



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
MAT255I - ANÁLISIS FUNCIONAL  
2º SEMESTRE 2023

## MAT255I

### Análisis Funcional

Sebastián Guerra ([sebastian.guerrap@uc.cl](mailto:sebastian.guerrap@uc.cl))  
Profesor: Nikola Kamburov ([nikamburov@mat.uc.cl](mailto:nikamburov@mat.uc.cl))

*Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir*

Versión: 30 de octubre de 2023

# Índice general

<b>1. Intro al Análisis Funcional</b>	<b>3</b>
1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?	3
1.2. Motivación	4
1.3. Objeto central: espacio de Banach	4
1.4. Resultados que vamos a ver	5
<b>2. Espacios de Banach</b>	<b>7</b>
2.1. Nociones básicas	7
2.1.1. Espacios Normados	7
2.1.2. Espacios de Banach	10
2.2. Operadores y funcionales	13
2.2.1. Operadores Lineales	13
2.2.2. Espacio Dual	17
2.2.3. Espacio cociente	20
2.2.4. Completación de espacios normados	22
2.3. El teorema de Baire	22
2.3.1. Categorías de Baire	22
2.3.2. Aplicación	26
2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta	27
2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado	30
<b>3. Espacios de Hilbert</b>	<b>32</b>
3.1. Conceptos Básicos	32
3.2. Teorema de la Proyección	35
3.3. Teorema de Representación de Riesz	39
3.4. Bases Ortonormales	40
3.5. Series de Fourier	47
3.5.1. Series de Fourier y convergencia	47
3.5.2. Convergencia puntual de la serie de Fourier	59
3.6. Repaso/Crash course en teoría de la medida	62
3.6.1. Espacios de medida y funciones medibles	63
3.6.2. La integral de Lebesgue	66
3.7. Espacios de Lebesgue $L^p$	69
3.7.1. Espacios $L^p$	69
3.7.2. Los espacios $L^p$ y dualidad	73
3.7.3. Teorema de Representación de Riesz	74
3.8. Teorema de Hahn-Banach	87

# Intro al Análisis Funcional

## 1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

**Definición 1.1.1.** Un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  campo de escalares tiene dimensión infinita si  $\forall n \in \mathbb{N}$  hay  $n$  elementos de  $V$  que son linealmente independientes sobre  $\mathbb{K}$

**Ejemplo:**  $V = C([0, 1], \mathbb{R}) =$  funciones reales continuas en  $[0, 1]$ .  
 $\{1, x, \dots, x^{n-1}\} \subseteq V$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.*  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0, a_k \in \mathbb{R}.$

Reconocemos que existe la operación  $\frac{d}{dx}$  definida en  $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ , funciones suaves, y la operación evaluar en  $x = 0$ .

Evaluyendo en  $x = 0 \rightarrow a_0 = 0$ . Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en  $x = 0$ :

$$a_1 = 0$$

...



*Demostración alternativa.* Reconocemos que hay un producto interno en  $V = C([0, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\{f_k = \sin(\pi kx)\}_{k=1}^n \subseteq V$$

$$\langle \sin(\pi kx), \sin(\pi lx) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^n a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_l \rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_l, f_l \rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \dots, n$$

■

## 1.2. Motivación

**Ejemplo** (Ecuación de Poisson):

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

**Seba** *Añadir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \rightarrow Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución  $u \in X$  para ciertos espacios  $X, Y$  apropiados.

El Análisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que **comparten** las **mismas características** topológicas/algebraicas/métricas.

## 1.3. Objeto central: espacio de Banach

**Definición 1.3.1** (Espacio de Banach).  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es un espacio normado **completo** (clave para sacar límites).

$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ completos} \} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, \|\cdot\|) \} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) \text{ completos} \}$

**Seba** Arreglar

### Lógica de inclusiones

1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induce una norma  $\|\cdot\|$

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

2.  $\|\cdot\|$  induce una métrica  $d(\cdot, \cdot)$

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

### 1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

**Ejemplo:** Cada funcional lineal en  $\mathbb{R}$  ( $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) se puede representar como  $l(v) = v \cdot w$  para algún vector (único)  $w \in \mathbb{R}^n$ .

En la situación de dimensión  $\infty$ , se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

**Teorema 1.4.1** (Representación de Riesz). *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal **continuo**. Entonces existe un único  $w \in V$ , tal que*

$$l(v) = \langle v, w \rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. **contraintuitivos**.

**Ejemplo:**  $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacta (Heine-Borel).

En  $\dim V = \infty$ , este teorema es falso.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $V$  un espacio de Banach y sea  $B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ .  $B$  es compacto en  $V \iff \dim V < \infty$*

**Ejemplo:** En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subseteq L^p([0, 1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.

$\Rightarrow$  motiva la definición de topologías débiles.

# Espacios de Banach

## 2.1. Nociones básicas

### 2.1.1. Espacios Normados

**Definición 2.1.1** (Espacios métricos). Un espacio métrico  $(X, d)$  y  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  la métrica que satisface:

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría)  $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Definición 2.1.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Una norma en  $V$  es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface:

1.  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. (Desigualdad triangular)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface solo 2. y 3. se llama **semi-norma**.

Una espacio vectorial  $V$  con una norma se llama **Espacio normado**  $(V, \|\cdot\|)$ .

**Proposición 2.1.1.**  $(V, \|\cdot\|)$  define un espacio métrico con métrica  $d(v, w) := \|v - w\|$ .

**Ejemplo:** ■  $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

- En  $\mathbb{R}^2$ ,  $|(x_1, x_2)| := |x_1|$  define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} \{x_k\}$  es una norma.

■

$$|x|_p := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

**Seba** Añadir dibujos de norma infinito y norma 1

**Proposición 2.1.2.** En  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  todas normas son equivalentes: si  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  son 2 normas, existe  $c > 0$  tal que

$$\frac{1}{c} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c \|v\|_2, \quad \forall v \in V$$

**Definición 2.1.3.** Sea  $X$  un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

**Ejemplo:**  $C_\infty([0, 1]) = C([0, 1])$  (funciones continuas)

**Proposición 2.1.3.**  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$  define una norma en  $C_\infty(X)$ .

*Demostración.* 1.  $\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \forall x \in X$ .

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en  $\|\cdot\|_\infty$

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$



si

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

**Ejemplo:**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{ \{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : \|a\|_p < \infty \}$$

donde

$$\|a\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ } \sigma\text{-medibles, tales que } \|f\|_{L^p} < \infty \}$$

donde

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int |f|^p d\sigma \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_x |f|$$

**Ejemplo:**  $X = [0, 1]$ ,  $\sigma$  = medida de Lebesgue. En  $C([0, 1])$  definimos

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^1} = \int |f(x)| dx$$

Estas 2 normas **no son equivalentes**

### 2.1.2. Espacios de Banach

**Definición 2.1.4.** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es **completo** con respecto a la métrica inducida.

**Ejemplo:**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)  
 $L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es un espacio de Banach (cuando  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es completo).

**Proposición 2.1.4.**  $C_\infty(X)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.*  $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$  de Cauchy.

1. Adivinar el límite  $f$ .
2. Probar la convergencia:

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

3.  $f$  está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo  $x \in X$  fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es  $\{f_n(x)\}_n$  es Cauchy en  $\mathbb{C}$ .

$$\implies f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre  $X$ .

$\implies f$  es continua sobre  $X$ .

¿Por qué  $f$  es acotada?

Considere  $\varepsilon = 1$

$$\implies \|f_n - f_{\bar{N}}\|_\infty \leq 1$$

cuando  $n \geq \bar{N} := N(1)$ .

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &\leq \|f_{\bar{N}}\|_\infty + \|f_n - f_{\bar{N}}\|_\infty \\ &\leq \|f_{\bar{N}}\|_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

**Definición 2.1.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado.  $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es **sumable** si

$$S_m = \sum_{n=1}^m v_n$$

converge.

$\sum_n v_n$  es **absolutamente sumable** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$$

converge.

■

**Proposición 2.1.5.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es absolutamente sumable, entonces,  $\{S_m\}$  es Cauchy

**Teorema 2.1.6.** *Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$  :

1. Tome una sucesión  $\{v_n\}$  de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge.  $v_{n_k} \rightarrow v$  en  $V$ . Fije  $\varepsilon > 0$ .  $\Rightarrow \|v_m - v\| \leq \underbrace{\|v_m - v_{n_k}\|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|v_{n_k} - v\|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$ ,  
tomando  $k, m$  suficientemente grandes.
2. Dos trucos: Podemos “acelerar” la convergencia. Existe una subsucesión  $\{v_{n_k}\}$  tal que

$$\|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| \leq 2^{-k} \quad (2.1)$$

$$\|v_n - v_m\| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$$n_k := N_1 + \dots + N_k$$

Afirmamos que  $\{v_{n_k}\}$  converge.

Truco de la suma telescópica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^m (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

$$\Rightarrow v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

## 2.2. Operadores y funcionales

### 2.2.1. Operadores Lineales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

**Ejemplo:**

$$T : C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C})$$

$$f \rightarrow F(x) = \int_0^x f(y) dy$$

$T$  es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y < x\}} f(y) dy$$

**Definición 2.2.1.**  $V, W$  son 2 espacios vectoriales.

$T : V \rightarrow W$  es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$f \rightarrow \int_0^1 \underbrace{K(x, y)}_{\text{Kernel}} f(y) dy := T f(x)$$

operador integral. Cuando  $K \in C([0, 1]^2)$ ,  $T$  está bien definida.

En  $\dim \infty$  vamos a exigir que los operadores lineales sean **continuos**.

**Definición 2.2.2.**  $T : V \rightarrow W$ ,  $V, W$  son espacios métricos. Decimos que  $T$  es continuo si

$$T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} V, \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} W$$

$$\iff T^{-1}(C) \stackrel{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \stackrel{cerr}{\subseteq} W$$

$$\iff v_n \rightarrow v \text{ en } V \text{ entonces } T v_n \rightarrow T v \text{ en } W.$$

**Teorema 2.2.1.** Sean  $V, W$  espacios normados. Entonces  $T : V \rightarrow W$  operador lineal es continuo si y solo si

$$\|Tv\|_W \leq C\|v\| \quad \forall v \in V \quad (2.2)$$

para alguna constante  $C$ .

**Definición 2.2.3.** Operador lineal que satisface (2,2) se llama **acotado**.

*Demostración.*  $\implies$  : Sea  $T$  continuo.  $B := \{\|w\|_W < 1\}$

$$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : \|v\|_V < r\}$$

pues  $T^{-1}(B)$  es abierto

$$\implies T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : \|v\|_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio  $\frac{r}{2}$ .

$$\|T\bar{v}\|_W < 1$$

Todo  $v \in V, v \neq 0$  se puede escribir como  $v = \frac{\bar{v}}{r/2}\|v\|_V$

Para algún  $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$\|Tv\|_W = \|T(\frac{\bar{v}}{r/2}\|v\|_V)\|_W$$

$$= \|\frac{2}{r}\|v\|_V T(\bar{v})\|_W$$

$$= \frac{2}{r}\|v\|_V \|T\bar{v}\|_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r}\|v\|_V \quad \forall v \neq 0$$

■

**Ejemplo:**

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$$

es acotado en  $(C([0, 1]), |||_\infty)$

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x, y)|}_{\leq M} |f(y)| dy \\ &\leq M \int_0^1 |f(y)| dy \leq M ||f||_\infty \quad \forall x \implies ||Tf||_\infty \leq M ||f||_\infty \end{aligned}$$

**Definición 2.2.4.** Sean  $V, W$  espacios normados. Defina  $\mathcal{B}(V, W)$  como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de  $V$  a  $W$ . Obviamente  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio vectorial.

Norma operador  $T : V \rightarrow W$ :

$$||T|| := \sup_{||v||=1} ||Tv||$$

Obviamente,  $T \in \mathcal{B}(V, W), ||T|| < \infty$

$$||Tv|| \leq C \underbrace{||v||}_1 = C$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

De hecho, para  $T \in \mathcal{B}(V, W)$

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup_{v \neq 0} \frac{||Tv||}{||v||} = \sup_{||v|| \leq 1} ||Tv|| \\ &= \inf \{C > 0 : ||Tv|| \leq C||v|| \quad \forall v \in V\} \end{aligned}$$

Tenemos  $||Tv|| \leq ||T|| ||v||$

**Teorema 2.2.2.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio normado bajo la norma operador.

*Demostración.* 1.  $\|T\| = 0 \implies \|Tv\| = 0 \forall v \in V$

$$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$$

$$2. \|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$$

$$3. \text{ Sea } v \in V, \|v\| = 1. \forall T, S \in \mathcal{B}(V, W),$$

$$\begin{aligned} \|(T + S)v\| &= \|Tv + Sv\| \\ &\leq \|Tv\| + \|Sv\| \\ &\leq \|T\| \|v\| + \|S\| \|v\| = (\|T\| + \|S\|) \|v\| \end{aligned}$$

$$\implies \|(T + S)v\| \leq \|T\| + \|S\|$$

$$\implies \|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

■

¿Cuándo es  $\mathcal{B}(V, W)$  completo?

**Teorema 2.2.3.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es Banach cuando  $W$  es Banach.

*Demostración.*  $T_n \in \mathcal{B}(V, W)$  Cauchy. Queremos demostrar que converge en  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(V, W)}$ .

1.  $\forall v \in V, \{T_n v\}$  es Cauchy en  $W$  pues

$$\|T_n v - T_m v\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|v\|$$

$\implies \{T_n v\}$  converge. Definimos

$$Tv := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v$$

2. ¿Por qué  $T \in \mathcal{B}(V, W)$ ?  $\rightarrow$  lineal:

$$T(\lambda v) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v = \lambda T(v)$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$\rightarrow$  acotado:



$\{T_n\}$  es Cauchy.

$\{\|T_n\|\}$  es Cauchy en  $[0, \infty)$

$$\begin{aligned} |||T_n| - |T_m||| &\leq \|T_n - T_m\| \\ \implies \|T_n\| &\leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Sea  $v \in V, \|v\| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|Tv\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\|T_n v\|}_{\leq C\|v\|=C} \leq C \end{aligned}$$

$$\implies \|T\| \leq C$$

3. Convergencia:  $T_n \rightarrow T$  en norma operador. Sea  $v \in V, \|v\| = 1$ .

$$\|(T_n - T)v\|$$

$$T_m v \rightarrow T v$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_n - T_m)v\| \\ &\leq \underbrace{\|T_n - T_m\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \|v\| \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \\ \implies \|T_n - T\| &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

### 2.2.2. Espacio Dual

**Definición 2.2.5.** Sea  $V$  un espacio normado sobre  $\mathbb{K}$ .

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio **dual** de  $V$ .

**Teorema 2.2.4.** Cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (completos)  $V^*$  es un espacio de Banach

Elementos de  $V^*$  se llaman **funcionales** en  $V$ .

**Ejemplo:**  $[\ell^p(\mathbb{C})]^* = ?, p \in [1, \infty)$   
 Resulta que  $? = \ell^q(\mathbb{C})$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
 Si  $v \in \ell^p, w \in \ell^q$   
 podemos definir un funcional en  $\ell^p$

$$\ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$v = \{v_k\} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k$$

$$|\ell_w| \leq \|w\|_{\ell^q} \|v\|_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty \quad (\ell^2)^* \simeq \ell^2$$

**Nota:**  $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$

Cuando  $V = W$  espacio de Banach, entonces  $B(V, V)$  es un espacio de Banach. Es también **álgebra**.

$$T, S \in B(V, V) \implies TS \in B(V, V)$$

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup_{\|v\|=1} \|T(Sv)\| \leq \|T\| \cdot \|Sv\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|v\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \end{aligned}$$

Cómo resolver ecuaciones del tipo

$$(T - \lambda I)u = v$$

donde  $v \in V \leftarrow$  un espacio de Banach,  $T \in B(V, V)$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Queremos construir el operador **inverso**

$$S := (T - \lambda I)^{-1}$$

Cuando  $|\lambda| > \|T\|$ ,  $S$  se puede construir a través de la **serie de Neumann**

$$-\lambda \underbrace{\left( I - \frac{T}{\lambda} \right)}_{\|T/\lambda\| < 1} u = v$$

Sabemos que

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Definimos

$$S := -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{T}{\lambda} \right)^n \quad (2.3)$$

2.3 define  $S \in B(V, V)$  ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{T}{\lambda} \right)^n$$

es sumable pues es absolutamente sumable en el espacio de Banach  $B(V, V)$ .

→ ¿por qué  $(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$ ?

Para verificar que  $S(T - \lambda I) = I$ ,

$$S_N = \sum_{n=0}^N -\frac{1}{\lambda} \left( \frac{T}{\lambda} \right)^n$$

$$\begin{aligned} S_N(T - \lambda I) &= S_N T - S_N \lambda = \sum_{n=0}^N -\left( \frac{T}{\lambda} \right)^{n+1} - \sum_{n=0}^N -\left( \frac{T}{\lambda} \right)^n \\ &= -\underbrace{\left( \frac{T}{\lambda} \right)^{N+1}}_{\rightarrow 0 \text{ en } B(V, V)} + I \end{aligned}$$

### 2.2.3. Espacio cociente

¿Cómo obtener espacios normados/Banach de otros espacios?

**Definición 2.2.6** (Espacio cociente). Sea  $W$  un subespacio del espacio vectorial  $V$ .

$$V/W := \{[v], v \in V\}$$

$[\cdot]$  se define a través  $v_1 \sim v_2$  si  $v_1 - v_2 \in W$ .

Se nota también  $V \bmod W$  y se llama el espacio cociente.

Es útil denotar  $[v] = v + W$

Una construcción de subespacio  $W \subseteq V$  tal que  $V/W$  es normado es a través de una **semi-norma** definida en  $V$ .

**Ejemplo:**  $V = C^1([0, 1])$  = espacio de funciones en  $[0, 1]$  con derivadas continuas en  $[0, 1]$ .

$$\|f\| := \max_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

$$\|f\| = 0 \iff f = \text{const}$$

**Teorema 2.2.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial semi-normado. Entonces  $Z := \{v \in V : \|v\| = 0\}$  es un subespacio de  $V$  y

$$\|v + Z\|_{V/Z} := \|v\| \tag{2.4}$$

define una norma en  $V/Z$ .

*Demostración.* 1.  $Z$  es un subespacio vectorial.

$$z_1, z_2 \in Z \implies z_1 + z_2 \in Z$$

$$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| = 0$$

$$z \in Z \implies \lambda z \in Z$$

Así,  $V/Z$  tiene la estructura de un espacio vectorial.

2. Tenemos que comprobar que 2.4 es una buena definición:

Si  $v_1, v_2$  son 2 representantes de  $[v]$ :

$$v_1 = v_2 + z, \quad z \in Z$$

$$\begin{aligned} \|v_1\| &\leq \|v_2\| + \|z\| \implies \|v_1\| \leq \|v_2\| \\ \|v_2\| &\leq \|v_1\| \implies \|v_1\| = \|v_2\| \end{aligned}$$

$$\|v + z\|_{V/Z} = 0$$

$$\implies v + Z = Z \implies v \in Z$$

Las otras 2 proposiciones se heredan de manera obvia

■

$C^1([0, 1])/const$  es un espacio normado con la norma inducida.

Otra construcción similar:

**Proposición 2.2.6.** Si  $W \stackrel{cerr}{\subseteq} V$  subespacio cerrado de un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$ , entonces  $V/W$  tiene una norma:

$$\|[v]\|_{V/W} := \inf_{w \in W} \|v - w\|$$

*Demostración.* En ayudantía

■

### 2.2.4. Completación de espacios normados

**Definición 2.2.7.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado. La **completación** de  $V$  es un espacio de Banach  $(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}})$  con una aplicación lineal

$$\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \rightarrow \tilde{V}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$  es uno a uno
2.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es denso en  $\tilde{V}$
3.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es una isometría:

$$\|\mathcal{J}_{\tilde{V}}(v)\|_{\tilde{V}} = \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

**Teorema 2.2.7.** *Todo espacio normado  $V$  tiene una completación. Esta es única en el siguiente sentido:*

**Seba** *hacer dibujo*  
 $\tilde{V} = \{\text{sucesiones de Cauchy en } V \text{ que convergen}\}$   
 $\{v_n\} \sim \{w_n\}$  si  $\|v_n - w_n\| \rightarrow 0$   
 Sea  $\tilde{v} \in \tilde{V}$

**Seba** *ESTOY HASTA EL PICO*

## 2.3. El teorema de Baire

### 2.3.1. Categorías de Baire

$(X, d)$  espacio métrico.

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

$O \subseteq X$  es abierto si  $\forall x \in O, \exists B_r(x) \subseteq O$ .  $\bigcup_{\alpha} O_{\alpha}$  es abierto.

$F \subseteq X$  es cerrado si  $F^c$  es abierto.  $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$  es cerrado.

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$$

$$\overset{\circ}{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$$

$$E \overset{\text{denso}}{\subseteq} X \text{ si } \overline{E} = X$$

**Definición 2.3.1.**  $E \subseteq X$  es **denso en ninguna parte** si  $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$ .

esencialmente, denso en ninguna parte  $E$  significa que  $E$  no contiene bolas abiertas.

**Ejemplo:**  $E = \{x\}$  es denso en ninguna parte.

**Proposición 2.3.1.**  $F$  es cerrado y denso en ninguna parte  $\iff F^c$  es abierto y denso.

### La noción de categoría de Baire

**Definición 2.3.2.**  $E \subseteq X$  cat I si  $E = \bigcup_k E_k$  donde  $E_k$  es denso en ninguna parte.

**Ejemplo:**  $\mathbb{Q}$  es cat I.

**Definición 2.3.3.** Si  $G$  tiene  $G^c$  que es cat I, decimos que  $G$  es **genérico**.

**Definición 2.3.4.**  $E$  es de cat II si no es de primera categoría.

### Observaciones

1. Si  $E$  es cat I, y  $F \subseteq E$  es cat I

$$\begin{aligned} F &\subseteq E \subseteq \bigcup_k E_k \\ \implies F &= \bigcup_k E_k \cap F, \quad \overline{E_k \cap F} \subseteq \overline{E_k} \\ \implies E_k \cap F &\text{ son densos en ninguna parte.} \end{aligned}$$

2. Si  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de cat I,  $\bigcup_k E_k = \bigcup_k \underbrace{\bigcup_l E_{kl}}_{\text{denso en NP}}$  es una unión contable.
3. No hay conexión entre conjuntos de cat I y conjuntos despreciables del punto de vista de teoría de la medida.

**Ejemplo:**  $G_j = \bigcup_n (q_n - 2^{-(n+j+1)}, q_n + 2^{-(n+j+1)})$   
 $\{q_j\}$  enumeración de  $\mathbb{Q}$ .  
 $G_j$  es abierto y denso en  $\mathbb{R}$ .

$$\implies E_j = G_j^c \text{ es cerrado y denso en NP}$$

$$\implies E := \bigcup_j E_j \text{ es cat I}$$

y de plena medida en  $\mathbb{R}$ .

$\iff E^c$  es de medida 0 de Lebesgue.

$$\begin{aligned} |E^c| &= \left| \bigcap_j E_j^c \right| \\ &= \left| \bigcap_j G_j \right| \leq |G_j| \\ |G_j| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+j+1)} \\ &= 2^{-j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.2** (Teorema de Baire). *Sea  $(X, d)$  **completo**. Entonces,  $X$  es de la cat II en sí mismo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es de cat I en sí:

$$X = \bigcup_k \underbrace{E_k}_{\text{densos en NP}} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k}}_{=F_k \text{ denso en NP y cerrado}}$$

Llegaremos a una contradicción si demostramos que hay un  $x \notin F_k$ ,  $\forall k$ .

$$F_1 \neq X. \overline{B_{r_1}}(x_1) \subseteq F^c, \overline{B_{r_2}}(x_2) \subseteq F_2^c.$$

De esta manera obtenemos bolas cerradas  $\overline{B_{r_k}}(x_k)$  tales que

1.

$$\overline{B_{r_{k+1}}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_k}}(x_k)$$



2.

$$\overline{B_{r_k}}(x_k) \subseteq F_k^c$$

3.

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2} \implies r_k \rightarrow 0$$

$\{x_k\}$  es Cauchy pues:

$$\forall k, l \geq n, x_k, x_l \in \overline{B_{r_n}}(x_n)$$

$$\implies |x_k - x_l| \leq 2r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\implies x_k \rightarrow x \in X$$

Como  $x_k \in \overline{B_{r_k}} \quad \forall k \geq n$ ,

$$\implies x = \lim x_k \in \overline{B_{r_n}}(x_n) \subseteq F_n^c$$

Por lo que  $x \notin F_n \quad \forall n$ .

■

**Corolario 2.3.2.1.**  $G \subseteq X$  es **genérico**  $\implies$  denso en  $X$ , con  $X$  completo.

*Demostración.* Asumimos que  $G$  genérico no es denso, entonces hay una bola  $B$

$$\implies \overline{B} \subseteq G^c = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k \overline{E_k}$$

$$\implies \overline{B} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k} \cap \overline{B}}_{\text{cerrados y densos en NP}}$$

Pero  $\overline{B}$  es un espacio métrico completo, contradicción con el teorema de Baire.

■

**Corolario 2.3.2.2.**  $X$  completo,  $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$  cerrado.  
Entonces, por lo menos uno  $F_k$  contiene una bola.

### 2.3.2. Aplicación

**Teorema 2.3.3.** *El conjunto de funciones continuas en  $[0, 1]$  que no son derivables en ningún punto es **denso** en  $C([0, 1])$*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D} = \{f \in C([0, 1]) : f'(x_*) \text{ existe en un punto } x_* \in [0, 1]\}$

Queremos demostrar que  $\mathcal{D}$  es cat I en  $C([0, 1])$ .

Por 2.3.2.1,  $\mathcal{D}^c$  es genérico  $\implies$  denso en  $C([0, 1])$ .

Si  $f \in \mathcal{D} \implies f'(x_*)$  existe

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

existe.

$$\implies |f(x) - f(x_*)| \leq M|x - x_*| \quad \forall x \in [0, 1]$$

para algún  $M > 0$ .

$$\implies \mathcal{D} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

$E_N := \{f \in C([0, 1]) : |f(x) - f(x_*)| \leq N|x - x_*| \text{ para algún } x_* \in [0, 1]\}$

Estaremos listos si probamos que:

1.  $E_N$  es cerrado en  $C([0, 1])$
2.  $E_N$  es denso en ninguna parte.
1.  $f_n \in E_N$  y  $f_n \rightarrow f$ , en  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

$[0, 1] \ni x_n^* \rightarrow x^*$  (podemos extraer una subsucesión que converge)

$$|f_n(x) - f_n(x_n^*)| \leq N|x - x_n^*| \quad \forall x \in [0, 1]$$

Queremos demostrar que

$$|f(x) - f(x^*)| \leq N|x - x^*|$$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2} + |f_n(x) - f_n(x^*)| + \underbrace{|f_n(x^*) - f(x^*)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x^*)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_n^*)| + |f_n(x_n^*) - f_n(x^*)| \\ &\leq N|x - x_n^*| + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N(|x - x^*| + |x^* - x_n^*|) + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N|x - x^*| + \underbrace{2N|x_n^* - x^*|}_{\varepsilon/3} \end{aligned}$$

2. ¿Por qué  $E_N$  es denso en NP de  $X$ ?

$$P_M = \{\text{funciones continuas en } [0, 1] \text{ derivables a trozos, } |f'| = M\}$$

son funciones zig-zag. Cuando  $M > N$ ,  $P_M \cap E_N = \emptyset$ . Además,  $P_M$  es denso en  $C([0, 1])$ . Como consecuencia,  $E_N$  no puede tener interior no trivial ya que  $E_N$  no puede tener una bola abierta (hay funciones de  $P_M$  en  $E_N$  y  $P_M$  es denso).

Mostraremos que  $P_M$  es denso.

$$P = \{\text{las funciones continuas lineales a tozos}\} \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} C([0, 1])$$

Podemos aproximar cada  $f \in P$  con una función  $g \in P_M$  arbitrariamente bien. ■

### 2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta

Sean  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  espacios de Banach.

$$T \in \mathcal{B}(X, Y) \implies T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} X \quad \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} Y$$

Si  $T$  es biyectiva adicionalmente, entonces  $S := T^{-1}$  es lineal (no necesariamente acotada).

Sin embargo, si  $S$  es continua, entonces  $S^{-1}(U) \stackrel{ab}{\subseteq} \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$

$$\iff T(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$$

**Definición 2.3.5.** Sea  $T : X \rightarrow Y$  una aplicación. Decimos que  $T$  es abierta si

$$T(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$$

Si  $T : X \rightarrow Y$  es lineal, continua y biyectiva, entonces  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  es lineal. ¿Es  $T^{-1}$  continua?

Lo será cuando  $T$  es abierta.

**Teorema 2.3.4** (Aplicación Abierta). *Si  $X, Y$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  y sobreyectiva, entonces  $T$  es abierta.*

**Corolario 2.3.4.1.** *Si  $X, Y$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  es biyectiva, entonces  $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ . Existen  $c, C > 0$  tales que*

$$c\|x\|_X \leq \|\underbrace{Tx}_y\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

$$c\|T^{-1}y\|_X \leq \|y\|_Y$$

*Demostración del teorema 2.3.4.* 1. Será suficiente demostrar que  $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$ . ( $B_r^X = B_r^X(0)$ )

Por linealidad

$$\begin{aligned} T(B_r^X(x)) &= T(x + B_r^X) \\ &= Tx + T(B_r^X) = y + \frac{r}{2}T(B_2^X) \\ &\supseteq y + \frac{r}{2}B_\delta^Y = B_{\frac{\delta r}{2}}^Y(y) \end{aligned}$$

2. Vamos a demostrar que  $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^X$  para algún  $\delta > 0$

Por la sobreyectividad:

$$cat II \rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^X)}$$

Entonces,  $T(B_n^X) \supseteq B_r^Y(y)$  para algún  $n \in \mathbb{N}, r > 0, y \in Y$ . Tomamos  $\tilde{y}$  tal que  $|\tilde{y} - y| \leq \frac{r}{2}$  e  $\tilde{y} = T\tilde{x}$  para algún  $\tilde{x} \in B_n^X$ .

$$T(B_{2n}^x(\tilde{x})) \supseteq \overline{T(B_n^X)} \supseteq B_r^Y(y) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^Y(\tilde{y})$$

Restando  $T\tilde{x}$

$$T(B_{2n}^X) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^X$$

Reescalando

$$\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_{\frac{r}{4n}}^Y \quad \delta = \frac{r}{4n}$$

3. Tenemos  $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^Y$ . Reescalando

$$\overline{T(B_{2^{-k}}^X)} \supseteq B_{\delta 2^{-k}}^Y$$

¿Por qué  $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$ ?

Fije  $y_0 \in B_\delta^Y$ . Podemos encontrar  $x_0 \in B_1^X$  tal que

$$\|y_0 - Tx_0\|_Y < \frac{\delta}{2}$$

$$\implies y_1 := y_0 - Tx_0 \in B_{\delta/2}^Y$$

$\implies$  existe  $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X$  tal que

$$\|y_1 - Tx_1\| < \frac{\delta}{4}$$

De esta manera construimos sucesiones  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , tales que

$$a) \quad x_n \in B_{2^{-n}}^X, y_n \in B_{\delta 2^{-n}}^Y$$

$$b) \quad y_{n+1} = y_n - Tx_n$$

$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in X$  porque  $X$  es Banach. Veremos que  $Tx = y$  y  $x \in B_2^X$ .

$x$  es convergente puesto que es absolutamente convergente.

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_k\| \leq 2$$

Afirmamos que  $Tx = y_0$  por construcción.

$$\begin{aligned}
 Tx &= \lim_{N \rightarrow \infty} T \left( \sum_{n=0}^N x_n \right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \underbrace{Tx_k}_{y_k - y_{k+1}} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} (y_0 - y_{N+1}) \\
 &= y_0
 \end{aligned}$$

ya que  $y_{N+1} \rightarrow 0$ .

■

#### 2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado

**Definición 2.3.6.** Sean  $X, Y$  espacios métricos. Decimos que  $T : X \rightarrow Y$  es **cerrada** si su grafo en  $X \times Y$

$$G_T = \{(x, Tx) \in X \times Y\}$$

es cerrado en  $X \times Y$ .

En otras palabras,

$$(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y) \in X \times Y \implies (x, y) \in G_T \iff y = Tx$$

**Nota:**  $T : X \rightarrow Y$  es continua  $\implies T$  es cerrada.

$$x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx \implies (x_n, Tx_n) \rightarrow (x, Tx)$$

**Teorema 2.3.5.** Sean  $X, Y$  Banach. Entonces,  $T \in \mathcal{B}(X, Y) \iff T$  es lineal y cerrada.

*Demostración.*  $\Leftarrow$  : Utilizaremos el hecho que si  $X, Y$  son Banach, entonces  $X \times Y$  es Banach.

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$$

$$G_T := \{(x, Tx)\} \subseteq X \times Y$$

1.  $G_T$  es un subespacio de  $X \times Y$ .

2.  $G_T \stackrel{cerr}{\subseteq} X \times Y$

Entonces  $G_T$  es un espacio de Banach en sí. Tenemos las proyecciones  $\Pi_X : G_T \rightarrow X$  y  $\Pi_Y : G_T \rightarrow Y$  continuas y lineales.

$$T = \Pi_Y \circ (\Pi_X)^{-1}$$

ya que  $\Pi_x$  es biyectiva, continua y lineal (en un espacio de Banach a otro Banach). Por el teorema 2,3,4,1,  $\Pi_X^{-1}$  es continua. Por lo que  $T = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1}$  es continua.

■

**Significado** Si queremos demostrar que una aplicación lineal  $T : X \rightarrow Y$  es continua,  $x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx$

Podemos asumir adicionalmente que  $Tx_n \rightarrow Ty$ , y demostrar que  $y = Tx$

# Espacios de Hilbert

## 3.1. Conceptos Básicos

**Definición 3.1.1.** Sea  $H$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una función  $H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  que satisface

1. Linealidad en  $\langle \cdot, y \rangle$ ,  $\forall y \in H$ :

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

2. (Hermiticidad)

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

(En  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , esto es simetría)

3. (Definidad)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

**Nota:** 1. y 2., implican que  $\langle x, \cdot \rangle$  es lineal conjugada en la segunda entrada.

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

**Terminología** Tal función se llama **forma sesquilineal**

**Nota:**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una **forma simétrica definida positiva**

Decimos que  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un **espacio pre-Hilbertiano**

De 1. y 2.,  $\langle 0, y \rangle = 0$ ,  $\langle x, 0 \rangle = 0$

Definimos  $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$

**Proposición 3.1.1** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea  $H$  un espacio pre-Hilbertiano

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in H$$



*Demostración.* Si  $y = 0$ , la desigualdad es verdadera. Podemos asumir que  $y \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle \\
 &= \|x\|^2 + \underbrace{\lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle}_{2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle \bar{\lambda})} + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2
 \end{aligned}$$

Evaluyendo en  $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle \frac{-\overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2}) \\
 0 &\leq \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\
 \implies \|x\|^2 &\geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}
 \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.2.**  $\|\cdot\|$  define una norma  $H$ .

*Demostración.* 1. Definidad ✓

$$2. \|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \bar{\lambda} \|x\|^2)^{1/2} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

3. (Desigualdad triangular)

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
 &= (\|x\| + \|y\|)^2
 \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.3.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es continuo en  $H \times H$

*Demostración.*  $x_n \rightarrow x$  en  $\|\cdot\|$  e  $y_n \rightarrow y$  en  $\|\cdot\|$

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\
&\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

■

**Definición 3.1.2.** Decimos que  $x \perp y$  en el espacio pre-Hilbertiano  $H$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Si  $E \subseteq H$  subconjunto, definimos el **espacio ortogonal**

$$E^\perp := \{x \in H : x \perp y \quad \forall y \in E\}$$

$E^\perp$  es un **subespacio** de  $H$  y es cerrado:

$x_n \in E^\perp$  y  $x_n \rightarrow x$  en  $H$  entonces

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0 \quad \forall y \in E$$

**Teorema 3.1.4** (Pitagoras). Si  $x_1, \dots, x_n \in H$  (pre-Hilbertiano) son mutuamente ortogonales, entonces

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

**Proposición 3.1.5** (Ley del paralelogramo).

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

*Demostración.*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Sumando los 2 términos (diagonales), estamos listos.

■

**Definición 3.1.3.** Decimos que un espacio  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  pre-Hilbertiano es un espacio de **Hilbert** si es **completo** respecto  $\|\cdot\|$  inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

**Ejemplo:**  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$  es un espacio de Hilbert.

**Ejemplo:**  $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $\langle \{x_k\}, \{y_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

$\ell^p$  tiene una estructura de espacio de Hilbert?  $\iff p = 2$

**Ejemplo:**  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un espacio de medida, definimos

$$L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_X |f|^2 d\mu < \infty\} / \sim$$

$f_1 \sim f_2$  si  $\{f_1 \neq f_2\}$  es despreciable.

### 3.2. Teorema de la Proyección

Sea  $H$  un espacio de Hilbert.  $C \subseteq H$  cerrado y convexo. Existe único  $y \in C$  tal que  $y$  minimiza la distancia entre  $x$  y  $C$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $C$  un subconjunto de un espacio vectorial  $V$ . Decimos que  $C$  es **convexo** en  $V$  si

$$\forall x, y \in C \quad (1-t)x + ty \in C \quad \forall t \in [0, 1]$$

**Teorema 3.2.1.** Sea  $C \subseteq H$  un subconjunto cerrado y convexo del espacio de Hilbert  $H$ . Entonces  $\forall x \in H, \exists! y = P_C x \in C$  que satisface:

$$\|x - P_C x\| = d(x, C) = \inf_{c \in C} \|x - c\|$$

Además,  $y = P_C x \iff \operatorname{Re} \langle c - y, x - y \rangle \leq 0, \quad \forall c \in C$

*Demostración.* Tome  $\{y_n\} \subseteq C$ , tal que

$$d_n := \|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d := d(x, C)$$

$\{y_n\}$  será convergente si es Cauchy, ya que  $y_n \rightarrow y \in H$ . Ya que  $C$  es cerrado, de hecho  $y \in C$ .

Por la ley del paralelogramo, con  $v = x - y_n, w = x - y_m$

$$\begin{aligned}
2d_n^2 + 2d_m^2 &= \|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 \\
&= \|y_n - y_m\|^2 + \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\
&= \|y_n - y_m\|^2 + 4 \left\| x - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C} \right\|^2 \\
&\geq \|y_n - y_m\|^2 + 4d^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|y_n - y_m\|^2 &\leq 2d_n^2 + d_m^2 - 4d^2 \\
&\xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

por lo que  $\{y_n\}$  es Cauchy.

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\|x - y_n\|}^{d_n} = d$$

Este minimizador es el único!. Si hubiera otro  $z \neq y$ , aplicamos el mismo argumento a  $\{y, z, y, z, \dots\}$  que no converge por construcción, pero es Cauchy, lo que es una contradicción.

$\implies$  : Sea  $c \in C$  y considere  $(1 - t)y + tc$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
\|x - (1 - t)y - tc\|^2 &= \|x - y - t(c - y)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle + t^2 \|c - y\|^2 \\
&\geq \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies 2t \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle \leq t^2 \|c - y\|^2 \\
&\implies 2 \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle \leq 0
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$  : Evalúe  $\|x - (1 - t)y + tc\|^2$  en  $t = 1$ .

$$\begin{aligned}
\|x - c\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle + \|c - y\|^2 \\
\implies \|x - c\|^2 - \|x - y\|^2 &= \|c - y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle \\
\implies \|x - c\|^2 &\geq \|x - y\|^2 \quad \forall c \in C
\end{aligned}$$

Tenemos igualdad  $\iff c = y$ . ■

**Ejemplo:**  $W \subseteq H$  es un subespacio  $\implies W$  es convexo.

**Teorema 3.2.2.** Sea  $F \subseteq H$  un subespacio cerrado. Entonces  $H = F \oplus F^\perp$ , es decir, que todo  $x \in H$  se puede escribir de manera única como  $x = y + z$  con  $y \in F$  y  $z \in F^\perp$ . Además  $y = P_F x, z = P_{F^\perp} x$ .

$$P_F : H \rightarrow H$$

es lineal, acotado y satisface:

- $\|P_F\| \leq 1$  ( $= 1$  cuando  $F = \{0\}$ )
- $P_F^2 = P_F$
- $\operatorname{Im} P_F = F, \operatorname{ker} P_F = F^\perp$
- $\langle P_F x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, P_F x_2 \rangle$

**Definición 3.2.2.**  $P_F$  se llama la **proyección ortogonal**

*Demostración.* Ya que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , la unicidad se cumple.

$$y + z = y' + z' \implies y - y' = z' - z = 0$$

Tome  $x \in H$ . Define  $y = P_F x$ . Queremos demostrar que  $x - y \in F^\perp$ . Del teorema ?? sabemos que

$$\operatorname{Re} \langle c - y, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall c \in F$$

.

$$\implies \operatorname{Re} \langle v, z \rangle \leq 0 \quad \forall v \in F$$

$$\implies \operatorname{Re} \langle \lambda v, z \rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\implies \operatorname{Re} \lambda \langle v, z \rangle \leq 0$$

**Seba** *añadir align*

tome  $\lambda = \overline{\langle v, z \rangle}$

$$\begin{aligned} &\implies \operatorname{Re} |\langle v, z \rangle|^2 \leq 0 \\ &\implies |\langle v, z \rangle| = 0 \implies z \in F^\perp \end{aligned}$$

Propiedades de  $P_F$ :  $x_1 = y_1 + z$ ,  $x_2 = y_2 + z_2$

$$\begin{aligned} \langle P_F x_1, x_2 \rangle &= \langle y_1, x_2 \rangle \\ &= \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1, P_F x_2 \rangle &= \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle \\ &= \langle y_1, y_2 \rangle \end{aligned}$$

Por lo que  $P_F$  es lineal

$$\begin{aligned} \langle P_F(x_1 + x_2), x_3 \rangle &= \langle x_1 + x_2, P_F x_3 \rangle \\ &= \langle x_1, P_F x_3 \rangle + \langle x_2, P_F x_3 \rangle \\ &= \langle P_F x_1, x_3 \rangle + \langle P_F x_2, x_3 \rangle \\ &= \langle (P_F x_1 + P_F x_2), x_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\iff P_F(x_1 + x_2) = P_F x_1 + P_F x_2$$

$P_F(\lambda x) = \lambda P_F x$  de la misma manera.

$$P_F|_F = \operatorname{Id}|_F$$

$$\begin{aligned} &\implies P_F^2 x = P_F(P_F x) = P_F x \quad \forall x \in H \\ &\implies P_F^2 = P_F \end{aligned}$$

$\|P_F x\|^2 = \|y\|^2 \leq \|x\|^2$  mientras

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &\leq \|y\|^2 + \|z\|^2 \\ \implies \|P_F\| &\leq 1 \end{aligned}$$

■

### 3.3. Teorema de Representación de Riesz

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $f \in H^*$  un funcional lineal acotado. Entonces existe único  $u \in H$  tal que*

$$f(x) = \langle x, u \rangle \quad \forall x \in H$$

#### Observaciones

1.  $\|f\|_* = \|u\|$  por Cauchy-Schwarz
- 2.

$$\begin{aligned} H^* &\rightarrow H \\ f &\rightarrow u_f \end{aligned}$$

es una isometría biyectiva, lineal-conjugada. Para todo  $v \in H$  define  $f_v(x) : \langle x, v \rangle$

3.  $f_1 + f_2 \rightarrow u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2}$ , ya que

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) = \langle x, u_{f_1} \rangle + \langle x, u_{f_2} \rangle \\ &= \langle x, u_{f_1} + u_{f_2} \rangle \implies u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2} \end{aligned}$$

4.  $\lambda f \rightarrow u_{\lambda f} = \lambda u_f$ ?

$$[\lambda f](x) = \lambda(f(x)) = \lambda \langle x, u_f \rangle = \langle x, \bar{\lambda} u_f \rangle$$

**Nota:** Teorema falso. Cuando  $H$  es solo espacio pre-Hilbertiano, por ejemplo,

$$H = C([-1, 1])$$

con producto interno usual.

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dt \in H^*$$

*Demostración.* Si  $f = 0 \implies u = 0$ . Asumimos que  $f \neq 0$  y consideramos  $F := \ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$ .  $F$  es un subespacio de  $H$  cerrado. Si  $f \neq 0 \implies F \neq H$ . Por el teorema de la proyección (3.2.2)

$$H = F \oplus F^\perp$$

Elije  $z \in F^\perp \setminus \{0\}$ . Afirmamos que  $u = \overline{f(z)}z/|z|^2 \neq 0$  satisface  $f = \langle \cdot, u \rangle$ . Ya que

$$\begin{aligned} f(z)x - f(x)z &\in F \\ \implies f(z)x - f(x)z &\perp z \\ \langle f(z)x, z \rangle - \langle f(x)z, z \rangle &= 0 \\ \implies \left\langle x, \overline{f(z)}z \right\rangle &= f(x)|z|^2 \\ \implies f(x) &= \left\langle x, \frac{\overline{f(z)}z}{|z|^2} \right\rangle \end{aligned}$$

Entonces  $u \in H$  que satisface  $f = \langle \cdot, u \rangle$ . Es único: si tenemos  $u, u' \in H$

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, u \rangle = \langle x, u' \rangle \\ \implies \langle x, u - u' \rangle &= 0 \quad \forall x \in H \\ \implies u - u' &\in H^\perp = \{0\} \end{aligned}$$

■

### 3.4. Bases Ortonormales

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ . Un subconjunto  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es LI si  $\forall I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A$ ,



$$\sum_{i \in I} c_i v_i = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i \in I$$

$$\text{Gen}(\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \left\{ \sum_{i \in I} c_i u_i : I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A, c_i \in \mathbb{K} \right\}$$

**Definición 3.4.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es ortonormal (o.n.) si

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \delta \text{ de Kronecker}$$

Suponga que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es o.n.

$$F := \text{Gen}(\{e_i\}_i^n) \subseteq H$$

es un subespacio cerrado. Podemos definir  $P_F$

$$P_F x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i}_y$$

Es suficiente demostrar que  $x - y \perp F$ .

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, e_k \right\rangle = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\|P_F x\|^2 \leq \|x\|^2$$

Por Pitagoras

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x\|^2 \\ \implies &\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

**Proposición 3.4.1** (Desigualdad de Bessel). Sea  $S = \{e_\alpha\}_\alpha$  un conjunto o.n. Entonces,

$$\sum_{\alpha} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{\alpha} r_{\alpha} := \sup \left\{ \sum_{i \in I} r_i : I \subseteq A \right\}$$

*Demostración.* Utilizando  $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ , y tomando supremo. ■

**Consecuencias**  $\{\alpha : \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha \in A : |\langle x, e_\alpha \rangle| \geq \frac{1}{n}\}$  es **contable**: Si es infinito:  $|\langle x, e_{\alpha_k} \rangle|^2 > \frac{1}{n^2}, k = 1, \dots$ . Sumando suficientes términos superaríamos  $\|x\|^2$ , que no es posible por Bessel.

**Definición 3.4.2.**

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha \rangle$$

**coeficientes de Fourier** respecto a  $\{e_\alpha\}$

$$\sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

¿Cuándo tenemos igualdad?

**Teorema 3.4.2.** Sea  $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un subconjunto o.n. del espacio de Hilbert  $H$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

1.

$$\sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$$

2.  $\mathcal{B}$  es **maximal** en el sentido de:

Si  $x \in H$ , tal que  $x \perp e_\alpha, \forall \alpha \in A \implies x = 0$

3.  $\forall x \in H$ ,

$$x = \sum_{\alpha} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$$

donde la suma en el lado derecho tiene solo un número contable de términos no ceros y la suma de estos converge a  $x$  en  $\|\cdot\|$  independiente de su orden.

4.  $\text{Gen}(\mathcal{B})$  es denso en  $H$

**Definición 3.4.3.** Decimos que un conjunto  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  o.n. es una **base ortonormal** si satisface cualquiera de 1.-4.

*Demostración.* 2.  $\implies$  3. Sea  $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n}, \dots$  una enumeración de los  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$  para los cuales  $\hat{x}(\alpha) \neq 0$ . Por Bessel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(\alpha_k)|^2 &\leq \|x\|^2 < \infty \\ \implies \sum_{k=n}^m |\hat{x}(\alpha_k)|^2 &\xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Por Pitagoras,

$$\left\| \sum_{k=n}^m \langle x, e_{\alpha_k} \rangle e_{\alpha_k} \right\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n \hat{x}(\alpha_k) e_{\alpha_k}$ .  $\{S_n\}$  es Cauchy en  $H$

$$\implies S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \quad \text{en } H$$

Además

$$\begin{aligned} \langle x - S, e_\alpha \rangle &= \langle x, e_\alpha \rangle - \langle S, e_\alpha \rangle \\ &= \langle x, e_\alpha \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n, e_\alpha \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{cuando } \alpha \in \mathcal{J} \\ 0 & \text{cuando } \alpha \notin \mathcal{J} \end{cases} \implies x - S = 0 \implies x = S \end{aligned}$$

3.  $\implies$  1.: Por continuidad de la norma

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\hat{x}(\alpha_k)|^2 \\ &= \sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 \end{aligned}$$

1.  $\implies$  2.: obvio

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha} |\langle x, e_{\alpha} \rangle|^2 = 0 \implies x = 0$$

3.  $\implies$  4.: Si  $x \perp e_{\alpha}$ ,  $\forall \alpha$ ,

$$\begin{aligned} &\implies x \perp \text{Gen}(\{e_{\alpha}\}) \\ &\stackrel{\text{continuidad}}{\implies} x \perp \overline{\text{Gen}(\{e_{\alpha}\})} = H \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

■

**Ejemplo:**  $\ell^2$ ,  $e_k = \{(0, \dots, \underbrace{1}_k, 0, \dots)\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 = \sum |\langle x, e_i \rangle|^2$$

**Teorema 3.4.3.** *Todo espacio de Hilbert tiene una **base ortonormal**.*

*Demostración.* Utiliza el Lema de Zorn

■

**Definición 3.4.4.**  $X$  espacio métrico es **separable** si existe un subconjunto  $C \subseteq X$  contable y denso en  $X$ .

**Ejemplo:**  $\ell^p$ ,  $p \in [1, \infty)$  es separable.

$L^2([0, 1])$  es separable. Polinomios con coeficientes  $\in \mathbb{K} \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} C([0, 1]) \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} L^2([0, 1])$

**Seba** *Faltan los polinomios con coefs  $\in \mathbb{Q}$  cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .*

**Teorema 3.4.4.**  $H$  es separable si y solo si existe una **base ortonormal** para  $H$  que es **contable**. En este caso, toda base o.n. es contable.

*Demostración.*  $\implies$  :  $\{x_n\} \subseteq H$  es denso.  $x_1, \dots, x_n, \dots$  Descartando posiblemente términos, podemos asumir que  $x_1, \dots, x_n$  son LI  $\forall n \in \mathbb{N}$  y todos los descartados pertenecen a  $\text{Gen}(\{x_k\})$ . De esta manera,  $\text{Gen}(\{x_k\})$  es denso en  $H$ .

Por Gram-Schmidt producimos una sucesión  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  tal que,  $\text{Gen}(\{y_k\}_{k=1}^n) = \text{Gen}(\{x_k\}_{k=1}^n) \forall n \in \mathbb{N}$  y  $\mathcal{B} = \{y_k\}$  es un conjunto o.n.

$\mathcal{B}$  es o.n. y  $\text{Gen}(\mathcal{B}) = \text{Gen}(\{x_k\})$  es denso en  $H$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es una base ortonormal contable.

$\Leftarrow$  : Sea  $\{e_k\}_k$  una base o.n. contable.

$$G_n := \text{Gen}(\{e_k\}_{k=1}^n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}$$

$\Rightarrow$   $\text{Gen}(\{e_k\}_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  es denso en  $H$ .

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{G}_n \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

donde  $\hat{G}_n = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_k \in \mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}\}$

**Seba** *añadir cases en vola*

Sea  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  otra base o.n.

$$A_n = \left\{ \alpha \in \mathcal{A} : \left\langle \overbrace{x}^{e_n}, u_\alpha \right\rangle \neq 0 \right\} \text{ es contable}$$

Además, para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,

$$\langle u_\alpha, e_k \rangle \neq 0 \text{ para algún } k$$

por la maximalidad de la base  $\{e_n\}_n$  (que es contable). Entonces,  $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  es contable. ■

Vamos a demostrar que todo espacio de Hilbert separable es  $\ell^2 = \{\{x_k\} \in \mathbb{K}^n : \sum ||x_k|^2| < \infty\}$

**Definición 3.4.5.** Sean  $H_1, H_2$  dos espacios de Hilbert. Un **isomorfismo**  $T : H_1 \rightarrow H_2$  se llama **unitario** si

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{H_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \quad \forall x_1, x_2 \in H_1$$

$T$  unitario  $\Rightarrow T$  es una **isometría**:

$$||Tx||_{H_2}^2 = \langle Tx, Tx \rangle_{H_2} = \langle x, x \rangle_{H_1} = ||x||_{H_1}^2$$

**Teorema 3.4.5.** *Todo espacio de Hilbert separable es unitariamente isomorfo a  $\ell^2$ .*

*Demostración.* Sea  $\{e_n\}$  una base o.n. contable para  $H$ .

$$\begin{aligned} H &\rightarrow \ell^2 \\ x &\rightarrow \hat{x} = (\hat{x}(1), \hat{x}(2), \dots) \end{aligned}$$

donde  $\hat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle$ .

Por Parseval,

$$\|\hat{x}\|_{\ell^2}^2 = \sum_k |\hat{x}(k)|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

$$\implies \hat{x} \in \ell^2 \implies T \text{ es bien definido}$$

es lineal, inyectivo (por maximalidad), sobreyectivo: si  $c \in \ell^2$ ,  $\sum_{k=1}^n c_k e_k \xrightarrow{H} x_c$ , donde

$$\hat{x}_c(k) = \langle x_c, e_k \rangle = c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es una isometría: **Identidad de Parseval.**

$$\|Tx\|_{\ell^2}^2 = \|x\|_H^2$$

Identidad de Polarización:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

Por lo tanto,  $T$  preserva el producto interno:

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{\ell^2} = \langle x_1, x_2 \rangle_H$$

■

### 3.5. Series de Fourier

#### 3.5.1. Series de Fourier y convergencia

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica de período  $2\pi$ .

$F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{T}$  es el círculo unitario.

$$F(e^{i\theta}) = f(\theta)$$

$$\hookrightarrow \tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

con

$$\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$$

Vamos a asumir que  $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$

$$f \in L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles, periódicas-} 2\pi \text{ t.q. } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} = L^2([-\pi, \pi])$$

Definimos

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Proposición 3.5.1.**  $\{e_n\}$  es un conjunto ortonormal de  $L^2(\mathbb{T})$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n(x) \overline{e_m(x)} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2\pi} = 1 & n = m \\ \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$



**Definición 3.5.1.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Defina

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \langle f, e_n \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx\end{aligned}$$

coeficiente de Fourier.

$$f \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$$

serie de Fourier.

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

suma de Fourier parcial.

Preguntas:

1. ¿Converge  $S_N f$  a  $f$  en  $L^2$ ?
2. ¿Converge  $S_N f(x)$  a  $f(x)$  puntualmente?  
Si falla para algún  $x$ , ¿es este comportamiento raro o genérico?
3. ¿Converge  $S_N f$  a  $f$  en otras normas (e.g.  $L^p, p > 1$ )?

**Teorema 3.5.2.**  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

**Nota:** El enunciado  $\iff$ ,  $\mathcal{B} = \{e_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base o.n. para  $L^2(\mathbb{T})$

Entonces será suficiente demostrar que  $\mathcal{B}$  es maximal:

$$\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies f = 0$$



**Teorema 3.5.3.**  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Entonces,

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t) dt$$

donde

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{2N+1}{2\pi} & x = 0 \\ \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\pi \sin \frac{x}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} S_n f &= \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n(x) \\ &= \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\left( \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-t)} \right)}_{D_N(x-t)} f(t) dt \end{aligned}$$

donde

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} e^{inx}$$

Kernel de Dirichlet.

$$D_N(0) = \frac{2N+1}{2\pi}$$

Para  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2i \sin(N + \frac{1}{2})x}{2i \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$



**Nota:**  $D_N(x)$  es  $2\pi$ -periodico, par, suave y

$$\int_{\mathbb{T}} D_N(x) dx = 1$$

**Seba** *añadir foto del kernel de Dirichlet*

Es difícil demostrar directamente que  $S_N f(x) \rightarrow f(x)$  ( $D_N(x)$  cambia de signo y oscila muy rápidamente).

**Desvío** En lugar de demostrar que  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$  directamente, vamos a considerar la sucesión **media de Cesàro**

$$\sigma_N f = \frac{S_0 f + S_1 f + \cdots + S_{N-1} f}{N}$$

**Nota:**  $S_N f$  converge a  $f$ ,  $\sigma_N f$  converge a  $f$

**Teorema 3.5.4** (Fejér).

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$$

Cuando  $f \in C(\mathbb{T})$ ,

$$\sigma_N f \xrightarrow{\text{unif.}} f \text{ en } \mathbb{T}$$

Si  $\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\implies S_n f \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies \sigma_N f \equiv 0$$

$$\xrightarrow{\text{Fejér}} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f = 0 \implies \text{Maximalidad de } \mathcal{B}$$

**Proposición 3.5.5.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Entonces

$$\sigma_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-t)f(t) dt$$

donde

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}N & x = 0 \\ \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2 \frac{x}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

es el Kernel de Fejér.

*Demostración.*

$$\sigma_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f$$

$\downarrow$

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$$

$x = 0$

$$\begin{aligned} F_N(0) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\frac{1}{2\pi}(2n+1)}^{D_n(0)} \\ &= \frac{1}{2\pi} N \end{aligned}$$

$x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sin(n + \frac{1}{2})x \sin \frac{x}{2}}_{\frac{1}{2}(\cos(nx) - \cos((n+1)x))} \\ &= \frac{2}{\pi N} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \frac{1}{2} \underbrace{(\cos(0x) - \cos(Nx))}_{\sin^2 \frac{Nx}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

■

Propiedades de  $F_N(x)$

1.  $F_N(x) \geq 0$ , suave, periódico- $2\pi$ , par

2.

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(x) dx = 1$$

(como promedio de  $D_N(x)$ )

3.

$$|F_N(x)| \leq \frac{1}{2\pi N \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad \delta \leq |x| \leq \pi$$

**Seba** *añadir foto pero borrarla pa zapit*

**Notación**

$$S_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} D_N(x-t) f(t) dt = D_N * f$$

$$\sigma_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} F_N(x-t) f(t) dt = F_N * f$$

Convolución:  $f \in C(\mathbb{T})$ ,  $g \in L^1(\mathbb{T})$

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt$$

tomando  $\tau = x - t$

$$f * g(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tau) g(x-\tau) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) g(x-\tau) = g * f(x)$$

**Definición 3.5.2.**  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels en  $L^1(\mathbb{T})$  si

1.

$$\int_{\mathbb{T}} K_n(x) dx = 1$$

2.

$$\sup_n \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)| dx < \infty$$

3.

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \delta > 0$$

**Nota:**  $\{F_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels pero  $\{D_N\}$  **no** lo es. Veremos que 2. falla para el kernel de Dirichlet.

**Teorema 3.5.6.** Si  $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels en  $L^1(\mathbb{T})$  y  $f \in C(\mathbb{T})$ , entonces

$$K_N * f = f * K_N \rightarrow f$$

uniformemente en  $\mathbb{T}$

**Corolario 3.5.6.1.**

$$\sigma_N f \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{unif}} f \text{ para } f \in C(\mathbb{T})$$

*Demostración del teorema 3.5.6.*

$$\begin{aligned} K_n * f(x) - f(x) &= f * K_n(x) - f(x) \\ &= \int f(x-y) K_n(y) dy - f(x) \\ &= \int (f(x-y) - f(x)) K_n(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |K_n * f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy \\ &= \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy + \int_{|y| > \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{T}} |K_n(y)| dy + 2 \max_{\mathbb{T}} |f| \int_{|y| > \delta} |K_n(y)| dy \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

cuando  $n$  es suficientemente grande. ■

**Corolario 3.5.6.2.** Si  $f \in C(\mathbb{T})$  y  $\hat{f}(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \implies f \equiv 0$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \sigma_N f &\equiv 0 \\ \downarrow \text{unif} \\ f &\equiv 0 \end{aligned}$$



**Corolario 3.5.6.3.** *Suponga que  $f \in C(\mathbb{T})$  y su serie de Fourier converge absoluta y uniformemente, es decir:*

$$\sum_n |\hat{f}(n)e_n(x)| = \sum_n |\hat{f}(n)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \infty$$

*Entonces,*

$$S_N f \rightarrow f \text{ unif}$$

*Demostración.* Defina

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n(x) \in C(\mathbb{T})$$

por convergencia absoluta uniforme.

$$h(x) := g(x) - f(x)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \hat{g}(n) - \hat{f}(n) = \left\langle \sum_k \hat{f}(k)e_k(x), e_n(x) \right\rangle - \hat{f}(n) \\ &= \hat{f}(n) - \hat{f}(n) = 0 \end{aligned}$$

Se puede intercambiar la suma con la integral por convergencia uniforme y el corolario anterior, se concluye que  $h \equiv 0$ . ■

Tenemos la convergencia  $\sigma_N f \xrightarrow{\text{unif}} f$  para  $f \in C(\mathbb{T})$ . Queremos pasar a convergencia en  $L^2$ . Vamos a utilizar la **densidad** de  $C(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$ . Vamos a necesitar la estimación adicional:

**Proposición 3.5.7.**

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$$

*Demostración.*  $\sigma_N f = \frac{1}{N}(S_0 f + \cdots + S_{N-1} f)$

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|S_k f\|_{L^2}$$

Tenemos,

$$\|S_k f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \text{ (Bessel)}$$

$S_k f$  = proyección de  $f$  en  $\text{Gen}(\{e_l\}_{|l| \leq k})$

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} N \|f\|_{L^2}$$

■

De hecho, tenemos

**Proposición 3.5.8.** *Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , entonces*

$$\|\sigma_N f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$$

**Teorema 3.5.9.** *Sea  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Entonces,*

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^p} f$$

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ . Aproxime  $f \in L^p(\mathbb{T})$  con  $g \in C(\mathbb{T})$ :

$$\|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \sigma_N f - f &= \sigma_N g - g + \sigma_N(f - g) - (f - g) \\ \|\sigma_N f - f\|_{L^p} &\leq \|\sigma_N g - g\|_{L^p} + \|\sigma_N(f - g)\|_{L^p} + \|f - g\|_{L^p} \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

Podemos elegir  $N$  suficientemente grande, tal que

$$\|\underbrace{\sigma_N g - g}_h\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

por convergencia uniforme.

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^p} &= \left( \int_{\mathbb{T}} |h|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{T}} \varepsilon^p dx \right)^{1/p} = (2\pi)^{1/p} \varepsilon \end{aligned}$$



**Corolario 3.5.9.1.**

$$S_N f \xrightarrow{L^2} f$$

*Demostración.*

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$$



**Lema 3.5.10** (Riemann-Lebesgue).  $f \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ . Utilizaremos que

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^1} f$$

Podemos encontrar  $N$  suficientemente grande, tal que

$$\| \underbrace{f - \sigma_N f}_g \|_{L^1} \leq \varepsilon$$

$n > N$ ,

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) &= \hat{f}(n) - \widehat{\sigma_N f}(n) \xrightarrow{0} 0 \\ \Rightarrow |\hat{f}(n)| &= |\hat{g}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |g(x) e^{-inx}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |g| dx \leq \varepsilon / \sqrt{\pi} \end{aligned}$$



$$L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell_{\mathbb{Z}}^2 = \{(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty\}$$

$$f \rightarrow \hat{f} = (\dots, \hat{f}_{(-1)}, \hat{f}_{(0)}, \hat{f}_{(1)}, \dots)$$

es un isomorfismo unitario.



$$L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0 = \{(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) : \lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n = 0\}$$

$$f \rightarrow \hat{f}$$

**Teorema 3.5.11.**  $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0$  es lineal, acotado e inyectivo.

*Demostración.* lineal ✓

$$\|\hat{f}\|_{\ell^\infty} \leq ?$$

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)e^{-inx}| dx$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$$

por lo que  $\|\hat{f}\|_{\ell^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$

→ inyectivo? Suponga que  $\hat{f} = 0 \iff \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\sigma_N f \equiv 0$$

$$\downarrow L^1$$

$$f \equiv 0$$

pero  $\mathcal{F}$  no es sobreyectiva. Si  $\mathcal{F}$  fuera inyectivo, sería un isomorfismo continuo. Por teorema de aplicación abierta, tenemos que  $\mathcal{F}^{-1}$  es acotada:

$$\|\mathcal{F}^{-1} \hat{f}\|_{L^1} \leq c \|\hat{f}\|_\infty$$

$$\|f\|_{L^1} \leq c \|\hat{f}\|_\infty$$

Tomamos  $f(x) = D_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} e_n(x)$ .

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e_n, e_n \rangle \quad |n| \leq N$$

$$= 0 \quad |n| > N$$

$$\|\hat{f}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

**Proposición 3.5.12.**

$$\|D_N\|_{L^1} \geq C \log N$$

**Corolario 3.5.12.1.**  $f_N := D_N$  contradice  $\|f\|_{L^1} \leq c\|\hat{f}\|_\infty$

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \\ \|D_N\| &= \int_{-\infty}^{\infty} |D_N(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})x|}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ \|D_N\| &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{x} dx \end{aligned}$$

$$u = (N + \frac{1}{2})x$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{N\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u| du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \underbrace{\int_0^{\pi} |\sin u| dy}_{c'} \\ &= \frac{2c'}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq c \log N \end{aligned}$$

**Seba** *añadir align*

■

Vimos que  $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$ .

Q. ¿Converge  $S_n f \rightarrow f$  puntualmente?

A. ¡Generalmente no!

Q. ¿Converge  $S_N f \rightarrow f$  c.t.p? Es fácil ver (si conocemos teoría de integración) que existe una subsucesión

$$S_{N_k}f \rightarrow f \quad \text{c.t.p}$$

(dada la convergencia  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$ )

A. (Teorema de Carleson) Sí,  $S_n f \rightarrow f$  c.t.p (Difícil).

### 3.5.2. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Vieron en ayudantía un ejemplo de función  $f \in C(\mathbb{T})$  tal que

$$S_N f(0) \not\rightarrow f(0)$$

De hecho, este ejemplo es **genérico**

**Teorema 3.5.13.** *Para todo  $x \in \mathbb{T}$ , existe un conjunto genérico  $A_x \subseteq C(\mathbb{T})$  tal que*

$$\sup_N |S_N f(x)| = \infty$$

La demostración utiliza el marco del **principio de acotación uniforme**/Teorema de Banach-Steinhaus

**Teorema 3.5.14** (Banach-Steinhaus). *Sea  $X$  Banach,  $Y$  un espacio normado. Sean  $T_k \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $k \in I$ , no necesariamente contable. Entonces*

1. o  $\sup_k \|T_k\| < \infty$
2. o  $\sup_k \|T_k x\| = \infty$  para todo  $x \in A$ , donde  $A \subseteq X$  es un subconjunto genérico  $G_\delta$ .

**Seba** cambiar enumerate a letras a., b.

**Nota:** Si  $\sup_k \|T_k x\| < \infty \forall x \in X$ , entonces  $\|T_k\|$  son uniformemente acotadas.

**Corolario 3.5.14.1.** *Sean  $X$  Banach,  $Y$  normado. Sean  $T_k \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Suponga que  $\forall x \in X$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k x =: Tx \quad \text{existe}$$

Entonces,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  y

$$\|T\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T_k\| < \infty$$

*Demostración.*  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k x = Tx$ .

$$\implies \forall x \in X \quad \sup_k \|T_k x\| < \infty$$

(sucesión que converge es acotada)

$$\implies \sup_k \|T_k\| < \infty$$

Que  $T$  es lineal, fácil ✓

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} T_k x \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_k x\| \\ &= \sup_n \inf_{k \geq n} \|T_k x\| \leq \left( \sup_n \inf_{k \geq n} \|T_k\| \right) \|x\| = \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T_k\| \right) \|x\| \end{aligned}$$

**Seba** *añadir align* ■

*Demostración del teorema de Banach-Steinhaus (3.5.14).* Defina  $\psi(x) := \sup_k \|T_k x\|$ .

$$U_n = \{x \in X : \psi(x) > n\} = \bigcup_k \underbrace{\{\|T_k x\| > n\}}_{\text{abierto pues } T_k \text{ es continuo}}$$

Tenemos 2 posibilidades:

1. Si todos los  $U_n$ 's son densos en  $X$ ,

$$\implies A := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \quad \text{es genérico, } G_\delta$$

$$\forall x \in A, \psi(x) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies \psi(x) = \infty \quad (\text{caso } b.)$$

2. Si unos de los  $U_n$ 's **no** es denso, entonces  $U_m^c$  contiene una bola  $B = B_r(a)$ .

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq m \quad \forall x \in B_r(a) \\ \implies \|T_k x\| &\leq m \quad \forall x \in B_r(a), \forall k \\ \implies \|T_k(a+y)\| &\leq m \quad \forall y \in B_r(0), \forall k \end{aligned}$$

$$\forall y \in B_r(0)$$

$$\begin{aligned} \|T_k y\| &\leq \|T_k a\| + \|T_k(y - a)\| \\ &= \|T_k a\| + \|T_k(a - y)\| \\ &\leq m + m = 2m \end{aligned}$$

$$\implies \|T_k y\| \leq \frac{2m}{r} \|y\| \quad \forall y \in X, \forall k$$

■

*Demostración del teorema 3.5.13.* Será suficiente demostrar el teorema para  $x = 0$ . Aplicaremos el principio de acotación uniforme (Banach-Steinhaus) a

$$\begin{aligned} S_N^0 : C(\mathbb{T}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\rightarrow S_n f(0) \end{aligned}$$

Estaremos listos cuando probemos que

$$\sup_N \|S_N^0\| = \infty$$

$\iff$  estamos en la alternativa  $b$ .

$$\implies \sup_N |S_N f(0)| = \infty \forall f \in A, A \stackrel{gen.}{\subseteq} C(\mathbb{T})$$

Recordando que  $(S_N f(x) = D_N * f(x))$

$$\begin{aligned} S_N^{(0)} &= S_N f(0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(0 - y) f(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(y) dy \\ \implies |S_N f(0)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)| \cdot |f(y)| dy \leq \|D_N\|_{L^1} \|f\|_{\infty} \\ \implies \|S_N^0\| &\leq \|D_N\|_{L^1} \end{aligned}$$

Pero, de hecho, afirmamos que

$$\|S_N^0\| = \|D_N\|_{L^1}$$

Noten que cuando ponemos  $f(y) = \operatorname{sgn} D_N(y)$

$$S_N f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) \operatorname{sgn} D_N(y) dy = \|D_N\|_{L^1}$$

$f = \operatorname{sgn} D_N \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\implies$  podemos encontrar  $f_k \in C(\mathbb{T})$ :

$$\|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$S_N f_k(0) = \int D_N(y)(f_k - f)(y) dy + \underbrace{\int D_N(y)f(y) dy}_{\|D_N\|_{L^1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|D_N\|_{L^1}$$

mientras

$$\left| \int D_N(y)(f_k - f)(y) dy \right| \leq \max_{\mathbb{T}} |D_N| \|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

■

### 3.6. Repaso/Crash course en teoría de la medida

$\Omega = \{M_1, \dots, M_{100}\}$  pila de monedas.  $V : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ . En el caso de Chile tenemos  $\operatorname{Im} V = \{1, 5, 10, 50, 100, 500\}$ . Queremos calcular el valor total de la pila de monedas. Hay 2 métodos:

1. Dividimos la pila en grupos de digamos 10 monedas:  $M_1, \dots, M_{10}$  y así sucesivamente. Luego, sumamos los valores de cada grupo y sumamos los resultados. Esto corresponde con la integral de Riemann
2. Dividimos las monedas en grupos de acuerdo al valor

$$E_1 = \{M \in \Omega : V(M) = \alpha_1\}$$

$$E_2 = \{M \in \Omega : V(m) = \alpha_2\}$$

$\vdots$

$$E_N$$

Luego,  $S = \sum_{k=1}^N \alpha_k(\#E_k)$ . Esto corresponde con la integral de Lebesgue.

### 3.6.1. Espacios de medida y funciones medibles

**Definición 3.6.1** (Espacio de medida). un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ .

**Definición 3.6.2** ( $\sigma$ -álgebra). Una colección  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra si

1.  $\Omega \in \mathcal{M}$
2.  $E \in \mathcal{M} \implies E^c := \Omega \setminus E \in \mathcal{M}$
3.  $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{M} \implies \bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{M}$

Podemos ver que  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ,  $\bigcap_k E_k \in \mathcal{M}$  si  $\forall E_k \in \mathcal{M}$  y  $E \setminus F \in \mathcal{M}$  si  $E, F \in \mathcal{M}$ .

**Ejemplo:**  $\Omega = \{a, b\}$ ,

$$\mathcal{M}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

son  $\sigma$ -álgebras.

**Ejemplo:** Si  $\Omega$  es un espacio métrico (topológico más general).

$$\mathcal{B}_\Omega \rightarrow \sigma\text{-álgebra de Borel}$$

definida como la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los abiertos de  $\Omega$ .

**Definición 3.6.3.** Una medida  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  que satisface:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\{E_k\}_{k=1}^\infty$  de conjuntos en  $\mathcal{M}$  mutuamente disjuntos,

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^\infty E_k \right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$$

Esto se llama  $\sigma$ -aditividad

Las siguientes propiedades son consecuencias fáciles de la definición:

1. (Aditividad finita)

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^N E_k \right) = \sum_{k=1}^N \mu(E_k)$$

2. Si  $A, B \in \mathcal{M}$  y  $A \subseteq B$

$$\implies \mu(B) = \mu(A \cup B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

3. (subaditividad) Si  $\{E_k\} \subseteq \mathcal{M}$ , no necesariamente disjuntos,

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

4.  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{k+1} \subseteq \cdots$ , sucesión creciente de medibles,

$$E = \bigcup_k E_k, E_k \uparrow E$$

$$\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$$

5.  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \downarrow E$$

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_k)$$

si  $\mu(E_1) < \infty$

**Ejemplo:**  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ,

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} \mu_n \leftarrow \text{pesos} \in [0, \infty)$$

Cuando todos los  $\mu_n \equiv 1$ ,  $\mu$  es la medida de contar.



**Teorema 3.6.1.** *Existe una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y*

$$|\cdot| : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$$

*con las siguientes propiedades:*

1.  $\mathcal{M}$  contiene todos los abiertos ( $\supseteq B_{\mathbb{R}^n}$ )
2.  $|B| = \text{Vol}(B)$  para toda la bola abierta  $B \subseteq \mathbb{R}^n$
3. (completitud) Si  $A \subseteq B$ , donde  $B \in \mathcal{M}$  y  $|B| = 0$ , entonces  $A \in \mathcal{M}$  y  $|A| = 0$ .

Conjuntos de medida 0 = conjuntos **despreciables**.

**Notación:** Una propiedad se cumple para x.c.t.p (en casi todas partes) si se cumple para todo  $x \in E^c$  donde  $E$  es despreciable.

**La medida producto** :  $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$  y  $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ . Existe una única medida  $\mu : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \rightarrow [0, \infty]$  donde  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 :=$  la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los  $E_1 \times E_2$  con  $E_1 \in \mathcal{M}_1, E_2 \in \mathcal{M}_2$  tal que

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

**Ejemplo:**  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, |\cdot| = \lambda_n)$  y  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}, |\cdot| = \lambda_m)$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$$

$$\lambda := \lambda_n \times \lambda_m = \lambda_{m+n}$$

que es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^{m+n}$ .

**Definición 3.6.4.**  $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  es **medible** si  $\{x \in \Omega : f(x) > r\} \in \mathcal{M} \quad \forall r \in [-\infty, \infty]$

$$\iff f^{-1}(I) \in \mathcal{M} \quad \forall I \subseteq [-\infty, \infty]$$

$$\iff f^{-1}(O) \in \mathcal{M} \quad \forall O \subseteq^{ab} [-\infty, \infty]$$

Esta clase de funciones con valores reales es cerrada bajo las operaciones usuales:  $+$ ,  $\times$  y tomar  $\sup_k, \inf_k, \limsup_k, \liminf_k$ . Si  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  sucesión de funciones medibles, entonces  $\sup_k f_k, \inf_k f_k, \liminf_k f_k, \limsup_k f_k$  son medibles.

**Ejemplo:** La funciones simples

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$$

De hecho toda función medible es límite de funciones simples  $s_n(x)$  tal que

$$|s_n(x)| \nearrow |f(x)|$$

Descomponemos  $f = f^+ - f^-$ ,

$$0 \leq f^+ = \max\{f, 0\}$$

$$0 \leq f^- = \max\{-f, 0\}$$

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Cuando  $f \geq 0$  es medible, podemos aproximarla con

$$s_n(x) = n \chi_{\{f > n\}} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}}$$

$$s_n(x) \nearrow f(x), \quad n \rightarrow \infty$$

### 3.6.2. La integral de Lebesgue

#### Funciones simples

$$\int_{\Omega} s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$$

donde  $s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$

#### Funciones medibles

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f \right\}$$

#### Propiedades

1.

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

2.

$$\int c f \, d\mu = c \int f \, d\mu, \quad c \geq 0$$

3.

$$\int f d\mu = 0 \iff f \equiv 0 \quad \text{c.t.p.}$$

4.

$$\int f d\mu < \infty \implies f < \infty \quad \text{c.t.p.}$$

### Propiedades de convergencia

1. Teorema de Convergencia Monotona:

$$0 \leq f_n \nearrow f \quad \text{c.t.p.} \implies \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

2. Lema de Fatou:

$$f_n \geq 0 \quad \int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n$$

**Funciones reales**  $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ ,  $f = f^+ - f^-$

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

si uno de estos dos términos  $< \infty$ .

Cuando ambos son finitos,

$$\iff \int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty$$

decimos que  $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$  es integrable.

En  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , la integral es un funcional lineal (POS) que es  $\geq 0$  cuando  $f \geq 0$ . Como consecuencia, para  $f, g \in \mathcal{L}^1$ :

1.

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

cuando  $f \geq g$  c.t.p.

2.

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

3.

$$|f| < \infty \quad \text{c.t.p.}$$

### Funciones complejas

**Definición 3.6.5.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es medible si  $u := \operatorname{Re} f$ ,  $v := \operatorname{Im} f$  son medibles.

$$\int f d\mu := \int u d\mu + i \int v d\mu$$

**Definición 3.6.6.**  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$  si  $|f|$  es integrable  $\iff u, v \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ .

**Teorema 3.6.2** (Convergencia Dominada).  $f_n \rightarrow f$  c.t.p. y  $|f_n| \leq g$  c.t.p. donde  $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ , entonces

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$$

De hecho,

$$\int |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Teorema 3.6.3** (Tonelli).  $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$  espacio de medida  $\sigma$ -finitos.  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mu = \mu_1 \times \mu_2)$ . Sea  $f(x, y)$   $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ -medible y no negativa. Entonces, denotando  $f^y(x) = f(x, y)$  para  $y$  fijo es una función en  $\Omega_1$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  para  $x$  fijo es una función en  $\Omega_2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f^y(x) d\mu_1(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f_x(y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \end{aligned}$$

donde toda función integrada es medible en el espacio correspondiente.

**Teorema 3.6.4** (Fubini). *Es posible cambiar el orden de integración cuando  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f^y(x) \, d\mu_1(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f_x(y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \end{aligned}$$

### 3.7. Espacios de Lebesgue $L^p$

#### 3.7.1. Espacios $L^p$

Defina:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty) \\ \|f\|_{\infty} &:= \inf \{ M > 0 : |f| \leq M \text{ c.t.p.} \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \{ \text{funciones medibles} : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_p < \infty \}$$

**Proposición 3.7.1.**  $\|\cdot\|_p$  es una **semi-norma** en  $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ . Además,

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ c.t.p.}$$

**Corolario 3.7.1.1.**  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mu) = \{f = 0 \text{ c.t.p.}\}$ . Entonces,

$$L_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) / \mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\mu)$$

es un espacio **normado** con norma  $\|\cdot\|_p$ .

*Demostración de la proposición 3.7.1.*  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ .

Desigualdad triangular = desigualdad de Minkowski

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

( $p = 1, \infty$  es obvio) ■

**Teorema 3.7.2** (Desigualdad de Hölder).

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y  $p, q \in [1, \infty]$

*Demostración.* Podemos asumir que

$$0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$$

$p = 1, q = \infty$ .  $0 < \|f\|_1 < \infty, 0 < \|g\|_\infty < \infty$ .

$$\begin{aligned} \int |fg| d\mu &\leq \int (|f| d\mu) \|g\|_\infty \\ &\leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty \quad \text{c.t.p.} = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Para los demás,  $1 < p, q < \infty$ . Podemos asumir  $\|f\|_p = 1, \|g\|_q = 1$  y será suficiente demostrar

$$\int |fg| d\mu \leq 1$$

Aplicamos Young (lo que viene después) a  $a = |f|, b = |g|$

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

$$\int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int |f|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int |g|^q}_{=1}$$

■

**Teorema 3.7.3** (Desigualdad de Young).  $0 \leq a, b \leq \infty$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad 1 < p, q < \infty$$

*Demostración.* Podemos asumir  $a, b > 0$ .

$$ab = e^{\log(ab)} = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q)}$$

$$e^{sx + (1-s)y} \leq se^x + (1-s)e^y \quad (\text{convexidad de } e^x)$$

por lo que

$$\leq \frac{1}{p} e^{\log(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\log(b^q)}$$

■

*Desigualdad de Minkowski.* en  $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} |f + g|^p &= |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ &\leq |f| \cdot |f + g|^{p-1} + |g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ \int |f + g|^p d\mu &\leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.7.4** (Riesz-Fischer).  $L^p(\mu)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.*  $f_k \in L^p(\mu)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Queremos demostrar que si

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p &=: M < \infty \\ \implies \sum_{k=1}^n f_k &\xrightarrow{L^p} F \in L^p \end{aligned}$$

$p = \infty$  (ejercicio). Sea  $p \in [1, \infty)$

$$G_n(x) := \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \quad \text{medible, } \geq 0 \nearrow_{n \rightarrow \infty} G(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

Por teorema de convergencia monotonía,

$$\int G(x)^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int G_n(x)^p d\mu$$

$$\left( \int G_n(x)^p d\mu \right) = \|G_n\|_p^p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \leq M^p$$

por Minkowski.

$$\implies \int G(x)^p d\mu \leq M^p$$

$$\implies G^p \in L^1 \quad (G \in L^p)$$

En particular,  $0 \leq G^p(x) < \infty \quad \mu - \text{c.t.p.}$

$$\implies G(x) < \infty \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

es decir,  $\mu - \text{c.t.p.}$ ,  $\sum |f_k(x)|$  converge. Defina

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) & x \text{ tal que } G(x) < \infty \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$F$  es medible y  $F \in L^p(\mu)$  pues

$$|F(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = G(x) \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies |F(x)|^p \leq G(x)^p \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies \int |F(x)|^p \leq \int G(x)^p < \infty$$

Falta establecer la convergencia en  $L^p$ :



$$\left\| F - \sum_{k=1}^N f_k \right\|_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\left| F - \sum_{k=1}^n f_k \right|(x) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k|(x) \leq G(x) \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies \left| F - \sum_{k=1}^N f_k \right|^p \leq G^p \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Por definición de  $F$ ,

$$\left| F - \sum_{k=1}^N f_k \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Por el teorema de convergencia dominada

$$\int \left| F - \sum_{k=1}^N f_k \right|^p d\mu \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int 0 d\mu = 0$$

■

### 3.7.2. Los espacios $L^p$ y dualidad

$1 \leq p \leq \infty$ ,  $q \rightarrow$  exponente dual:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$p = 1 \rightarrow q = \infty$$

$$p = 2 \rightarrow q = 2$$

$$p = \infty \rightarrow q = 1$$

Se puede definir un **emparejamiento** entre  $L^p$  y  $L^q$ .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^p(\mu) \times L^q(\mu) \rightarrow \mathbb{K}$$

$$f, g \rightarrow \langle f, g \rangle := \int f g d\mu$$

es bien definido:

$$f \in L^p, g \in L^q \implies |fg| \in L^1$$

$$\begin{aligned}
\left( \int |fg| d\mu \right) &\leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty \\
&\implies fg \in L^1 \\
\implies |\langle f, g \rangle| &= \left| \int fg \right| \leq \int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q
\end{aligned}$$

Debido a esto podemos definir  $\ell_g \in (L^p)^*$

$$\begin{aligned}
\ell_g : L^p(\mu) &\rightarrow \mathbb{K} \\
f &\rightarrow \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

es lineal y acotado con

$$\|\ell_g\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_q$$

De esta manera tenemos una aplicación

$$\begin{aligned}
\phi : L^q(\mu) &\rightarrow [L^p(\mu)]^* \\
g &\rightarrow \ell_g
\end{aligned}$$

$\phi$  es lineal, acotada e inyectiva ( $\ell_g = 0 \implies g = 0$ ).

### 3.7.3. Teorema de Representación de Riesz

**Teorema 3.7.5.** Sea  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$   $\sigma$ -finito. Sea  $1 \leq p < \infty$ .  
Entonces  $\phi$  es un **isomorfismo isométrico**:

$$\begin{aligned}
&\forall \ell \in (L^p(\mu))^*, \exists! g \in L^q(\mu) \text{ tal que } \ell(f) = \langle f, g \rangle \quad \forall f \in L^p \\
&\text{con } \|\ell\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q.
\end{aligned}$$

**Nota:** 1. Incluye el caso  $p = 2$  (Espacio de Hilbert).  
2.  $\Omega : \mathbb{N}, \mu = \text{medida de contar}$

$$L^p(\mu) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : \left( \sum |f_k|^p \right)^{1/p} < \infty\} = \ell^p$$

3. El teorema dice que

$$(\ell^p)^* \simeq \ell^q \quad p \in [1, \infty)$$

4.  $p = \infty$ :  $(L^\infty)^* \not\simeq L^1$

$$\phi : L^1 \not\rightarrow (L^\infty)^* \quad \text{no es sobreyectiva}$$

La demostración requiere la herramienta del Teorema de Radon-Nikodym.

**Definición 3.7.1.**  $(\Omega, \mathcal{M})$  y medidas  $\mu, \nu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ . Decimos que  $\nu$  es **absolutamente continua** respecto a  $\mu$  si

$$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$$

y escribimos  $\nu \ll \mu$ .

**Ejemplo:** Si  $h \geq 0, h \in L^1(\mu)$  podemos definir  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$

$$\nu(E) := \int h \chi_E d\mu =: \int_E h d\mu$$

$\nu$  es una medida.

$$“d\nu = h d\mu” \quad h \text{ es densidad}$$

$\nu \ll \mu$  pues  $\mu(E) = 0$

$$\implies \nu(E) = \int h \chi_E d\mu = 0$$

**Teorema 3.7.6** (Radon-Nikodym). Sean  $\mu$  y  $\nu$  medidas en  $(\Omega, \mathcal{M})$   $\sigma$ -finitas. Si  $\nu \ll \mu$ , entonces  $\exists! h \geq 0$  medible tal que  $\nu(E) = \int_E h d\mu$ .  
( $h$  es única  $\mu$ -c.t.p.)

$(d\nu = h d\mu)$ ,  $h = [\frac{d\nu}{d\mu}]$  derivada de Radon-Nikodym.

*Demostración.* **Unicidad:**

$$\int h_1 \chi_E d\mu = \int h_2 \chi_E d\mu = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

$$\int (h_1 - h_2) \chi_E d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

$$E = \{h_1 > h_2\}$$

$$0 = \int_{\{h_1 - h_2 > 0\}} (h_1 - h_2) d\mu \implies \mu(\{h_1 > h_2\}) = 0 \implies \mu(\{h_1 \neq h_2\}) = 0 \implies h_1 = h_2 \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

**Existencia:** (argumento de Von Neumann) que utiliza el Teorema de Representación de Riesz en  $L^2$ .

idea:  $\lambda = \mu + \nu$ . Suponga que  $\mu(\Omega), \nu(\Omega) < \infty$

$$\mu(E) = 0 \iff \lambda(E) = 0$$

Vamos a definir un funcional lineal acotado

$$\begin{aligned} \ell : L^2_{\mathbb{R}}(\lambda) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \int f d\mu \end{aligned}$$

$\ell$  es obviamente lineal y acotado:

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu \right| &\leq \int |f| d\mu \\ &= \int |f| \cdot 1 d\mu \\ &\leq \int |f| \cdot 1 d\lambda \\ &\leq \|f\|_{L^2(\lambda)} \underbrace{\|1\|_{L^2(\lambda)}}_{[\lambda(\Omega)]^{1/2}} \end{aligned}$$

Es decir,  $|\ell(f)| \leq (\lambda(\Omega))^{1/2} \|f\|_{L^2(\lambda)}$

Por Teorema de Representación de Riesz:

$$\ell(f) = \int f g d\lambda, \quad g \in L^2(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu &= \int f g d\lambda \\ &= \int f g d\mu + \int f g d\nu \\ \int f(1-g) d\mu &= \int f g d\nu \quad \forall f \in L^2(\lambda) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Formalmente “ $(1-g) d\mu = g d\nu$ ”  $\implies$  “ $h = \frac{1-g}{g}$ ”.

Primero vamos a demostrar que

$$0 < g \leq 1 \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$(a) \quad F := \{g \leq 0\}$$

$$\mu(F) = \int \chi_F d\mu \leq \int \chi_F(1-g) d\mu$$

por (3.1),

$$\begin{aligned} &= \int \chi_F g d\nu \leq 0 \\ &\implies \mu(F) = 0 \end{aligned}$$

$$(b) \quad G := \{g > 1\}. \text{ Suponga que } \mu(G) > 0$$

$$\begin{aligned} 0 > \int_G (1-g) d\mu &= \int (1-g) \chi_G d\mu \\ &= \int (1-g) \chi_G d\nu \\ &= \int_G g d\nu \geq 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

$g \in L^2(\lambda)$ . Podemos elegir representante  $g$ , tal que  $0 < g \leq 1$  en  $\Omega$ . Definimos

$$h := \frac{1-g}{g} \geq 0 \quad \text{en } \Omega$$

Tome  $A \in \mathcal{M}$ ,  $f_n = \chi_{\{A \cap g \geq \frac{1}{n}\}}/g \in L^2(\lambda)$ . Ponemos  $f_n$  en (3,1):

$$\int f_n(1-g) d\mu = \int f_n g d\nu$$

$x \in \{g < \frac{1}{n}\}, f_n = 0$ .  $x \in \{g \geq \frac{1}{n}\}, f_n \leq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ .  $\implies f_n$  es acotada.  $\implies f \in L^2(\lambda)$ .

$$\int \frac{1-g}{g} \chi_{A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\}} d\mu = \int n \chi_{A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\}} d\nu$$

$$A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\} \nearrow A$$

Tomando  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ , por Teorema de Convergencia Monótona obtenemos

$$\int h \chi_A d\mu = \int \chi_A d\nu$$

Ahora suponga que  $\mu, \nu$  son  $\sigma$ -finitas: existe  $\Omega_n \nearrow \Omega$ , tales que

$$\mu(\Omega_n), \nu(\Omega_n) < \infty$$

Aplicaremos el resultado a  $(\Omega_n, \mathcal{M}, \mu$  y  $\nu|_{\Omega_n})$ .  $\mathcal{M}_n = \{E \cap \Omega_n : E \in \mathcal{M}\}$ .

$$\nu(A) = \int h_n \chi_A d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$$

para alguna  $h_n \geq 0$  y  $\mathcal{M}_n$ -medible.

$$= \int h_{n+1} \chi_A d\mu$$

por unicidad

$$h_{n+1}|_{\Omega_n} = h_n \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Extienda cada  $h_n$  por 0 fuera de  $\Omega_n$ . De esta manera  $h_n$  es  $\mathcal{M}$ -medible. Defina  $h := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$

$$h_n \nearrow h$$

Para todo  $E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\Omega_n \cap E) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_n} h_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_n} h d\mu \\ &= \int_E h d\mu \end{aligned}$$

■

Necesitaremos también el siguiente resultado:

**Definición 3.7.2.**  $\ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$  es **positivo** si  $\ell(f) \geq 0 \quad \forall f \in L_{\mathbb{R}}^p, f \geq 0$

**Teorema 3.7.7.** Sea  $\ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Entonces

$$\ell = \ell_+ - \ell_-$$

$\ell_{\pm} \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$  son positivos.

*Demostración.* Sea  $\ell \in (L^p)^*$ .

1. Definiremos  $\ell_+$  para  $f \geq 0$ .

$$\ell_+(f) := \sup_{0 \leq g \leq f} \ell(g)$$

Obviamente,  $\ell_+(cf) = c\ell_+(f)$ ,  $c \geq 0$ . Probemos la aditividad:

$$\ell_+(f_1 + f_2) = \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \geq 0 \text{ en } L^p$$

$$\underbrace{\ell(g_1 + g_2)}_g = \ell(g_1) + \ell(g_2)$$

Si  $0 \leq g_1 \leq f_1$ ,  $0 \leq g_2 \leq f_2$

$$\implies g = g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$$

$$\sup_{0 \leq g \leq f_1 + f_2} \ell(g) \geq \ell(g_1) + \ell(g_2)$$

Tomando sup sobre  $0 \leq g_1 \leq f_1$ ,  $0 \leq g_2 \leq f_2$

$$\ell_+(f_1 + f_2) \geq \ell(f_1) + \ell(f_2)$$

Para demostrar la otra, notamos que cada  $0 \leq g \leq f_1 + f_2$  se puede escribir

$$g = g_1 + g_2$$

donde  $g_1 := \min(g, f_1) \leq f_1$ ,  $g_2 := g - g_1 \leq f_2$ .

$$\begin{aligned} \ell(g) &\leq \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2) \\ \implies \ell_+(f) &\leq \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2) \end{aligned}$$

2. Extendemos  $\ell_+$  a toda  $f \in L^p$ .

$$f = f_+ - f_-$$

Definimos  $\ell_+(f) = \ell_+(f_+) - \ell_+(f_-)$ .

Esta definición no depende de como descomponemos  $f$  como diferencia de 2 funciones no negativas.

$$\begin{aligned} f = f_+ - f_- = f_1 - f_2 &\implies f_+ f_2 = f_1 + f_- \\ \implies \ell_+(f_1 + f_2) &= \ell_+(f_1 + f_-) \\ \implies \ell_+(f_+) + \ell_+(f_2) &= \ell_+(f_1) + \ell_+(f_-) \\ \implies \ell_+(f_+) - \ell_+(f_-) &= \ell_+(f_1) - \ell_+(f_2) \end{aligned}$$

3. Por lo tanto,  $\ell_+$  es **lineal**

$$\begin{aligned} \ell_+(cf) &= c\ell_+(f) \quad \forall c \geq 0 \\ \ell_+(-cf) &= \ell_+(c(-f)) = c\ell_+(-f) = -c\ell_+(f) \\ \implies \ell_+(-f) &= \ell_+(f_-) - \ell_+(f_+) = -\ell_+(f) \end{aligned}$$



$\ell_+$  es acotado.

$$\begin{aligned}
 |\ell_+(f)| &= |\ell_+(f_+) - \ell_+(f_-)| \\
 &\leq |\ell_+(f_+)| + |\ell_+(f_-)| \\
 &\leq \|\ell\| \cdot \|f_+\|_{L^p} + \|\ell\| \cdot \|f_-\|_{L^p} \\
 &\leq 2\|\ell\| \cdot \|f\|_{L^p}
 \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 \ell_+(f) &\leq \sup_{0 \leq g \leq f} \|\ell\| \cdot \|g\|_{L^p} \\
 &\leq \|\ell\| \cdot \|f\|_{L^p}
 \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned}
 \ell_- &:= \ell_+ - \ell \\
 \implies \ell &\in (L_{\mathbb{R}}^p)^*
 \end{aligned}$$

$\ell_-$  es positiva pues  $\forall f \geq 0, f \in L^p$ .

$$\begin{aligned}
 \ell_-(f) &= \ell_+(f) - \ell(f) \geq 0 \\
 &= \sup\{\ell(g) : 0 \leq g \leq f\} - \ell(f) \geq 0
 \end{aligned}$$

■

*Demostración del Teorema de Riesz (3.7.5).*  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$  y positivo. Supondremos que  $\mu(\Omega) < \infty$ . Definimos

$$\begin{aligned}
 \nu : \mathcal{M} &\rightarrow [0, \infty) \\
 A &\rightarrow \ell(\chi_A)
 \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\nu$  es una medida finita.

(a)  $\nu \geq 0$

$$\nu(\Omega) \leq \|\ell\| \cdot \|\chi_{\Omega}\|_{L^p} = \|\ell\| \left( \int_{\Omega} 1^p d\mu \right)^{1/p} = \|\ell\| (\mu(\Omega)^{1/p}) < \infty$$

(b)  $\nu(\emptyset) = 0$

(c) Si  $E = \biguplus E_k$ ,  $\chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k} \nearrow \chi_E$

$$0 \leq |\chi_E - \chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k}|^p \leq \chi_E^p \in L^1$$

Por Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} &\implies \chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k} \xrightarrow{L^p} \chi_E \\ \implies \ell(\chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k}) &\rightarrow \ell(\chi_E) \iff \sum_{k=1}^N \ell(\chi_{E_k}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ell(\chi_E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \ell(\chi_E) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \ell(\chi_{E_k}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \nu(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) \end{aligned}$$

Además,  $\nu \ll \mu$

$$\nu(A) \leq \|\ell\| \mu(A)^{1/p}$$

Si  $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$  Por el teorema de Radon-Nikodym,

$$\ell(\chi_A) = \nu(A) = \int \chi_A h d\mu$$

para una  $h \geq 0$ . Tomando combinaciones lineales finitas de  $\chi_A$ 's:

$$\ell(s) = \int s h d\mu$$

para toda función simple  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora, cada función  $f \geq 0$  no negativa

$$0 \leq s_n \leq f, \quad s_n \nearrow f$$

Por Teorema de Convergencia Dominada,

$$\implies s_n \xrightarrow{L^p} f$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n h \, d\mu \\ &= \int f h \, d\mu \end{aligned}$$

Cuando  $\mu$  es  $\sigma$ -finita,

$$\Omega = \bigsqcup_n \Omega_n, \quad \mu(\Omega_n) < \infty$$

En cada  $\Omega_n$ , tenemos  $h_n \geq 0$ , tal que

$$\ell(f\chi_{\Omega_n}) = \int f\chi_{\Omega_n} h_n \, d\mu \quad \forall f \geq 0, f \in L^p$$

Extienda  $h_n$  por 0 fuera de  $\Omega_n$ . Tenemos que

$$\sum_{n=1}^N f\chi_{\Omega_n} \xrightarrow{L^p} f$$

por lo que

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \ell\left(\sum_{n=1}^N f\chi_{\Omega_n}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int f\chi_{\Omega_n} h_n \, d\mu \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int \Omega f h_n \, d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int f \sum_{n=1}^N h_n \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} f h \, d\mu \end{aligned}$$

donde  $h := \sum_{n=1}^{\infty} h_n$ . En particular,

$$fh \in L^1(\mu)$$

Tomaremos ahora un  $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$  con signo arbitrario.  $\ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$  y positivo

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \ell(f_+ - f_-) \\ &= \ell(f_+) - \ell(f_-) \\ &= \int f_+ h - \int f_- h = \int fh \, d\mu \end{aligned}$$

$$f \in L^p \implies |f| \in L^p, |f| \geq 0$$

$$\implies \ell(|f|) = \int |f|h \, d\mu \implies |f|h \in L^1$$

Por lo tanto,  $f_{\pm}h \in L^1$

$$\int (f_+ - f_-)g = \int f_+h - \int f_-h = \int f_+h - \int f_-h$$

Si  $\ell \in (L^p)^*$ , lo expresamos como diferencia de 2 funcionales positivos:

$$\ell = \ell_+ - \ell_-$$

cada una con su  $h_{\pm}$  correspondiente,  $h := h_+ - h_-$

$$\begin{aligned} &\forall f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu), fh_{\pm} \in L^1 \\ \implies fh &= fh_+ - fh_- \in L^1 \\ \implies \ell(f) &= \ell_+(f) - \ell_-(f) = \int fh_+ - \int fh_- = \int fh \end{aligned}$$

En esta etapa hemos demostrado que  $\forall \ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$  se puede escribir como

$$\ell(f) = \int fh \, d\mu$$

para alguna  $h$  medible donde  $fh \in L^1$ .

Para extender al caso complejo, noten que si  $\ell \in (L_{\mathbb{C}}^p)^*$  y  $f \in L_{\mathbb{R}}^p$ .

$$\implies \ell(f) = \operatorname{Re} \ell(f) + i \operatorname{Im} \ell(f)$$

donde  $\operatorname{Re} \ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$  y  $\operatorname{Im} \ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$ .

$$|\operatorname{Re} \ell(f)| \leq |\ell(f)| \leq \|\ell\|_{L_{\mathbb{C}}^p}^* \|f\|_{L_{\mathbb{C}}^p} = \|\ell\|_{(L_{\mathbb{C}}^p)^*} \|f\|_{L_{\mathbb{R}}^p}$$

$$\operatorname{Re} \ell = \langle \cdot, h_1 \rangle$$

$$\operatorname{Im} \ell = \langle \cdot, h_2 \rangle$$

donde  $fh_i \in L^1$ . Por lo tanto, si

$$h := h_1 + ih_2$$

$$|fh| \leq |fh_1| + |fh_2| \quad \forall f \in L_{\mathbb{R}}^p$$

y

$$\ell(f) = \langle f, h_1 \rangle + i \langle f, h_2 \rangle = \langle f, h_1 + ih_2 \rangle \quad \forall f \in L_{\mathbb{R}}^p$$

Por linealidad

$$\ell(f) = \langle f, h \rangle \quad \forall f \in L_{\mathbb{C}}^p$$

donde  $|fh| \in L^1$ .

$\ell \in (L^p)^*$ . Hemos demostrado que existe  $h$  medible tal que

$$fh \in L^1 \quad \forall f \in L^p$$

y

$$\ell(f) = \int fh \, d\mu$$

Afirmamos que  $h \in L^q$  y  $\|\ell\| = \|h\|_q$ . Por Hölder,

$$\begin{aligned}
|\ell(f)| &\leq \int |fh| d\mu \leq \|f\|_p \|h\|_q \\
&\implies \|\ell\| \leq \|h\|_q
\end{aligned}$$

Mostraremos ahora la otra desigualdad

(a)  $p \in (1, \infty)$ . Defina

$$\begin{aligned}
B_n &:= \Omega_n \cap \{|h| \leq n\}, \quad \Omega_n \nearrow \Omega \\
f_n &:= |h|^{q-1} \operatorname{sgn} h \chi_{B_n}
\end{aligned}$$

$$f_n \in L^p$$

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_p^p &= \int_{B_n} (|h|^{q-1})^p = \int_{B_n} |h|^q \\
\implies \|f_n\|_p &= \left( \int |h|^q \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell(f_n) &= \int f_n h d\mu = \int |h|^{q-1} \operatorname{sgn} h h d\mu \\
&= \int_{B_n} |h|^q d\mu
\end{aligned}$$

$$\int_{B_n} |h|^q d\mu = \ell(f_n) \leq \|\ell\| \cdot \|f_n\|_p = \|\ell\| \left( \int |h|^q d\mu \right)^{1/p}$$

$$\left( \int_{B_n} |h|^q d\mu \right)^{1-1/p} \leq \|\ell\|$$

$$\left( \int_{B_n} |h|^q \right)^{1/q} \leq \|\ell\|$$

Por Teorema de Convergencia Monótona,

$$\left( \int_{B_n} |h|^q \right)^{1/q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|h\|_q$$

(b)  $p = 1, q = \infty$ . Suponga que  $\|\ell\| + 2\varepsilon \leq \|h\|_\infty$ , para algún  $\varepsilon > 0$ .

$$\|h\|_\infty = \inf\{M > 0 : |h| \leq M \text{ c.t.p.}\}$$

$\exists A \in \mathcal{M}, \mu(A) > 0$ , tal que

$$|h| \geq \|h\|_\infty - \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Ya que  $\mu$  es  $\sigma$ -finita,  $\Omega_n \nearrow \Omega$

$$A_n := A \cap \Omega_n \nearrow A$$

Tenemos  $|h| \geq \|h\|_\infty - \varepsilon$  en  $A_n$  donde  $0 < \mu(A_n) < \infty$ . Tome  $f_n := \operatorname{sgn} h \chi_{A_n} \in L^1$

$$\begin{aligned} \ell(f) \int f h d\mu &= \int_{A_n} |h| \\ &\geq (\|h\|_\infty - \varepsilon) \mu(A_n) \\ &\geq (\|\ell\|_\infty + \frac{2}{\varepsilon} - \varepsilon) \|f\|_1 \\ &= (\|\ell\|_\infty + \varepsilon) \|f\|_1 \end{aligned}$$

$\implies f$  viola la norma de  $\|\ell\|$ . Contradicción

■

### 3.8. Teorema de Hahn-Banach

Sea  $X$  un espacio normado, y sea  $X^*$  su dual = espacio de funcionales lineales acotados. No hemos visto si **existen** aún funcionales lineales acotados en  $X$  **no triviales**. Resulta ser el caso que hay una **abundancia** de funcionales lineales acotados en  $X$ .

$X \rightarrow$  espacio vectorial.  $X' \rightarrow$  espacio de funcionales lineales ( $X \neq X'$ ). Diremos que  $f \in X'$  ( $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ) extiende,  $g \in Y'$  ( $Y \subseteq X$  subespacio,  $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$ ). Si

$$f(y) = g(y) \quad \forall y \in Y$$

$(X, f) \succ (Y, g)$ .

**Definición 3.8.1.** Sea  $X$  un espacio vectorial **real**. Decimos que

$$p : X \rightarrow \mathbb{R}$$

es un **funcional** convexo si satisface

1. (Homogeneidad positiva)  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$
2. (subaditividad)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Se dice convexo porque

$$\begin{aligned} p(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq p(\lambda x) + p((1 - \lambda)y) \\ &= \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y) \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Una seminorma/norma es un funcional convexo.

**Ejemplo:** Un funcional lineal (sobre  $\mathbb{R}$ ) es un funcional convexo.

**Definición 3.8.2.** Decimos que el funcional convexo  $p$  domina el funcional lineal  $f$  si

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

**Proposición 3.8.1.** Sea  $X$  normado.  $f \in X'$  es **acotado** si y solo si  $f$  es dominado por  $p(x) := M||x||$  para alguna  $M > 0$ .

*Demostración.* ( $\implies$ ):  $f \in X^*$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq M||x|| \\ \implies f(x) &\leq M||x|| \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ):

$$\begin{aligned} f(x) &\leq M||x|| \quad \forall x \in X \\ -f(x) = f(-x) &\leq M||-x|| = M||x|| \\ \implies -M||x|| &\leq f(x) \leq M||x|| \end{aligned}$$

■



**Teorema 3.8.2** (Hahn-Banach). Sean  $X, Y$  espacios vectoriales **reales**,  $Y \subseteq X$  y sea  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal **convexo**. Si  $f \in Y'$  es dominado por  $p$ ,

$$f(y) \leq p(y) \quad \forall y \in Y$$

entonces existe una **extensión**  $F \in X'$  dominado por  $p$ :

$$F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

**Corolario 3.8.2.1.**  $X$  es un espacio normado **real**.  $Y \subseteq X$  subespacio  $Y \neq \{0\}$ .  $f \in Y^*$ . Entonces existe una extensión  $F \in X^*$  con

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$$

( $Y = \text{Gen}(v)$ ),  $f(\lambda v) = \lambda$ ,  $\|f\|_{Y^*} = \frac{1}{\|v\|}$ . Por Hahn-Banach,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ .

*Demostración.* Defina  $p(x) := \|f\|_{Y^*} \|x\|$ .  $f$  es dominado por  $p$ ., por lo que por el Teorema de Hahn-Banach nos da una extensión

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) \leq p(x) = \|f\|_{Y^*} \|x\|$$

$$\implies F \in X^* \text{ y } \|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}.$$

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$$

pues es una extensión. ■

*Demostración del Teorema de Hahn-Banach (3.8.2).* Asumimos que  $Y \subsetneq X \implies$  existe  $z \in X \setminus Y$ . Vamos a extender  $f$  a  $F : Y + \text{Gen}(z) \rightarrow \mathbb{R}$  de la manera que  $F$  sea **dominado** por  $p$ .

$$F(y + tz) := f(y) + ts, \quad F(z) = s$$

define un funcional lineal en  $Y + \text{Gen}(z)$ . La meta es elegir  $s$  de tal manera que  $F(y + tz) = f(y) + ts \leq p(y + tz)$ . Noten que se satisface cuando  $t = 0$ . Afirmamos que para demostrar su validez  $\forall t \neq 0$  basta ver que se satisface para  $t = \pm 1$ .

$$\begin{aligned}
F(y + tz) &= |t|F\left(\frac{y}{|t|} + \frac{t}{|t|}z\right) \\
&= |t|f\left(\frac{y}{|t|} + \operatorname{sgn} ts\right) \\
&\leq |t|p\left(\frac{y}{|t|} + \operatorname{sgn} ts\right) = p(y + tz)
\end{aligned}$$

Meta: elija  $s$  de modo que

$$\begin{aligned}
f(y) + s &\leq p(y + z) & t = 1 \\
f(y') - s &\leq p(y' - z) & t = -1
\end{aligned}$$

$\forall y, y' \in Y$ . Tal  $s$  existe si

$$\sup_{y' \in Y} f(y') - p(y' - z) \leq \inf_{y \in Y} p(y + z) - f(y)$$

Esto es válido cuando

$$\begin{aligned}
f(y') - p(y' - z) &\leq p(y + z) - f(y) \quad \forall y, y' \in Y \\
&\iff f(y') + f(y) \leq p(y + z) + p(y' - z) \\
\iff f(y' + y) &\leq p(y + z) + p(y' - z) \quad \forall y, y' \in Y
\end{aligned}$$

Lo que es verdadero por la convexidad de  $p$  y porque  $f$  está dominado por  $p$ .

$$\begin{aligned}
f(y' + y) &\leq p(y + y') = p(y + z + y' - z) \\
&\leq p(y + z) + p(y' - z) \quad \forall y, y' \in Y
\end{aligned}$$

De esta manera obtuvimos

$$(\tilde{Y}, F) \succ (Y, f)$$

Para extender a todo  $X$  utilizaremos un argumento estándar por el Lema de Zorn.

**Definición 3.8.3.** Orden parcial  $\prec$  en un conjunto  $E$  es una relación entre algunos de los elementos de  $E$  que satisface

1.  $e \prec e$
2.  $e \prec f$  y  $f \prec e \implies e = f$
3.  $e \prec f$  y  $f \prec g \implies e \prec g$

**Definición 3.8.4.** Un subconjunto  $C \subseteq E$  se llama **cadena** si es totalmente ordenado. Es decir, todo par de elementos de  $C$  son relacionados.

**Definición 3.8.5.** Una cota superior de  $D \subseteq E$  es un elemento  $e \in E$  tal que

$$d \prec e \quad \forall d \in D$$

**Definición 3.8.6.** Un elemento **maximal**  $m \in E$  es un elemento de  $E$  que no puede ser dominado: si

$$m \prec g \implies m = g$$

**Lema 3.8.3** (Lema de Zorn). *Si toda cadena de un conjunto  $E$  parcialmente ordenado tiene una cota superior, entonces  $E$  tiene un elemento maximal.*

Lema de Zorn  $\iff$  Axioma de Elección

En nuestro contexto,

$$E = \{(L, \ell) : (L, \ell) \succ (y, f), \ell : L \rightarrow \mathbb{R} \text{ es dominado por } p\}$$

Orden es:  $(L_1, \ell_1) \succ (L_2, \ell_2)$ . Sea  $C \subseteq E$  una cadena.

$$C = \{(L_\alpha, \ell_\alpha)\}_\alpha$$

$$L := \bigcup_{\alpha} L_{\alpha} \text{ es un subespacio vectorial de } X$$

$$\begin{aligned} x, y \in L &\implies x \in L_{\alpha_1}, y \in L_{\alpha_2} \supseteq L_{\alpha_1} \\ \implies x + y \in L_{\alpha_2} &\implies \lambda x + \mu y \in L_{\alpha_2} \subseteq L \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned}\ell : L &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \ell_\alpha(x) \quad \text{si } x \in L_\alpha\end{aligned}$$

Por la razón anterior, no hay ambigüedad en esta definición: si  $x \in L_\beta$ , podemos asumir que  $(L_\beta, \ell_\beta) \succ (L_\alpha, \ell_\alpha)$

$$\implies \ell_\beta(x) = \ell_\alpha(x) \quad \forall x \in L_\alpha$$

Concluimos que  $(L, \ell)$  es una cota superior de  $C$ . Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal  $(\tilde{L}, \tilde{F})$ .  $\tilde{L} = X$ . Si  $\tilde{L} \subsetneq X$ , podemos extender  $\tilde{F}$  a  $\tilde{L} + \text{Gen}(z)$ ,  $z \in X \setminus \tilde{L}$  siendo dominado por  $p$ . Esto contradice la maximalidad de  $(\tilde{L}, \tilde{F})$ . ■

En el caso de espacios normados **complejos**, utilizaremos la siguiente observación: Todo  $X_{\mathbb{C}}$  se puede ver como un espacio vectorial **real**  $X_{\mathbb{R}}$ .

Tenemos la siguiente correspondencia **biyectiva**:

$$\begin{aligned}X'_{\mathbb{R}} &\xrightarrow{\sim} X'_{\mathbb{C}} \\ u &\longrightarrow x \rightarrow u(x) + \frac{1}{i}u(ix) =: F(x) \\ \text{Re } F &\longleftarrow F\end{aligned}$$

$$F(x) = \underbrace{\text{Re } F(x)}_{u(x)} + i \text{Im } F(x)$$

$$\begin{aligned}\text{Im } F(x) &= \text{Re} \left[ \frac{1}{i} F(x) \right] \\ &= -\text{Re}[iF(x)] \\ &= -\text{Re}[F(ix)] \\ &= -u(ix)\end{aligned}$$

Además, tenemos  $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \underbrace{\text{sgn } F(z)}_{\alpha} F(x) = \alpha F(x) = F(\alpha x) \\ &= \text{Re } F(\alpha x) = u(\alpha x) = |u(\alpha x)|\end{aligned}$$

Cuando  $X_{\mathbb{C}}$  es normado,  $X_{\mathbb{R}}$  hereda la norma de  $X_{\mathbb{C}}$ . Si

$$F \in X_{\mathbb{C}}^* \implies u = \operatorname{Re} F \in X_{\mathbb{R}}^*$$

y

$$\|F\|_{X_{\mathbb{C}}^*} = \|u\|_{X_{\mathbb{R}}^*}$$

**Teorema 3.8.4.** *Suponga que  $Y_{\mathbb{C}} \subseteq X_{\mathbb{C}}$ ,  $X_{\mathbb{C}}$  un espacio normado complejo, y  $f \in Y_{\mathbb{C}}^*$ . Entonces  $f$  se puede extender a  $F \in X_{\mathbb{C}}^*$  preservando la norma:  $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$*

*Demostración.*  $f = \underbrace{\operatorname{Re} f}_{u \in Y_{\mathbb{R}}^*} + \underbrace{I \operatorname{Im} f}_{\frac{1}{i}u(i \cdot)}$

Extendemos  $U \in X_{\mathbb{R}}^*$  donde  $\|U\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \|u\|_{Y_{\mathbb{R}}^*}$ . Definimos

$$F(x) := U(x) + \frac{1}{i}U(ix)$$

Tenemos  $\|F\|_{X_{\mathbb{C}}^*} = \|U\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \|u\|_{Y_{\mathbb{R}}^*} = \|f\|_{Y_{\mathbb{C}}^*}$  ■

**Corolario 3.8.4.1.** *Para todo  $x_0 \in X$ ,  $X$  normado, existe  $f_0 \in X^*$  tal que  $\|f_0\| = 1$  y tal que  $f_0(x_0) = \|x_0\|$ .*

*Demostración.* Aplicamos el teorema anterior a  $Y = \operatorname{Gen}(x_0)$  y

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 : Y &\rightarrow \mathbb{K} \\ tx_0 &\rightarrow t\|x_0\| \end{aligned}$$

$$\bar{f}_0(x_0) = \|x_0\|, \|\bar{f}_0\|_{Y^*} = 1$$

Lo extendemos  $f_0 \in X^*$ . ■

**Corolario 3.8.4.2.**

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\}$$

*Demostración.*

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = \|x\|$$

Por 3.8.4.1,  $\|x\| = |f(x)|$  para algún  $f \in X^*$  con  $\|f\| = 1$ .

$$\implies \|x\| \leq \sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\}$$

■

**Teorema 3.8.5.**  $\forall x \in X, X$  espacio normado, define un funcional lineal acotado en  $X^*$

$$\begin{aligned} \hat{x} : X^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} \|f(x)\| = \|x\|$$

Entonces, el mapeo

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : X &\rightarrow (X^*)^* \\ x &\rightarrow \hat{x} \end{aligned}$$

es una isometría lineal.

**Nota:**

- $\mathcal{J}$  es inyectivo.
- 

$$\overline{\mathcal{J}(X)} \subseteq (X^*)^* \implies \overline{\mathcal{J}(X)} \simeq \text{completación de } X$$

- Cuando  $\mathcal{J}$  es sobreyectivo,  $X \simeq X^{**}$  es un espacio de Banach. que se llama **reflexivo**.

**Ejemplo:** (Espacio de dimensión finita)  $L^p(\mu)$ ,  $p \in (1, \infty]$ .