



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
MAT255I - ANÁLISIS FUNCIONAL  
2º SEMESTRE 2023

## **MAT255I**

### **Análisis Funcional**

Sebastián Guerra ([sebastian.guerrap@uc.cl](mailto:sebastian.guerrap@uc.cl))  
Profesor: Nikola Kamburov ([nikamburov@mat.uc.cl](mailto:nikamburov@mat.uc.cl))

*Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir*

Versión: 28 de agosto de 2023

# Índice general

<b>1. Intro al Análisis Funcional</b>	<b>3</b>
1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional? . . . . .	3
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Objeto central: espacio de Banach . . . . .	4
1.4. Resultados que vamos a ver . . . . .	5
<b>2. Espacios de Banach</b>	<b>7</b>
2.1. Nociones básicas . . . . .	7
2.2. Operadores y funcionales . . . . .	12
2.2.1. Aplicaciones . . . . .	17
2.3. El teorema de Baire . . . . .	22
2.3.1. Aplicaciones . . . . .	25

# Intro al Análisis Funcional

## 1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

**Definición 1.1.1.** Un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  campo de escalares tiene dimensión infinita si  $\forall n \in \mathbb{N}$  hay  $n$  elementos de  $V$  que son linealmente independientes sobre  $\mathbb{K}$

**Ejemplo:**  $V = C([0, 1], \mathbb{R}) =$  funciones reales continuas en  $[0, 1]$ .  
 $\{1, x, \dots, x^{n-1}\} \subseteq V$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.*  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0, a_k \in \mathbb{R}.$

Reconocemos que existe la operación  $\frac{d}{dx}$  definida en  $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ , funciones suaves, y la operación evaluar en  $x = 0$ .

Evaluando en  $x = 0 \rightarrow a_0 = 0$ . Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en  $x = 0$ :

$$a_1 = 0$$

...



*Demostración alternativa.* Reconocemos que hay un producto interno en  $V = C([0, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\{f_k = \sin(\pi kx)\}_{k=1}^n \subseteq V$$

$$\langle \sin(\pi kx), \sin(\pi lx) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^n a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_l \rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_l, f_l \rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \dots, n$$

■

## 1.2. Motivación

**Ejemplo** (Ecuación de Poisson):

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

**Seba** *Añadir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \rightarrow Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución  $u \in X$  para ciertos espacios  $X, Y$  apropiados.

El Análisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que **comparten** las **mismas características** topológicas/algebraicas/métricas.

## 1.3. Objeto central: espacio de Banach

**Definición 1.3.1** (Espacio de Banach).  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es un espacio normado **completo** (clave para sacar límites).

$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ completos} \} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, \|\cdot\|) \} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) \text{ completos} \}$

**Seba** Arreglar

## Lógica de inclusiones

1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induce una norma  $\|\cdot\|$

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

2.  $\|\cdot\|$  induce una métrica  $d(\cdot, \cdot)$

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

## 1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

**Ejemplo:** Cada funcional lineal en  $\mathbb{R}$  ( $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) se puede representar como  $l(v) = v \cdot w$  para algún vector (único)  $w \in \mathbb{R}^n$ .

En la situación de dimensión  $\infty$ , se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

**Teorema 1.4.1** (Representación de Riesz). *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal **continuo**. Entonces existe un único  $w \in V$ , tal que*

$$l(v) = \langle v, w \rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. **contraintuitivos**.

**Ejemplo:**  $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacta (Heine-Borel).

En  $\dim V = \infty$ , este teorema es falso.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $V$  un espacio de Banach y sea  $B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ .  $B$  es compacto en  $V \iff \dim V < \infty$*

**Ejemplo:** En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subseteq L^p([0, 1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.

$\Rightarrow$  motiva la definición de topologías débiles.

# Espacios de Banach

## 2.1. Nociones básicas

**Definición 2.1.1** (Espacios métricos). Un espacio métrico  $(X, d)$  y  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  la métrica que satisface:

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría)  $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Definición 2.1.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Una norma en  $V$  es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface:

1.  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. (Desigualdad triangular)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface solo 2. y 3. se llama **semi-norma**.

Una espacio vectorial  $V$  con una norma se llama **Espacio normado**  $(V, \|\cdot\|)$ .

**Proposición 2.1.1.**  $(V, \|\cdot\|)$  define un espacio métrico con métrica  $d(v, w) := \|v - w\|$ .

**Ejemplo:** ■  $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

- En  $\mathbb{R}^2$ ,  $|(x_1, x_2)| := |x_1|$  define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} \{x_k\}$  es una norma.

■

$$|x|_p := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

**Seba** Añadir dibujos de norma infinito y norma 1

**Proposición 2.1.2.** En  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  todas normas son equivalentes: si  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  son 2 normas, existe  $c > 0$  tal que

$$\frac{1}{c}\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c\|v\|_2, \quad \forall v \in V$$

**Definición 2.1.3.** Sea  $X$  un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

**Ejemplo:**  $C_\infty([0, 1]) = C([0, 1])$  (funciones continuas)

**Proposición 2.1.3.**  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$  define una norma en  $C_\infty(X)$ .

*Demostración.* 1.  $\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \forall x \in X$ .

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en  $\|\cdot\|_\infty$

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$



$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\Longleftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

**Ejemplo:**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{\{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : \|a\|_p < \infty\}$$

donde

$$\|a\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ } \sigma\text{-medibles, tales que } \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int |f|^p d\sigma \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_x |f|$$

**Ejemplo:**  $X = [0, 1]$ ,  $\sigma =$  medida de Lebesgue. En  $C([0, 1])$  definimos

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^1} = \int |f(x)| dx$$

Estas 2 normas **no son equivalentes**

**Definición 2.1.4.** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es **completo** con respecto a la métrica inducida.

**Ejemplo:**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)  
 $L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es un espacio de Banach (cuando  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es completo).

**Proposición 2.1.4.**  $C_\infty(X)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.*  $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$  de Cauchy.

1. Adivinar el límite  $f$ .
2. Probar la convergencia:

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

3.  $f$  está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo  $x \in X$  fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es  $\{f_n(x)\}_n$  es Cauchy en  $\mathbb{C}$ .

$$\implies f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre  $X$ .

$\implies f$  es continua sobre  $X$ .

¿Por qué  $f$  es acotada?

Considere  $\varepsilon = 1$

$$\implies \|f_n - f_{\bar{N}}\|_{\infty} \leq 1$$

cuando  $n \geq \bar{N} := N(1)$ .

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\infty} &\leq \|f_{\bar{N}}\|_{\infty} + \|f_n - f_{\bar{N}}\|_{\infty} \\ &\leq \|f_{\bar{N}}\|_{\infty} + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

**Definición 2.1.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado.  $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es **sumable** si

$$S_m = \sum_{n=1}^m v_n$$

converge.

$\sum_n v_n$  es **absolutamente sumable** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$$

converge.

■

**Proposición 2.1.5.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es absolutamente sumable, entonces,  $\{S_m\}$  es Cauchy

**Teorema 2.1.6.** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.

*Demostración.*  $\Leftarrow$  :

1. Tome una sucesión  $\{v_n\}$  de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge.  $v_{n_k} \rightarrow v$  en  $V$ . Fije  $\varepsilon > 0$ .  $\implies \|v_m - v\| \leq \underbrace{\|v_m - v_{n_k}\|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|v_{n_k} - v\|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$ ,  
tomando  $k, m$  suficientemente grandes.
2. Dos trucos: Podemos “acelerar” la convergencia. Existe una subsucesión  $\{v_{n_k}\}$  tal que

$$\|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| \leq 2^{-k} \quad (2.1)$$

$$\|v_n - v_m\| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$$n_k := N_1 + \dots + N_k$$

Afirmamos que  $\{v_{n_k}\}$  converge.

Truco de la suma telescópica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^m (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

$$\implies v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

## 2.2. Operadores y funcionales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

**Ejemplo:**

$$T : C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C})$$

$$f \rightarrow F(x) = \int_0^x f(y) dy$$

$T$  es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y < x\}} f(y) dy$$

**Definición 2.2.1.**  $V, W$  son 2 espacios vectoriales.

$T : V \rightarrow W$  es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$f \rightarrow \int_0^1 \underbrace{K(x, y)}_{\text{Kernel}} f(y) dy := T f(x)$$

operador integral. Cuando  $K \in C([0, 1]^2)$ ,  $T$  está bien definida.

En  $\dim \infty$  vamos a exigir que los operadores lineales sean **continuos**.

**Definición 2.2.2.**  $T : V \rightarrow W$ ,  $V, W$  son espacios métricos. Decimos que  $T$  es continuo si

$$T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} V, \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} W$$

$$\iff T^{-1}(C) \stackrel{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \stackrel{cerr}{\subseteq} W$$

$$\iff v_n \rightarrow v \text{ en } V \text{ entonces } T v_n \rightarrow T v \text{ en } W.$$

**Teorema 2.2.1.** Sean  $V, W$  espacios normados. Entonces  $T : V \rightarrow W$  operador lineal es continuo si y solo si

$$\|T v\|_W \leq C \|v\| \quad \forall v \in V \quad (2.2)$$

para alguna constante  $C$ .

**Definición 2.2.3.** Operador lineal que satisface 1,2 se llama **acotado** .

*Demostración.*  $\implies$  : Sea  $T$  continuo.  $B := \{\|w\|_W < 1\}$

$$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : \|v\|_V < r\}$$

pues  $T^{-1}(B)$  es abierto

$$\implies T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : \|v\|_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio  $\frac{r}{2}$ .

$$\|T\bar{v}\|_W < 1$$

Todo  $v \in V, v \neq 0$  se puede escribir como  $v = \frac{\bar{v}}{r/2}\|v\|_V$

Para algún  $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|Tv\|_W &= \|T(\frac{\bar{v}}{r/2}\|v\|_V)\|_W \\ &= \|\frac{2}{r}\|v\|_V T(\bar{v})\|_W \\ &= \frac{2}{r}\|v\|_V \|T\bar{v}\|_W < 1 \\ &\leq \frac{2}{r}\|v\|_V \quad \forall v \neq 0 \end{aligned}$$

■

**Ejemplo:**

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$$

es acotado en  $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$

$$\begin{aligned}
|Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y)|}_{\leq M} |f(y)| dy \\
&\leq M \int_0^1 |f(y)| dy \leq M \|f\|_\infty \quad \forall x \implies \|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

**Definición 2.2.4.** Sean  $V, W$  espacios normados. Defina  $\mathcal{B}(V, W)$  como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de  $V$  a  $W$ . Obviamente  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio vectorial.

Norma operador  $T : V \rightarrow W$ :

$$\|T\| := \sup_{\|v\|=1} \|Tv\|$$

Obviamente,  $T \in \mathcal{B}(V, W), \|T\| < \infty$

$$\|Tv\| \leq C \underbrace{\|v\|}_1 = C$$

$$\implies \|T\| \leq C$$

De hecho, para  $T \in \mathcal{B}(V, W)$

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{v \neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{\|v\| \leq 1} \|Tv\| \\
&= \inf\{C > 0 : \|Tv\| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V\}
\end{aligned}$$

Tenemos  $\|Tv\| \leq \|T\|\|v\|$

**Teorema 2.2.2.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio normado bajo la norma operador.

*Demostración.* 1.  $\|T\| = 0 \implies \|Tv\| = 0 \forall v \in V$

$$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$$

$$2. \|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$$

3. Sea  $v \in V, \|v\| = 1. \forall T, S \in \mathcal{B}(V, W)$ ,

$$\begin{aligned} \|(T + S)v\| &= \|Tv + Sv\| \\ &\leq \|Tv\| + \|Sv\| \\ &\leq \|T\|\|v\| + \|S\|\|v\| = (\|T\| + \|S\|)\|v\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \|(T + S)v\| &\leq \|T\| + \|S\| \\ \implies \|T + S\| &\leq \|T\| + \|S\| \end{aligned}$$

■

¿Cuándo es  $\mathcal{B}(V, W)$  completo?

**Teorema 2.2.3.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es Banach cuando  $W$  es Banach.

*Demostración.*  $T_n \in \mathcal{B}(V, W)$  Cauchy. Queremos demostrar que converge en  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(V, W)}$ .

1.  $\forall v \in V, \{T_n v\}$  es Cauchy en  $W$  pues

$$\|T_n v - T_m v\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|v\|$$

$\implies \{T_n v\}$  converge. Definimos

$$Tv := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v$$

2. ¿Por qué  $T \in \mathcal{B}(V, W)$ ?  $\rightarrow$  lineal:

$$T(\lambda v) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v = \lambda T(v)$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$\rightarrow$  acotado:

$\{T_n\}$  es Cauchy.

$\{\|T_n\|\}$  es Cauchy en  $[0, \infty)$



$$\begin{aligned} |||T_n| - |T_m||| &\leq ||T_n - T_m|| \\ \implies ||T_n|| &\leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Sea  $v \in V, ||v|| = 1$ .

$$\begin{aligned} ||Tv|| &= ||\lim_{n \rightarrow \infty} T_n v|| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{||T_n v||}_{\leq C||v||=C} \leq C \end{aligned}$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

3. Convergencia:  $T_n \rightarrow T$  en norma operador. Sea  $v \in V, ||v|| = 1$ .

$$||(T_n - T)v||$$

$$T_m v \rightarrow T v$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow \infty} ||(T_n - T_m)v|| \\ &\leq \underbrace{||T_n - T_m||}_{\leq \varepsilon} \cdot ||v|| \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \\ \implies ||T_n - T|| &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

### 2.2.1. Aplicaciones

**Definición 2.2.5.** Sea  $V$  un espacio normado sobre  $\mathbb{K}$ .

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio **dual** de  $V$ .

**Teorema 2.2.4.** Cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (completos)  $V^*$  es un espacio de Banach

Elementos de  $V^*$  se llaman **funcionales** en  $V$ .

**Ejemplo:**  $[\ell^p(\mathbb{C})]^* = ?$ ,  $p \in [1, \infty)$   
 Resulta que  $? = \ell^q(\mathbb{C})$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
 Si  $v \in \ell^p$ ,  $w \in \ell^q$   
 podemos definir un funcional en  $\ell^p$

$$\ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$v = \{v_k\} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k$$

$$|\ell_w| \leq \|w\|_{\ell^q} \|v\|_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty \quad (\ell^2)^* \simeq \ell^2$$

**Nota:**  $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$

Cuando  $V = W$  espacio de Banach, entonces  $B(V, V)$  es un espacio de Banach. Es también **álgebra**.

$$T, S \in B(V, V) \implies TS \in B(V, V)$$

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup_{\|v\|=1} \|T(Sv)\| \leq \|T\| \cdot \|Sv\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|v\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \end{aligned}$$

Cómo resolver ecuaciones del tipo

$$(T - \lambda I)u = v$$

donde  $v \in V \leftarrow$  un espacio de Banach,  $T \in B(V, V)$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Queremos construir el operador **inverso**

$$S := (T - \lambda I)^{-1}$$

Cuando  $|\lambda| > \|T\|$ ,  $S$  se puede construir a través de la **serie de Neumann**

$$-\lambda(I - \underbrace{\frac{T}{\lambda}}_{\|T/\lambda\| < 1})u = v$$

Sabemos que

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Definimos

$$S := -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \quad (2.3)$$

[2.3](#) define  $S \in B(V, V)$  ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

es sumable pues es absolutamente sumable en el espacio de Banach  $B(V, V)$ .

→ ¿por qué  $(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$ ?

Para verificar que  $S(T - \lambda I) = I$ ,

$$S_N = \sum_{n=0}^N -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

$$\begin{aligned} S_N(T - \lambda I) &= S_N T - S_N \lambda = \sum_{n=0}^N -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^N -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \\ &= -\underbrace{\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{N+1}}_{\rightarrow 0 \text{ en } B(V, V)} + I \end{aligned}$$

¿Cómo obtener espacios normados/Banach de otros espacios?

**Definición 2.2.6** (Espacio cociente). Sea  $W$  un subespacio del espacio vectorial  $V$ .

$$V/W := \{[v], v \in V\}$$

$[\cdot]$  se define a través  $v_1 \sim v_2$  si  $v_1 - v_2 \in W$ .

Se nota también  $V \bmod W$  y se llama el espacio cociente.

Es útil denotar  $[v] = v + W$

Una construcción de subespacio  $W \subseteq V$  tal que  $V/W$  es normado es a través de una **semi-norma** definida en  $V$ .

**Ejemplo:**  $V = C^1([0, 1])$  = espacio de funciones en  $[0, 1]$  con derivadas continuas en  $[0, 1]$ .

$$\|f\| := \max_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

$$\|f\| = 0 \iff f = \text{const}$$

**Teorema 2.2.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial semi-normado. Entonces  $Z := \{v \in V : \|v\| = 0\}$  es un subespacio de  $V$  y

$$\|v + Z\|_{V/Z} := \|v\| \tag{2.4}$$

define una norma en  $V/Z$ .

*Demostración.* 1.  $Z$  es un subespacio vectorial.

$$z_1, z_2 \in Z \implies z_1 + z_2 \in Z$$

$$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| = 0$$

$$z \in Z \implies \lambda z \in Z$$

Así,  $V/Z$  tiene la estructura de un espacio vectorial.

2. Tenemos que comprobar que 2.4 es una buena definición:

Si  $v_1, v_2$  son 2 representantes de  $[v]$ :

$$v_1 = v_2 + z, \quad z \in Z$$

$$\begin{aligned} \|v_1\| &\leq \|v_2\| + \|z\| \implies \|v_1\| \leq \|v_2\| \\ \|v_2\| &\leq \|v_1\| \implies \|v_1\| = \|v_2\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v + z\|_{V/Z} &= 0 \\ \implies v + Z &= Z \implies v \in Z \end{aligned}$$

Las otras 2 proposiciones se heredan de manera obvia

■

$C^1([0, 1])/const$  es un espacio normado con la norma inducida.

Otra construcción similar:

**Proposición 2.2.6.** Si  $W \stackrel{cerr}{\subseteq} V$  subespacio cerrado de un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$ , entonces  $V/W$  tiene una norma:

$$\|[v]\|_{V/W} := \inf_{w \in W} \|v - w\|$$

*Demostración.* En ayudantía

■

## Completación de espacios normados

**Definición 2.2.7.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado. La **completación** de  $V$  es un espacio de Banach  $(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}})$  con una aplicación lineal

$$\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \rightarrow \tilde{V}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$  es uno a uno
2.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es denso en  $\tilde{V}$
3.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es una isometría:

$$\|\mathcal{J}_{\tilde{V}}(v)\|_{\tilde{V}} = \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

**Teorema 2.2.7.** *Todo espacio normado  $V$  tiene una completación. Esta es única en el siguiente sentido:*

**Seba** *hacer dibujo*

$\tilde{V} = \{\text{sucesiones de Cauchy en } V \text{ que convergen}\}$

$\{v_n\} \sim \{w_n\}$  si  $\|v_n - w_n\| \rightarrow 0$

Sea  $\tilde{v} \in \tilde{V}$

**Seba** *ESTOY HASTA EL PICO*

## 2.3. El teorema de Baire

$(X, d)$  espacio métrico.

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

$O \subseteq X$  es abierto si  $\forall x \in O, \exists B_r(x) \subseteq O$ .  $\bigcup_{\alpha} O_{\alpha}$  es abierto.

$F \subseteq X$  es cerrado si  $F^c$  es abierto.  $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$  es cerrado.

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$$

$$\overset{\circ}{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$$

$$E \overset{\text{denso}}{\subseteq} X \text{ si } \overline{E} = X$$

**Definición 2.3.1.** a **Seba** *arreglar*

esencialmente, denso en ninguna parte  $E$  significa que  $E$  no contiene bolas abiertas.

**Ejemplo:**  $E = \{x\}$  es denso en ninguna parte.

**Proposición 2.3.1.**  $F$  es cerrado y denso en ninguna parte  $\iff F^c$  es abierto y denso.

## La noción de categoría de Baire

**Definición 2.3.2.**  $E \subseteq X$  cat I si  $E = \bigcup_k E_k$  donde  $E_k$  es denso en ninguna parte.

**Ejemplo:**  $\mathbb{Q}$  es cat I.

**Definición 2.3.3.** Si  $G$  tiene  $G^c$  que es cat I, decimos que  $G$  es **genérico**.

**Definición 2.3.4.**  $E$  es de cat II si no es de primera categoría.

### Observaciones

1. Si  $E$  es cat I, y  $F \subseteq E$  es cat I

$$\begin{aligned} F &\subseteq E \subseteq \bigcup_k E_k \\ \implies F &= \bigcup_k E_k \cap F, \quad \overline{E_k \cap F} \subseteq \overline{E_k} \\ \implies E_k \cap F &\text{ son densos en ninguna parte.} \end{aligned}$$

2. Si  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de cat I,  $\bigcup_k E_k = \bigcup_k \underbrace{\bigcup_l E_{kl}}_{\text{denso en NP}}$  es una unión contable.

3. No hay conexión entre conjuntos de cat I y conjuntos despreciables del punto de vista de teoría de la medida.

**Ejemplo:**  $G_j = \bigcup_n (q_n - 2^{-(n+j+1)}, q_n + 2^{-(n+j+1)})$   
 $\{q_j\}$  enumeración de  $\mathbb{Q}$ .  
 $G_j$  es abierto y denso en  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \implies E_j &= G_j^c \text{ es cerrado y denso en NP} \\ \implies E &:= \bigcup_j E_j \text{ es cat I} \end{aligned}$$

y de plena medida en  $\mathbb{R}$ .

$$\iff E^c \text{ es de medida 0 de Lebesgue.}$$

$$\begin{aligned}
|E^c| &= \left| \bigcap E_j^c \right| \\
&= \left| \bigcap G_j \right| \leq |G_j| \\
|G_j| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+j+1)} \\
&= 2^{-j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

**Teorema 2.3.2** (Teorema de Baire). *Sea  $(X, d)$  **completo**. Entonces,  $X$  es de la cat II en sí mismo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es de cat I en sí:

$$X = \bigcup_k \underbrace{E_k}_{\text{densos en NP}} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k}}_{=F_k \text{ denso en NP y cerrado}}$$

Llegaremos a una contradicción si demostramos que hay un  $x \notin F_k$ ,  $\forall k$ .

$$F_1 \neq X. \overline{B_{r_1}}(x_1) \subseteq F_1^c, \overline{B_{r_2}}(x_2) \subseteq F_2^c.$$

De esta manera obtenemos bolas cerradas  $\overline{B_{r_k}}(x_k)$  tales que

1.

$$\overline{B_{r_{k+1}}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_k}}(x_k)$$

2.

$$\overline{B_{r_k}}(x_k) \subseteq F_k^c$$

3.

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2} \implies r_k \rightarrow 0$$

$\{x_k\}$  es Cauchy pues:

$$\forall k, l \geq n, x_k, x_l \in \overline{B_{r_n}}(x_n)$$

$$\implies |x_k - x_l| \leq 2r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\implies x_k \rightarrow x \in X$$



Como  $x_k \in \overline{B_{r_k}} \quad \forall k \geq n$ ,

$$\implies x = \lim x_k \in \overline{B_{r_n}}(x_n) \subseteq F_n^c$$

Por lo que  $x \notin F_n \quad \forall n$ . ■

**Corolario 2.3.2.1.**  $G \subseteq X$  es **genérico**  $\implies$  denso en  $X$ , con  $X$  completo.

*Demostración.* Asumimos que  $G$  genérico no es denso, entonces hay una bola  $B$

$$\implies \overline{B} \subseteq G^c = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k \overline{E_k}$$

$$\implies \overline{B} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k} \cap \overline{B}}_{\text{cerrados y densos en NP}}$$

Pero  $\overline{B}$  es un espacio métrico completo, contradicción con el teorema de Baire. ■

**Corolario 2.3.2.2.**  $X$  completo,  $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$  cerrado.  
Entonces, por lo menos uno  $F_k$  contiene una bola.

### 2.3.1. Aplicaciones

**Teorema 2.3.3.** El conjunto de funciones continuas en  $[0, 1]$  que no son derivables en ningún punto es **denso** en  $C([0, 1])$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D} = \{f \in C([0, 1]) : f'(x_*) \text{ existe en un punto } x_* \in [0, 1]\}$

Queremos demostrar que  $\mathcal{D}$  es cat I en  $C([0, 1])$ .

Por 2.3.2.1,  $\mathcal{D}^c$  es genérico  $\implies$  denso en  $C([0, 1])$ .

Si  $f \in \mathcal{D} \implies f'(x_*)$  existe

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

existe.

$$\implies |f(x) - f(x_*)| \leq M|x - x_*| \quad \forall x \in [0, 1]$$

para algún  $M > 0$ .

$$\implies \mathcal{D} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

$$E_N := \{f \in C([0, 1]) : |f(x) - f(x_*)| \leq N|x - x_*| \text{ para algún } x_* \in [0, 1]\}$$

Estaremos listos si probamos que:

1.  $E_N$  es cerrado en  $C([0, 1])$
2.  $E_N$  es denso en ninguna parte.
1.  $f_n \in E_N$  y  $f_n \rightarrow f$ , en  $\|\cdot\|_{\infty}$ .  
 $[0, 1] \ni x_n^* \rightarrow x^*$  (podemos extraer una subsucesión que converge)

$$|f_n(x) - f_n(x_n^*)| \leq N|x - x_n^*| \quad \forall x \in [0, 1]$$

Queremos demostrar que

$$|f(x) - f(x^*)| \leq N|x - x^*|$$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f - f_n\|_{\infty} \leq \varepsilon/2} + |f_n(x) - f_n(x_n^*)| + \underbrace{|f_n(x_n^*) - f(x^*)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x^*)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_n^*)| + |f_n(x_n^*) - f_n(x^*)| \\ &\leq N|x - x_n^*| + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N(|x - x^*| + |x^* - x_n^*|) + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N|x - x^*| + \underbrace{2N|x_n^* - x^*|}_{\varepsilon/3} \end{aligned}$$

2. ¿Por qué  $E_N$  es denso en NP de  $X$ ?

$$P_M = \{\text{funciones continuas en } [0, 1] \text{ derivables a trozos, } |f'| = M\}$$

son funciones zig-zag. Cuando  $M > N$ ,  $P_M \cap E_N = \emptyset$ . Además,  $P_M$  es denso en  $C([0, 1])$ . Como consecuencia,  $E_N$  no puede tener interior no trivial ya que  $E_N$  no puede tener una bola abierta (hay funciones de  $P_M$  en  $E_N$  y  $P_M$  es denso).

Mostraremos que  $P_M$  es denso.

$$P = \{\text{las funciones continuas lineales a tozos}\} \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} C([0, 1])$$

Podemos aproximar cada  $f \in P$  con una función  $g \in P_M$  arbitrariamente bien. ■

### Teorema de la Aplicación Abierta y Teorema del grafo cerrado

Sean  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  espacios de Banach.

$$T \in \mathcal{B}(X, Y) \implies T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} X \quad \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} Y$$

Si  $T$  es biyectiva adicionalmente, entonces  $S := T^{-1}$  es lineal (no necesariamente acotada).

Sin embargo, si  $S$  es continua, entonces  $S^{-1}(U) \stackrel{ab}{\subseteq} X, \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} Y$

$$\iff T(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$$

**Definición 2.3.5.** Sea  $T : X \rightarrow Y$  una aplicación. Decimos que  $T$  es abierta si

$$T(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$$

Si  $T : X \rightarrow Y$  es lineal, continua y biyectiva, entonces  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  es lineal. ¿Es  $T^{-1}$  continua?

Lo será cuando  $T$  es abierta.

**Teorema 2.3.4** (Aplicación Abierta). *Si  $X, Y$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  y sobreyectiva, entonces  $T$  es abierta.*

**Corolario 2.3.4.1.** Si  $X, Y$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  es biyectiva, entonces  $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ . Existen  $c, C > 0$  tales que

$$c\|x\|_X \leq \underbrace{\|Tx\|_Y}_y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

$$c\|T^{-1}y\|_X \leq \|y\|_Y$$

*Demostración del teorema 2.3.4.* 1. Será suficiente demostrar que  $T(B_2^X \supseteq B_\delta^Y)$ . ( $B_r^X = B_r^X(0)$ )

Por linealidad

$$\begin{aligned} T(B_r^X(x)) &= T(x + B_r^X) \\ &= Tx + T(B_r^X) = y + \frac{r}{2}T(B_2^X) \\ &\supseteq y + \frac{r}{2}B_\delta^Y = B_{\frac{\delta r}{2}}^Y(y) \end{aligned}$$

2. Vamos a demostrar que  $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^X$  para algún  $\delta > 0$

Por la sobreyectividad:

$$cat II \rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^X)}$$

Entonces,  $T(B_n^X) \supseteq B_r^Y(y)$  para algún  $n \in \mathbb{N}, r > 0, y \in Y$ . Tomamos  $\tilde{y}$  tal que  $|\tilde{y} - y| \leq \frac{r}{2}$  e  $\tilde{y} = Tx$  para algún  $x \in B_n^X$ .

$$T(B_{2n}^x(\tilde{x})) \supseteq \overline{T(B_n^X)} \supseteq B_r^Y(y) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^Y(y)$$

Restando  $Tx$

$$T(B_{2n}^X) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^X$$

Reescalando

$$\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_{\frac{r}{4n}}^Y \quad \delta = \frac{r}{4n}$$

3. Tenemos  $T(B_1^X) \supseteq B_\delta^Y$ . Reescalando

$$\overline{T(B_{2^{-k}}^X)} \supseteq B_{\delta 2^{-k}}^Y$$

¿Por qué  $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$ ?

Fije  $y_0 \in B_\delta^Y$ . Podemos encontrar  $x_0 \in B_1^X$  tal que

$$\|y_0 - Tx_0\|_Y < \frac{\delta}{2}$$

$$\implies y_1 := y_0 - Tx_0 \in B_{\delta/2}^Y$$

$\implies$  existe  $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X$  tal que

$$\|y_1 - Tx_1\| < \frac{\delta}{4}$$

De esta manera construimos sucesiones  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , tales que

$$a) \ x_n \in B_{2^{-n}}^X, y_n \in B_{\delta 2^{-n}}^Y$$

$$b) \ y_{n+1} = y_n - Tx_n$$

$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in X$  porque  $X$  es Banach. Veremos que  $Tx = y$  y  $x \in B_2^X$ .

■