



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
MAT255I - ANÁLISIS FUNCIONAL  
2º SEMESTRE 2023

# **MAT255I**

## **Análisis Funcional**

Sebastián Guerra

Profesor: Nikola Kamburov (nikamburov@mat.uc.cl)

*Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir*

Versión: 16 de agosto de 2023

# Índice general

<b>1. Intro al Análisis Funcional</b>	<b>3</b>
1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional? . . . . .	3
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Objeto central: espacio de Banach . . . . .	4
1.4. Resultados que vamos a ver . . . . .	5
1.5. Nociones básicas . . . . .	6
1.6. Operadores y funcionales . . . . .	11
1.6.1. Aplicaciones . . . . .	15

# Intro al Análisis Funcional

## 1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

**Definición 1.1.1.** Un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  campo de escalares tiene dimensión infinita si  $\forall n \in \mathbb{N}$  hay  $n$  elementos de  $V$  que son linealmente independientes sobre  $\mathbb{K}$

**Ejemplo:**  $V = C([0, 1], \mathbb{R}) =$  funciones reales continuas en  $[0, 1]$ .  
 $\{1, x, \dots, x^{n-1}\} \subseteq V$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.*  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0, a_k \in \mathbb{R}.$

Reconocemos que existe la operación  $\frac{d}{dx}$  definida en  $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ , funciones suaves, y la operación evaluar en  $x = 0$ .

Evaluando en  $x = 0 \rightarrow a_0 = 0$ . Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en  $x = 0$ :

$$a_1 = 0$$

...



*Demostración alternativa.* Reconocemos que hay un producto interno en  $V = C([0, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\{f_k = \sin(\pi kx)\}_{k=1}^n \subseteq V$$

$$\langle \sin(\pi kx), \sin(\pi lx) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^n a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_l \rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_l, f_l \rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \dots, n$$

■

## 1.2. Motivación

**Ejemplo** (Ecuación de Poisson):

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

**Seba** *Añadir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \rightarrow Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución  $u \in X$  para ciertos espacios  $X, Y$  apropiados.

El Análisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que **comparten** las **mismas características** topológicas/algebraicas/métricas.

## 1.3. Objeto central: espacio de Banach

**Definición 1.3.1** (Espacio de Banach).  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es un espacio normado **completo** (clave para sacar límites).

$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ completos} \} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, \|\cdot\|) \} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) \text{ completos} \}$

**Seba** Arreglar

### Lógica de inclusiones

1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induce una norma  $\|\cdot\|$

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

2.  $\|\cdot\|$  induce una métrica  $d(\cdot, \cdot)$

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

## 1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

**Ejemplo:** Cada funcional lineal en  $\mathbb{R}$  ( $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) se puede representar como  $l(v) = v \cdot w$  para algún vector (único)  $w \in \mathbb{R}^n$ .

En la situación de dimensión  $\infty$ , se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

**Teorema 1.4.1** (Representación de Riesz). *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal **continuo**. Entonces existe un único  $w \in V$ , tal que*

$$l(v) = \langle v, w \rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. **contraintuitivos**.

**Ejemplo:**  $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacta (Heine-Borel).

En  $\dim V = \infty$ , este teorema es falso.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $V$  un espacio de Banach y sea  $B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ .  $B$  es compacto en  $V \iff \dim V < \infty$*

**Ejemplo:** En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subseteq L^p([0, 1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.

$\Rightarrow$  motiva la definición de topologías débiles.

## 1.5. Nociones básicas

**Definición 1.5.1** (Espacios métricos). Un espacio métrico  $(X, d)$  y  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  la métrica que satisface:

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría)  $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Definición 1.5.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Una norma en  $V$  es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface:

1.  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. (Desigualdad triangular)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface solo 2. y 3. se llama **semi-norma**.

Una espacio vectorial  $V$  con una norma se llama **Espacio normado**  $(V, \|\cdot\|)$ .

**Proposición 1.5.1.**  $(V, \|\cdot\|)$  define un espacio métrico con métrica  $d(v, w) := \|v - w\|$ .

**Ejemplo:** ■  $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

- En  $\mathbb{R}^2$ ,  $|(x_1, x_2)| := |x_1|$  define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} \{x_k\}$  es una norma.

■

$$|x|_p := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

**Seba** Añadir dibujos de norma infinito y norma 1

**Proposición 1.5.2.** En  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  todas normas son equivalentes: si  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  son 2 normas, existe  $c > 0$  tal que

$$\frac{1}{c} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c \|v\|_2, \quad \forall v \in V$$

**Definición 1.5.3.** Sea  $X$  un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

**Ejemplo:**  $C_\infty([0, 1]) = C([0, 1])$  (funciones continuas)

**Proposición 1.5.3.**  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$  define una norma en  $C_\infty(X)$ .

*Demostración.* 1.  $\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \forall x \in X$ .

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en  $\|\cdot\|_\infty$

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

**Ejemplo:**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{ \{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : \|a\|_p < \infty \}$$

donde

$$\|a\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ } \sigma\text{-medibles, tales que } \|f\|_{L^p} < \infty \}$$

donde

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int |f|^p d\sigma \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_x |f|$$

**Ejemplo:**  $X = [0, 1]$ ,  $\sigma =$  medida de Lebesgue. En  $C([0, 1])$  definimos

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$$



$$\|f\|_{L^1} = \int |f(x)| dx$$

Estas 2 normas **no son equivalentes**

**Definición 1.5.4.** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es **completo** con respecto a la métrica inducida.

**Ejemplo:**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)  
 $L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es un espacio de Banach (cuando  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es completo).

**Proposición 1.5.4.**  $C_\infty(X)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.*  $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$  de Cauchy.

1. Adivinar el límite  $f$ .
2. Probar la convergencia:

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

3.  $f$  está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo  $x \in X$  fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es  $\{f_n(x)\}_n$  es Cauchy en  $\mathbb{C}$ .

$$\implies f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre  $X$ .

$\Rightarrow f$  es continua sobre  $X$ .

¿Por qué  $f$  es acotada?

Considere  $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \|f_n - f_{\tilde{N}}\|_{\infty} \leq 1$$

cuando  $n \geq \tilde{N} := N(1)$ .

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\infty} &\leq \|f_{\tilde{N}}\|_{\infty} + \|f_n - f_{\tilde{N}}\|_{\infty} \\ &\leq \|f_{\tilde{N}}\|_{\infty} + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

**Definición 1.5.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado.  $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es **sumable** si

$$S_m = \sum_{n=1}^m v_n$$

converge.

$\sum_n v_n$  es **absolutamente sumable** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$$

converge.

■

**Proposición 1.5.5.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es absolutamente sumable, entonces,  $\{S_m\}$  es Cauchy

**Teorema 1.5.6.** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.

*Demostración.*  $\Leftarrow$  :

1. Tome una sucesión  $\{v_n\}$  de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge.  $v_{n_k} \rightarrow v$  en  $V$ . Fije  $\varepsilon > 0$ .  $\implies \|v_m - v\| \leq \underbrace{\|v_m - v_{n_k}\|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|v_{n_k} - v\|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$ ,  
tomando  $k, m$  suficientemente grandes.
2. Dos trucos: Podemos “acelerar” la convergencia. Existe una subsucesión  $\{v_{n_k}\}$  tal que

$$\|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| \leq 2^{-k} \quad (1.1)$$

$$\|v_n - v_m\| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$$n_k := N_1 + \dots + N_k$$

Afirmamos que  $\{v_{n_k}\}$  converge.

Truco de la suma telescópica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^m (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

$$\implies v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

## 1.6. Operadores y funcionales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

**Ejemplo:**

$$T : C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C})$$

$$f \rightarrow F(x) = \int_0^x f(y) dy$$

$T$  es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y < x\}} f(y) dy$$

**Definición 1.6.1.**  $V, W$  son 2 espacios vectoriales.

$T : V \rightarrow W$  es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$f \rightarrow \int_0^1 \underbrace{K(x, y)}_{\text{Kernel}} f(y) dy := T f(x)$$

operador integral. Cuando  $K \in C([0, 1]^2)$ ,  $T$  está bien definida.

En  $\dim \infty$  vamos a exigir que los operadores lineales sean **continuos**.

**Definición 1.6.2.**  $T : V \rightarrow W$ ,  $V, W$  son espacios métricos. Decimos que  $T$  es continuo si

$$T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} V, \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} W$$

$$\iff T^{-1}(C) \stackrel{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \stackrel{cerr}{\subseteq} W$$

$$\iff v_n \rightarrow v \text{ en } V \text{ entonces } T v_n \rightarrow T v \text{ en } W.$$

**Teorema 1.6.1.** Sean  $V, W$  espacios normados. Entonces  $T : V \rightarrow W$  operador lineal es continuo si y solo si

$$\|T v\|_W \leq C \|v\| \quad \forall v \in V \quad (1.2)$$

para alguna constante  $C$ .

**Definición 1.6.3.** Operador lineal que satisface 1,2 se llama **acotado** .

*Demostración.*  $\implies$  : Sea  $T$  continuo.  $B := \{\|w\|_W < 1\}$

$$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : \|v\|_V < r\}$$

pues  $T^{-1}(B)$  es abierto

$$\implies T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : \|v\|_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio  $\frac{r}{2}$ .

$$\|T\bar{v}\|_W < 1$$

Todo  $v \in V, v \neq 0$  se puede escribir como  $v = \frac{\bar{v}}{r/2} \|v\|_V$

Para algún  $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$\|Tv\|_W = \|T(\frac{\bar{v}}{r/2} \|v\|_V)\|_W$$

$$= \|\frac{2}{r} \|v\|_V T(\bar{v})\|_W$$

$$= \frac{2}{r} \|v\|_V \|T\bar{v}\|_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r} \|v\|_V \quad \forall v \neq 0$$

■

**Ejemplo:**

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

es acotado en  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y)|}_{\leq M} |f(y)| dy \\
&\leq M \int_0^1 |f(y)| dy \leq M \|f\|_\infty \quad \forall x \implies \|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

**Definición 1.6.4.** Sean  $V, W$  espacios normados. Defina  $\mathcal{B}(V, W)$  como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de  $V$  a  $W$ . Obviamente  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio vectorial.

Norma operador  $T : V \rightarrow W$ :

$$\|T\| := \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|$$

Obviamente,  $T \in \mathcal{B}(V, W), \|T\| < \infty$

$$\|Tv\| \leq C \underbrace{\|v\|}_1 = C$$

$$\implies \|T\| \leq C$$

De hecho, para  $T \in \mathcal{B}(V, W)$

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\| \leq 1} \|Tv\| \\
&= \inf\{C > 0 : \|Tv\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V\}
\end{aligned}$$

Tenemos  $\|Tv\| \leq \|T\|\|v\|$

**Teorema 1.6.2.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio normado bajo la norma operador.

*Demostración.* 1.  $\|T\| = 0 \implies \|Tv\| = 0 \forall v \in V$

$$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$$

$$2. \|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$$

3. Sea  $v \in V, \|v\| = 1. \forall T, S \in \mathcal{B}(V, W)$ ,

$$\begin{aligned} \|(T + S)v\| &= \|Tv + Sv\| \\ &\leq \|Tv\| + \|Sv\| \\ &\leq \|T\|\|v\| + \|S\|\|v\| = (\|T\| + \|S\|)\|v\| \end{aligned}$$

$$\implies \|(T + S)v\| \leq \|T\| + \|S\|$$

$$\implies \|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

■

¿Cuándo es  $\mathcal{B}(V, W)$  completo?

**Teorema 1.6.3.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es Banach cuando  $W$  es Banach.

### 1.6.1. Aplicaciones

**Definición 1.6.5.** Sea  $V$  un espacio normado sobre  $\mathbb{K}$ .

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio **dual** de  $V$ .

**Teorema 1.6.4.** Cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (completos)  $V^*$  es un espacio de Banach

Elementos de  $V^*$  se llaman **funcionales** en  $V$ .

**Ejemplo:**  $[\ell^p(\mathbb{C})]^* = ?, p \in [1, \infty)$

Resulta que  $? = \ell^q(\mathbb{C})$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Si  $v \in \ell^p, w \in \ell^q$

podemos definir un funcional en  $\ell^p$

$$\begin{aligned} \ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ v = \{v_k\} &\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k \end{aligned}$$

$$|\ell_w| \leq \|w\|_{\ell^q} \|v\|_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty \quad (\ell^2)^* \simeq \ell^2$$

**Nota:**  $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$