Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT255I - Análisis Funcional
2º semestre 2023

MAT255I
Análisis Funcional

Sebastián Guerra (sebastian.guerrap@uc.cl)
Profesor: Nikola Kamburov (nikamburov@mat.uc.cl)

Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir

Versión: 6 de septiembre de 2023

Índice general

Capítulo 1

Intro al Análisis Funcional

1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ campo de escalares tiene dimensión infinita si $\forall n \in \mathbb{N}$ hay n elementos de V que son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$

Ejemplo: $V = C([0,1], \mathbb{R})$ = funciones reales continuas en $[0,1]$.
$\{1, x, \dots, x^{n-1}\} \subseteq V$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Reconocemos que existe la operación $\frac{d}{dx}$ definida en $C^\infty([0,1], \mathbb{R})$, funciones suaves, y la operación evaluar en $x = 0$.

Evaluando en $x = 0 \to a_0 = 0$. Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en $x = 0$:

$$a_1 = 0$$

... ■

Demostración alternativa. Reconocemos que hay un producto interno en $V = C([0,1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

$\{f_k = \sin(\pi k x)\}_{k=1}^{n} \subseteq V$

$$\langle \sin(\pi k x), \sin(\pi l x)\rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_k\rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_0, f_l\rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \ldots, n$$

■

1.2. Motivación

Ejemplo (Ecuación de Poisson)**:**

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Seba *Aañdir dibujo*
El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \to Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución $u \in X$ para ciertos espacios X, Y apropiados.

El Análaisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que comparten las mismas características topológicas/algebraicas/métricas.

1.3. Objeto central: espacio de Banach

Definición 1.3.1 (Espacio de Banach)**.** $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es un espacio normado completo (clave para sacar límites).

$$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) completos\} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, ||\cdot||)\} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d)co$$

Seba *Arreglar*

Lógica de inclusiones

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induce una norma $|| \cdot ||$

$$||v|| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

2. $|| \cdot ||$ induce una métrica $d(\cdot, \cdot)$

$$d(v, w) = ||v - w||$$

1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

   Ejemplo: Cada funcional lineal en $\mathbb{R}$ ($l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) se puede representar como $l(v) = v \cdot w$ para algún vector (único) $w \in \mathbb{R}^n$.
   En la situación de dimensión ∞, se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

   Teorema 1.4.1 (Representación de Riesz)**.** *Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio de Hilbert y $l : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo . Entonces existe un único $w \in V$, tal que*

   $$l(v) = \langle v, w \rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. contraintuitivos .

   Ejemplo: $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacta (Heine-Borel).
   En $\dim V = \infty$, este teorema es falso.

   Proposición 1.4.2. *Sea V un espacio de Banach y sea $B = \{v \in V : ||v|| \leq 1\}$. B es compacto en $V \iff \dim V < \infty$*

Ejemplo: En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subseteq L^p([0,1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.
$\Longrightarrow$ motiva la definición de topologías débiles.

Capítulo 2

Espacios de Banach

2.1. Nociones básicas

2.1.1. Espacios Normados

Definición 2.1.1 (Espacios métricos)**.** Un espacio métrico (X, d) y $d : X \times X \to [0, \infty)$ la métrica que satisface:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría) $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definición 2.1.2. Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en V es una función $||\cdot|| : V \to [0, \infty)$ que satsiface:

1. $||v|| = 0 \iff v = 0$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. (Desigualdad triangular) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Una función $||\cdot|| : V \to [0, \infty)$ que satisface solo 2. y 3. se llama semi-norma .

Una espacio vectorial V con una norma se llama Espacio normado $(V, ||\cdot||)$.

Proposición 2.1.1. $(V, ||\cdot||)$ *define un espacio métrico con métrica* $d(v, w) := ||v - w||$.

Ejemplo:

- $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

- En $\mathbb{R}^2$, $|(x_1, x_2)| := |x_1|$ define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1,\ldots,n} \{x_k\}$ es una norma.

- $$|x|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

Seba *Añadir dibujos de norma infinito y norma 1*

Proposición 2.1.2. *En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ todas normas son equivalentes: si $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ son 2 normas, existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{1}{c}||v||_2 \leq ||v||_1 \leq c||v||_2, \quad \forall v \in V$$

Definición 2.1.3. Sea X un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

Ejemplo: $C_\infty([0,1]) = C([0,1])$ (funciones continuas)

Proposición 2.1.3. $||f||_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ *define una norma en $C_\infty(X)$.*

Demostración.

1. $||f||_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \, \forall x \in X$.
2. $$\begin{aligned} ||\lambda f||_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot ||f||_\infty \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty \end{aligned}$$

∎

Convergencia en $||\cdot||_\infty$

$$f_n \to f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Ejemplo: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{\{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : ||a||_p < \infty\}$$

donde

$$||a||_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \displaystyle\sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{f : X \to \mathbb{K}\, \sigma\text{-medibles, tales que} ||f||_{L^p} < \infty\}$$

donde

$$||f||_{L^p} := \left(\int |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}$$

$$||f||_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_x |f|$$

Ejemplo: $X = [0, 1]$, σ = medida de Lebesgue. En $C([0, 1])$ definimos

$$||f||_\infty = \sup |f(x)|$$

$$||f||_{L^1} = \int |f(x)|\, dx$$

Estas 2 normas no son equivalentes

2.1.2. Espacios de Banach

Definición 2.1.4. Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)
$L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es un espacio de Banach (cuando $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es completo).

Proposición 2.1.4. *$C_\infty(X)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$ de Cauchy.

1. Adivinar el límite f.
2. Probar la convergencia:
$$||f_n - f|| \to 0$$
3. f está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tal que

$$||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo $x \in X$ fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es $\{f_n(x)\}_n$ es Cauchy en $\mathbb{C}$.

$$\implies f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies ||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es $f_n \to f$ uniformemente sobre X.

$\implies f$ es continua sobre X.

¿Por qué f es acotada?

Considere $\varepsilon = 1$

$$\implies ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \leq 1$$

cuando $n \geq \bar{N} := N(1)$.

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \\ &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

Definición 2.1.5. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es sumable si

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} v_n$$

converge.
$\sum_n v_n$ es absolutamente sumable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||v_n||$$

converge.

■

Proposición 2.1.5. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *es absolutamente sumable, entonces,* $\{S_m\}$ *es Cauchy*

Teorema 2.1.6. *Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

Demostración. $\Longleftarrow$:

1. Tome una sucesión $\{v_n\}$ de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge. $v_{n_k} \to v$ en V. Fije $\varepsilon > 0$. $\implies$ $||v_m - v|| \leq \underbrace{||v_m - v_{n_k}||}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{||v_{n_k} - v||}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$, tomando k, m suficientemente grandes.

2. Dos trucos: Podemos "acelerar" la convergencia. Existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$||v_{n_{k+1}} - v_{n_k}|| \leq 2^{-k} \tag{2.1}$$

$$||v_n - v_m|| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$n_k := N_1 + \ldots + N_k$

Afirmamos que $\{v_{n_k}\}$ converge.

Truco de la suma telescopica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^{m} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m\to\infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m\to\infty} S \in V$$

$$\implies v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m\to\infty} S + v_{n_1} \in V$$

$\blacksquare$

2.2. Operadores y funcionales

2.2.1. Operadores Lineales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} T : C([0,1], \mathbb{C}) &\to C([0,1], \mathbb{C}) \\ f &\to F(x) = \int_0^x f(y)\, dy \end{aligned}$$

T es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y<x\}} f(y)\, dy$$

Definición 2.2.1. V, W son 2 espacios vectoriales.
$T : V \to W$ es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} T : C([0,1]) &\to C([0,1]) \\ f &\to \int_0^1 \underbrace{K(x,y)}_{\text{Kernel}} f(y)\, dy := Tf(x) \end{aligned}$$

operador integral. Cuando $K \in C([0,1]^2), T$ está bien definida.

En dim ∞ vamos a exigir que los operadores lineales sean continuos .

Definición 2.2.2. $T : V \to W$, V, W son espacios métricos. Decimos que T es continuo si

$$T^{-1}(O) \overset{ab}{\subseteq} V, \forall O \overset{ab}{\subseteq} V$$

$$\iff T^{-1}(C) \overset{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \overset{cerr}{\subseteq} W$$

$\iff$ $v_n \to v$ en V entonces $Tv_n \to Tv$ en W.

Teorema 2.2.1. *Sean V, W espacios normados. Entonces $T : V \to W$ operador lineal es continuo si y solo si*

$$||Tv||_W \leq C||v|| \quad \forall v \in V \tag{2.2}$$

para alguna constante C.

Definición 2.2.3. Operador lineal que satisface 1,2 se llama acotado .

Demostración. $\Longrightarrow$: Sea T continuo. $B := \{||w||_W < 1\}$

$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : ||v||_V < r\}$$

pues $T^{-1}(B)$ es abierto

$$\Longrightarrow T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : ||v||_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio $\frac{r}{2}$.

$$||T\bar{v}||_W < 1$$

Todo $v \in V, v \neq 0$ se puede escribir como $v = \frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V$

Para algún $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$||Tv||_W = ||T(\frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V)||_W$$

$$= ||\frac{2}{r}||v||_V T(\bar{v})||_W$$

$$= \frac{2}{r}||v||_V||T\bar{v}||_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r}||v||_V \quad \forall v \neq 0$$

■

Ejemplo:

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$$

es acotado en $(C([0,1]), ||||_\infty)$

$$\begin{aligned}|Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y)|}_{\leq M}|f(y)|\,dy \\ &\leq M\int_0^1 |f(y)|\,dy \leq M||f||_\infty \quad \forall x \implies ||Tf||_\infty \leq M||f||_\infty\end{aligned}$$

Definición 2.2.4. Sean V, W espacios normados. Defina $\mathcal{B}(V,W)$ como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de V a W.
Obviamente $\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio vectorial.

Norma operador $T : V \to W$:

$$||T|| := \sup_{||v||=1} ||Tv||$$

Obviamente, $T \in \mathcal{B}(V,W), ||T|| < \infty$

$$||Tv|| \leq C\underbrace{||v||}_{1} = C$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

De hecho, para $T \in \mathcal{B}(V,W)$

$$\begin{aligned}||T|| &= \sup_{v\neq 0}\frac{||Tv||}{||v||} = \sup_{||v||\leq 1}||Tv|| \\ &= \inf\{C > 0 : ||Tv|| \leq C||v|| \quad \forall v \in V\}\end{aligned}$$

Tenemos $||Tv|| \leq ||T||||v||$

Teorema 2.2.2. $\mathcal{B}(V,W)$ *es un espacio normado bajo la norma operador.*

Demostración. 1. $||T|| = 0 \implies ||Tv|| = 0 \forall v \in V$

$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$

2. $||\lambda T|| = |\lambda| ||T||$

3. Sea $v \in V, ||v|| = 1$. $\forall T, S \in \mathcal{B}(V, W)$,

$$\begin{aligned} ||(T+S)v|| &= ||Tv + Sv|| \\ &\leq ||Tv|| + ||Sv|| \\ &\leq ||T|| ||v|| + ||S|| ||v|| = (||T|| + ||S||) ||v|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies ||(T+S)v|| \leq ||T|| + ||S|| \\ &\implies ||T+S|| \leq ||T|| + ||S|| \end{aligned}$$

■

¿Cuándo es $\mathcal{B}(V, W)$ completo?

Teorema 2.2.3. *$\mathcal{B}(V, W)$ es Banach cuando W es Banach.*

Demostración. $T_n \in \mathcal{B}(V, W)$ Cauchy. Queremos demostrar que converge en $|| \cdot ||_{\mathcal{B}(V,W)}$.

1. $\forall v \in V, \{T_n v\}$ es Cauchy en W pues

$$||T_n v - T_n v|| \leq ||T_n - T_w|| \cdot ||v||$$

$\implies \{T_n v\}$ converge. Definimos

$$Tv := \lim_{n \to \infty} T_n v$$

2. ¿Por qué $T \in \mathcal{B}(V, W)$? $\to$ lineal:

$$T(\lambda v) = \lim_{n \to \infty} T_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n \to \infty} T_n v = \lambda T(v)$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$\to$ acotado:

$\{T_n\}$ es Cauchy.

$\{||T_n||\}$ es Cauchy en $[0, \infty)$

$$||T_n|| - ||T_m||| \leq ||T_n - T_w||$$
$$\implies ||T_n|| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $v \in V, ||v|| = 1$.

$$\begin{aligned} ||Tv|| &= || \lim_{n\to\infty} T_n v|| \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{||T_n v||}_{\leq C||v||=C} \leq C \end{aligned}$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

3. Convergencia: $T_n \to T$ en norma operador. Sea $v \in V, ||v|| = 1$.

$$||(T_n - T)v||$$

$T_m v \to Tv$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m\to\infty} ||(T_n - T_m)v|| \\ &\leq \underbrace{||T_n - T_m||}_{\leq \varepsilon} \cdot ||v|| \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \\ &\implies ||T_n - T|| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

2.2.2. Espacio Dual

Definición 2.2.5. Sea V un espacio normado sobre $\mathbb{K}$.

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio dual de V.

Teorema 2.2.4. *Cuando* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *(completos)* V^* *es un espacio de Banach*

Elementos de V^* se llaman funcionales en V.

Ejemplo: $[\ell^p(\mathbb{C})]^* = ?, p \in [1, \infty)$
Resulta que $? = l^q(\mathbb{C})$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Si $v \in \ell^p, w \in \ell^q$
podemos definir un funcional en ℓ^p

$$\ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$$
$$v = \{v_k\} \to \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k$$

$$|\ell_w| \leq ||w||_{\ell^q} ||v||_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$ $(\ell^2)^* \simeq \ell^2$

Nota: $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$

Cuando $V = W$ espacio de Banach, entonces $B(V, V)$ es un espacio de Banach. Es también álgebra .

$$T, S \in B(V, V) \implies TS \in B(V, V)$$

$$\begin{aligned} ||TS|| = \sup_{||v||=1} ||T(Sv)|| &\leq ||T|| \cdot ||Sv|| \\ &\leq ||T|| \cdot ||S|| \cdot ||v|| \leq ||T|| \cdot ||S|| \end{aligned}$$

Cómo resolver ecuaciones del tipo

$$(T - \lambda I)u = v$$

donde $v \in V \leftarrow$ un espacio de Banach, $T \in B(V, V)$, $\lambda \neq 0$.

Queremos construir el operador inverso

$$S := (T - \lambda I)^{-1}$$

Cuando $|\lambda| > ||T||$, S se puede construir a través de la serie de Neumann

$$-\lambda(I - \underbrace{\frac{T}{\lambda}}_{||T/\lambda||<1})u = v$$

Sabemos que

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Definimos

$$S := -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \tag{2.3}$$

?? define $S \in B(V,V)$ ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

es sumable pues es absolutamente sumable en el espacio de Banach $B(V,V)$.

$\rightarrow$ ¿por qué $(T-\lambda I)S = S(T-\lambda I) = I$?

Para verificar que $S(T-\lambda I) = I$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

$$\begin{aligned} S_N(T-\lambda I) = S_N T - S_N\lambda &= \sum_{n=0}^{N} -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{N} -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \\ &= \underbrace{-\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{N+1}}_{\rightarrow 0 \text{ en } B(V,V)} + I \end{aligned}$$

2.2.3. Espacio cociente

¿Cómo obtener espacios normados/Banach de otros espacios?

Definición 2.2.6 (Espacio cociente)**.** Sea W un subespacio del espacio vectorial V.

$$V/W := \{[v], v \in V\}$$

$[\cdot]$ se define a través $v_1 \sim v_2$ si $v_1 - v_2 \in W$.
Se nota también $V \mod W$ y se llama el espacio cociente.

Es útil denotar $[v] = v + W$

Una construcción de subespacio $W \subseteq V$ tal que V/W es normado es a través de una semi-norma definida en V.

Ejemplo: $V = C^1([0,1])$ = espacio de funciones en $[0,1]$ con derivadas continuas en $[0,1]$.

$$||f|| := \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

$$||f|| = 0 \iff f = \text{const}$$

Teorema 2.2.5. *Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio vectorial semi-normado. Entonces $Z := \{v \in V : ||v|| = 0\}$ es un subespacio de V y*

$$||v + Z||_{V/Z} := ||v|| \tag{2.4}$$

define una norma en V/Z.

Demostración. 1. Z es un subespacio vectorial.

$$z_1, z_2 \in Z \implies z_1 + z_2 \in Z$$

$$||z_1 + z_2|| \leq ||z_1|| + ||z_2|| = 0$$

$$z \in Z \implies \lambda z \in Z$$

Así, V/Z tiene la estructura de un espacio vectorial.

2. Tenemos que comprobar que **??** es una buena definición:

   Si v_1, v_2 son 2 representantes de $[v]$:

$$v_1 = v_2 + z, \quad z \in Z$$

$$\begin{aligned} ||v_1|| \leq ||v_2|| + ||z|| &\implies ||v_1|| \leq ||v_2|| \\ ||v_2|| \leq ||v_1|| &\implies ||v_1|| = ||v_2|| \end{aligned}$$

$$||v + z||_{V/Z} = 0$$

$$\implies v + Z = Z \implies v \in Z$$

   Las otras 2 proposiciones se heredan de manera obvia

■

$C^1([0,1])/const$ es un espacio normado con la norma inducida.

Otra construcción similar:

Proposición 2.2.6. *Si* $W \overset{cerr}{\subseteq} V$ *subespacio cerrado de un espacio normado* $(V, ||\cdot||)$, *entonces* V/W *tiene una norma:*

$$||[v]||_{V/W} := \inf_{w \in W} ||v - w||$$

Demostración. En ayudantía ■

2.2.4. Completación de espacios normados

Definición 2.2.7. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. La completación de V es un espacio de Banach $(\tilde{V}, ||\cdot||_{\tilde{V}})$ con una aplicación lineal

$$\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \to \tilde{V}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$ es uno a uno
2. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$ es denso en $\tilde{V}$
3. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$ es una isometría:

$$||\mathcal{J}_{\tilde{V}}(v)||_{\tilde{V}} = ||v||_V \quad \forall v \in V$$

Teorema 2.2.7. *Todo espacio normado V tiene una completación. Esta es única en el siguiente sentido:*

Seba *hacer dibujo*

$\tilde{V} = \{\textit{sucesiones de Cauchy en } V \textit{ que convergen}\}$

$\{v_n\} \sim \{w_n\}$ *si* $||v_n - w_n|| \to 0$

Sea $\tilde{v} \in \tilde{V}$

Seba *ESTOY HASTA EL PICO*

2.3. El teorema de Baire

2.3.1. Categorias de Baire

(X, d) espacio métrico.

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

$O \subseteq X$ es abierto si $\forall x \in O, \exists B_r(x) \in O$. $\bigcup_\alpha O_\alpha$ es abierto.

$F \subseteq X$ es cerrado si F^c es abierto. $\bigcap_\alpha F_\alpha$ es cerrado.

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$$

$$\mathring{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$$

$$E \overset{denso}{\subseteq} X \text{ si } \overline{E} = X$$

Definición 2.3.1. $E \subseteq X$ es **denso en ninguna parte** si $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$.

esencialmente, denso en ninguna parte E significa que E no contiene bolas abiertas.

Ejemplo: $E = \{x\}$ es denso en niguna parte.

Proposición 2.3.1. *F es cerrado y denso en ninguna parte $\iff$ F^c es abierto y denso.*

La noción de categoria de Baire

Definición 2.3.2. $E \subseteq X$ cat I si $E = \bigcup_k E_k$ donde E_k es denso en ninguna parte.

Ejemplo: $\mathbb{Q}$ es cat I.

Definición 2.3.3. Si G tiene G^c que es cat I, decimos que G es **genérico**.

Definición 2.3.4. E es de cat II si no es de primera categoría.

Observaciones

1. Si E es cat I, y $F \subseteq E$ es cat I

$$\begin{aligned}
&F \subseteq E \subseteq \bigcup_k E_k \\
&\implies F = \bigcup_k E_k \cap F, \quad \overline{E_k \cap F} \subseteq \overline{E_k} \\
&\implies E_k \cap F \text{ son densos en niguna parte.}
\end{aligned}$$

2. Si $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de cat I, $\bigcup_k E_k = \bigcup_k \bigcup_l \underbrace{E_{kl}}_{\text{denso en NP}}$ es una unión contable.

3. No hay conexión entre conjuntos de cat I y conjuntos despreciables del punto de vista de teoría de la medida.

> **Ejemplo:** $G_j = \bigcup_n (q_n - 2^{-(n+j+1)}, q_n + 2^{-(n+j+1)})$
> $\{q_j\}$ enumeración de $\mathbb{Q}$.
> G_j es abierto y denso en $\mathbb{R}$.
>
> $$\implies E_j = G_j^c \text{ es cerrado y denso en NP}$$
> $$\implies E := \bigcup_j E_j \text{ es cat I}$$
>
> y de plena medida en $\mathbb{R}$.
> $\iff$ E^c es de medida 0 de Lebesgue.
>
> $$\begin{aligned} |E^c| &= |\bigcap E_j^c| \\ &= |\bigcap G_j| \le |G_j| \\ |G_j| &\le \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot 2^{-(n+j+1)} \\ &= 2^{-j} \xrightarrow{j\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Teorema 2.3.2 (Teorema de Baire)**.** *Sea (X,d) **completo**. Entonces, X es de la cat II en sí mismo.*

Demostración. Supongamos que X es de cat I en sí:

$$X = \bigcup_k \underbrace{E_k}_{\text{densos en NP}} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k}}_{=F_k \text{ denso en NP y cerrado}}$$

Llegaremos a una contradicción si demostramos que hay un $x \notin F_k, \quad \forall k$.

$F_1 \neq X$. $\overline{B_{r_1}}(x_1) \subseteq F^c$, $\overline{B_{r_2}}(x_2) \subseteq F_2^c$.

De esta manera obtenemos bolas cerradas $\overline{B_{r_k}}(x_k)$ tales que

1. $$\overline{B_{r_{k+1}}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_k}}(x_k)$$

2.
$$\overline{B_{r_k}}(x_k) \subseteq F_k^c$$

3.
$$r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2} \implies r_k \to 0$$

$\{x_k\}$ es Cauchy pues:

$$\forall k, l \geq n, x_k, x_l \in \overline{B_{r_n}}(x_n)$$

$$\implies |x_k - x_l| \leq 2r_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\implies x_k \to x \in X$$

Como $x_k \in \overline{B_{r_k}} \quad \forall k \geq n$,

$$\implies x = \lim x_k \in \overline{B_{r_n}}(x_n) \subseteq F_n^c$$

Por lo que $x \notin F_n \quad \forall n$.

∎

Corolario 2.3.2.1. *$G \subseteq X$ es **genérico** $\implies$ denso en X, con X completo.*

Demostración. Asumimos que G genérico no es denso, entonces hay una bola B

$$\implies \overline{B} \subseteq G^c = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup \overline{E_k}$$

$$\implies \overline{B} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k} \cap \overline{B}}_{\text{cerrados y densos en NP}}$$

Pero $\overline{B}$ es un espacio métrico completo, contradicción con el teorema de Baire. ∎

Corolario 2.3.2.2. *X completo, $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$ cerrado.*
Entonces, por lo menos uno F_k contiene una bola.

2.3.2. Aplicación

Teorema 2.3.3. *El conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ que no son derivables en nigún punto es **denso** en $C([0,1])$*

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{f \in C([0,1]) : f'(x_*) \text{ existe en un punto } x_* \in [0,1]\}$

Queremos demostrar que $\mathcal{D}$ es cat I en $C([0,1])$.

Por **??**, $\mathcal{D}^c$ es genérico $\implies$ denso en $C([0,1])$.

Si $f \in \mathcal{D} \implies f'(x_*)$ existe

$$\implies \lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

existe.

$$\implies |f(x) - f(x_*)| \leq M|x - x_*| \quad \forall x \in [0,1]$$

para algún $M > 0$.

$$\implies \mathcal{D} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

$E_N := \{f \in C([0,1]) : |f(x) - f(x_*)| \leq N|x - x_*| \text{ para algún } x_* \in [0,1]\}$

Estaremos listos si probamos que:

1. E_N es cerrado en $C([0,1])$
2. E_N es denso en ninguna parte.

1. $f_n \in E_N$ y $f_n \to f$, en $||\cdot||_\infty$.

   $[0,1] \ni x_n^* \to x^*$ (podemos extraer una subsucesión que converge)

$$|f_n(x) - f_n(x_n^*)| \leq N|x - x_n^*| \quad \forall x \in [0,1]$$

   Queremos demostrar que

$$|f(x) - f(x^*)| \leq N|x - x^*|$$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq ||f-f_n||_\infty \leq \varepsilon/2} + |f_n(x) - f_n(x^*)| + \underbrace{|f_n(x^*) - f(x^*)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_n(x^*)| &\leq |f_n(x) - f_n(x^*)| + |f_n(x_n^*) - f_n(x^*)| \\
&\leq N|x - x_n^*| + N|x_n^* - x^*| \\
&\leq N(|x - x^*| + |x^* - x_n^*|) + N|x_n^* - x^*| \\
&\leq N|x - x^*| + \underbrace{2N|x_n^* - x^*|}_{\varepsilon/3}
\end{aligned}$$

2. ¿Por qué E_N es denso en NP de X?

$$P_M = \{\text{funciones continuas en } [0,1] \text{ derivables a trozos, } |f'| = M\}$$

son funciones zig-zag. Cuando $M > N$, $P_M \cap E_N = \varnothing$. Además, P_M es denso en $C([0,1])$. Como consecuencia, E_N no puede tener interior no trivial ya que E_N no puede tener una bola abierta (hay funciones de P_M en E_N y P_M es denso).

Mostraremos que P_M es denso.

$$P = \{\text{las funciones continuas lineales a tozos}\} \overset{denso}{\subseteq} C([0,1])$$

Podemos aproximar cada $f \in P$ con una función $g \in P_M$ arbitrariamente bien.

■

2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta

Sean $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ espacios de Banach.

$$T \in \mathcal{B}(X,Y) \implies T^{-1}(O) \overset{ab}{\subseteq} X \quad \forall O \overset{ab}{\subseteq} Y$$

Si T es biyectiva adicionalmente, entonces $S := T^{-1}$ es lineal (no necesariamente acotada). Sin embargo, si S es continua, entonces $S^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq}, \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$

$$\iff T(U) \overset{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$$

Definición 2.3.5. Sea $T : X \to Y$ una aplicación. Decimos que T es abierta si

$$T(U) \overset{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$$

Si $T : X \to Y$ es lineal, continua y biyectiva, entonces $T^{-1} : Y \to X$ es lineal. ¿Es T^{-1} continua?

Lo será cuando T es abierta.

Teorema 2.3.4 (Aplicación Abierta). *Si X, Y son espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y sobreyectiva, entonces T es abierta.*

Corolario 2.3.4.1. *Si X, Y son espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es biyectiva, entonces $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Existen $c, C > 0$ tales que*

$$c||x||_X \leq ||\underbrace{Tx}_{y}||_Y \leq C||x||_X \quad \forall x \in X$$

$$c||T^{-1}y||_X \leq ||y||_Y$$

*Demostración del teorema **??**.*

1. Será suficiente demostrar que $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$. ($B_r^X = B_r^X(0)$)

   Por linealidad

$$\begin{aligned} T(B_r^X(x)) &= T(x + B_r^X) \\ &= Tx + T(B_r^X) = y + \frac{r}{2}T(B_2^X) \\ &\supseteq y + \frac{r}{2}B_\delta^Y = B_{\frac{\delta r}{2}}^Y(y) \end{aligned}$$

2. Vamos a demostrar que $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^X$ para algún $\delta > 0$

   Por la sobreyectividad:

$$catII \to Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^X)}$$

   Entonces, $\overline{T(B_n^X)} \supseteq B_r^Y(y)$ para algún $n \in \mathbb{N}, r > 0, y \in Y$. Tomamos $\tilde{y}$ tal que $|\tilde{y} - y| \leq \frac{r}{2}$ e $\tilde{y} = T\tilde{x}$ para algún $\tilde{x} \in B_n^X$.

$$T(B^x_{2n}(\tilde{x})) \supseteq \overline{T(B^X_n)} \supseteq B^Y_r(y) \supseteq B^Y_{\frac{r}{2}}(\tilde{y})$$

Restando $T\tilde{x}$

$$T(B^X_{2n}) \supseteq B^X_{\frac{r}{2}}$$

Reescalando

$$\overline{T(B^X_1)} \supseteq B^Y_{\frac{r}{4n}} \quad \delta = \frac{r}{4n}$$

3. Tenemos $\overline{T(B^X_1)} \supseteq B^Y_\delta$. Reescalando

$$\overline{T(B^X_{2^{-k}})} \supseteq B^Y_{\delta 2^{-k}}$$

¿Por qué $T(B^X_2) \supseteq B^Y_\delta$?

Fije $y_0 \in B^Y_\delta$. Podemos encontrar $x_0 \in B^X_1$ tal que

$$||y_0 - Tx_0||_Y < \frac{\delta}{2}$$

$$\implies y_1 := y_0 - Tx_0 \in B^Y_{\delta/2}$$

$\implies$ existe $x_1 \in B^X_{\frac{1}{2}}$ tal que

$$||y_1 - Tx_1|| < \frac{\delta}{4}$$

De esta manera construimos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$, tales que

a) $x_n \in B^X_{2^{-n}}, y_n \in B^Y_{\delta 2^{-n}}$

b) $y_{n+1} = y_n - Tx_n$

$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in X$ porque X es Banach. Veremos que $Tx = y$ y $x \in B^X_2$.

x es convergente puesto que es absolutamente convergente.

$$||x|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_k|| \leq 2$$

Afirmamos que $Tx = y_0$ por construcción.

$$\begin{aligned} Tx &= \lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{n=0}^{N} x_k\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \underbrace{Tx_k}_{y_k - y_{k+1}} \\ &= \lim_{N\to\infty} (y_0 - y_{N+1}) \\ &= y_0 \end{aligned}$$

ya que $y_{N+1} \to 0$.

■

2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado

Definición 2.3.6. Sean X, Y espacios métricos. Decimos que $T : X \to Y$ es **cerrada** si su grafo en $X \times Y$

$$G_T = \{(x, Tx) \in X \times Y\}$$

es cerrado en $X \times Y$.

En otras palabras,

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \in X \times Y \implies (x, y) \in G_T \iff y = Tx$$

Nota: $T : X \to Y$ es continua $\implies$ T es cerrada.

$$x_n \to x \implies Tx_n \to Tx \implies (x_n, Tx_n) \to (x, Tx)$$

Teorema 2.3.5. *Sean X, Y Banach. Entonces, $T \in \mathcal{B}(X, Y) \iff T$ es lineal y cerrada.*

Demostración. $\Longleftarrow$: Utilizaremos el hecho que si X, Y son Banach, entonces $X \times Y$ es Banach.

$$||(x,y)||_{X\times Y} := ||x||_X + ||y||_Y$$

$$G_T := \{(x, Tx)\} \subseteq X \times Y$$

1. G_T es un subespacio de $X \times Y$.

2. $G_T \overset{cerr}{\subseteq} X \times Y$

   Entonces G_T es un espacio de Banach en sí. Tenemos las proyecciones $\Pi_X : G_T \to X$ y $\Pi_Y : G_T \to Y$ continuas y lineales.

   $$T = \Pi_Y \circ (\Pi_X)^{-1}$$

   ya que Π_x es biyectiva, continua y lineal (en un espacio de Banach a otro Banach). Por el teorema **??**, Π_X^{-1} es continua. Por lo que $T = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1}$ es continua.

■

Significado Si queremos demostrar que una aplicación lineal $T : X \to Y$ es continua, $x_n \to X \implies Tx_n \to T_x$

Podemos asumir adicionalmente que $TX_n \to Ty$, y demostrar que $y = Tx$

Capítulo 3

Espacios de Hilbert

3.1. Conceptos Básicos

Definición 3.1.1. Sea H un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una función $H \times H \to \mathbb{K}$ que satisface

1. Linealidad en $\langle \cdot, y \rangle, \quad \forall y \in H$:

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$
$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

2. (Hermiticidad)

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

(En $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esto es simetría)

3. (Definidad) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = \implies x = 0$

Nota: 1. y 2., implican que $\langle x, \cdot \rangle$ es lineal conjugada en la segunda entrada.

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

Terminología Tal función se llama **forma sesquilineal**

Nota: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una **forma simétrica definida positiva**

Decimos que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio pre-Hilbertiano**

De 1. y 2., $\langle 0, y \rangle = 0$, $\langle x, 0 \rangle = 0$

Definimos $||x|| := \langle x, x \rangle^{1/2}$

Proposición 3.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Sea H un espacio pre-Hilbertiano*

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad \forall x, y \in H$$

Demostración. Si $y = 0$, la desigualdad es verdadera. Podemos asumir que $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle y, y \rangle \\ &= ||x||^2 + \underbrace{\lambda\overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle}_{2\Re(\langle x,y \rangle \overline{\lambda})} + |\lambda|^2| \cdot |y||^2 \end{aligned}$$

Evaluando en $\lambda = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{||y||^2}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x||^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle \frac{-\overline{\langle x, y \rangle}}{||y||^2}) \\ 0 &\leq ||x||^2 - 2\frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} + \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} \\ &\implies ||x||^2 \geq \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

■

Proposición 3.1.2. $|| \cdot ||$ *define una norma* H.

Demostración.
1. Definidad ✓
2. $||\lambda x|| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda\overline{\lambda}||x||^2)^{1/2} = |\lambda| \cdot ||x||$
3. (Desigualdad triangular)

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + ||y||^2 &\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

■

Proposición 3.1.3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es continuo en* $H \times H$

Demostración. $x_n \to x$ en $||\cdot$ e $y_n \to y$ en $|| \cdot ||$

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\ &\leq ||x_n - x|| \cdot ||y_n|| + ||x|| \cdot ||y_n - y|| \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

■

Definición 3.1.2. Decimos que $x \perp y$ en el espacio pre-Hilbertiano H si $\langle x, y\rangle = 0$. Si $E \subseteq H$ subconjunto, definimos el **espacio ortogonal**

$$E^{\perp} := \{x \in H : x \perp y \quad \forall y \in E\}$$

$E^{\perp}$ es un **subespacio** de H y es cerrado:

$x_n \in E^{\perp}$ y $x_n \to x$ en H entonces

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0 \quad \forall y \in E$$

Teorema 3.1.4 (Pitagoras). *Si $x_1, \ldots, x_n \in H$ (pre-Hilbertiano) son mutuamente ortogonales, entonces*

$$||x_1 + \cdots + x_n||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2$$

Proposición 3.1.5 (Ley del paralelogramo).

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Demostración.

$$||x \pm y||^2 = ||x||^2 \pm 2\Re\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

Sumando los 2 términos (diagonales), estamos listos. ■

Definición 3.1.3. Decimos que un espacio $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pre-Hilbertiano es un espacio de **Hilbert** si es **completo** respecto $||\cdot||$ inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$

Ejemplo: $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ es un espacio de Hilbert.

Ejemplo: $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. $\langle\{x_k\},\{y_k\}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

¿ℓ^p tiene una estructura de espacio de Hilbert? $\iff p = 2$

Ejemplo: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida, definimos

$$L^2(X,\mathcal{M},\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_X |f|^2\, d\mu < \infty\}/_\sim$$

$f_1 \sim f_2$ si $\{f_1 \neq f_2\}$ es despreciable.

3.2. Teorema de la Proyección

Sea H un espacio de Hilbert. $C \subseteq R^n$ cerrado y convexo. Existe único $y \in C$ tal que y minimiza la distancia entre x y C.

Definición 3.2.1. Sea C un subconjunto de un espacio vectorial V. Decimos que C es **convexo** en V si

$$\forall x, y \in C \quad (1-t)x + ty \in C \quad \forall t \in [0,1]$$

Teorema 3.2.1. *Sea $C \subseteq H$ un subconjunto cerado y convexo del espacio de Hilbert H. Entonces $\forall x \in H, \exists! y = P_C x \in C$ que satisface:*

$$||x - P_C x|| = d(x, C) = \inf_{c \in C} ||x - c||$$

Además, $y = P_C x \iff \Re\langle c - y, x - y\rangle \leq 0, \quad \forall c \in C$

Demostración. Tome $\{y_n\} \subseteq C$, tal que

$$d_n := ||x - y_n|| \xrightarrow{n\to\infty} d := d(x_n, c)$$

$\{y_n\}$ será convergente si es Cauchy, ya que $y_n \to y \in H$. Ya que C es cerrado, de hecho $y \in C$.

Por la ley del paralelogramo, con $v = x - y_n, w = x - y_m$

$$\begin{aligned}
2d_n^2 + 2d_m^2 &= ||v-w||^2 + ||v+w||^2 \\
&= ||y_n - y_m||^2 + ||2x - (y_n + y_m)||^2 \\
&= ||y_n - y_m||^2 + 4\left|\left| x - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C} \right|\right|^2 \\
&\geq ||y_n - y_m||^2 + 4d^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
||y_n - y_m||^2 &\leq 2d_n^2 + d_m^2 - 4d^2 \\
&\xrightarrow{n,m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

por lo que $\{y_n\}$ es Cauchy.

$y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

$$||x-y|| = \lim_{n\to\infty} \overbrace{||x - y_n||}^{d_n} = d$$

Este minimizador es el único!. Si hubiera otro $z \neq y$, aplicamos el mismo argumento a $\{y, z, y, z, \ldots\}$ que no converge por construcción, pero es Cauchy, lo que es una contradicción.

$\Longrightarrow$: Sea $c \in C$ y considere $(1-t)y + tc$, $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
||x - (1-t)y - tc||^2 &= ||x - y - t(c-y)||^2 \\
&= ||x-y||^2 - 2t\Re\langle x-y, c-y\rangle + t^2||c-y||^2 \\
&\geq ||x-y||^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\; 2t\Re\langle x-y, c-y\rangle \leq t^2||c-y||^2 \\
&\Longrightarrow\; 2\Re\langle x-y, c-y\rangle \leq 0
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$: Evalúe $||x - (1-t)y + tc||^2$ en $t = 1$.

$$\begin{aligned}
||x-c||^2 &= ||x-y||^2 - 2\Re\langle x-y, c-y\rangle + ||c-y||^2 \\
\implies ||x-c||^2 - ||x-y||^2 &= ||c-y||^2 - 2\Re\langle x-y, c-y\rangle \\
\implies ||x-c||^2 &\geq ||x-y||^2 \quad \forall c \in C
\end{aligned}$$

Tenemos igualdad $\iff c = y$. ■

Ejemplo: $W \subseteq H$ es un subespacio $\implies W$ es convexo.

Teorema 3.2.2. *Sea $F \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces $H = F \oplus F^\perp$, es decir, que todo $x \in H$ se puede escribir de manera única como $x = y + z$ con $y \in F$ y $z \in F^\perp$. Además $y = P_F x$, $z = P_{F^\perp} x$. y*

$$P_F : H \to H$$

es lineal, acotado y satisface:

- $||P_F|| \leq 1$ *(= 1 cuando $F = \{0\}$)*
- $P_F^2 = P_F$
- $\mathrm{Im}\, P_F = F$, $\ker P_F = F^\perp$
- $\langle P_F x_1, x_2\rangle = \langle x_1, P_F x_2\rangle$

Definición 3.2.2. P_F se llama la **proyección ortogonal**

Demostración. Ya que $F \cap F^\perp = \{0\}$, la unicidad se cumple.

$$y + z = y' + z' \implies y - y' = z' - z = 0$$

Tome $x \in H$. Define $y = P_F x$. Queremos demostrar que $x : x - y \in F^\perp$. Del teorema **??** sabemos que

$$\Re\langle c - y, x - y\rangle \leq 0 \quad \forall c \in F$$

.

$$\implies \Re\langle v, z\rangle \leq 0 \quad \forall v \in F$$

$$\implies \Re\langle \lambda v, z\rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\implies \Re\lambda\langle v, z\rangle \leq 0$$

Seba *añadir align*

tome $\lambda = \overline{\langle v, z\rangle}$

$$\begin{aligned} &\implies \Re |\langle v, z\rangle|^2 \leq 0 \\ &\implies |\langle v, z\rangle| = 0 \implies z \in F^{\perp} \end{aligned}$$

Propiedades de P_F: $x_1 = y_1 + z, \quad x_2 = y_2 + z_2$

$$\begin{aligned} \langle P_F x_1, x_2\rangle &= \langle y_1, x_2\rangle \\ &= \langle y_1, y_2 + z_2\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1, P_F x_2\rangle &= \langle y_1 + z_1, y_2\rangle \\ &= \langle y_1, y_2\rangle \end{aligned}$$

Por lo que P_F es lineal

$$\begin{aligned} \langle P_F(x_1 + x_2), x_3\rangle &= \langle x_1 + x_2, P_F x_3\rangle \\ &= \langle x_1, P_F x_3\rangle + \langle x_2, P_F x_3\rangle \\ &= \langle P_F x_1, x_3\rangle + \langle P_F x_2, x_3\rangle \\ &= \langle (P_F x_1 + P_F x_2), x_3\rangle \end{aligned}$$

$$\iff P_F(x_1 + x_2) = P_F x_1 + P_F x_2$$

$P_F(\lambda x) = \lambda P_F x$ de la misma manera.

$P_F/_F = \mathrm{Id}/_F$

$$\begin{aligned} &\implies P_F^2 x = P_F(P_F x) = P_F x \quad \forall x \in H \\ &\implies P_F^2 = P_F \end{aligned}$$

$||P_F x||^2 = ||y||^2 \leq ||x||^2$ mientras

$$||x||^2 \leq ||y||^2 + ||z||^2$$
$$\implies ||P_F|| \leq 1$$

■

3.3. Teorema de Representación de Riesz

Teorema 3.3.1. *Sea H un espacio de Hilbert y sea $f \in H^*$ un funcional lineal acotado. Entonces existe único $u \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, u \rangle \quad \forall x \in H$$

Observaciones

1. $||f||_* = ||u||$ por Cauchy-Schwarz
2. $$\begin{aligned} H^* &\to H \\ f &\to u_f \end{aligned}$$

   es una isometría biyectiva, lineal-conjugada. Para todo $v \in H$ define $f_v(x) : \langle x, v \rangle$
3. $f_1 + f_2 \to u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2}$, ya que

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) = \langle x, u_{f_1} \rangle + \langle x, u_{f_2} \rangle \\ &= \langle x, u_{f_1} + u_{f_2} \rangle \implies u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2} \end{aligned}$$

4. ¿$\lambda f \to u_{\lambda f} = \lambda u_f$?

$$[\lambda f](x) = \lambda(f(x)) = \lambda \langle x, u_f \rangle = \langle x, \overline{\lambda} u_f \rangle$$

Nota: Teorema falso. Cuando H es solo espacio pre-Hilbertiano, por ejemplo,

$$H = C([-1,1])$$

con producto interno usual.

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt \in H^*$$

Demostración. Si $f = 0 \implies u = 0$. Asumimos que $f \neq 0$ y consideramos $F := \ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. F es un subespacio de H cerrado. Si $f \neq 0 \implies F \neq H$. Por el teorema de la proyección (**??**)

$$H = F \oplus F^\perp$$

Elije $z \in F^\perp \setminus \{0\}$. Afirmamos que $u = \overline{f(z)}z|z|^2 \neq 0$ satisface $f = \langle \cdot, u\rangle$. Ya que

$$\begin{aligned}
f(z)x - f(x)z &\in F \\
\implies f(z)x - f(x)z &\perp z \\
\langle f(z)x, z\rangle - \langle f(x)z, z\rangle &= 0 \\
\implies \left\langle x, \overline{f(z)}z \right\rangle &= f(x)||z||^2 \\
\implies f(x) &= \left\langle x, \frac{\overline{f(x)}z}{||z||^2} \right\rangle
\end{aligned}$$

Entonces $u \in H$ que satisface $f = \langle \cdot, u\rangle$. Es único: si tenemos $u, u' \in H$

$$\begin{aligned}
f(x) = \langle x, u\rangle &= \langle x, u'\rangle \\
&\implies \langle x, u - u'\rangle = 0 \quad \forall x \in H \\
&\implies u - u' \in H^\perp = \{0\}
\end{aligned}$$

■

3.4. Bases Ortonormales

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es LI si $\forall I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A$,

$$\sum_{i \in I} c_i v_i = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i \in I$$

$$\text{Gen}(\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \left\{ \sum_{i \in I} c_i u_i : I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A, c_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Definición 3.4.1. Sea H un espacio de Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es ortonormal (o.n.) si

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \delta \text{ de Kronecker}$$

Suponga que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es o.n.

$$F := \text{Gen}(\{e_i\}_i^n) \subseteq H$$

es un subespacio cerrado. Podemos definir P_F

$$P_F x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i}_{y}$$

Es suficiente demostrar que $x - y \perp F$.

$$\left\langle x - \sum_{x, e_i} e_i, e_k \right\rangle = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

$$||P_F x||^2 \leq ||x||^2$$

Por Pitagoras

$$= \sum_{i=1}^{n} || \langle x, e_i \rangle e_i||^2 \leq ||x||^2$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} | \langle x, e_i \rangle |^2 \leq ||x||^2$$

Proposición 3.4.1 (Desigualdad de Bessel)**.** *Sea $S = \{e_\alpha\}_\alpha$ un conjunto o.n. Entonces,*

$$\sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq ||x||^2$$

$$\sum_\alpha r_\alpha := \sup\left\{\sum_{i\in I} r_i : I \subseteq A\right\}$$

Demostración. Utilizando $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq ||x||^2$, y tomando supremo. ■

Consecuencias $\{\alpha : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{\alpha \in A : |\langle x, e_\alpha\rangle| \geq \frac{1}{n}\}$ es **contable**: Si es infinito: $|\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 > \frac{1}{n^2}, k = 1, \ldots$. Sumando suficientes términos superaríamos $||x||^2$, que no es posible por Bessel.

Definición 3.4.2.

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha\rangle$$

coeficientes de Fourier respecto a $\{e_\alpha\}$

$$\sum_\alpha |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq ||x||^2$$

¿Cuando tenemos igualdad?

Teorema 3.4.2. *Sea $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un subconjunto o.n. del espacio de Hilbert H. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $$\sum_\alpha |\hat{x}(\alpha)|^2 = ||x||^2$$
2. *$\mathcal{B}$ es **maximal** en el sentido de:*
   Si $x \in H$, tal que $x \perp e_\alpha, \forall\alpha \in A \implies x = 0$
3. *$\forall x \in H$,*
   $$x = \sum_\alpha \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$$
   donde la suma en el lado derecho tiene solo un número contable de términos no ceros y la suma de estos converge a x en $||\cdot||$ independiente de su orden.
4. $\mathrm{Gen}(\mathcal{B})$ *es denso en H*

Definición 3.4.3. Decimos que un conjunto $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o.n. es una **base ortonormal** si satisface cualquiera de *1.-4.*

Demostración. 2. $\implies$ *3.* Sea $e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n}, \ldots$ una enumeración de los $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}}$ para los cuales $\hat{x}(\alpha) \neq 0$. Por Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(\alpha_k)|^2 \leq ||x||^2 < \infty$$

$$\implies \sum_{k=n}^{m} |\hat{x}(\alpha_k)|^2 \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Por Pitagoras,

$$|| \sum_{k=n^m} \langle x, e_{\alpha_k}\rangle \, e_{\alpha_k} || \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \hat{x}(\alpha_k) e_{\alpha_k}$. $\{S_n\}$ es Cauchy en H

$$\implies S_n \xrightarrow{n\to\infty} S \quad \text{en } H$$

Además

$$\begin{aligned} \langle x - S, e_\alpha\rangle &= \langle x, e_\alpha\rangle - \langle S, e_\alpha\rangle \\ &= \langle x, e_\alpha\rangle - \lim_{n\to\infty} \langle S_n, e_\alpha\rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{cuando } \alpha \in \mathcal{J} \\ 0 & \text{cuando } \alpha \notin \mathcal{J} \end{cases} \qquad \implies x - S = 0 \implies x = S \end{aligned}$$

3. $\implies$ *1.*: Por continuidad de la norma

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= || \lim_{n\to\infty} S_n||^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} ||S_n||^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}(\alpha_k)|^2 \\ &= \sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 \end{aligned}$$

1. $\implies$ *2.*: obvio

$$||x||^2 = \sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = 0 \implies x = 0$$

3. $\implies$ *4.*: Si $x \perp e_\alpha, \quad \forall \alpha$,

$$\begin{aligned} &\implies x \perp \text{Gen}(\{e_\alpha\}) \\ &\overset{\text{continuidad}}{\implies} x \perp \overline{\text{Gen}(\{e_\alpha\})} = H \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

■

Ejemplo: ℓ^2, $e_k = \{(0, \dots, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots)\}, k \in \mathbb{N}$.

$$||x||^2 = \sum |x_i|^2 = \sum |\langle x, e_i\rangle|^2$$

Teorema 3.4.3. *Todo espacio de Hilbert tiene una* ***base ortonormal****.*

Demostración. Utiliza el Lema de Zorn ■

Definición 3.4.4. X espacio métrico es **separable** si existe un subconjunto $C \subseteq X$ contable y denso en X.

Ejemplo: $\ell^p, p \in [1, \infty)$ es separable.

$L^2([0,1])$ es separable. Polinomios con coeficientes$\in \mathbb{K}$denso$\subseteq C([0,1]) \overset{\text{denso}}{\subseteq} L^2([0,1])$