Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT255I - Análisis Funcional
2º semestre 2023

MAT255I
Análisis Funcional

Sebastián Guerra
Profesor: Nikola Kamburov (nikamburov@mat.uc.cl)

Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir

Versión: 9 de agosto de 2023

Índice general

Capítulo 1

Intro al Análisis Funcional

1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ campo de escalares tiene dimensión infinita si $\forall n \in \mathbb{N}$ hay n elementos de V que son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$

Ejemplo: $V = C([0,1],\mathbb{R})$ = funciones reales continuas en $[0,1]$.
$\{1, x, \dots, x^{n-1}\} \subseteq V$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Reconocemos que existe la operación $\frac{d}{dx}$ definida en $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$, funciones suaves, y la operación evaluar en $x = 0$.

Evaluando en $x = 0 \to a_0 = 0$. Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en $x = 0$:

$$a_1 = 0$$

... ∎

Demostración alternativa. Reconocemos que hay un producto interno en $V = C([0,1],\mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

$\{f_k = \sin(\pi k x)\}_{k=1}^{n} \subseteq V$

$$\langle \sin(\pi kx), \sin(\pi lx) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_k \rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_0, f_l \rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \dots, n$$

■

1.2. Motivación

Ejemplo (Ecuación de Poisson)**:**

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Seba *Aañdir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \to Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución $u \in X$ para ciertos espacios X, Y apropiados.

El Análaisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que comparten las mismas características topológicas/algebraicas/métricas.

1.3. Objeto central: espacio de Banach

Definición 1.3.1 (Espacio de Banach)**.** $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es un espacio normado completo (clave para sacar límites).

$$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle\cdot,\cdot\rangle) completos\} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, ||\cdot||)\} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) co$$

Seba *Arreglar*

Lógica de inclusiones

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una norma $||\cdot||$

$$||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$$

2. $||\cdot||$ induce una métrica $d(\cdot,\cdot)$

$$d(v,w) = ||v-w||$$

1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

   Ejemplo: Cada funcional lineal en $\mathbb{R}$ ($l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) se puede representar como $l(v) = v \cdot w$ para algún vector (único) $w \in \mathbb{R}^n$.
   En la situación de dimensión ∞, se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

   Teorema 1.4.1 (Representación de Riesz)**.** *Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio de Hilbert y $l : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo . Entonces existe un único $w \in V$, tal que*

   $$l(v) = \langle v, w\rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. contraintuitivos .

   Ejemplo: $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacta (Heine-Borel).
   En $\dim V = \infty$, este teorema es falso.

   Proposición 1.4.2. *Sea V un espacio de Banach y sea $B = \{v \in V : ||v|| \leq 1\}$. B es compacto en $V \iff \dim V < \infty$*

Ejemplo: En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subseteq L^p([0,1]), \quad p \in (1,\infty)$$

no es compacta.
$\Longrightarrow$ motiva la definición de topologías débiles.

1.5. Nociones básicas

Definición 1.5.1 (Espacios métricos)**.** Un espacio métrico (X,d) y $d : X \times X \to [0,\infty)$ la métrica que satisface:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría) $d(x,y) = d(y,x)$
3. (Desigualdad triangular) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Definición 1.5.2. Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en V es una función $||\cdot|| : V \to [0,\infty)$ que satsiface:

1. $||v|| = 0 \iff v = 0$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. (Desigualdad triangular) $||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$

Una función $||\cdot|| : V \to [0,\infty)$ que satisface solo 2. y 3. se llama semi-norma .

Una espacio vectorial V con una norma se llama Espacio normado $(V, ||\cdot||)$.

Proposición 1.5.1. $(V, ||\cdot||)$ *define un espacio métrico con métrica* $d(v,w) := ||v-w||$.

Ejemplo:
- $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

- En $\mathbb{R}^2$, $|(x_1,x_2)| := |x_1|$ define una semi-norma:

$$|(x_1,x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \{x_k\}$ es una norma.

- $$|x|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

Seba *Añadir dibujos de norma infinito y norma 1*

Proposición 1.5.2. *En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ todas normas son equivalentes: si $||\cdot||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ son 2 normas, existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{1}{c}||v||_2 \leq ||v||_1 \leq c||v||_2, \quad \forall v \in V$$

Definición 1.5.3. Sea X un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

Ejemplo: $C_\infty([0,1]) = C([0,1])$ (funciones continuas)

Proposición 1.5.3. $||f||_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ *define una norma en* $C_\infty(X)$.

Demostración. 1. $||f||_\infty = 0 \iff f(x) = 0\, quad \forall x \in X$.

2. $$\begin{aligned} ||\lambda f||_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| ||f||_\infty \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en $||\cdot||_\infty$

$$f_n \to f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$||f_n - f||_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{0}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Seba *arreglar/poner align*

Ejemplo: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$$l^p(\mathbb{K}) := \{\{a_k\}_{k=1}^n \subseteq \mathbb{K} : ||a||_p < \infty\}$$

donde

$$||a||_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^\infty |a_k|^p\right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{f : X \to \mathbb{K}\, \sigma\text{-medibles, tales que} ||f||_{L^p} < \infty\}$$

donde

$$||f||_{L^p} := \left(\int |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}$$

$$||f||_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_x |f|$$

Ejemplo: $X = [0, 1]$, $\sigma =$ medida de Lebesgue. En $C([0, 1])$ definimos

$$||f||_\infty = \sup |f(x)|$$

$$||f||_{L^1} = \int |f(x)|\, dx$$

Estas 2 normas no son equivalentes

Definición 1.5.4. Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)
$L^p(x, \mathcal{B}, \sigma)$ es un espacio de Banach (cuando $(X, \mathcal{B}, \sigma) es completo$).

Proposición 1.5.4. *$C_\infty(X)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$ de Cauchy.

1. Adivinar el límite f.
2. Probar la convergencia:
$$||f_n - f|| \to 0$$
3. f está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tal que

$$||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo $x \in X$ fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es $\{f_n(x)\}_n$ es Cauchy en $\mathbb{C}$.

$$\implies f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies ||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es $f_n \to f$ uniformemente sobre X.

$\implies f$ es continua sobre X.

¿Por qué f es acotada?

Considere $\varepsilon = 1$

$$\implies ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \leq 1$$

cuando $n \geq \bar{N} := N(1)$.

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \\ &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

Definición 1.5.5. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es sumable si

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} v_n$$

converge.
$\sum_n v_n$ es absolutamente sumable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||v_n||$$

converge.

■

Proposición 1.5.5. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *es absolutamente sumable, entonces,* $\{S_m\}$ *es Cauchy*

Teorema 1.5.6. *Un espacio normado* $(V, ||\cdot||)$ *es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

Demostración. Próxima semana. ■

Capítulo 2

cap 2