



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
MAT255I - ANÁLISIS FUNCIONAL  
2º SEMESTRE 2023

## **MAT255I**

### **Análisis Funcional**

Sebastián Guerra ([sebastian.guerrap@uc.cl](mailto:sebastian.guerrap@uc.cl))  
Profesor: Nikola Kamburov ([nikamburov@mat.uc.cl](mailto:nikamburov@mat.uc.cl))

*Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir*

Versión: 25 de septiembre de 2023

# Índice general

<b>1. Intro al Análisis Funcional</b>	<b>3</b>
1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional? . . . . .	3
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Objeto central: espacio de Banach . . . . .	4
1.4. Resultados que vamos a ver . . . . .	5
<b>2. Espacios de Banach</b>	<b>7</b>
2.1. Nociones básicas . . . . .	7
2.1.1. Espacios Normados . . . . .	7
2.1.2. Espacios de Banach . . . . .	10
2.2. Operadores y funcionales . . . . .	13
2.2.1. Operadores Lineales . . . . .	13
2.2.2. Espacio Dual . . . . .	17
2.2.3. Espacio cociente . . . . .	20
2.2.4. Completación de espacios normados . . . . .	22
2.3. El teorema de Baire . . . . .	22
2.3.1. Categorías de Baire . . . . .	22
2.3.2. Aplicación . . . . .	26
2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta . . . . .	27
2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado . . . . .	30
<b>3. Espacios de Hilbert</b>	<b>32</b>
3.1. Conceptos Básicos . . . . .	32
3.2. Teorema de la Proyección . . . . .	35
3.3. Teorema de Representación de Riesz . . . . .	39
3.4. Bases Ortonormales . . . . .	40
3.5. Series de Fourier . . . . .	47
3.5.1. Convergencia puntual de la serie de Fourier . . . . .	59

# Intro al Análisis Funcional

## 1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

**Definición 1.1.1.** Un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  campo de escalares tiene dimensión infinita si  $\forall n \in \mathbb{N}$  hay  $n$  elementos de  $V$  que son linealmente independientes sobre  $\mathbb{K}$

**Ejemplo:**  $V = C([0, 1], \mathbb{R}) =$  funciones reales continuas en  $[0, 1]$ .  
 $\{1, x, \dots, x^{n-1}\} \subseteq V$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.*  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0, a_k \in \mathbb{R}.$

Reconocemos que existe la operación  $\frac{d}{dx}$  definida en  $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ , funciones suaves, y la operación evaluar en  $x = 0$ .

Evaluando en  $x = 0 \rightarrow a_0 = 0$ . Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en  $x = 0$ :

$$a_1 = 0$$

...



*Demostración alternativa.* Reconocemos que hay un producto interno en  $V = C([0, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\{f_k = \sin(\pi kx)\}_{k=1}^n \subseteq V$$

$$\langle \sin(\pi kx), \sin(\pi lx) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^n a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_l \rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_l, f_l \rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \dots, n$$

■

## 1.2. Motivación

**Ejemplo** (Ecuación de Poisson):

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

**Seba** *Añadir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \rightarrow Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución  $u \in X$  para ciertos espacios  $X, Y$  apropiados.

El Análisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que **comparten** las **mismas características** topológicas/algebraicas/métricas.

## 1.3. Objeto central: espacio de Banach

**Definición 1.3.1** (Espacio de Banach).  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es un espacio normado **completo** (clave para sacar límites).

$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ completos} \} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, \|\cdot\|) \} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) \text{ completos} \}$

**Seba** Arreglar

### Lógica de inclusiones

1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induce una norma  $\|\cdot\|$

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

2.  $\|\cdot\|$  induce una métrica  $d(\cdot, \cdot)$

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

### 1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

**Ejemplo:** Cada funcional lineal en  $\mathbb{R}$  ( $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) se puede representar como  $l(v) = v \cdot w$  para algún vector (único)  $w \in \mathbb{R}^n$ .

En la situación de dimensión  $\infty$ , se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

**Teorema 1.4.1** (Representación de Riesz). *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal **continuo**. Entonces existe un único  $w \in V$ , tal que*

$$l(v) = \langle v, w \rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. **contraintuitivos**.

**Ejemplo:**  $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacta (Heine-Borel).

En  $\dim V = \infty$ , este teorema es falso.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $V$  un espacio de Banach y sea  $B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ .  $B$  es compacto en  $V \iff \dim V < \infty$*

**Ejemplo:** En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subseteq L^p([0, 1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.

$\Rightarrow$  motiva la definición de topologías débiles.

# Espacios de Banach

## 2.1. Nociones básicas

### 2.1.1. Espacios Normados

**Definición 2.1.1** (Espacios métricos). Un espacio métrico  $(X, d)$  y  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  la métrica que satisface:

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría)  $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Definición 2.1.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Una norma en  $V$  es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface:

1.  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. (Desigualdad triangular)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface solo 2. y 3. se llama **semi-norma**.

Una espacio vectorial  $V$  con una norma se llama **Espacio normado**  $(V, \|\cdot\|)$ .

**Proposición 2.1.1.**  $(V, \|\cdot\|)$  define un espacio métrico con métrica  $d(v, w) := \|v - w\|$ .

**Ejemplo:** ■  $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

- En  $\mathbb{R}^2$ ,  $|(x_1, x_2)| := |x_1|$  define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} \{x_k\}$  es una norma.

■

$$|x|_p := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

**Seba** Añadir dibujos de norma infinito y norma 1

**Proposición 2.1.2.** En  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  todas normas son equivalentes: si  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  son 2 normas, existe  $c > 0$  tal que

$$\frac{1}{c} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c \|v\|_2, \quad \forall v \in V$$

**Definición 2.1.3.** Sea  $X$  un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

**Ejemplo:**  $C_\infty([0, 1]) = C([0, 1])$  (funciones continuas)

**Proposición 2.1.3.**  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$  define una norma en  $C_\infty(X)$ .

*Demostración.* 1.  $\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \forall x \in X$ .

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en  $\|\cdot\|_\infty$

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$



si

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

**Ejemplo:**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{ \{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : \|a\|_p < \infty \}$$

donde

$$\|a\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ } \sigma\text{-medibles, tales que } \|f\|_{L^p} < \infty \}$$

donde

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int |f|^p d\sigma \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_x |f|$$

**Ejemplo:**  $X = [0, 1]$ ,  $\sigma$  = medida de Lebesgue. En  $C([0, 1])$  definimos

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^1} = \int |f(x)| dx$$

Estas 2 normas **no son equivalentes**

### 2.1.2. Espacios de Banach

**Definición 2.1.4.** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es **completo** con respecto a la métrica inducida.

**Ejemplo:**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)  
 $L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es un espacio de Banach (cuando  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es completo).

**Proposición 2.1.4.**  $C_\infty(X)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.*  $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$  de Cauchy.

1. Adivinar el límite  $f$ .
2. Probar la convergencia:

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

3.  $f$  está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo  $x \in X$  fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es  $\{f_n(x)\}_n$  es Cauchy en  $\mathbb{C}$ .

$$\implies f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre  $X$ .

$\implies f$  es continua sobre  $X$ .

¿Por qué  $f$  es acotada?

Considere  $\varepsilon = 1$

$$\implies \|f_n - f_{\bar{N}}\|_\infty \leq 1$$

cuando  $n \geq \bar{N} := N(1)$ .

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &\leq \|f_{\bar{N}}\|_\infty + \|f_n - f_{\bar{N}}\|_\infty \\ &\leq \|f_{\bar{N}}\|_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

**Definición 2.1.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado.  $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es **sumable** si

$$S_m = \sum_{n=1}^m v_n$$

converge.

$\sum_n v_n$  es **absolutamente sumable** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$$

converge.

■

**Proposición 2.1.5.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es absolutamente sumable, entonces,  $\{S_m\}$  es Cauchy

**Teorema 2.1.6.** *Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$  :

1. Tome una sucesión  $\{v_n\}$  de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge.  $v_{n_k} \rightarrow v$  en  $V$ . Fije  $\varepsilon > 0$ .  $\Rightarrow \|v_m - v\| \leq \underbrace{\|v_m - v_{n_k}\|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|v_{n_k} - v\|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$ ,  
tomando  $k, m$  suficientemente grandes.
2. Dos trucos: Podemos “acelerar” la convergencia. Existe una subsucesión  $\{v_{n_k}\}$  tal que

$$\|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| \leq 2^{-k} \quad (2.1)$$

$$\|v_n - v_m\| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$$n_k := N_1 + \dots + N_k$$

Afirmamos que  $\{v_{n_k}\}$  converge.

Truco de la suma telescópica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^m (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

$$\Rightarrow v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

## 2.2. Operadores y funcionales

### 2.2.1. Operadores Lineales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

**Ejemplo:**

$$T : C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C})$$

$$f \rightarrow F(x) = \int_0^x f(y) dy$$

$T$  es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y < x\}} f(y) dy$$

**Definición 2.2.1.**  $V, W$  son 2 espacios vectoriales.

$T : V \rightarrow W$  es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$f \rightarrow \int_0^1 \underbrace{K(x, y)}_{\text{Kernel}} f(y) dy := T f(x)$$

operador integral. Cuando  $K \in C([0, 1]^2)$ ,  $T$  está bien definida.

En  $\dim \infty$  vamos a exigir que los operadores lineales sean **continuos**.

**Definición 2.2.2.**  $T : V \rightarrow W$ ,  $V, W$  son espacios métricos. Decimos que  $T$  es continuo si

$$T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} V, \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} W$$

$$\iff T^{-1}(C) \stackrel{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \stackrel{cerr}{\subseteq} W$$

$$\iff v_n \rightarrow v \text{ en } V \text{ entonces } T v_n \rightarrow T v \text{ en } W.$$

**Teorema 2.2.1.** Sean  $V, W$  espacios normados. Entonces  $T : V \rightarrow W$  operador lineal es continuo si y solo si

$$\|Tv\|_W \leq C\|v\| \quad \forall v \in V \quad (2.2)$$

para alguna constante  $C$ .

**Definición 2.2.3.** Operador lineal que satisface (2,2) se llama **acotado**.

*Demostración.*  $\implies$  : Sea  $T$  continuo.  $B := \{\|w\|_W < 1\}$

$$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : \|v\|_V < r\}$$

pues  $T^{-1}(B)$  es abierto

$$\implies T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : \|v\|_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio  $\frac{r}{2}$ .

$$\|T\bar{v}\|_W < 1$$

Todo  $v \in V, v \neq 0$  se puede escribir como  $v = \frac{\bar{v}}{r/2}\|v\|_V$

Para algún  $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$\|Tv\|_W = \|T(\frac{\bar{v}}{r/2}\|v\|_V)\|_W$$

$$= \|\frac{2}{r}\|v\|_V T(\bar{v})\|_W$$

$$= \frac{2}{r}\|v\|_V \|T\bar{v}\|_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r}\|v\|_V \quad \forall v \neq 0$$

■

**Ejemplo:**

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$$

es acotado en  $(C([0, 1]), |||_\infty)$

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x, y)|}_{\leq M} |f(y)| dy \\ &\leq M \int_0^1 |f(y)| dy \leq M ||f||_\infty \quad \forall x \implies ||Tf||_\infty \leq M ||f||_\infty \end{aligned}$$

**Definición 2.2.4.** Sean  $V, W$  espacios normados. Defina  $\mathcal{B}(V, W)$  como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de  $V$  a  $W$ . Obviamente  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio vectorial.

Norma operador  $T : V \rightarrow W$ :

$$||T|| := \sup_{||v||=1} ||Tv||$$

Obviamente,  $T \in \mathcal{B}(V, W), ||T|| < \infty$

$$||Tv|| \leq C \underbrace{||v||}_1 = C$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

De hecho, para  $T \in \mathcal{B}(V, W)$

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup_{v \neq 0} \frac{||Tv||}{||v||} = \sup_{||v|| \leq 1} ||Tv|| \\ &= \inf \{C > 0 : ||Tv|| \leq C||v|| \quad \forall v \in V\} \end{aligned}$$

Tenemos  $||Tv|| \leq ||T|| ||v||$

**Teorema 2.2.2.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio normado bajo la norma operador.

*Demostración.* 1.  $\|T\| = 0 \implies \|Tv\| = 0 \forall v \in V$

$$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$$

$$2. \|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$$

$$3. \text{ Sea } v \in V, \|v\| = 1. \forall T, S \in \mathcal{B}(V, W),$$

$$\begin{aligned} \|(T + S)v\| &= \|Tv + Sv\| \\ &\leq \|Tv\| + \|Sv\| \\ &\leq \|T\| \|v\| + \|S\| \|v\| = (\|T\| + \|S\|) \|v\| \end{aligned}$$

$$\implies \|(T + S)v\| \leq \|T\| + \|S\|$$

$$\implies \|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

■

¿Cuándo es  $\mathcal{B}(V, W)$  completo?

**Teorema 2.2.3.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es Banach cuando  $W$  es Banach.

*Demostración.*  $T_n \in \mathcal{B}(V, W)$  Cauchy. Queremos demostrar que converge en  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(V, W)}$ .

1.  $\forall v \in V, \{T_n v\}$  es Cauchy en  $W$  pues

$$\|T_n v - T_m v\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|v\|$$

$\implies \{T_n v\}$  converge. Definimos

$$Tv := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v$$

2. ¿Por qué  $T \in \mathcal{B}(V, W)$ ?  $\rightarrow$  lineal:

$$T(\lambda v) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v = \lambda T(v)$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$\rightarrow$  acotado:



$\{T_n\}$  es Cauchy.

$\{\|T_n\|\}$  es Cauchy en  $[0, \infty)$

$$\begin{aligned} |||T_n| - |T_m||| &\leq \|T_n - T_m\| \\ \implies \|T_n\| &\leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Sea  $v \in V, \|v\| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|Tv\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\|T_n v\|}_{\leq C\|v\|=C} \leq C \end{aligned}$$

$$\implies \|T\| \leq C$$

3. Convergencia:  $T_n \rightarrow T$  en norma operador. Sea  $v \in V, \|v\| = 1$ .

$$\|(T_n - T)v\|$$

$$T_m v \rightarrow T v$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_n - T_m)v\| \\ &\leq \underbrace{\|T_n - T_m\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \|v\| \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \\ \implies \|T_n - T\| &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

### 2.2.2. Espacio Dual

**Definición 2.2.5.** Sea  $V$  un espacio normado sobre  $\mathbb{K}$ .

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio **dual** de  $V$ .

**Teorema 2.2.4.** Cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (completos)  $V^*$  es un espacio de Banach

Elementos de  $V^*$  se llaman **funcionales** en  $V$ .

**Ejemplo:**  $[\ell^p(\mathbb{C})]^* = ?, p \in [1, \infty)$   
 Resulta que  $? = \ell^q(\mathbb{C})$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
 Si  $v \in \ell^p, w \in \ell^q$   
 podemos definir un funcional en  $\ell^p$

$$\ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$v = \{v_k\} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k$$

$$|\ell_w| \leq \|w\|_{\ell^q} \|v\|_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty \quad (\ell^2)^* \simeq \ell^2$$

**Nota:**  $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$

Cuando  $V = W$  espacio de Banach, entonces  $B(V, V)$  es un espacio de Banach. Es también **álgebra**.

$$T, S \in B(V, V) \implies TS \in B(V, V)$$

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup_{\|v\|=1} \|T(Sv)\| \leq \|T\| \cdot \|Sv\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|v\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \end{aligned}$$

Cómo resolver ecuaciones del tipo

$$(T - \lambda I)u = v$$

donde  $v \in V \leftarrow$  un espacio de Banach,  $T \in B(V, V)$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Queremos construir el operador **inverso**

$$S := (T - \lambda I)^{-1}$$

Cuando  $|\lambda| > \|T\|$ ,  $S$  se puede construir a través de la **serie de Neumann**

$$-\lambda \underbrace{\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)}_{\|T/\lambda\| < 1} u = v$$

Sabemos que

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Definimos

$$S := -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \quad (2.3)$$

**2.3** define  $S \in B(V, V)$  ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

es sumable pues es absolutamente sumable en el espacio de Banach  $B(V, V)$ .

→ ¿por qué  $(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$ ?

Para verificar que  $S(T - \lambda I) = I$ ,

$$S_N = \sum_{n=0}^N -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

$$\begin{aligned} S_N(T - \lambda I) &= S_N T - S_N \lambda = \sum_{n=0}^N -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^N -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \\ &= -\underbrace{\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{N+1}}_{\rightarrow 0 \text{ en } B(V, V)} + I \end{aligned}$$

### 2.2.3. Espacio cociente

¿Cómo obtener espacios normados/Banach de otros espacios?

**Definición 2.2.6** (Espacio cociente). Sea  $W$  un subespacio del espacio vectorial  $V$ .

$$V/W := \{[v], v \in V\}$$

$[\cdot]$  se define a través  $v_1 \sim v_2$  si  $v_1 - v_2 \in W$ .

Se nota también  $V \bmod W$  y se llama el espacio cociente.

Es útil denotar  $[v] = v + W$

Una construcción de subespacio  $W \subseteq V$  tal que  $V/W$  es normado es a través de una **semi-norma** definida en  $V$ .

**Ejemplo:**  $V = C^1([0, 1])$  = espacio de funciones en  $[0, 1]$  con derivadas continuas en  $[0, 1]$ .

$$\|f\| := \max_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

$$\|f\| = 0 \iff f = \text{const}$$

**Teorema 2.2.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial semi-normado. Entonces  $Z := \{v \in V : \|v\| = 0\}$  es un subespacio de  $V$  y

$$\|v + Z\|_{V/Z} := \|v\| \tag{2.4}$$

define una norma en  $V/Z$ .

*Demostración.* 1.  $Z$  es un subespacio vectorial.

$$z_1, z_2 \in Z \implies z_1 + z_2 \in Z$$

$$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| = 0$$

$$z \in Z \implies \lambda z \in Z$$

Así,  $V/Z$  tiene la estructura de un espacio vectorial.

2. Tenemos que comprobar que 2.4 es una buena definición:

Si  $v_1, v_2$  son 2 representantes de  $[v]$ :

$$v_1 = v_2 + z, \quad z \in Z$$

$$\begin{aligned} \|v_1\| &\leq \|v_2\| + \|z\| \implies \|v_1\| \leq \|v_2\| \\ \|v_2\| &\leq \|v_1\| \implies \|v_1\| = \|v_2\| \end{aligned}$$

$$\|v + z\|_{V/Z} = 0$$

$$\implies v + Z = Z \implies v \in Z$$

Las otras 2 proposiciones se heredan de manera obvia

■

$C^1([0, 1])/const$  es un espacio normado con la norma inducida.

Otra construcción similar:

**Proposición 2.2.6.** Si  $W \stackrel{cerr}{\subseteq} V$  subespacio cerrado de un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$ , entonces  $V/W$  tiene una norma:

$$\|[v]\|_{V/W} := \inf_{w \in W} \|v - w\|$$

*Demostración.* En ayudantía

■

### 2.2.4. Completación de espacios normados

**Definición 2.2.7.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado. La **completación** de  $V$  es un espacio de Banach  $(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}})$  con una aplicación lineal

$$\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \rightarrow \tilde{V}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$  es uno a uno
2.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es denso en  $\tilde{V}$
3.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es una isometría:

$$\|\mathcal{J}_{\tilde{V}}(v)\|_{\tilde{V}} = \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

**Teorema 2.2.7.** *Todo espacio normado  $V$  tiene una completación. Esta es única en el siguiente sentido:*

**Seba** *hacer dibujo*

$\tilde{V} = \{\text{sucesiones de Cauchy en } V \text{ que convergen}\}$

$\{v_n\} \sim \{w_n\}$  si  $\|v_n - w_n\| \rightarrow 0$

Sea  $\tilde{v} \in \tilde{V}$

**Seba** *ESTOY HASTA EL PICO*

## 2.3. El teorema de Baire

### 2.3.1. Categorías de Baire

$(X, d)$  espacio métrico.

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

$O \subseteq X$  es abierto si  $\forall x \in O, \exists B_r(x) \subseteq O$ .  $\bigcup_{\alpha} O_{\alpha}$  es abierto.

$F \subseteq X$  es cerrado si  $F^c$  es abierto.  $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$  es cerrado.

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$$

$$\overset{\circ}{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$$

$$E \overset{\text{denso}}{\subseteq} X \text{ si } \overline{E} = X$$

**Definición 2.3.1.**  $E \subseteq X$  es **denso en ninguna parte** si  $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$ .

esencialmente, denso en ninguna parte  $E$  significa que  $E$  no contiene bolas abiertas.

**Ejemplo:**  $E = \{x\}$  es denso en ninguna parte.

**Proposición 2.3.1.**  $F$  es cerrado y denso en ninguna parte  $\iff F^c$  es abierto y denso.

## La noción de categoría de Baire

**Definición 2.3.2.**  $E \subseteq X$  cat I si  $E = \bigcup_k E_k$  donde  $E_k$  es denso en ninguna parte.

**Ejemplo:**  $\mathbb{Q}$  es cat I.

**Definición 2.3.3.** Si  $G$  tiene  $G^c$  que es cat I, decimos que  $G$  es **genérico**.

**Definición 2.3.4.**  $E$  es de cat II si no es de primera categoría.

## Observaciones

1. Si  $E$  es cat I, y  $F \subseteq E$  es cat I

$$\begin{aligned} F &\subseteq E \subseteq \bigcup_k E_k \\ \implies F &= \bigcup_k E_k \cap F, \quad \overline{E_k \cap F} \subseteq \overline{E_k} \\ \implies E_k \cap F &\text{ son densos en ninguna parte.} \end{aligned}$$

2. Si  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de cat I,  $\bigcup_k E_k = \bigcup_k \underbrace{\bigcup_l E_{kl}}_{\text{denso en NP}}$  es una unión contable.
3. No hay conexión entre conjuntos de cat I y conjuntos despreciables del punto de vista de teoría de la medida.

**Ejemplo:**  $G_j = \bigcup_n (q_n - 2^{-(n+j+1)}, q_n + 2^{-(n+j+1)})$   
 $\{q_j\}$  enumeración de  $\mathbb{Q}$ .  
 $G_j$  es abierto y denso en  $\mathbb{R}$ .

$$\implies E_j = G_j^c \text{ es cerrado y denso en NP}$$

$$\implies E := \bigcup_j E_j \text{ es cat I}$$

y de plena medida en  $\mathbb{R}$ .

$\iff E^c$  es de medida 0 de Lebesgue.

$$\begin{aligned} |E^c| &= \left| \bigcap_j E_j^c \right| \\ &= \left| \bigcap_j G_j \right| \leq |G_j| \\ |G_j| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+j+1)} \\ &= 2^{-j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.2** (Teorema de Baire). *Sea  $(X, d)$  **completo**. Entonces,  $X$  es de la cat II en sí mismo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es de cat I en sí:

$$X = \bigcup_k \underbrace{E_k}_{\text{densos en NP}} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k}}_{=F_k \text{ denso en NP y cerrado}}$$

Llegaremos a una contradicción si demostramos que hay un  $x \notin F_k$ ,  $\forall k$ .

$$F_1 \neq X. \overline{B_{r_1}}(x_1) \subseteq F^c, \overline{B_{r_2}}(x_2) \subseteq F_2^c.$$

De esta manera obtenemos bolas cerradas  $\overline{B_{r_k}}(x_k)$  tales que

1.

$$\overline{B_{r_{k+1}}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_k}}(x_k)$$



2.

$$\overline{B_{r_k}}(x_k) \subseteq F_k^c$$

3.

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2} \implies r_k \rightarrow 0$$

$\{x_k\}$  es Cauchy pues:

$$\forall k, l \geq n, x_k, x_l \in \overline{B_{r_n}}(x_n)$$

$$\implies |x_k - x_l| \leq 2r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\implies x_k \rightarrow x \in X$$

Como  $x_k \in \overline{B_{r_k}} \quad \forall k \geq n$ ,

$$\implies x = \lim x_k \in \overline{B_{r_n}}(x_n) \subseteq F_n^c$$

Por lo que  $x \notin F_n \quad \forall n$ .

■

**Corolario 2.3.2.1.**  $G \subseteq X$  es **genérico**  $\implies$  denso en  $X$ , con  $X$  completo.

*Demostración.* Asumimos que  $G$  genérico no es denso, entonces hay una bola  $B$

$$\implies \overline{B} \subseteq G^c = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k \overline{E_k}$$

$$\implies \overline{B} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k} \cap \overline{B}}_{\text{cerrados y densos en NP}}$$

Pero  $\overline{B}$  es un espacio métrico completo, contradicción con el teorema de Baire.

■

**Corolario 2.3.2.2.**  $X$  completo,  $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$  cerrado.  
Entonces, por lo menos uno  $F_k$  contiene una bola.

### 2.3.2. Aplicación

**Teorema 2.3.3.** *El conjunto de funciones continuas en  $[0, 1]$  que no son derivables en ningún punto es **denso** en  $C([0, 1])$*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D} = \{f \in C([0, 1]) : f'(x_*) \text{ existe en un punto } x_* \in [0, 1]\}$

Queremos demostrar que  $\mathcal{D}$  es cat I en  $C([0, 1])$ .

Por 2.3.2.1,  $\mathcal{D}^c$  es genérico  $\implies$  denso en  $C([0, 1])$ .

Si  $f \in \mathcal{D} \implies f'(x_*)$  existe

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

existe.

$$\implies |f(x) - f(x_*)| \leq M|x - x_*| \quad \forall x \in [0, 1]$$

para algún  $M > 0$ .

$$\implies \mathcal{D} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

$E_N := \{f \in C([0, 1]) : |f(x) - f(x_*)| \leq N|x - x_*| \text{ para algún } x_* \in [0, 1]\}$

Estaremos listos si probamos que:

1.  $E_N$  es cerrado en  $C([0, 1])$
2.  $E_N$  es denso en ninguna parte.
1.  $f_n \in E_N$  y  $f_n \rightarrow f$ , en  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

$[0, 1] \ni x_n^* \rightarrow x^*$  (podemos extraer una subsucesión que converge)

$$|f_n(x) - f_n(x_n^*)| \leq N|x - x_n^*| \quad \forall x \in [0, 1]$$

Queremos demostrar que

$$|f(x) - f(x^*)| \leq N|x - x^*|$$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2} + |f_n(x) - f_n(x^*)| + \underbrace{|f_n(x^*) - f(x^*)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x^*)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_n^*)| + |f_n(x_n^*) - f_n(x^*)| \\ &\leq N|x - x_n^*| + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N(|x - x^*| + |x^* - x_n^*|) + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N|x - x^*| + \underbrace{2N|x_n^* - x^*|}_{\varepsilon/3} \end{aligned}$$

2. ¿Por qué  $E_N$  es denso en NP de  $X$ ?

$$P_M = \{\text{funciones continuas en } [0, 1] \text{ derivables a trozos, } |f'| = M\}$$

son funciones zig-zag. Cuando  $M > N$ ,  $P_M \cap E_N = \emptyset$ . Además,  $P_M$  es denso en  $C([0, 1])$ . Como consecuencia,  $E_N$  no puede tener interior no trivial ya que  $E_N$  no puede tener una bola abierta (hay funciones de  $P_M$  en  $E_N$  y  $P_M$  es denso).

Mostraremos que  $P_M$  es denso.

$$P = \{\text{las funciones continuas lineales a tozos}\} \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} C([0, 1])$$

Podemos aproximar cada  $f \in P$  con una función  $g \in P_M$  arbitrariamente bien. ■

### 2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta

Sean  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  espacios de Banach.

$$T \in \mathcal{B}(X, Y) \implies T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} X \quad \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} Y$$

Si  $T$  es biyectiva adicionalmente, entonces  $S := T^{-1}$  es lineal (no necesariamente acotada).

Sin embargo, si  $S$  es continua, entonces  $S^{-1}(U) \stackrel{ab}{\subseteq} \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$

$$\iff T(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$$

**Definición 2.3.5.** Sea  $T : X \rightarrow Y$  una aplicación. Decimos que  $T$  es abierta si

$$T(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$$

Si  $T : X \rightarrow Y$  es lineal, continua y biyectiva, entonces  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  es lineal. ¿Es  $T^{-1}$  continua?

Lo será cuando  $T$  es abierta.

**Teorema 2.3.4** (Aplicación Abierta). *Si  $X, Y$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  y sobreyectiva, entonces  $T$  es abierta.*

**Corolario 2.3.4.1.** *Si  $X, Y$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  es biyectiva, entonces  $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ . Existen  $c, C > 0$  tales que*

$$c\|x\|_X \leq \|\underbrace{Tx}_y\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

$$c\|T^{-1}y\|_X \leq \|y\|_Y$$

*Demostración del teorema 2.3.4.* 1. Será suficiente demostrar que  $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$ . ( $B_r^X = B_r^X(0)$ )

Por linealidad

$$\begin{aligned} T(B_r^X(x)) &= T(x + B_r^X) \\ &= Tx + T(B_r^X) = y + \frac{r}{2}T(B_2^X) \\ &\supseteq y + \frac{r}{2}B_\delta^Y = B_{\frac{\delta r}{2}}^Y(y) \end{aligned}$$

2. Vamos a demostrar que  $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^X$  para algún  $\delta > 0$

Por la sobreyectividad:

$$cat II \rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^X)}$$

Entonces,  $T(B_n^X) \supseteq B_r^Y(y)$  para algún  $n \in \mathbb{N}, r > 0, y \in Y$ . Tomamos  $\tilde{y}$  tal que  $|\tilde{y} - y| \leq \frac{r}{2}$  e  $\tilde{y} = T\tilde{x}$  para algún  $\tilde{x} \in B_n^X$ .

$$T(B_{2n}^x(\tilde{x})) \supseteq \overline{T(B_n^X)} \supseteq B_r^Y(y) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^Y(\tilde{y})$$

Restando  $T\tilde{x}$

$$T(B_{2n}^X) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^X$$

Reescalando

$$\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_{\frac{r}{4n}}^Y \quad \delta = \frac{r}{4n}$$

3. Tenemos  $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^Y$ . Reescalando

$$\overline{T(B_{2^{-k}}^X)} \supseteq B_{\delta 2^{-k}}^Y$$

¿Por qué  $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$ ?

Fije  $y_0 \in B_\delta^Y$ . Podemos encontrar  $x_0 \in B_1^X$  tal que

$$\|y_0 - Tx_0\|_Y < \frac{\delta}{2}$$

$$\implies y_1 := y_0 - Tx_0 \in B_{\delta/2}^Y$$

$\implies$  existe  $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X$  tal que

$$\|y_1 - Tx_1\| < \frac{\delta}{4}$$

De esta manera construimos sucesiones  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , tales que

$$a) \quad x_n \in B_{2^{-n}}^X, y_n \in B_{\delta 2^{-n}}^Y$$

$$b) \quad y_{n+1} = y_n - Tx_n$$

$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in X$  porque  $X$  es Banach. Veremos que  $Tx = y$  y  $x \in B_2^X$ .

$x$  es convergente puesto que es absolutamente convergente.

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_k\| \leq 2$$

Afirmamos que  $Tx = y_0$  por construcción.

$$\begin{aligned}
 Tx &= \lim_{N \rightarrow \infty} T \left( \sum_{n=0}^N x_n \right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \underbrace{Tx_k}_{y_k - y_{k+1}} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} (y_0 - y_{N+1}) \\
 &= y_0
 \end{aligned}$$

ya que  $y_{N+1} \rightarrow 0$ .

■

#### 2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado

**Definición 2.3.6.** Sean  $X, Y$  espacios métricos. Decimos que  $T : X \rightarrow Y$  es **cerrada** si su grafo en  $X \times Y$

$$G_T = \{(x, Tx) \in X \times Y\}$$

es cerrado en  $X \times Y$ .

En otras palabras,

$$(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y) \in X \times Y \implies (x, y) \in G_T \iff y = Tx$$

**Nota:**  $T : X \rightarrow Y$  es continua  $\implies T$  es cerrada.

$$x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx \implies (x_n, Tx_n) \rightarrow (x, Tx)$$

**Teorema 2.3.5.** Sean  $X, Y$  Banach. Entonces,  $T \in \mathcal{B}(X, Y) \iff T$  es lineal y cerrada.

*Demostración.*  $\Leftarrow$  : Utilizaremos el hecho que si  $X, Y$  son Banach, entonces  $X \times Y$  es Banach.

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$$

$$G_T := \{(x, Tx)\} \subseteq X \times Y$$

1.  $G_T$  es un subespacio de  $X \times Y$ .

2.  $G_T \stackrel{cerr}{\subseteq} X \times Y$

Entonces  $G_T$  es un espacio de Banach en sí. Tenemos las proyecciones  $\Pi_X : G_T \rightarrow X$  y  $\Pi_Y : G_T \rightarrow Y$  continuas y lineales.

$$T = \Pi_Y \circ (\Pi_X)^{-1}$$

ya que  $\Pi_x$  es biyectiva, continua y lineal (en un espacio de Banach a otro Banach). Por el teorema 2,3,4,1,  $\Pi_X^{-1}$  es continua. Por lo que  $T = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1}$  es continua.

■

**Significado** Si queremos demostrar que una aplicación lineal  $T : X \rightarrow Y$  es continua,  $x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx$

Podemos asumir adicionalmente que  $Tx_n \rightarrow Ty$ , y demostrar que  $y = Tx$

## Espacios de Hilbert

### 3.1. Conceptos Básicos

**Definición 3.1.1.** Sea  $H$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una función  $H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  que satisface

1. Linealidad en  $\langle \cdot, y \rangle$ ,  $\forall y \in H$ :

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

2. (Hermiticidad)

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

(En  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , esto es simetría)

3. (Definidad)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

**Nota:** 1. y 2., implican que  $\langle x, \cdot \rangle$  es lineal conjugada en la segunda entrada.

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

**Terminología** Tal función se llama **forma sesquilineal**

**Nota:**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una **forma simétrica definida positiva**

Decimos que  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un **espacio pre-Hilbertiano**

De 1. y 2.,  $\langle 0, y \rangle = 0$ ,  $\langle x, 0 \rangle = 0$

Definimos  $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$

**Proposición 3.1.1** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea  $H$  un espacio pre-Hilbertiano

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in H$$



*Demostración.* Si  $y = 0$ , la desigualdad es verdadera. Podemos asumir que  $y \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle \\
 &= \|x\|^2 + \underbrace{\lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle}_{2\Re(\langle x, y \rangle \bar{\lambda})} + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2
 \end{aligned}$$

Evalutando en  $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle \frac{-\overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2}) \\
 0 &\leq \|x\|^2 - 2\frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\
 \implies \|x\|^2 &\geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}
 \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.2.**  $\|\cdot\|$  define una norma  $H$ .

*Demostración.* 1. Definidad ✓

$$2. \|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \bar{\lambda} \|x\|^2)^{1/2} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

3. (Desigualdad triangular)

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
 &= (\|x\| + \|y\|)^2
 \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.3.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es continuo en  $H \times H$

*Demostración.*  $x_n \rightarrow x$  en  $\|\cdot\|$  e  $y_n \rightarrow y$  en  $\|\cdot\|$

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\
&\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

■

**Definición 3.1.2.** Decimos que  $x \perp y$  en el espacio pre-Hilbertiano  $H$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Si  $E \subseteq H$  subconjunto, definimos el **espacio ortogonal**

$$E^\perp := \{x \in H : x \perp y \quad \forall y \in E\}$$

$E^\perp$  es un **subespacio** de  $H$  y es cerrado:

$x_n \in E^\perp$  y  $x_n \rightarrow x$  en  $H$  entonces

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0 \quad \forall y \in E$$

**Teorema 3.1.4** (Pitágoras). Si  $x_1, \dots, x_n \in H$  (pre-Hilbertiano) son mutuamente ortogonales, entonces

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

**Proposición 3.1.5** (Ley del paralelogramo).

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

*Demostración.*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Sumando los 2 términos (diagonales), estamos listos.

■

**Definición 3.1.3.** Decimos que un espacio  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  pre-Hilbertiano es un espacio de **Hilbert** si es **completo** respecto  $\|\cdot\|$  inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

**Ejemplo:**  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$  es un espacio de Hilbert.

**Ejemplo:**  $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $\langle \{x_k\}, \{y_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

$\ell^p$  tiene una estructura de espacio de Hilbert?  $\iff p = 2$

**Ejemplo:**  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un espacio de medida, definimos

$$L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_X |f|^2 d\mu < \infty\} / \sim$$

$f_1 \sim f_2$  si  $\{f_1 \neq f_2\}$  es despreciable.

### 3.2. Teorema de la Proyección

Sea  $H$  un espacio de Hilbert.  $C \subseteq H$  cerrado y convexo. Existe único  $y \in C$  tal que  $y$  minimiza la distancia entre  $x$  y  $C$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $C$  un subconjunto de un espacio vectorial  $V$ . Decimos que  $C$  es **convexo** en  $V$  si

$$\forall x, y \in C \quad (1-t)x + ty \in C \quad \forall t \in [0, 1]$$

**Teorema 3.2.1.** Sea  $C \subseteq H$  un subconjunto cerrado y convexo del espacio de Hilbert  $H$ . Entonces  $\forall x \in H, \exists! y = P_C x \in C$  que satisface:

$$\|x - P_C x\| = d(x, C) = \inf_{c \in C} \|x - c\|$$

Además,  $y = P_C x \iff \Re \langle c - y, x - y \rangle \leq 0, \quad \forall c \in C$

*Demostración.* Tome  $\{y_n\} \subseteq C$ , tal que

$$d_n := \|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d := d(x, C)$$

$\{y_n\}$  será convergente si es Cauchy, ya que  $y_n \rightarrow y \in H$ . Ya que  $C$  es cerrado, de hecho  $y \in C$ .

Por la ley del paralelogramo, con  $v = x - y_n, w = x - y_m$

$$\begin{aligned}
2d_n^2 + 2d_m^2 &= \|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 \\
&= \|y_n - y_m\|^2 + \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\
&= \|y_n - y_m\|^2 + 4 \left\| x - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C} \right\|^2 \\
&\geq \|y_n - y_m\|^2 + 4d^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2d_n^2 + d_m^2 - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

por lo que  $\{y_n\}$  es Cauchy.

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\|x - y_n\|}^{d_n} = d$$

Este minimizador es el único!. Si hubiera otro  $z \neq y$ , aplicamos el mismo argumento a  $\{y, z, y, z, \dots\}$  que no converge por construcción, pero es Cauchy, lo que es una contradicción.

$\implies$  : Sea  $c \in C$  y considere  $(1 - t)y + tc$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
\|x - (1 - t)y - tc\|^2 &= \|x - y - t(c - y)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2t\Re \langle x - y, c - y \rangle + t^2\|c - y\|^2 \\
&\geq \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

$$\implies 2t\Re \langle x - y, c - y \rangle \leq t^2\|c - y\|^2$$

$$\implies 2\Re \langle x - y, c - y \rangle \leq 0$$

$\Longleftarrow$  : Evalúe  $\|x - (1 - t)y + tc\|^2$  en  $t = 1$ .

$$\begin{aligned}
\|x - c\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2\Re \langle x - y, c - y \rangle + \|c - y\|^2 \\
\implies \|x - c\|^2 - \|x - y\|^2 &= \|c - y\|^2 - 2\Re \langle x - y, c - y \rangle \\
\implies \|x - c\|^2 &\geq \|x - y\|^2 \quad \forall c \in C
\end{aligned}$$

Tenemos igualdad  $\iff c = y$ . ■

**Ejemplo:**  $W \subseteq H$  es un subespacio  $\implies W$  es convexo.

**Teorema 3.2.2.** Sea  $F \subseteq H$  un subespacio cerrado. Entonces  $H = F \oplus F^\perp$ , es decir, que todo  $x \in H$  se puede escribir de manera única como  $x = y + z$  con  $y \in F$  y  $z \in F^\perp$ . Además  $y = P_F x, z = P_{F^\perp} x$ .

$$P_F : H \rightarrow H$$

es lineal, acotado y satisface:

- $\|P_F\| \leq 1$  ( $= 1$  cuando  $F = \{0\}$ )
- $P_F^2 = P_F$
- $\text{Im } P_F = F, \text{ ker } P_F = F^\perp$
- $\langle P_F x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, P_F x_2 \rangle$

**Definición 3.2.2.**  $P_F$  se llama la **proyección ortogonal**

*Demostración.* Ya que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , la unicidad se cumple.

$$y + z = y' + z' \implies y - y' = z' - z = 0$$

Tome  $x \in H$ . Define  $y = P_F x$ . Queremos demostrar que  $x - y \in F^\perp$ . Del teorema ?? sabemos que

$$\Re \langle c - y, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall c \in F$$

.

$$\implies \Re \langle v, z \rangle \leq 0 \quad \forall v \in F$$

$$\implies \Re \langle \lambda v, z \rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\implies \Re \lambda \langle v, z \rangle \leq 0$$

**Seba** *añadir align*

tome  $\lambda = \overline{\langle v, z \rangle}$

$$\begin{aligned} &\implies \Re |\langle v, z \rangle|^2 \leq 0 \\ &\implies |\langle v, z \rangle| = 0 \implies z \in F^\perp \end{aligned}$$

Propiedades de  $P_F$ :  $x_1 = y_1 + z$ ,  $x_2 = y_2 + z_2$

$$\begin{aligned} \langle P_F x_1, x_2 \rangle &= \langle y_1, x_2 \rangle \\ &= \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1, P_F x_2 \rangle &= \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle \\ &= \langle y_1, y_2 \rangle \end{aligned}$$

Por lo que  $P_F$  es lineal

$$\begin{aligned} \langle P_F(x_1 + x_2), x_3 \rangle &= \langle x_1 + x_2, P_F x_3 \rangle \\ &= \langle x_1, P_F x_3 \rangle + \langle x_2, P_F x_3 \rangle \\ &= \langle P_F x_1, x_3 \rangle + \langle P_F x_2, x_3 \rangle \\ &= \langle (P_F x_1 + P_F x_2), x_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\iff P_F(x_1 + x_2) = P_F x_1 + P_F x_2$$

$P_F(\lambda x) = \lambda P_F x$  de la misma manera.

$$P_F|_F = \text{Id}|_F$$

$$\begin{aligned} &\implies P_F^2 x = P_F(P_F x) = P_F x \quad \forall x \in H \\ &\implies P_F^2 = P_F \end{aligned}$$

$\|P_F x\|^2 = \|y\|^2 \leq \|x\|^2$  mientras

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &\leq \|y\|^2 + \|z\|^2 \\ \implies \|P_F\| &\leq 1\end{aligned}$$

■

### 3.3. Teorema de Representación de Riesz

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $f \in H^*$  un funcional lineal acotado. Entonces existe único  $u \in H$  tal que*

$$f(x) = \langle x, u \rangle \quad \forall x \in H$$

#### Observaciones

1.  $\|f\|_* = \|u\|$  por Cauchy-Schwarz
- 2.

$$\begin{aligned}H^* &\rightarrow H \\ f &\rightarrow u_f\end{aligned}$$

es una isometría biyectiva, lineal-conjugada. Para todo  $v \in H$  define  $f_v(x) : \langle x, v \rangle$

3.  $f_1 + f_2 \rightarrow u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2}$ , ya que

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) = \langle x, u_{f_1} \rangle + \langle x, u_{f_2} \rangle \\ &= \langle x, u_{f_1} + u_{f_2} \rangle \implies u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2}\end{aligned}$$

4.  $\lambda f \rightarrow u_{\lambda f} = \lambda u_f$ ?

$$[\lambda f](x) = \lambda(f(x)) = \lambda \langle x, u_f \rangle = \langle x, \bar{\lambda} u_f \rangle$$

**Nota:** Teorema falso. Cuando  $H$  es solo espacio pre-Hilbertiano, por ejemplo,

$$H = C([-1, 1])$$

con producto interno usual.

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dt \in H^*$$

*Demostración.* Si  $f = 0 \implies u = 0$ . Asumimos que  $f \neq 0$  y consideramos  $F := \ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$ .  $F$  es un subespacio de  $H$  cerrado. Si  $f \neq 0 \implies F \neq H$ . Por el teorema de la proyección (3.2.2)

$$H = F \oplus F^\perp$$

Elije  $z \in F^\perp \setminus \{0\}$ . Afirmamos que  $u = \overline{f(z)}z/|z|^2 \neq 0$  satisface  $f = \langle \cdot, u \rangle$ . Ya que

$$\begin{aligned} f(z)x - f(x)z &\in F \\ \implies f(z)x - f(x)z &\perp z \\ \langle f(z)x, z \rangle - \langle f(x)z, z \rangle &= 0 \\ \implies \left\langle x, \overline{f(z)}z \right\rangle &= f(x)|z|^2 \\ \implies f(x) &= \left\langle x, \frac{\overline{f(z)}z}{|z|^2} \right\rangle \end{aligned}$$

Entonces  $u \in H$  que satisface  $f = \langle \cdot, u \rangle$ . Es único: si tenemos  $u, u' \in H$

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, u \rangle = \langle x, u' \rangle \\ \implies \langle x, u - u' \rangle &= 0 \quad \forall x \in H \\ \implies u - u' &\in H^\perp = \{0\} \end{aligned}$$

■

### 3.4. Bases Ortonormales

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ . Un subconjunto  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es LI si  $\forall I \subseteq^{\text{finito}} A$ ,



$$\sum_{i \in I} c_i v_i = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i \in I$$

$$\text{Gen}(\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \left\{ \sum_{i \in I} c_i u_i : I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A, c_i \in \mathbb{K} \right\}$$

**Definición 3.4.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es ortonormal (o.n.) si

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \delta \text{ de Kronecker}$$

Suponga que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es o.n.

$$F := \text{Gen}(\{e_i\}_i^n) \subseteq H$$

es un subespacio cerrado. Podemos definir  $P_F$

$$P_F x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i}_y$$

Es suficiente demostrar que  $x - y \perp F$ .

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, e_k \right\rangle = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\|P_F x\|^2 \leq \|x\|^2$$

Por Pitagoras

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x\|^2 \\ \implies &\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

**Proposición 3.4.1** (Desigualdad de Bessel). *Sea  $S = \{e_\alpha\}_\alpha$  un conjunto o.n. Entonces,*

$$\sum_{\alpha} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{\alpha} r_{\alpha} := \sup \left\{ \sum_{i \in I} r_i : I \subseteq A \right\}$$

*Demostración.* Utilizando  $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ , y tomando supremo. ■

**Consecuencias**  $\{\alpha : \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha \in A : |\langle x, e_\alpha \rangle| \geq \frac{1}{n}\}$  es **contable**: Si es infinito:  $|\langle x, e_{\alpha_k} \rangle|^2 > \frac{1}{n^2}, k = 1, \dots$ . Sumando suficientes términos superaríamos  $\|x\|^2$ , que no es posible por Bessel.

**Definición 3.4.2.**

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha \rangle$$

**coeficientes de Fourier** respecto a  $\{e_\alpha\}$

$$\sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

¿Cuándo tenemos igualdad?

**Teorema 3.4.2.** *Sea  $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un subconjunto o.n. del espacio de Hilbert  $H$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1.

$$\sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$$

2.  $\mathcal{B}$  es **maximal** en el sentido de:

*Si  $x \in H$ , tal que  $x \perp e_\alpha, \forall \alpha \in A \implies x = 0$*

3.  $\forall x \in H$ ,

$$x = \sum_{\alpha} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$$

*donde la suma en el lado derecho tiene solo un número contable de términos no ceros y la suma de estos converge a  $x$  en  $\|\cdot\|$  independiente de su orden.*

4.  $\text{Gen}(\mathcal{B})$  es denso en  $H$

**Definición 3.4.3.** Decimos que un conjunto  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  o.n. es una **base ortonormal** si satisface cualquiera de 1.-4.

*Demostración.* 2.  $\implies$  3. Sea  $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n}, \dots$  una enumeración de los  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$  para los cuales  $\hat{x}(\alpha) \neq 0$ . Por Bessel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(\alpha_k)|^2 &\leq \|x\|^2 < \infty \\ \implies \sum_{k=n}^m |\hat{x}(\alpha_k)|^2 &\xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Por Pitagoras,

$$\left\| \sum_{k=n}^m \langle x, e_{\alpha_k} \rangle e_{\alpha_k} \right\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n \hat{x}(\alpha_k) e_{\alpha_k}$ .  $\{S_n\}$  es Cauchy en  $H$

$$\implies S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \quad \text{en } H$$

Además

$$\begin{aligned} \langle x - S, e_\alpha \rangle &= \langle x, e_\alpha \rangle - \langle S, e_\alpha \rangle \\ &= \langle x, e_\alpha \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n, e_\alpha \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{cuando } \alpha \in \mathcal{J} \\ 0 & \text{cuando } \alpha \notin \mathcal{J} \end{cases} \implies x - S = 0 \implies x = S \end{aligned}$$

3.  $\implies$  1.: Por continuidad de la norma

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\hat{x}(\alpha_k)|^2 \\ &= \sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 \end{aligned}$$

1.  $\implies$  2.: obvio

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha} |\langle x, e_{\alpha} \rangle|^2 = 0 \implies x = 0$$

3.  $\implies$  4.: Si  $x \perp e_{\alpha}$ ,  $\forall \alpha$ ,

$$\begin{aligned} &\implies x \perp \text{Gen}(\{e_{\alpha}\}) \\ &\stackrel{\text{continuidad}}{\implies} x \perp \overline{\text{Gen}(\{e_{\alpha}\})} = H \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

■

**Ejemplo:**  $\ell^2$ ,  $e_k = \{(0, \dots, \underbrace{1}_k, 0, \dots)\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 = \sum |\langle x, e_i \rangle|^2$$

**Teorema 3.4.3.** *Todo espacio de Hilbert tiene una **base ortonormal**.*

*Demostración.* Utiliza el Lema de Zorn

■

**Definición 3.4.4.**  $X$  espacio métrico es **separable** si existe un subconjunto  $C \subseteq X$  contable y denso en  $X$ .

**Ejemplo:**  $\ell^p$ ,  $p \in [1, \infty)$  es separable.

$L^2([0, 1])$  es separable. Polinomios con coeficientes  $\in \mathbb{K} \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} C([0, 1]) \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} L^2([0, 1])$

**Seba** *Faltan los polinomios con coefs  $\in \mathbb{Q}$  cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .*

**Teorema 3.4.4.**  $H$  es separable si y solo si existe una **base ortonormal** para  $H$  que es **contable**. En este caso, toda base o.n. es contable.

*Demostración.*  $\implies$  :  $\{x_n\} \subseteq H$  es denso.  $x_1, \dots, x_n, \dots$  Descartando posiblemente términos, podemos asumir que  $x_1, \dots, x_n$  son LI  $\forall n \in \mathbb{N}$  y todos los descartados pertenecen a  $\text{Gen}(\{x_k\})$ . De esta manera,  $\text{Gen}(\{x_k\})$  es denso en  $H$ .

Por Gram-Schmidt producimos una sucesión  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  tal que,  $\text{Gen}(\{y_k\}_{k=1}^n) = \text{Gen}(\{x_k\}_{k=1}^n) \forall n \in \mathbb{N}$  y  $\mathcal{B} = \{y_k\}$  es un conjunto o.n.

$\mathcal{B}$  es o.n. y  $\text{Gen}(\mathcal{B}) = \text{Gen}(\{x_k\})$  es denso en  $H$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es una base ortonormal contable.

$\Leftarrow$  : Sea  $\{e_k\}_k$  una base o.n. contable.

$$G_n := \text{Gen}(\{e_k\}_{k=1}^n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}$$

$\Rightarrow$   $\text{Gen}(\{e_k\}_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  es denso en  $H$ .

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{G}_n \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

donde  $\hat{G}_n = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_k \in \mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}\}$

**Seba** *añadir cases en vola*

Sea  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  otra base o.n.

$$A_n = \left\{ \alpha \in \mathcal{A} : \left\langle \overbrace{x}^{e_n}, u_\alpha \right\rangle \neq 0 \right\} \text{ es contable}$$

Además, para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,

$$\langle u_\alpha, e_k \rangle \neq 0 \text{ para algún } k$$

por la maximalidad de la base  $\{e_n\}_n$  (que es contable). Entonces,  $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  es contable. ■

Vamos a demostrar que todo espacio de Hilbert separable es  $\ell^2 = \{\{x_k\} \in \mathbb{K}^n : \sum ||x_k|^2| < \infty\}$

**Definición 3.4.5.** Sean  $H_1, H_2$  dos espacios de Hilbert. Un **isomorfismo**  $T : H_1 \rightarrow H_2$  se llama **unitario** si

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{H_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \quad \forall x_1, x_2 \in H_1$$

$T$  unitario  $\Rightarrow T$  es una **isometría**:

$$||Tx||_{H_2}^2 = \langle Tx, Tx \rangle_{H_2} = \langle x, x \rangle_{H_1} = ||x||_{H_1}^2$$

**Teorema 3.4.5.** *Todo espacio de Hilbert separable es unitariamente isomorfo a  $\ell^2$ .*

*Demostración.* Sea  $\{e_n\}$  una base o.n. contable para  $H$ .

$$\begin{aligned} H &\rightarrow \ell^2 \\ x &\rightarrow \hat{x} = (\hat{x}(1), \hat{x}(2), \dots) \end{aligned}$$

donde  $\hat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle$ .

Por Parseval,

$$\|\hat{x}\|_{\ell^2}^2 = \sum_k |\hat{x}(k)|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

$$\implies \hat{x} \in \ell^2 \implies T \text{ es bien definido}$$

es lineal, inyectivo (por maximalidad), sobreyectivo: si  $c \in \ell^2$ ,  $\sum_{k=1}^n c_k e_k \xrightarrow{H} x_c$ , donde

$$\hat{x}_c(k) = \langle x_c, e_k \rangle = c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es una isometría: **Identidad de Parseval.**

$$\|Tx\|_{\ell^2}^2 = \|x\|_H^2$$

Identidad de Polarización:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

Por lo tanto,  $T$  preserva el producto interno:

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{\ell^2} = \langle x_1, x_2 \rangle_H$$

■

### 3.5. Series de Fourier

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica de período  $2\pi$ .

$F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{T}$  es el círculo unitario.

$$F(e^{i\theta}) = f(\theta)$$

$$\hookrightarrow \tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

con

$$\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$$

Vamos a asumir que  $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$

$$f \in L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles, periódicas-}2\pi \text{ t.q. } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} = L^2([-\pi, \pi])$$

Definimos

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Proposición 3.5.1.**  $\{e_n\}$  es un conjunto ortonormal de  $L^2(\mathbb{T})$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n(x) \overline{e_m(x)} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2\pi} = 1 & n = m \\ \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

■

**Definición 3.5.1.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Defina

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \langle f, e_n \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx\end{aligned}$$

coeficiente de Fourier.

$$f \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$$

serie de Fourier.

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

suma de Fourier parcial.

Preguntas:

1. ¿Converge  $S_n f$  a  $f$  en  $L^2$ ?
2. ¿Converge  $S_N f(x)$  a  $f(x)$  puntualmente?

Si falla para algún  $x$ , ¿es este comportamiento raro o genérico?

3. ¿Converge  $S_N f$  a  $f$  en otras normas (e.g.  $L^p, p > 1$ )?

**Teorema 3.5.2.**  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

**Nota:** El enunciado  $\iff$ ,  $\mathcal{B} = \{e_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base o.n. para  $L^2(\mathbb{T})$

Entonces será suficiente demostrar que  $\mathcal{B}$  es maximal:

$$\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies f = 0$$



**Teorema 3.5.3.**  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Entonces,

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t) dt$$

donde

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{2N+1}{2\pi} & x = 0 \\ \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\pi \sin \frac{x}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} S_n f &= \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n(x) \\ &= \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\left( \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-t)} \right)}_{D_N(x-t)} f(t) dt \end{aligned}$$

donde

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} e^{inx}$$

Kernel de Dirichlet.

$$D_N(0) = \frac{2N+1}{2\pi}$$

Para  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2i \sin(N + \frac{1}{2})x}{2i \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$



**Nota:**  $D_N(x)$  es  $2\pi$ -periodico, par, suave y

$$\int_{\mathbb{T}} D_N(x) dx = 1$$

**Seba** *añadir foto del kernel de Dirichlet*

Es difícil demostrar directamente que  $S_N f(x) \rightarrow f(x)$  ( $D_N(x)$  cambia de signo y oscila muy rápidamente).

**Desvío** En lugar de demostrar que  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$  directamente, vamos a considerar la sucesión **media de Cesàro**

$$\sigma_N f = \frac{S_0 f + S_1 f + \cdots + S_{N-1} f}{N}$$

**Nota:**  $S_N f$  converge a  $f$ ,  $\sigma_N f$  converge a  $f$

**Teorema 3.5.4** (Fejér).

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$$

Cuando  $f \in C(\mathbb{T})$ ,

$$\sigma_N f \xrightarrow{\text{unif.}} f \text{ en } \mathbb{T}$$

Si  $\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\implies S_n f \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies \sigma_N f \equiv 0$$

$$\xrightarrow{\text{Fejér}} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f = 0 \implies \text{Maximalidad de } \mathcal{B}$$

**Proposición 3.5.5.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Entonces

$$\sigma_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-t)f(t) dt$$

donde

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}N & x = 0 \\ \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2 \frac{x}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

es el Kernel de Fejér.

*Demostración.*

$$\sigma_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f$$

$\downarrow$

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$$

$x = 0$

$$\begin{aligned} F_N(0) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\frac{1}{2\pi}(2n+1)}^{D_n(0)} \\ &= \frac{1}{2\pi}N \end{aligned}$$

$x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sin(n+\frac{1}{2})x \sin \frac{x}{2}}_{\frac{1}{2}(\cos(nx) - \cos((n+1)x))} \\ &= \frac{2}{\pi N} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \underbrace{\frac{1}{2}(\cos(0x) - \cos(Nx))}_{\sin^2 \frac{Nx}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

■

Propiedades de  $F_N(x)$

1.  $F_N(x) \geq 0$ , suave, periódico- $2\pi$ , par

2.

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(x) dx = 1$$

(como promedio de  $D_N(x)$ )

3.

$$|F_N(x)| \leq \frac{1}{2\pi N \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad \delta \leq |x| \leq \pi$$

**Seba** *añadir foto pero borrarla pa zapit*

## Notación

$$S_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} D_N(x-t) f(t) dt = D_N * f$$

$$\sigma_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} F_N(x-t) f(t) dt = F_N * f$$

Convolución:  $f \in C(\mathbb{T})$ ,  $g \in L^1(\mathbb{T})$

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt$$

tomando  $\tau = x - t$

$$f * g(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tau) g(x-\tau) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) g(x-\tau) = g * f(x)$$

**Definición 3.5.2.**  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels en  $L^1(\mathbb{T})$  si

1.

$$\int_{\mathbb{T}} K_n(x) dx = 1$$

2.

$$\sup_n \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)| dx < \infty$$

3.

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \delta > 0$$

**Nota:**  $\{F_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels pero  $\{D_N\}$  **no** lo es. Veremos que 2. falla para el kernel de Dirichlet.

**Teorema 3.5.6.** Si  $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels en  $L^1(\mathbb{T})$  y  $f \in C(\mathbb{T})$ , entonces

$$K_N * f = f * K_N \rightarrow f$$

uniformemente en  $\mathbb{T}$

**Corolario 3.5.6.1.**

$$\sigma_N f \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{unif}} f \text{ para } f \in C(\mathbb{T})$$

*Demostración del teorema 3.5.6.*

$$\begin{aligned} K_n * f(x) - f(x) &= f * K_n(x) - f(x) \\ &= \int f(x-y) K_n(y) dy - f(x) \\ &= \int (f(x-y) - f(x)) K_n(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |K_n * f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy \\ &= \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy + \int_{|y| > \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{T}} |K_n(y)| dy + 2 \max_{\mathbb{T}} |f| \int_{|y| > \delta} |K_n(y)| dy \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

cuando  $n$  es suficientemente grande. ■

**Corolario 3.5.6.2.** Si  $f \in C(\mathbb{T})$  y  $\hat{f}(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \implies f \equiv 0$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \sigma_N f &\equiv 0 \\ \downarrow \text{unif} \\ f &\equiv 0 \end{aligned}$$



**Corolario 3.5.6.3.** *Suponga que  $f \in C(\mathbb{T})$  y su serie de Fourier converge absoluta y uniformemente, es decir:*

$$\sum_n |\hat{f}(n)e_n(x)| = \sum_n |\hat{f}(n)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \infty$$

Entonces,

$$S_N f \rightarrow f \text{ unif}$$

*Demostración.* Defina

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n(x) \in C(\mathbb{T})$$

por convergencia absoluta uniforme.

$$h(x) := g(x) - f(x)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \hat{g}(n) - \hat{f}(n) = \left\langle \sum_k \hat{f}(k)e_k(x), e_n(x) \right\rangle - \hat{f}(n) \\ &= \hat{f}(n) - \hat{f}(n) = 0 \end{aligned}$$

Se puede intercambiar la suma con la integral por convergencia uniforme y el corolario anterior, se concluye que  $h \equiv 0$ . ■

Tenemos la convergencia  $\sigma_N f \xrightarrow{\text{unif}} f$  para  $f \in C(\mathbb{T})$ . Queremos pasar a convergencia en  $L^2$ . Vamos a utilizar la **densidad** de  $C(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$ . Vamos a necesitar la estimación adicional:

**Proposición 3.5.7.**

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$$

*Demostración.*  $\sigma_N f = \frac{1}{N}(S_0 f + \cdots + S_{N-1} f)$

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|S_k f\|_{L^2}$$

Tenemos,

$$\|S_k f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \text{ (Bessel)}$$

$S_k f$  = proyección de  $f$  en  $\text{Gen}(\{e_l\}_{|l| \leq k})$

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} N \|f\|_{L^2}$$

■

De hecho, tenemos

**Proposición 3.5.8.** *Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , entonces*

$$\|\sigma_N f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$$

**Teorema 3.5.9.** *Sea  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Entonces,*

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^p} f$$

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ . Aproxime  $f \in L^p(\mathbb{T})$  con  $g \in C(\mathbb{T})$ :

$$\|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \sigma_N f - f &= \sigma_N g - g + \sigma_N(f - g) - (f - g) \\ \|\sigma_N f - f\|_{L^p} &\leq \|\sigma_N g - g\|_{L^p} + \|\sigma_N(f - g)\|_{L^p} + \|f - g\|_{L^p} \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

Podemos elegir  $N$  suficientemente grande, tal que

$$\|\underbrace{\sigma_N g - g}_h\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

por convergencia uniforme.

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^p} &= \left( \int_{\mathbb{T}} |h|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{T}} \varepsilon^p dx \right)^{1/p} = (2\pi)^{1/p} \varepsilon \end{aligned}$$

**Corolario 3.5.9.1.**

$$S_N f \xrightarrow{L^2} f$$

*Demostración.*

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$$

**Lema 3.5.10** (Riemann-Lebesgue).  $f \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ . Utilizaremos que

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^1} f$$

Podemos encontrar  $N$  suficientemente grande, tal que

$$\| \underbrace{f - \sigma_N f}_g \|_{L^1} \leq \varepsilon$$

$n > N$ ,

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) &= \hat{f}(n) - \widehat{\sigma_N f}(n) \xrightarrow{0} 0 \\ \Rightarrow |\hat{f}(n)| &= |\hat{g}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |g(x) e^{-inx}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |g| dx \leq \varepsilon / \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell_{\mathbb{Z}}^2 = \{(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty\}$$

$$f \rightarrow \hat{f} = (\dots, \hat{f}_{(-1)}, \hat{f}_{(0)}, \hat{f}_{(1)}, \dots)$$

es un isomorfismo unitario.



$$L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0 = \{(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) : \lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n = 0\}$$

$$f \rightarrow \hat{f}$$

**Teorema 3.5.11.**  $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0$  es lineal, acotado e inyectivo.

*Demostración.* lineal ✓

$$\|\hat{f}\|_{\ell^\infty} \leq ?$$

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)e^{-inx}| dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

por lo que  $\|\hat{f}\|_{\ell^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$

→ inyectivo? Suponga que  $\hat{f} = 0 \iff \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\sigma_N f \equiv 0$$

$$\downarrow L^1$$

$$f \equiv 0$$

pero  $\mathcal{F}$  no es sobreyectiva. Si  $\mathcal{F}$  fuera inyectivo, sería un isomorfismo continuo. Por teorema de aplicación abierta, tenemos que  $\mathcal{F}^{-1}$  es acotada:

$$\|\mathcal{F}^{-1} \hat{f}\|_{L^1} \leq c \|\hat{f}\|_\infty$$

$$\|f\|_{L^1} \leq c \|\hat{f}\|_\infty$$

Tomamos  $f(x) = D_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} e_n(x)$ .

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e_n, e_n \rangle \quad |n| \leq N$$

$$= 0 \quad |n| > N$$

$$\|\hat{f}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

**Proposición 3.5.12.**

$$\|D_N\|_{L^1} \geq C \log N$$

**Corolario 3.5.12.1.**  $f_N := D_N$  contradice  $\|f\|_{L^1} \leq c\|\hat{f}\|_\infty$

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \\ \|D_N\| &= \int_{-\infty}^{\infty} |D_N(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})x|}{\sin \frac{x}{2}} \\ \|D_N\| &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{x} dx \end{aligned}$$

$$u = (N + \frac{1}{2})x$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{N\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u| du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \underbrace{\int_0^{\pi} |\sin u| dy}_{c'} \\ &= \frac{2c'}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq c \log N \end{aligned}$$

**Seba** añadir align

■

Vimos que  $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$ .

Q. ¿Converge  $S_n f \rightarrow f$  puntualmente?

A. ¡Generalmente no!

Q. ¿Converge  $S_N f \rightarrow f$  c.t.p? Es fácil ver (si conocemos teoría de integración) que existe una subsucesión

$$S_{N_k}f \rightarrow f \quad \text{c.t.p}$$

(dada la convergencia  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$ )

A. (Teorema de Carleson) Sí,  $S_n f \rightarrow f$  c.t.p (Difícil).

### 3.5.1. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Vieron en ayudantía un ejemplo de función  $f \in C(\mathbb{T})$  tal que

$$S_N f(0) \not\rightarrow f(0)$$

De hecho, este ejemplo es **genérico**

**Teorema 3.5.13.** *Para todo  $x \in \mathbb{T}$ , existe un conjunto genérico  $A_x \subseteq C(\mathbb{T})$  tal que*

$$\sup_N |S_N f(x)| = \infty$$

La demostración utiliza el marco del **principio de acotación uniforme**/Teorema de Banach-Steinhaus

**Teorema 3.5.14** (Banach-Steinhaus). *Sea  $X$  Banach,  $Y$  un espacio normado. Sean  $T_k \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $k \in I$ , no necesariamente contable. Entonces*

1. o  $\sup_k \|T_k\| < \infty$
2. o  $\sup_k \|T_k x\| = \infty$  para todo  $x \in A$ , donde  $A \subseteq X$  es un subconjunto genérico  $G_\delta$ .

**Seba** cambiar enumerate a letras a., b.

**Nota:** Si  $\sup_k \|T_k x\| < \infty \forall x \in X$ , entonces  $\|T_k\|$  son uniformemente acotadas.

**Corolario 3.5.14.1.** *Sean  $X$  Banach,  $Y$  normado. Sean  $T_k \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Suponga que  $\forall x \in X$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k x =: Tx \quad \text{existe}$$

Entonces,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  y

$$\|T\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T_k\| < \infty$$

*Demostración.*  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k x = Tx.$

$$\implies \forall x \in X \quad \sup_k \|T_k x\| < \infty$$

(sucesión que converge es acotada)

$$\implies \sup_k \|T_k\| < \infty$$

Que  $T$  es lineal, fácil ✓

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} T_k x \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_k x\| \\ &= \sup_n \inf_{k \geq n} \|T_k x\| \leq \left( \sup_n \inf_{k \geq n} \|T_k\| \right) \|x\| = \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T_k\| \right) \|x\| \end{aligned}$$

**Seba** *añadir align* ■

*Demostración del teorema de Banach-Steinhaus (3.5.14).* Defina  $\psi(x) := \sup_k \|T_k x\|$ .

$$U_n = \{x \in X : \psi(x) > n\} = \bigcup_k \underbrace{\{\|T_k x\| > n\}}_{\text{abierto pues } T_k \text{ es continuo}}$$

Tenemos 2 posibilidades:

1. Si todos los  $U_n$ 's son densos en  $X$ ,

$$\implies A := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \quad \text{es genérico, } G_\delta$$

$$\forall x \in A, \psi(x) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies \psi(x) = \infty \quad (\text{caso } b.)$$

2. Si unos de los  $U_n$ 's **no** es denso, entonces  $U_m^c$  contiene una bola  $B = B_r(a)$ .

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq m \quad \forall x \in B_r(a) \\ \implies \|T_k x\| &\leq m \quad \forall x \in B_r(a), \forall k \\ \implies \|T_k(a+y)\| &\leq m \quad \forall y \in B_r(0), \forall k \end{aligned}$$

$$\forall y \in B_r(0)$$

$$\begin{aligned} \|T_k y\| &\leq \|T_k a\| + \|T_k(y - a)\| \\ &= \|T_k a\| + \|T_k(a - y)\| \\ &\leq m + m = 2m \end{aligned}$$

$$\implies \|T_k y\| \leq \frac{2m}{r} \|y\| \quad \forall y \in X, \forall k$$

■

*Demostración del teorema 3.5.13.* Será suficiente demostrar el teorema para  $x = 0$ . Aplicaremos el principio de acotación uniforme (Banach-Steinhaus) a

$$\begin{aligned} S_N^0 : C(\mathbb{T}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\rightarrow S_n f(0) \end{aligned}$$

Estaremos listos cuando probemos que

$$\sup_N \|S_N^0\| = \infty$$

$\iff$  estamos en la alternativa  $b$ .

$$\implies \sup_N |S_N f(0)| = \infty \forall f \in A, A \stackrel{gen.}{\subseteq} C(\mathbb{T})$$

Recordando que  $(S_N f(x) = D_N * f(x))$

$$\begin{aligned} S_N^{(0)} &= S_N f(0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(0 - y) f(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(y) dy \\ \implies |S_N f(0)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)| \cdot |f(y)| dy \leq \|D_N\|_{L^1} \|f\|_{\infty} \\ \implies \|S_N^0\| &\leq \|D_N\|_{L^1} \end{aligned}$$

Pero, de hecho, afirmamos que

$$||S_N^0|| = ||D_N||_{L^1}$$

Noten que cuando ponemos  $f(y) = \operatorname{sgn} D_n(y)$

$$S_N f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) \operatorname{sgn} D_N(y) dy = ||D_N||_{L^1}$$

$f = \operatorname{sgn} D_N \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\implies$  podemos encontrar  $f_k \in C(\mathbb{T})$ :

$$||f_k - f||_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$S_N f_k(0) = \int D_N(y)(f_k - f)(y) dy + \underbrace{\int D_N(y)f(y) dy}_{||D_N||_{L^1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} ||D_N||_{L^1}$$

mientras

$$\left| \int D_N(y)(f_k - f)(y) dy \right| \leq \max_{\mathbb{T}} |D_N| ||f_k - f||_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

■