E) = 0$$

Vamos a definir un funcional lineal acotado

$$\begin{aligned} \ell : L^2_{\mathbb{R}}(\lambda) &\to \mathbb{R} \\ f &\to \int f \, d\mu \end{aligned}$$

ℓ es obviamente lineal y acotado:

$$\begin{aligned} \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu & \\ &= \int |f| \cdot 1 \, d\mu \\ &\leq \int |f| \cdot 1 \, d\lambda \\ &\leq ||f||_{L^2(\lambda)} \underbrace{||1||_{L^2(\lambda)}}_{[\lambda(\Omega)]^{1/2}} \end{aligned}$$

Es decir, $|\ell(f)| \leq (\lambda(\Omega))^{1/2} ||f||_{L^2(\lambda)}$

Por Teorema de Representación de Riesz:

$$\ell(f) = \int fg\,d\lambda, \quad g \in L^2(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\,d\mu &= \int fg\,d\lambda \\ &= \int fg\,d\mu + \int fg\,d\nu \\ \int f(1-g)\,d\mu &= \int fg\,d\nu \quad \forall f \in L^2(\lambda) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Formalmente "$(1-g)\,d\mu = g\,d\nu$" $\implies$ "$h = \frac{1-g}{g}$".

Primero vamos a demostrar que

$$0 < g \leq 1 \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

(a) $F \coloneqq \{g \leq 0\}$

$$\mu(F) = \int \chi_F\,d\mu \leq \int \chi_F(1-g)\,d\mu$$

por (3.1),

$$= \int \chi_F g\,d\nu \leq 0$$

$$\implies \mu(F) = 0$$

(b) $G \coloneqq \{g > 1\}$. Suponga que $\mu(G) > 0$

$$\begin{aligned} 0 > \int_G (1-g)\,d\mu &= \int (1-g)\chi_G\,d\mu \\ &= \int (1-g)\chi_G\,d\nu \\ &= \int_G g\,d\nu \geq 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

$g \in L^2(\lambda)$. Podemos elegir representante g, tal que $0 < g \leq 1$ en Ω. Definimos

$$h := \frac{1-g}{g} \geq 0 \quad \text{en } \Omega$$

Tome $A \in \mathcal{M}$, $f_n = \chi_{\{A \cap g \geq \frac{1}{n}\}}/g \in L^2(\lambda)$. Ponemos f_n en (3,1):

$$\int f_n(1-g)\, d\mu = \int f_n g\, d\nu$$

$x \in \{g < \frac{1}{n}\}, f_n = 0$. $x \in \{g \geq \frac{1}{n}\}$, $f_n \leq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$. $\implies$ f_n es acotada. $\implies$ $f \in L^2(\lambda)$.

$$\int \frac{1-g}{g} \chi_{A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\}}\, d\mu = \ nt\chi_{A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\}}\, d\nu$$

$$A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\} \nearrow A$$

Tomando $\text{lím}_{n\to\infty}$, por Teorema de Convergencia Monótona obtenemos

$$\int h\chi_A\, d\mu = \int \chi_A\, d\nu$$

Ahora suponga que μ, ν son $\sigma-$finitas: existe $\Omega_n \nearrow \Omega$, tales que

$$\mu(\Omega_n), \nu(\Omega_n) < \infty$$

Aplicaremos el resultado a $(\Omega_n, \mathcal{M}, \mu \text{ y } \nu|_{\Omega_n})$. $\mathcal{M}_n = \{E \cap \Omega_n : E \in \mathcal{M}\}$.

$$\nu(A) = \int h_n \chi_A\, d\mu \quad \forall a \in \mathcal{M}_n$$

para alguna $h_n \geq 0$ y $\mathcal{M}_n-$medible.

$$= \int h_{n+1}\chi_A\, d\mu$$

por unicidad

$$h_{n+1}|_{\Omega_n} = h_n \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Extienda cada h_n por 0 fuera de Ω_n. De esta manera h_n es $\mathcal{M}-$medible. Defina $h := \lim\limits_{n\to\infty} h_n$

$$h_n \nearrow h$$

Para todo $E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \lim_{n\to\infty} \nu(\Omega_n \cap E) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap\Omega_n} h_n \, d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap\Omega_n} h \, d\mu \\ &= \int_E h \, d\mu\end{aligned}$$

■

Necesitaremos también el siguiente resultado:

Definición 3.7.2. $\ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ es **positivo** si $\ell(f) \geq 0 \quad \forall f \in L^p_{\mathbb{R}}, f \geq 0$

Teorema 3.7.7. *Sea $\ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$, $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$\ell = \ell_+ - \ell_-$$

$\ell_\pm \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ son positivos.

Demostración. Sea $\ell \in (L^p)^*$.

1. Definiremos ℓ_+ para $f \geq 0$.

$$\ell_+(f) := \sup_{0\leq g\leq f} \ell(g)$$

Obviamente, $\ell_+(cf) = c\ell_+(f)$, $c \geq 0$. Probemos la aditividad:

$$\ell_+(f_1 + f_2) = \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \geq 0 \text{ en } L^p$$

$$\ell\,(\underbrace{g_1 + g_2}_{g}) = \ell(g_1) + \ell(g_2)$$

Si $0 \leq g_1 \leq f_1$, $0 \leq g_2 \leq f_2$

$$\implies g = g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$$

$$\sup_{0 \leq g \leq f_1 + f_2} \ell(g) \geq \ell(g_1) + \ell(g_2)$$

Tomando sup sobre $0 \leq g_1 \leq f_1$, $0 \leq g_2 \leq f_2$

$$\ell_+(f_1 + f_2) \geq \ell(f_1) + \ell_(f_2)$$

Para demostrar la otra, notamos que cada $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ se puede escribir

$$g = g_1 + g_2$$

donde $g_1 \coloneqq \text{mín}(g, f_1) \leq f_1$, $g_2 \coloneqq g - g_1 \leq f_2$.

$$\ell(g) \leq \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2)$$
$$\implies \ell_+(f) \leq \ell_+(f_1) + \ell_*(f_2)$$

2. Extendemos ℓ_+ a toda $f \in L^p$.

$$f = f_+ - f_-$$

Definimos $\ell_+(f) = \ell_+(f_+) - \ell_+(f_-)$.

Esta definicón no depende de como descomponemos f como diferencia de 2 funciones no negativas.

$$f = f_+ - f_- = f_1 - f_2 \implies f_+ f_2 = f_1 + f_-$$
$$\implies \ell_+(f_1 + f_2) = \ell_+(f_1 + f_-)$$
$$\implies \ell_+(f_+) + \ell_+(f_2) = \ell_+(f_1) + \ell_+(f_-)$$
$$\implies \ell_+(f_+) - \ell_+(f_-) = \ell_+(f_1) - \ell_+(f_2)$$

3. Por lo tanto, ℓ_+ es **lineal**

$$\ell_+(cf) = c\ell_+(f) \quad \forall c \geq 0$$
$$\ell_+(-cf) = \ell_+(c(-f)) = c\ell_+(-f) = -c\ell_+(f)$$
$$\implies \ell_+(-f) = \ell_+(f_-) - \ell_+(f_+) = -\ell_+(f)$$

ℓ_+ es acotado.

$$\begin{aligned} |\ell_+(f)| &= |\ell_+(f_+) - \ell_+(f_-)| \\ &\leq |\ell_+(f_+)| + |\ell_+(f_-)| \\ &\leq ||\ell|| \cdot ||f_+||_{L^p} + ||\ell|| \cdot ||f_-||_{L^p} \\ &\leq 2||\ell|| \cdot ||f||_{L^p} \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned} \ell_+(f) &\leq \sup_{0\leq g\leq f} ||\ell|| \cdot ||g||_{L^p} \\ &\leq ||\ell|| \cdot ||f||_{L^p} \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} &\ell_- := \ell_+ - \ell \\ \implies &\ \ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^* \end{aligned}$$

ℓ_- es positiva pues $\forall f \geq 0, f \in L^p$.

$$\begin{aligned} \ell_-(f) &= \ell_+(f) - \ell(f) \geq 0 \\ &= \sup\{\ell(g) : 0 \leq g \leq f\} - \ell(f) \geq 0 \end{aligned}$$

■

Demostración del Teorema de Riesz (3.7.5). $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ y positivo. Supondremos que $\mu(\Omega) < \infty$. Definimos

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{M} &\to [0, \infty) \\ A &\to \ell(\chi_A) \end{aligned}$$

Afirmamos que ν es una medida finita.

(a) $\nu \geq 0$

$$\nu(\Omega) \leq ||\ell|| \cdot ||\chi_\Omega||_{L^p} = ||\ell|| \left(\int_\Omega 1^p \, d\mu \right)^{1/p} = ||\ell||(\mu(\Omega)^{1/p}) < \infty$$

(b) $\nu(\varnothing) = 0$

(c) Si $E = \biguplus E_k$, $\chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k} \nearrow \chi_E$

$$0 \leq |\chi_E - \chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k}|^p \leq \chi_E^p \in L^1$$

Por Teorema de Convergencia Dominada

$$\implies \chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k} \xrightarrow{L^p} \chi_E$$

$$\implies \ell(\chi_{\bigcup_{k=1}^n E_k}) \to \ell(\chi_E) \iff \sum_{k=1}^N \ell(\chi_{E_k}) \xrightarrow{N\to\infty} \ell(\chi_E)$$

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \ell(\chi_E) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \ell(\chi_{E_k}) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N \nu(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \nu(E_k) \end{aligned}$$

Además, $\nu \ll \mu$

$$\nu(A) \leq ||\ell||\mu(A)^{1/p}$$

Si $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$ Por el teorema de Radon-Nikodym,

$$\ell(\chi_A) = \nu(A) = \int \chi_A h \, d\mu$$

para una $h \geq 0$. Tomando combinaciones lineales finitas de χ_A's:

$$\ell(s) = \int sh \, d\mu$$

para toda función simple $s : \Omega \to \mathbb{R}$. Ahora, cada función $f \geq 0$ no negativa

$$0 \leq s_n \leq f, \quad s_n \nearrow f$$

Por Teorema de Convergencia Dominada,

$$\implies s_n \xrightarrow{L^p} f$$

Entonces,

$$\ell(f) = \lim_{n\to\infty} \ell(s_n) = \lim_{n\to\infty} \int s_n h \, d\mu$$
$$\int f h \, d\mu$$

Cuando μ es σ-finita,

$$\Omega = \biguplus_n \Omega_n, \quad \mu(\Omega_n) < \infty$$

En cada Ω_n, tenemos $h_n \geq 0$, tal que

$$\ell(f\chi_{\Omega_n}) = \int f\chi_{\Omega_n} h_n \, d\mu \quad \forall f \geq 0, f \in L^p$$

Extienda h_n por 0 fuera de Ω_n. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N} f\chi_{\Omega_n} \xrightarrow{L^p} f$$

por lo que

$$\ell(f) = \lim_{N\to\infty} \ell(\sum_{n=1}^{N} f\chi_{\Omega_n}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int f\chi_{\Omega_n} h_n \, d\mu$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int \Omega f h_n \, d\mu = \lim_{N\to\infty} \int f \sum_{n=1}^{N} h_n \, d\mu$$
$$= \int_\Omega f h \, d\mu$$

donde $h \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} h_n$. En particular,

$$fh \in L^1(\mu)$$

Tomaremos ahora un $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ con signo arbitrario. $\ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ y positivo

$$\begin{aligned}\ell(f) &= \ell(f_+ - f_-)\\ &= \ell(f_+) - \ell(f_-)\\ &= \int f_+ h - \int f_- h \int fh\, d\mu\end{aligned}$$

$f \in L^p \implies |f| \in L^p, |f| \geq 0$

$$\implies \ell(|f|) = \int |f| h\, d\mu \implies |f|h \in L^1$$

Por lo tanto, $f_\pm h \in L^1$

$$\int (f_+ - f_-) g = \int f_+ h - f_- h = \int f_+ h - \int f_- h$$

Si $\ell \in (L^p)^*$, lo expresamos como diferencia de 2 funcionales positivos:

$$\ell = \ell_+ - \ell_-$$

cada una con su $h_\pm$ correspondiente, $h \coloneqq h_+ - h_-$

$$\begin{aligned}\forall f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu), fh_\pm \in L^1\\ \implies fh = fh_+ - fh_- \in L^1\\ \implies \ell(f) = \ell_+(f) - \ell_-(f) = \int fh_+ - \int fh_- = \int fh\end{aligned}$$

En esta etapa hemos demostrado que $\forall \ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ se puede escribir como

$$\ell(f) = \int fh\, d\mu$$

para alguna h medible donde $fh \in L^1$.

Para extender al caso complejo, noten que si $\ell \in (L^p_{\mathbb{C}})^*$ y $f \in L^p_{\mathbb{R}}$.

$$\implies \ell(f) = \operatorname{Re} \ell(f) + i \operatorname{Im} \ell(f)$$

donde $\operatorname{Re} \ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ y $\operatorname{Im} \ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$.

$$|\operatorname{Re} \ell(f)| \leq |\ell(f)| \leq ||\ell||^*_{L^p_{\mathbb{C}}} ||f||_{L^p_{\mathbb{C}}} = ||\ell||_{(L^p_{\mathbb{C}})^*} ||f||_{L^p_{\mathbb{R}}}$$

$$\operatorname{Re} \ell = \langle \cdot, h_1 \rangle$$
$$\operatorname{Im} \ell = \langle \cdot, h_2 \rangle$$

donde $fh_i \in L^1$. Por lo tanto, si

$$h := h_1 + ih_2$$

$$|fh| \leq |fh_1| + |fh_2| \quad \forall f \in L^p_{\mathbb{R}}$$

y

$$\ell(f) = \langle f, h_1 \rangle + i \langle f, h_2 \rangle = \langle f, h_1 + ih_2 \rangle \quad \forall f \in L^p_{\mathbb{R}}$$

Por linealidad

$$\ell(f) = \langle f, h \rangle \quad \forall f \in L^p_{\mathbb{C}}$$

donde $|fh| \in L^1$.

$\ell \in (L^p)^*$. Hemos demostrado que existe h medible tal que

$$fh \in L^1 \quad \forall f \in L^p$$

y

$$\ell(f) = \int fh \, d\mu$$

Afirmamos que $h \in L^q$ y $||\ell|| = ||h||_q$. Por Hölder,

$$|\ell(f)| \leq \int |fh|\, d\mu \leq ||f||_p ||h||_q$$
$$\implies ||\ell|| \leq ||h||_q$$

Mostraremos ahora la otra desigualdad

(a) $p \in (1, \infty)$. Defina

$$B_n \coloneqq \Omega_n \cap \{|h| \leq n\}, \quad \Omega_n \nearrow \Omega$$
$$f_n \coloneqq |h|^{q-1} \operatorname{sgn} h \chi_{B_n}$$

$f_n \in L^p$

$$||f_n||_p^p = \int_{B_n} (|h|^{q-1})^p = \int_{B_n} |h|^q$$
$$\implies ||f_n||_p = \left(\int |h|^q \right)^{1/p}$$

$$\ell(f_n) = \int f_n h\, d\mu = \int |h|^{q-1} \operatorname{sgn} h h\, d\mu$$
$$= \int_{B_n} |h|^q\, d\mu$$

$$\int_{B_n} |h|^q\, d\mu = \ell(f_n) \leq ||\ell|| \cdot ||f_n||_p = ||\ell|| \left(\int |h|^q\, d\mu \right)^{1/p}$$
$$\left(\int_{B_n} |h|^q\, d\mu \right)^{1-1/p} \leq ||\ell||$$
$$\left(\int_{B_n} |h|^q \right)^{1/q} \leq ||\ell||$$

Por Teorema de Convergencia Monótona,

$$\left(\int_{B_n} |h|^q \right)^{1/q} \xrightarrow{n \to \infty} ||h||_q$$

(b) $p = 1, q = \infty$. Suponga que $||\ell|| + 2\varepsilon \leq ||h||_\infty$, para algún $\varepsilon > 0$.

$$||h||_\infty = \text{ínf}\{M > 0 : |h| \leq M \quad \text{c.t.p.}\}$$

$\exists A \in \mathcal{M}, \mu(A) > 0$, tal que

$$|h| \geq ||h||_\infty - \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Ya que μ es σ-finita, $\Omega_n \nearrow \Omega$

$$A_n \coloneqq A \cap \Omega_n \nearrow A$$

Tenemos $|h| \geq ||h||_\infty - \varepsilon$ en A_n donde $0 < \mu(A_n) < \infty$. Tome $f_n \coloneqq \operatorname{sgn} h \chi_{A_n} \in L^1$

$$\begin{aligned}
\ell(f) \int f h \, d\mu &= \int_{A_n} |h| \\
&\geq (||h||_\infty - \varepsilon)\mu(A_n) \\
&\geq (||\ell||_\infty + \frac{2}{\varepsilon} - \varepsilon)||f||_1 \\
&= (||\ell||_\infty + \varepsilon)||f||_1
\end{aligned}$$

$\implies f$ viola la norma de $||\ell||$. Contradicción

■

3.8. Teorema de Hahn-Banach

Sea X un espacio normado, y sea X^* su dual = espacio de funcionales lineales acotados. No hemos visto si **existen** aún funcionales lineales acotados en X **no triviales**. Resulta ser el caso que hay una **abundancia** de funcionales lineales acotados en X.

$X \to$ espacio vectorial. $X' \to$ espacio de funcionales lineales ($X \neq X'$). Diremos que $f \in X'$ ($f : X \to \mathbb{K}$) extiende, $g \in Y'$ ($Y \subseteq X$ subespacio, $g : Y \to \mathbb{K}$). Si

$$f(y) = g(y) \quad \forall y \in Y$$

$(X, f) \succ (Y, g)$.

Definición 3.8.1. Sea X un espacio vectorial **real**. Decimos que

$$p : X \to \mathbb{R}$$

es un **funcional** convexo si satisface

1. (Homogeneidad positiva) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda \geq 0$
2. (subaditividad) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Se dice convexo porque

$$\begin{aligned} p(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq p(\lambda x) + p((1-\lambda)y) \\ &= \lambda p(x) + (1-\lambda)p(y) \end{aligned}$$

Ejemplo: Una seminorma/norma es un funcional convexo.

Ejemplo: Un funcional lineal (sobre $\mathbb{R}$) es un funcional convexo.

Definición 3.8.2. Decimos que el funcional convexo p domina el funcional lineal f si

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Proposición 3.8.1. *Sea X normado. $f \in X'$ es* ***acotado*** *si y solo si f es dominado por $p(x) := M||x||$ para alguna $M > 0$.*

Demostración. ($\implies$): $f \in X*$

$$\begin{aligned} & |f(x)| \leq M||x|| \\ \implies & f(x) \leq M||x|| \end{aligned}$$

($\impliedby$):

$$\begin{aligned} & f(x) \leq M||x|| \quad \forall x \in X \\ & -f(x) = f(-x) \leq M||-x|| = M||x|| \\ \implies & -M||x|| \leq f(x) \leq M||x|| \end{aligned}$$

∎

Teorema 3.8.2 (Hahn-Banach). *Sean X, Y espacios vectoriales* ***reales****, $Y \subseteq X$ y sea $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional lineal* ***convexo****. Si $f \in Y'$ es dominado por p,*

$$f(y) \leq p(y) \quad \forall y \in Y$$

entonces existe una ***extensión*** *$F \in X'$ dominado por p:*

$$F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

Corolario 3.8.2.1. *X es un espacio normado* ***real****. $Y \subseteq X$ subespacio $Y \neq \{0\}$. $f \in Y^*$. Entonces existe una extensión $F \in X^*$ con*

$$||F||_{X^*} = ||f||_{Y^*}$$

$(Y = \text{Gen}(v))$, $f(\lambda v) = \lambda$, $||f||_{Y^*} = \frac{1}{||v||}$. Por Hahn-Banach, $F : X \to \mathbb{R}$, $||F||_{X^*} = ||f||_{Y^*}$.

Demostración. Defina $p(x) \coloneqq ||f||_{Y^*}||x||$. f es dominado por p., por lo que por el Teorema de Hahn-Banach nos da una extensión

$$F : X \to \mathbb{R}$$

$$F(x) \leq p(x) = ||f||_{Y^*}||x||$$

$\implies F \in X^*$ y $||F||_{X^*} \leq ||f||_{Y^*}$.

$$||F||_{X^*} = ||f||_{Y^*}$$

pues es una extensión. ∎

Demostración del Teorema de Hahn-Banach (3.8.2). Asumimos que $Y \subsetneq X \implies$ existe $z \in X \setminus Y$. Vamos a extender f a $F : Y + \text{Gen}(z) \to \mathbb{R}$ de la manera que F sea **dominado** por p.

$$F(y + tz) \coloneqq f(y) + ts, \quad F(z) = s$$

define un funcional lineal en $Y + \text{Gen}(z)$. La meta es es elegir s de tal manera que $F(y+tz) = f(y) + ts \leq p(y + tz)$. Noten que se satisface cuando $t = 0$. Afirmamos que para demostrar su validez $\forall t \neq 0$ basta ver que se satisface oara $t = \pm 1$.

$$\begin{aligned}
F(y+tz) &= |t|F\left(\frac{y}{|t|}+\frac{t}{|t|}z\right) \\
&= |t|f\left(\frac{y}{|t|}+\operatorname{sgn} ts\right) \\
&\leq |t|p\left(\frac{y}{|t|}+\operatorname{sgn} ts\right) = p(y+tz)
\end{aligned}$$

Meta: elija s de modo que

$$f(y)+s \leq p(y+z) \quad t=1$$
$$f(y')-s \leq p(y'-z) \quad t=-1$$

$\forall y, y' \in Y$. Tal s existe si

$$\sup_{y' \in Y} f(y')-p(y'-z) \leq \operatorname*{ínf}_{y \in Y} p(y+z)-f(y)$$

Esto es válido cuando

$$f(y')-p(y'-z) \leq p(y+z)-f(y) \quad \forall y, y' \in Y$$

$$\iff f(y')+f(y) \leq p(y+z)+p(y'-z)$$
$$\iff f(y'+y) \leq p(y+z)+p(y'-z) \quad \forall y, y' \in Y$$

Lo que es verdadero por la convexidad de p y porque f está dominado por p.

$$\begin{aligned}
f(y'+y) \leq p(y+y') &= p(y+z+y'-z) \\
&\leq p(y+z)+p(y'-z) \quad \forall y, y' \in Y
\end{aligned}$$

De esta manera obtuvimos

$$(\tilde{Y}, F) \succ (Y, f)$$

Para extender a todo X utilizaremos un argumento estándar por el Lema de Zorn.

Definición 3.8.3. Orden parcial $\prec$ en un conjunto E es una relación entre algunos de los elementos de E que satisface

1. $e \prec e$
2. $e \prec f$ y $f \prec e \implies e = f$
3. $e \prec f$ y $f \prec g \implies e \prec g$

Definición 3.8.4. Un subconjunto $C \subseteq E$ se llama **cadena** si es totalmente ordenado. Es decir, todo par de elementos de C son relacionados.

Definición 3.8.5. Una cota superior de $D \subseteq E$ es un elemento $e \in E$ tal que

$$d \prec e \quad \forall d \in D$$

Definición 3.8.6. Un elemento **maximal** $m \in E$ es un elemento de E que no puede ser dominado: si

$$m \prec g \implies m = e$$

Lema 3.8.3 (Lema de Zorn)**.** *Si toda cadena de un conjunto E parcialmente ordenado tiene una cota superior, entonces E tiene un elemento maximal.*

Lema de Zorn $\iff$ Axioma de Elección

En nuestro contexto,

$$E = \{(L, \ell) : (L, \ell) \succ (y, f), \ell : L \to \mathbb{R} \text{ es dominado por } p\}$$

Orden es: $(L_1, \ell_1) \succ (L_2, \ell_2)$. Sea $C \subseteq E$ una cadena.

$$C = \{(L_\alpha, \ell_\alpha)\}_\alpha$$

$$L \coloneqq \bigcup_\alpha L_\alpha \text{ es un subespacio vectorial de } X$$

$$\begin{aligned} x, y \in L &\implies x \in L_{\alpha_1}, y \in L_{\alpha_2} \supseteq L_{\alpha_1} \\ \implies x + y \in L_{\alpha_2} &\implies \lambda x + \mu y \in L_{\alpha_2} \subseteq L \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned}\ell : L &\to \mathbb{R}\\ x &\to \ell_\alpha(x) \quad \text{si } x \in L_\alpha\end{aligned}$$

Por la rezón anterior, no hay ambiguedad en esta definición: si $x \in L_\beta$, podemos asumir que $(L_\beta, \ell_\beta) \succ (L_\alpha, \ell_\alpha)$

$$\implies \ell_\beta(x) = \ell_\alpha(x) \quad \forall x \in L_\alpha$$

Concluimos que (L, ℓ) es una cota superior de C. Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $(\tilde{L}, \tilde{F})$. $\tilde{L} = X$. Si $\tilde{L} \subsetneq X$, podemos extender $\tilde{F}$ a $\tilde{L} + \operatorname{Gen}(z)$, $z \in X \setminus \tilde{L}$ siendo dominado por p. Esto contradice la maximalidad de $(\tilde{L}, \tilde{F})$. ■

En el caso de espacios normados **complejos**, utilizaremos la siguiente observación: Todo $X_\mathbb{C}$ se puede ver como un espacio vectorial **real** $X_\mathbb{R}$.

Tenemos la siguiente correspondencia **biyectiva**:

$$\begin{aligned}X'_\mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} X'_\mathbb{C}\\ u &\longrightarrow x \to u(x) + \frac{1}{i}u(ix) =: F(x)\\ \operatorname{Re} F &\longleftarrow F\end{aligned}$$

$F(x) = \underbrace{\operatorname{Re} F(x)}_{u(x)} + i \operatorname{Im} F(x)$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} F(x) &= \operatorname{Re}\left[\frac{1}{i}F(x)\right]\\ &= -\operatorname{Re}[iF(x)]\\ &= -\operatorname{Re}[F(ix)]\\ &= -u(ix)\end{aligned}$$

Además, tenemos $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \underbrace{\operatorname{sgn} F(z)}_{\alpha} F(x) = \alpha F(x) = F(\alpha x)\\ &= \operatorname{Re} F(\alpha x) = u(\alpha x) = |u(\alpha x)|\end{aligned}$$

Cuando $X_{\mathbb{C}}$ es normado, $X_{\mathbb{R}}$ hereda la norma de $X_{\mathbb{C}}$. Si

$$F \in X_{\mathbb{C}}^* \implies u = \operatorname{Re} F \in X_{\mathbb{R}}^*$$

y

$$||F||_{X_{\mathbb{C}}^*} = ||u||_{X_{\mathbb{R}}^*}$$

Teorema 3.8.4. *Suponga que $Y_{\mathbb{C}} \subseteq X_{\mathbb{C}}$, $X_{\mathbb{C}}$ un espacio normado complejo, y $f \in Y_{\mathbb{C}}^*$. Entonces f se puede extender a $F \in X_{\mathbb{C}}^*$ preservando la norma: $||F||_{X^*} = ||f||_{Y^*}$*

Demostración. $f = \underbrace{\operatorname{Re} f}_{u \in Y_{\mathbb{R}}^*} + \underbrace{I \operatorname{Im} f}_{\frac{1}{i} u(i\cdot)}$

Extendemos $U \in X_{\mathbb{R}}^*$ donde $||U||_{X_{\mathbb{R}}^*} = ||u||_{Y_{\mathbb{R}}^*}$. Definimos

$$F(x) := U(x) + \frac{1}{i} U(ix)$$

Tenemos $||F||_{X_{\mathbb{C}}^*} = ||U||_{X_{\mathbb{R}}^*} = ||u||_{Y_{\mathbb{R}}^*} = ||f||_{Y_{\mathbb{C}}^*}$ ■

Corolario 3.8.4.1. *Para todo $x_0 \in X$, X normado, existe $f_0 \in X^*$ tal que $||f_0|| = 1$ y tal que $f_0(x_0) = ||x_0||$.*

Demostración. Aplicamos el teorema anterior a $Y = \operatorname{Gen}(x_0)$ y

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 : Y &\to \mathbb{K} \\ t x_0 &\to t||x_0|| \end{aligned}$$

$$\bar{f}_0(x_0) = ||x_0||, ||\bar{f}_0||_{Y^*} = 1$$

Lo extendemos $f_0 \in X^*$. ■

Corolario 3.8.4.2.

$$||x|| = \sup\{|f(x)| : ||f|| = 1\}$$

Demostración.

$$|f(x)| \leq ||f|| \cdot ||x|| = ||x||$$

Por 3.8.4.1, $||x|| = |f(x)|$ para algún $f \in X^*$ con $||f|| = 1$.

$$\implies ||x|| \leq \sup\{|f(x)| : ||f|| = 1\}$$

■

Teorema 3.8.5. *$\forall x \in X, X$ espacio normado, define un funcional lineal acotado en X^**

$$\begin{aligned} \hat{x} : X^* &\to \mathbb{K} \\ f &\to f(x) \end{aligned}$$

$$||\hat{x}|| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f||=1}} ||f(x)|| = ||x||$$

Entonces, el mapeo

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : X &\to (X^*)^* \\ x &\to \hat{x} \end{aligned}$$

es una isometría lineal.

Nota:

- $\mathcal{J}$ es inyectivo.
- $$\overline{\mathcal{J}(X)} \subseteq (X^*)^* \implies \overline{\mathcal{J}(X)} \simeq \text{completación de } X$$
- Cuando $\mathcal{J}$ es sobreyectivo, $X \simeq X^{**}$ es un espacio de Banach. que se llama **reflexivo**.

Ejemplo: (Espacio de dimensión finita) $L^p(\mu)$, $p \in (1, \infty]$.

Capítulo 4

Teoría de Operadores

4.1. Relaciones de Ortogonalidad

Notación: $x \in X, f \in X^*$, X normado. $f(x) := \langle f, x \rangle$. $Y \subseteq X$, definimos el **aniquilador** de Y

$$Y^{\perp} := \{f \in X^* : \langle f, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} \subseteq X^*$$

Similarmente, $Z \subseteq X^*$,

$$Z^{\perp} := \{x \in X : \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall f \in Z\} \subseteq X$$

Obviamente $Y^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X^* y $Z^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X.

Ejemplo: Cuando X es un espacio de Hilbert, $X^* \simeq X$ por Riesz. $Y \subseteq X$, el complemento ortogonal

$$Y^{\perp} = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\}$$

$\simeq$ aniquilador de Y.

Proposición 4.1.1. *Sea $Y \subseteq X$ subespacio del espacio normado X. Entonces, $(Y^{\perp})^{\perp} = \overline{Y}$*

Demostración. Es fácil ver que $Y \subseteq (Y^{\perp})^{\perp}$.
Para demostrar la otra inclusión, suponga que $\overline{Y} \subsetneq (Y^{\perp})^{\perp}$. Entonces existe $x \neq 0$, $x \in (Y^{\perp})^{\perp} \setminus \overline{Y}$. Defina

$$\begin{aligned} f : \overline{Y} + \mathrm{Gen}(x) &\to \mathbb{K} \\ y + \lambda x &\to \lambda \end{aligned}$$

Obviamente f es un funcional lineal en $\overline{Y} + \mathrm{Gen}(x)$ que satisface:

$$f(x) = 1$$

$$f(y) = 0$$

Además f es acotado en $Z \coloneqq \overline{Y} + \text{Gen}(x)$:

$$f(y) = 0 \quad \forall y \in Y$$

Sea $z = y + \lambda x, \lambda \neq 0. \implies z \neq 0.$

$$\begin{aligned} |f(z)| = |\lambda| &= \frac{|\lambda|}{||z||}||z|| \\ &= \frac{|\lambda|}{||y + \lambda x||}||z|| = \frac{1}{||\frac{y}{\lambda} + x||}||z|| \leq \frac{1}{dist(x, \overline{Y})}||z|| \end{aligned}$$

Por Teorema de Hahn-Banach, podemos extender f a todo X, y asumir que $f \in X^*$. Además,

$$\langle f, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \overline{Y} \implies f \in \overline{Y}^{\perp} \supseteq Y^{\perp}$$

pero $f(x) \neq 0$. Por otro lado,

$$x \in (Y^{\perp})^{\perp} \implies \langle g, x \rangle = 0 \quad \forall g \in Y^{\perp}$$

En particular, $\langle f, x \rangle = 0$, lo que es una contradicción. ■

Suponga que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, X, Y normados. Definimos el **operador adjunto/transpuesto**

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\to X^* \\ f &\to f \circ T =: T^*(f) \\ \langle T^* f, x \rangle &= \langle f, T(x) \rangle \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Obviamente T^* es lineal y es acotado:

$$\begin{aligned} |T^* f(x)| = |f(Tx)| \leq ||f||_{Y^*}||Tx||_Y &\leq ||f||_{Y^*}||T||_{\mathcal{B}(X,Y)}||x||_X \\ \implies ||T^* f||_{X^*} &\leq ||f||_{Y^*}||T||_{\mathcal{B}(X,Y)} \\ \implies ||T^*||_{\mathcal{B}(Y^*,X^*)} &\leq ||T||_{\mathcal{B}(X,Y)} \\ \implies ||T^*|| &\in \mathcal{B}(Y^*, X^*) \end{aligned}$$

Teorema 4.1.2. *La asignación*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X,Y) &\to \mathcal{B}(Y^*,X^*) \\ T &\to T^* \end{aligned}$$

es una isometría lineal. Además,

(a) $(\operatorname{Im} T)^{\perp} = \ker T^* (\subseteq Y^*)$
(b) $(\ker T^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T} (\subseteq Y)$
(c) $(\operatorname{Im} T^*)^{\perp} = \ker T (\subseteq X)$

Demostración. Obviamente, $(\lambda T_1 + T_2)^* = \lambda T_1^* + T_2^*$

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup_{||x||_X=1} ||Tx||_Y \\ &= \sup_{||x||_X=1} \left(\sup_{||f||_{Y^*}=1} |\langle f, Tx\rangle| \right) \\ &= \sup_{\substack{||x||_X=1 \\ ||f||_{Y^*}=1}} |\langle f, Tx\rangle| = \sup |\langle T^* f, x\rangle| \\ &= \sup_{||f||_{Y^*}=1} \sup_{||x||_X=L} |T^* f(x)| \\ &= \sup_{||f||_{Y^*}=1} ||T^* f|| = ||T^*|| \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} f \in (\operatorname{Im} T)^{\perp} &\iff \langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle = 0 \quad \forall x \in X \\ &\iff T^* f = 0 \iff f \in \ker T^* \end{aligned}$$

(b)

$$(\ker T^*)^{\perp} = ((\operatorname{Im} T)^{\perp})^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} T}$$

(c)

$$\begin{aligned} x \in (\operatorname{Im} T^*) &\iff \langle T^* f, x\rangle = 0 \quad \forall f \in Y^* \\ &\iff \langle f, Tx\rangle = 0 \quad \forall f \in Y^* \\ &\iff Tx = 0 \iff x \in \ker T \end{aligned}$$

∎

4.2. Operadores Compactos

Definición 4.2.1. Sean X, Y espacios de Banach.

$$B^X := \{x \in X : ||x||_X \leq 1\}$$

Decimos que un operador lineal $T : X \to Y$ es **compacto** si $\overline{T(B^X)}$ es compacto en Y.
$\iff$ toda sucesión en $T(B^X)$ tiene una subsucesión convergente en Y.
$\iff$ toda sucesión en $T(B^X)$ tiene una subsucesión de Cauchy.
Denotamos la clase de opradores **compactos** con $\mathcal{B}_c(X, Y)$

Teorema 4.2.1. $\mathcal{B}_c(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ *es un subespacio cerrado.*

$$\{T_n\} \subseteq \mathcal{B}_c(X, Y) \text{ y } ||T_n - T|| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$$

Demostración. Fije $\varepsilon > 0$. Elige N grande tal que

$$||T - T_n|| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overline{T_N(B^X)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{M} B_{\varepsilon/2}(y_k)$$

$$T(B^X) \subseteq \bigcup_{k=1}^{M} B_{\varepsilon}(y_k)$$

Tomaremos $\varepsilon_n = \frac{1}{m} \to 0$. Sea $\{x_n\} \subseteq B^X$.

1. Extraemos una subsucesión $\{x_{n,1}\}$ tal que $Tx_{n,1} \subseteq B_{\varepsilon_1}(\bar{y}_1)$
2. $\{x_{n,1}\} \to \{x_{n,2}\}$ tal que

   $$Tx_{n,2} \subseteq B_{\varepsilon_2}(\bar{y}_2)$$

   así hasta $\{x_{n,m}\}$ tal que

   $$Tx_{n,m} \subseteq B_{\varepsilon_m}(\bar{y}_m)$$

Definimos $\tilde{x}_m := x_{m,m}$. $\{T\tilde{x}_m\}$ es una sucesión de Cauchy. ∎

Definición 4.2.2. Un operador $T : X \to Y$ es de **rango finito** si $\operatorname{Im} T$ tiene dim finita.

Proposición 4.2.2. *Un operador $T : X \to Y$ de rango finito es compacto. Como consecuencia si $T = \lim_{n\to\infty} T_n$, T_n de rango finito, entonces $T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$*

Demostración. $X \xrightarrow{T} \operatorname{Im} T \simeq \mathbb{K}^m$, $m = \dim \operatorname{Im} T$.

$$\varphi : \mathbb{K}^m \to \operatorname{Im} T$$
$$(c_1, \ldots, c_m) \to \sum_{i=1}^{m} c_i e_i$$

donde $\{e_i\}$ es una base de $\operatorname{Im} T$. φ es un isomorfismo continuo (con inversa continua). Por lo tanto, $\varphi^{-1}(\overline{T(B_x)}) \subseteq K^m$ cerrado y acotado $\implies$ $\varphi^{-1}(\overline{T(B_X)})$ es compacto en K^m. Por lo tanto, $\overline{T(B_X)}$ es compacto en $\operatorname{Im} T \subseteq Y$. ∎

Q. Es un operador $T : \mathcal{B}_c(X, Y)$, límite de operadores de rango finito?.

A. En general, no. Sí, en el caso cuandso Y es un espacio de Hilbert.

Teorema 4.2.3. *$T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$, Y espacio de Hilbert. Entonces existen T_n de rango finito tal que*

$$||T_n - T|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Demostración. Fije $\varepsilon > 0$. $\overline{T(B^X)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{M} B_\varepsilon(y_k)$

$$F := \operatorname{Gen}(\{y_k\}_{k=1}^{M}) \overset{\text{cerr}}{\subseteq} Y$$

Tenemos $P_F : Y \to Y$.

$$T_\varepsilon := P_F \circ T \quad \text{es de rango finito}$$

Ahora, cada $x \in B^x$ tiene imagen $Tx \in B_\varepsilon(y_k) \implies ||Tx - y_k|| < \varepsilon$

$$||P_F(Tx) - P_F(y_k)|| \leq ||Tx - y_k|| \leq \varepsilon$$
$$||T_\varepsilon x - y_k|| < \varepsilon$$

Concluimos que $\forall x \in B^X$,

$$\begin{aligned} ||Tx - T_\varepsilon x|| &\leq ||Tx - y_k|| + ||T_\varepsilon x - y_k|| \leq 2\varepsilon \\ &\implies ||T - T_\varepsilon|| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

■

Ejemplo (Operadores de Hilbert-Schmidt)**:** $X_i := (\Omega_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$.

$$K(x_1, x_2) \in L^2_{\mathbb{R}}(X_1 \times X_2)$$

Sea $f \in L^2(X_2)$. Defina

$$(T_k f)(x_1) \int_{\Omega_2} K(x_1, x_2) f(x_2)\, d\mu_2$$

T_k es un operador $\mathcal{B}(L^2(X_2), L^2(X_1))$.

$$\begin{aligned} |T_k f(x_1)|^2 &\leq \left(\int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)||f(x_2)|\, d\mu_2 \right)^2 \\ &\leq \underbrace{\int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)|^2\, d\mu_2}_{\text{finita } \mu_1-\text{c.t.p.}} ||f||^2_{L^2(X_2)} \end{aligned}$$

$$\int \left(\int K(x_1, x_2)^2\, d\mu_2 \right) d\mu_1 < \infty$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |T_k f(x_1)|^2\, d\mu_1(x_1) &\leq ||K||^2_{L^1(X_1 \times X_2)} ||f||^2_{L^2(X_2)} \\ &\implies T_k f \in L^2(X_1) \end{aligned}$$

y

$$||T_k f||_{L^2(X_1)} \leq ||K||_{L^2(X_1 \times X_2)} ||f||_{L^2(X_2)}$$

Además, $\forall g \in L^2(X_1)$,

$$\begin{aligned} \langle T_k f, g \rangle_1 &= \int_{X_1 \times X_2} K(x_1, x_2) f(x_2) g(x_1)\, d(\mu_1 \times \mu_2) \\ &= \int_{X_2} \left(\underbrace{\int_{X_1} K(x_1, x_2) g(x_1)\, d\mu_1}_{T_{K^*} g, K^*(x_2, x_1) = K(x_1, x_2)} \right) f\, d\mu_2 = \langle f, T_{K^*} g \rangle_2 \end{aligned}$$

$$T_K^* = T_{K^*}$$

Asumimos que $L^2(X_1), L^2(X_2)$ son separables. Sean $\{e_m\}_m$ una base o.n. de $L^2(X_1)$, $\{f_n\}_n$ una base o.n. de $L^2(X_2)$.

$$\{h_{mn}(x_1, x_2) \coloneqq e_m(x_1) f_n(x_2)\}_{mn} \text{ es una base o.n. de } L^2(X_1 \times X_2)$$

(Por Fubini h_{mn} es maximal)

$$K(x_1, x_2) = \sum_{m,n} a_{mn} e_m(x_1) f_n(x_2)$$

$$K_N(x_1, x_2) = \sum_{\substack{n \le N \\ m \le n}} a_{mn} h_{mn}(x_1, x_2)$$

$$||K - K_N||^2_{L^2(X_1 \times X_2)} = \sum_{m \text{ ó } n > N} |a_{mn}|^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$||T_K - T_{K_N} = ||T_{K - K_n}|| \le ||K - K_N||_{L^2(X_1 \times X_2)}$$

T_{K_N} es un operador de rango finito!

$$\begin{aligned} T_{K_N} f(x_1) &= \langle K_N(x_1, \cdot), f \rangle_{L^2(X_2)} \\ &= \left\langle \sum_{\substack{m \le N \\ n \le N}} a_{mn} e_m(x_1) f_n(x_2), f(x_2) \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{m \le N \\ n \le N}} a_{mn} \langle f_n, f \rangle_{L^2(X_1)} e_m(x_1) \end{aligned}$$

$$\implies \operatorname{Im} T_{K_N} \subseteq \operatorname{Gen}(\{e_m\}_{m=1}^N)$$

Proposición 4.2.4. *Composición de un operador compacto y un operador continuo es compacto.*

$$X \xrightarrow[\text{compacto}]{T} Y \xrightarrow[\text{continuo}]{S} Z$$

$S \circ T$ *es compacto.*

$$Z \xrightarrow[\text{continuo}]{S} X \xrightarrow[\text{compacto}]{T} Y$$

Demostración. $\{x_n\} \subseteq B^X$. Por composición,

$$Tx_{n_k} \to y \implies (S \circ T)(x_{n_k}) \to Sy \text{ converge} \implies S \circ T \in \mathcal{B}_c(X, Z)$$

Por otro lado,

$$\{z_n\} \subseteq B^Z \implies x_n \coloneqq Sz_n \in B^X_{||S||} \implies \frac{x_n}{||S||} \in B^X \implies T(\frac{x_{n_k}}{||s||}) \to \frac{y}{||s||}$$

$$\implies T \circ S(z_{n_k}) \to y$$
$$\implies T \circ S \in \mathcal{B}_c(Z, Y)$$

■

Teorema 4.2.5 (Schauder)**.** $T \in \mathcal{B}_c(X, Y) \iff T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$

Recuerden,

Teorema 4.2.6 (Arzelà-Ascoli)**.** $K \to$ *espacio métrico* ***compacto****.* $\mathcal{C} \subseteq C(K)$ *una coleccion de funciones continuas que satisface:*

1. *(Acotamiento)* $||f||_{C(K)} \leq M, \forall f \in \mathcal{C}$ *para una constante* $M > 0$*.*
2. *(Equicontinuidad)* $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *tal que* $\forall f \in \mathcal{C}$

$$|f(x) - f(y) \leq \varepsilon$$

cuando $|x - y| < \delta$*.*

Entonces $\mathcal{C}$ *existe* $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}$*,* $f \in \mathcal{C}$ *tal que* $f_n \to f$ *en* $C(K)$*.*

Demostración del Teorema de Schauder (4.2.5). $\impliedby$: En ayudantía

$\implies$: Sea $\{f_n\} \subseteq B^{Y^*}$. Queremos demostrar que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $T^* f_{n_k}$ es Cauchy.

Sea $K \coloneqq \overline{T(B^X)}$ es compacto en Y.

$$\mathcal{C} = \{f_n\big|_K : K \to \mathbb{K}\}$$

es una colección de funciones continuas.

1. (Acotamiento)

$$|f_n(x)| \leq \underbrace{||f_n||}_{\leq 1} \cdot ||x|| \leq ||x|| \leq M$$

porque el compacto K es acotado.

2. (Equicontinuidad)

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq ||f_n|| \cdot ||x-y|| \leq ||x-y||$$

(Equi-Lipschitz)

Por Teorema de Arzelà-Ascoli, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\} \in B^{Y^*}$ y una función $f \in C(K)$ tal que

$$f_{n_k} \to f \in C(K)$$

$$f_{n_k}(y) \to f(y) \quad \text{uniformemente en } y \in K$$

$$\iff f_{n_k}(Tx) \to f(Tx) \quad \text{uniformemente en } x \in B^X$$

$$\implies f_{n_k}(Tx) - f_{n_l}(Tx) \xrightarrow{k,l\to\infty} 0 \quad \text{uniformemente en } x \in B^X$$

$$\begin{aligned} \langle f_{n_k}, Tx\rangle - \langle f_{n_l}, Tx\rangle \to 0 \quad &\text{uniformemente en } x \in B^X \\ \langle T^* f_{n_k}, x\rangle - \langle T^* f_{n_l}, x\rangle \to 0 \quad &\text{uniformemente en } x \in B^X \\ &\langle T^*(f_{n_k} - f_{n_l}), x\rangle \to 0 \end{aligned}$$

$$||T^* f_{n_k} - T^* f_{n_l}||_{X^*} = \sup_{x\in B^X} ||\langle T^*(f_{n_k} - f_{n_l}), x\rangle|| \xrightarrow{r,l\to\infty} 0$$

■

4.3. La Teoría de Riesz-Fredholm

Teorema 4.3.1 (Alternativa de Fredholm). *Sea X un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}_c(X,X)$. Entonces,*

a) $\ker(I-T)$ *tiene* $\dim < \infty$.

b) $\mathrm{Im}(I-T)$ *es cerrado en X e* $\mathrm{Im}(I-T) = \ker(I-T^*)^\perp$

c) $\ker(I-T) = \{0\} \iff \mathrm{Im}(I-T) = X$

d) $\dim\ker(I-T) = \dim\ker(I-T^*)$

Nota: La alternativa de Fredholm concierne la solubilidad de la ecuación

$$(I - T)u = f$$
$$u - Tu = f$$

Dice:

- o $\forall f \in X$, tiene una única solución u.
- o la ecuación **homogénea**

$$u - Tu = 0$$

tiene k soluciones linealmente independientes, $k < \infty$. $k = \dim \ker(I - T)$. En este caso, la ecuación **no homogénea**

$$u - Tu = f$$

se puede resolver solo cuando $f \in \operatorname{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$.
$\iff \ell(f) = 0 \quad \forall \ell \in \underbrace{\ker(I - T^*)}_{\dim = k}$
Es decir, se satisfacen las condiciones de ortogonalidad.

Nota: *c)* $\implies$ inyectividad implica sobreyectividad de $I - T$.
Hay operadores acotados en ℓ^2:

$$S : (x_1, x_2, \dots) \to (x_2, x_2, \dots)$$

operador shift es sobreyectivo pero no inyectivo.

$$\tilde{S} : (x_1, x_2, \dots) \to (0, x_1, \dots)$$

es inyectivo pero no es sobreyectivo.

Necesitaremos los siguientes resultados auxiliares

Lema 4.3.2 (Riesz)**.** *Sea X un espacio normado y sea $F \overset{cerr}{\subsetneq} X$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists u \in X$, $||u|| = 1$ tal que*

$$d(u, F) \geq 1 - \varepsilon$$
$$||u - f|| \geq 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in F$$

Demostración. Sea $v \in X \setminus F$

$$\implies d := d(v, F) > 0 \quad \text{(F es cerrado)}$$

Elija $v_0 \in F$ tal que

$$d \leq ||v - v_0| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}$$

Ahora, $u := \frac{v-v_0}{||v-v_0||}$ satisface el Lema pues

$$\begin{aligned} ||u - f|| &= ||\frac{v - v_0 - f||v - v_0||}{||v - v_0||} \\ &= \frac{1}{||v - v_0||} \underbrace{||v - (v_0 + f||v - v_0||)||}_{\geq d} \\ &\geq \frac{d}{||v - v_0||} \geq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

■

Corolario 4.3.2.1. *Sea X un espacio normado, y suponga que B^X es* ***compacta****. Entonces* $\dim X < \infty$*.*

Demostración. Suponga que $\dim X = \infty$. Sucesivamente construimos vectores $u_n \in X$

$$||u_n|| = 1, F_{n-1} := \text{Gen}(\{u_k\}_{k=1}^{n-1})$$

tal que

$$d(u_n, F_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

Entonces $F_{n-1} \subseteq F_n$ y cuando $m > n$

$$||u_m - u_n|| \geq d(u_m, F_n) \geq \frac{1}{2}$$

En particular, $\{u_m\}$ no tiene una subsucesión que converge. Lo que es una contradicción porque la bola unitaria es compacta por suposición. ■

Nota: $T : X \to Y$ compacto. $X_1 \overset{\text{cerr}}{\subseteq} X$, X, Y Banach.

$$\Longrightarrow T\big|_{X_1} : X_1 \to Y \quad \text{es compacto}$$

Demostración del Teorema de Alternativa de Fredholm. a) $X_1 = \ker(I - T) \overset{\text{cerr}}{\subseteq} X$

$$\Longrightarrow T\big|_{X_1} : X_1 \to X$$

es compacto. Por otra parte, $T\big|_{X_1} = (id)\big|_{X_1}$ ya que

$$\forall x \in \ker(I - T), (I - T)x = 0 \iff Tx = x$$

Luego, B^X es compacta $\Longrightarrow \dim X_1 < \infty$

b) Si demostramos que $\mathrm{Im}(I-T)$ es cerrada, $\Longrightarrow \mathrm{Im}(I-T) = \overline{\mathrm{Im}(I-T)} = \ker(I-T^*)^\perp$. Sea

$$f_n := (I - T)u_n \to f \in X$$

y queremos demostrar que $f \in \mathrm{Im}(I - T)$

$$d_n := d(u_n, \ker(I - T))$$

ya que $\dim \ker(I - T) < \infty$, entonces

$$d_n := d(u_n, \ker(I - T)) = ||u_n - v_n||$$

$v_n \in \ker(I - T)$. Afirmamos que $\sup_n d_n < \infty$

■