

## Espacios de Banach

**Def (Métrica):**  $(X, d), d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ :

1.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x)$
3.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Def (Norma):**  $V$  sobre  $\mathbb{K}$ .  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ :

1.  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Si solo satisface 2 y 3 es una semi-norma.

**Prop:**  $d(v, w) = \|v - w\|$  define una métrica.

**Prop:** En  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  todas normas son equivalentes:  $\exists c : \frac{1}{c} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c \|v\|_2, \forall v \in V$

**Def:**  $X$  e.m.,  $C_\infty := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$

**Prop:**  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$  define norma en  $C_\infty(X)$

**Def (Espacio de Banach):**  $(V, \|\cdot\|)$  es Banach si es completo c.r. a la métrica inducida

**Prop:**  $C_\infty(X)$  es Banach

**Def:**  $(V, \|\cdot\|)$  normado.  $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^\infty v_n$  es sumable si  $S_m = \sum_{n=1}^m$  converge.  $\sum_{n=1}^\infty v_n$  es absolutamente sumable si  $\sum_{n=1}^\infty \|v_n\|$  converge

**Prop:** Si  $\sum_{n=1}^\infty v_n$  es absolutamente sumable, entonces  $\{S_m\}$  es Cauchy.

**Teo:**  $(V, \|\cdot\|)$  es Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.

**Def:**  $V, W$  e.v.  $T : V \rightarrow W$  es lineal si  $T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \forall v_1, v_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

**Def:**  $T : V \rightarrow W, V, W$  e.m.  $T$  continuo si  $T^{-1}(O) \stackrel{\text{ab}}{\subseteq} V, \forall O \stackrel{\text{ab}}{\subseteq} V \iff T^{-1}(C) \stackrel{\text{cerr}}{\subseteq} V, \forall C \stackrel{\text{cerr}}{\subseteq} V \iff (v_n \rightarrow v \in V \implies T v_n \rightarrow T v \in W)$

**Teo:**  $V, W$  normados.  $T : V \rightarrow W$  lineal es continuo si y solo si  $\exists c : \|T v\|_W \leq c \|v\|_V, \forall v \in V$ . Decimos que es acotado

**Def:**  $V, W$  normados.  $\mathcal{B}(V, W)$  es el conjunto de operadores lineales acotados de  $V$  en  $W$ . Es un e.v.

**Def (Norma Operador):**  $\|T\| := \sup_{\|v\|=1} \|T v\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|T v\|}{\|v\|}$ .  $\|T v\| \leq \|T\| \|v\|$

**Teo:**  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio normado bajo la norma operador

**Teo:**  $\mathcal{B}(V, W)$  es Banach cuando  $W$  es Banach.

**Def (Espacio Dual):**  $V$  normado sobre  $\mathbb{K}$ .  $V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$ .

**Teo:** Cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ,  $V^*$  es Banach

**Resultados:**  $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty, (\ell^2)^* \simeq \ell^2, (\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$ . Si  $V = W$  Banach,  $T, S \in \mathcal{B}(V, V) \implies TS \in \mathcal{B}(V, V)$

**Def (Espacio Cociente):**  $W \subseteq V$  subespacio vectorial.  $V/W := \{[v], v \in V\}$ .  $v_1 \sim v_2$  si  $v_1 - v_2 \in W$ . Se nota a veces  $V$  mód  $W$ . Es útil denotar  $[v] = v + W$

**Teo:**  $(V, \|\cdot\|)$  e.v. semi-normado.  $Z := \{v \in V : \|v\| = 0\}$  es subespacio de  $V$  y  $\|v + Z\|_{V/Z} := \|v\|$  define una norma en  $V/Z$

**Prop:**  $W \stackrel{\text{cerr}}{\subseteq} V, V$  normado, entonces  $V/W$  tiene una norma  $\|[v]\|_{V/W} := \inf_{w \in W} \|v - w\|$

**Def:**  $V$  normado. Completación de  $V$  es Banach  $(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}})$  con aplicación lineal  $\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \rightarrow \tilde{V}$  que satisface

1.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$  es uno a uno
2.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es denso en  $\tilde{V}$
3.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es una isometría  $\|\mathcal{J}_{\tilde{V}}(u)\|_{\tilde{V}} = \|u\|_V, \forall u \in V$

**Teo:** Todo e.n. tiene una completación.

**Defs:**  $O \subseteq X$  abierto si  $\forall x \in O \exists B_r(x) \in O$ .  $\bigcup_\alpha O_\alpha$  es abierto.  $F \subseteq X$  cerrado si  $F^c$  abierto.  $\bigcap_\alpha F_\alpha$  es cerrado.  $\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$ .  $\mathring{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$ .  $E \subseteq X$  denso si  $\overline{E} = X$

**Def:**  $E \subseteq X$  es denso en ninguna parte si  $\mathring{\overline{E}} = \emptyset$ .  $E$  no contiene bolas abiertas

**Prop:**  $F$  cerrado y denso en n.p.  $\iff F^c$  abierto y denso

**Def:**  $E \subseteq X$  cat I si  $E = \bigcup_k E_k$  con  $E_k$  denso en n.p.  $\mathbb{Q}$  es cat I

**Def:**  $G$  genérico si  $G^c$  es cat I

**Def:**  $E$  es de cat II si no es cat I

**Teo (Baire):**  $(X, d)$  completo. Entonces  $X$  de cat II en sí mismo

**Coro:**  $G \subseteq X$  genérico  $\implies G$  denso en  $X, X$  completo

**Coro:**  $X$  completo,  $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$  cerrado. Entonces por lo menos un  $F_k$  contiene una bola

**Teo:** El conjunto de funciones continuas no derivables en ningún punto es denso en  $C([0, 1])$

**Def:**  $T : X \rightarrow Y$  es abierta si  $T(U) \stackrel{\text{ab}}{\subseteq} Y, \forall U \stackrel{\text{ab}}{\subseteq} X$

**Teo (Aplicación Abierta):**  $X, Y$  Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  biyectiva, entonces  $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$  y  $\exists c, C > 0 : c \|x\|_X \leq \|T x\|_Y \leq C \|x\|_X, \forall x \in X$ .  $c \|T^{-1} y\|_X \leq \|y\|_Y$

**Def:**  $X, Y$  e.m.  $T : X \rightarrow Y$  cerrada si  $G_T = \{(x, T x) \in X \times Y\}$  es cerrado en  $X \times Y$

**Teo:**  $X, Y$  Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y) \iff T$  lineal y cerrada

**Resultado:** Para demostrar continuidad,  $x_n \rightarrow x \implies T x_n \rightarrow T x$ . Podemos asumir que  $T x_n \rightarrow T y$  y mostrar que  $y = T x$

## Espacios de Hilbert

**Def:**  $H$  e.v. sobre  $\mathbb{K}$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ :

1.  $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle$
2.  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0$ .  $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

De 1 y 2,  $\langle x + \lambda y + x \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

**Resultado:**  $\langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$

**Prop (Cauchy-Schwarz):**  $H$  pre-Hilbertiano  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \forall x, y \in H$

**Prop:**  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$  define una norma en  $H$

**Prop:**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es continuo en  $H \times H$

**Def:**  $x \perp y$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ .  $E \subseteq H, E^\perp := \{x \in H : x \perp y, \forall y \in E\}$

**Teo (Pitagoras):**  $x_1, \dots, x_n \in H$  mutuamente ortogonales, entonces  $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$

**Prop (Ley del paralelogramo):**  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

**Def:**  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es Hilbert si es completo c.r. a  $\|\cdot\|$  inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

**Def:**  $C \subseteq V$  convexo en  $V$  si  $\forall x, y \in C, (1-t)x + ty \in C, \forall t \in [0, 1]$

**Teo:**  $C \subseteq H$  cerrado y convexo. Entonces  $\forall x \in H, \exists! y = P_C x \in C$  que satisface  $\|x - P_C x\| = d(x, C) = \inf_{c \in C} \|x - c\|$ . Además  $y = P_C x \iff \operatorname{Re} \langle c - y, x - y \rangle \leq 0, \forall c \in C$

**Teo:**  $F \subseteq H$  subespacio cerrado. Entonces  $H = F \oplus F^\perp$ , es decir,  $\forall x \in H, x = y + z, y \in F, z \in F^\perp$  e  $y = P_F x, z = P_{F^\perp} x$ .  $P_F : H \rightarrow H$  es lineal y acotado, satisface

1.  $\|P_F\| \leq 1$  ( $= 1$  cuando  $F = \{0\}$ )
2.  $P_F^2 = P_F$
3.  $\operatorname{Im} P_F = F, \ker P_F = F^\perp$
4.  $\langle P_F x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, P_F x_2 \rangle$

**Def:**  $P_F$  se llama proyección ortogonal

**Teo (Representación de Riesz):**  $H$  Hilbert,  $f \in H^*$ . Entonces  $\exists! u \in H : f(x) = \langle x, u \rangle, \forall x \in H$

**Def:**  $H$  Hilbert,  $\{e_\alpha\}_\alpha$  es o.n. si  $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$

**Prop (Bessel)**  $\{e_\alpha\}_\alpha$  o.n. Entonces  $\sum_\alpha |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

**Def:**  $\hat{x}(\alpha) = \langle x, \alpha \rangle$  coeficientes de Fourier respecto a  $\{e_\alpha\}_\alpha$

**Teo:**  $B = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un subconjunto o.n. de  $H$ . TFAE:

1.  $\sum_\alpha |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$
2.  $B$  es maximal:  $x \in H : x \perp e_\alpha \forall \alpha \in A \implies x = 0$
3.  $\forall x \in H, x = \sum_\alpha \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$
4.  $\operatorname{Gen}(B)$  es denso en  $H$

**Def:** Decimos que  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  o.n. es una base ortonormal si satisface cualquiera de 1-4

**Teo:** Todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal

**Def:**  $X$  e.m. es separable si  $\exists C \subseteq X$  contable y denso en  $X$

**Teo:**  $H$  es separable si y solo si  $\exists$  una base o.n. para  $H$  contable. En este caso toda base o.n. es contable

**Def:**  $H_1, H_2$  Hilbert.  $T : H_1 \rightarrow H_2$  es unitario si  $\langle T x_1, T x_2 \rangle_{H_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1}, \forall x_1, x_2 \in H_1$

**Resultado:**  $T$  unitario  $\implies T$  isométrico

**Teo:** Todo espacio de Hilbert separable es unitariamente isomorfo a  $\ell^2$

**Identidad de Parseval:**  $\|\hat{x}\|_{\ell^2}^2 = \sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$

**Identidad de Polarización:**  $\frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$

## Series de Fourier

**Prop:**  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$  es o.n. en  $L^2(\mathbb{T})$

**Def:**  $f \in L^2(\mathbb{T}), \hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^\pi f(x) e^{-inx} dx$  coef de Fourier.

$f \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$  serie de Fourier.  $S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) e_n$  suma de Fourier parcial

**Teo:**  $f \in L^2(\mathbb{T}), S_N f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} f$

**Nota:** Teo anterior  $\iff \{e_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es base o.n. para  $L^2(\mathbb{T})$

**Teo:**  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Entonces  $S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t)f(t)dt$  donde

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{2N+1}{2\pi} & x=0 \\ \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\pi \sin(\frac{x}{2})} & x \neq 0 \end{cases}$$

**Def (Media de Cesàro):**  $\sigma_N f = \frac{S_0 f + \dots + S_{N-1} f}{N}$

**Teo (Fejér):**  $\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$ . Si  $f \in C(\mathbb{T})$ ,  $\sigma_N \xrightarrow{\text{unif}} f \in \mathbb{T}$

**Prop:**  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Entonces  $\sigma_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-t)f(t)dt$  con

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} N & x=0 \\ \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} & x \neq 0 \end{cases}$$

**Def:**  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es familia de buenos kernels en  $L^1(\mathbb{T})$  si

1.  $\int_{\mathbb{T}} K_n(x) dx = 1$
2.  $\sup_n \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)| dx < \infty$
3.  $\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \forall \delta > 0$

**Def:**  $f * g = \int f(x-t)g(t)dt$

**Teo:**  $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  fam de buenos kernels en  $L^1(\mathbb{T})$  y  $f \in C(\mathbb{T})$ , entonces

$$K_N * f = f * K_N \rightarrow f$$

**Coro:**  $\sigma_N f \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{unif}} f$  para  $f \in C(\mathbb{T})$

**Coro:**  $f \in C(\mathbb{T})$  y  $\hat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \implies f \equiv 0$

**Coro:**  $f \in C(\mathbb{T})$  y su serie de Fourier converge absoluta y finito  $\implies T$  compacto

uniformemente:  $\sum_n |\hat{f}(n)e_n(x)| < \infty$ . Entonces  $S_N f \xrightarrow{\text{unif}} f$

**Prop:**  $\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$

**Prop:**  $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$  entonces  $\|\sigma_N f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$

**Teo:**  $f \in L^p, 1 \leq p < \infty$ . Entonces  $\sigma_N f \xrightarrow{L^p} f$

**Coro:**  $S_N \xrightarrow{L^2} f$

**Lema:**  $f \in L^1(\mathbb{T}), \hat{f}(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

**Misc:**  $f \in L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \hat{f} \in \ell_2^2$  es un isomorfismo unitario.  $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\mathcal{C}}_0 = \{(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) : \lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n = 0\}$

**Teo:**  $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\mathcal{C}}_0$  es lineal, acotado e inyectivo

**Prop:**  $\|D_N\|_{L^1} \geq C \log N$

**Coro:**  $f_N := D_N$  contradice  $\|f\|_{L^1} \leq c \|\hat{f}\|_{\infty}$

**Teo:**  $\forall x \in \mathbb{T} \exists A_x \subseteq C(\mathbb{T})$  genérico t.q.  $\sup_N |S_N f(x)| = \infty$

**Teo (Banach-Steinhaus)**  $X$  Banach,  $Y$  normado.  $T_k \in \mathcal{B}(X, Y), k \in I$  no necesariamente contable. Entonces o  $\sup_k \|T_k\| < \infty$  o  $\sup_k \|T_k x\| = \infty, \forall x \in A$  donde  $A \subset X$  es genérico  $G_\delta$

**Coro:**  $X$  Banach,  $Y$  normado.  $T_k \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Suponga que  $\forall x \in X, \lim_{k \rightarrow \infty} T_k x = Tx$  existe. Entonces  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  y  $\|T\| \leq \liminf_k \sup_n \|T_k\| < \infty$

**Conv:**  $0 \leq f_n \nearrow f$  c.t.p.  $\implies \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu, f_n \geq 0, \int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n, f_n \rightarrow f$  c.t.p. y  $|f_n| \leq g$  c.t.p.,  $g \in \mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mu) \implies \int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$

**Teo:**  $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\mu)$ , se puede cambiar el orden de integración

**Fact:**  $L_\mathbb{R}^p(\mu) = \mathcal{L}_\mathbb{R}^p(\mu)/\mathcal{N}_\mathbb{R}(\mu)$  es espacio normado con  $\|\cdot\|_p$

**Teo:**  $\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p, q \in [1, \infty]$

**Teo:**  $0 \leq a, b \leq \infty, ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, 1 < p, q < \infty$

**Teo:**  $L^p(\mu)$  es Banach

**Teo:**  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$   $\sigma$ -finito.  $1 \leq p < \infty$ .  $\phi$  es isomorfismo isométrico:  $\forall \ell \in (L^p(\mu))^*, \exists! g \in L^q(\mu) : \ell(f) = \langle f, g \rangle \forall f \in L^p. \|\ell\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q$

**Teo:**  $\mu, \nu, \sigma$ -finitas.  $\nu \ll \mu \implies \exists! h \geq 0$  medible t.q.  $\nu(E) = \int_E h d\mu. h = \frac{d\nu}{d\mu}$

**Def:**  $\ell \in (L_\mathbb{R}^p)^*$  positivo si  $\ell(f) \geq 0, \forall 0 \leq f \in L_\mathbb{R}^p$

**Teo:**  $\ell \in (L_\mathbb{R}^p)^*, 1 \leq p < \infty. \ell = \ell_+ - \ell_-$  positivos

**Def:**  $X$  e.v. real.  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  es funcional convexo si

1.  $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda \geq 0$
2.  $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

**Prop:**  $X$  normado.  $f \in X'$  acotado si y solo si  $f$  dominado por  $p(x) := M\|x\|$  para algún  $M > 0$

**Teo (H-B):**  $X, Y$  e.v. reales,  $Y \subseteq X, p : X \rightarrow \mathbb{R}$  funcional convexo.  $f \in Y'$  dominado por  $p$ . Entonces  $\exists! F \in X'$  extensión de  $f$  dominado por  $p$

**Coro:**  $X$  normado real.  $Y \subseteq X$  subespacio  $Y \neq \{0\}, f \in Y^*$ . Entonces,  $\exists F \in X^*$  extensión con  $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

**Teo:**  $Y_\mathbb{C} \subseteq X_\mathbb{C}$  normado complejo,  $f \in Y_\mathbb{C}^*$ . Entonces  $f$  se extiende a  $F \in X_\mathbb{C}^*, \|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

**Coro:**  $\forall x_0 \in X$  normado,  $\exists f_0 \in X^*$  t.q.  $\|f_0\| = 1$  y  $f_0(x_0) = \|x_0\|$

**Coro:**  $\|x\| = \sup\{|\langle f, x \rangle| : \|f\| = 1\}$

**Teo:**  $\forall x \in X$  normado define funcional en  $X^*, \hat{x} : X^* \rightarrow \mathbb{K}, f \rightarrow f(x)$ .  $\|\hat{x}\| = \sup_{\|f\|=1} \|f(x)\| = \|x\|$ .  $\mathcal{J} : X \rightarrow (X^*)^*, x \rightarrow \hat{x}$  es isometría lineal. Cuando  $\mathcal{J}$  es sobre,  $X \simeq X^{**}$  es Banach y se dice reflexivo

**Teoría de Operadores**

**Def:**  $f \in X^*, Y \subseteq X, Y^\perp := \{f \in X^* : \langle f, y \rangle = 0 \forall y \in Y\}$ .  $Z \subseteq X^*, X^\perp := \{x \in X : \langle f, x \rangle = 0 \forall f \in Z\}$

**Prop:**  $Y \subseteq X$  subespacio normado.  $(Y^\perp)^\perp = \bar{Y}$

**Def:**  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  normados.  $T^* : Y^* \rightarrow X^*, f \circ T =: T^*(f)$ .  $\langle T^* f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle \forall x \in X$

**Teo:**  $\mathcal{B}(X, Y) \rightarrow \mathcal{B}(X^*, Y^*), T \rightarrow T^*$  isometría lineal

1.  $(\text{Im } T)^\perp = \ker T^*$
2.  $(\ker T^*)^\perp = \overline{\text{Im } T}$
3.  $(\text{Im } T^*)^\perp = \ker T$

**Def:**  $X, Y$  Banach.  $T : X \rightarrow Y$  compacto si  $\overline{T(B^X)}$  compacto en  $Y \iff$  toda sucesión en  $T(B^X)$  tiene subsucesión convergente en  $Y \iff$  toda sucesión en  $T(B^X)$  tiene subsucesión de Cauchy

**Teo:**  $\mathcal{B}_c(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$  es subespacio cerrado.  $\{T_n\} \subseteq \mathcal{B}(X, Y), \|T_n\| \rightarrow 0 \implies T \in \mathcal{B}(X, Y)$

**Def:**  $T : X \rightarrow Y$  de rango finito si  $\dim(\text{Im } T) < \infty$

**Prop:**  $T : X \rightarrow Y$  de rango finito es compacto.  $T = \lim T_n$  de rango finito  $\implies T$  compacto

**Teo:**  $T \in \mathcal{B}_c(X, Y), Y$  Hilbert. Entonces  $\exists T_n$  rango finito t.q.  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$

**Prop:** Composición de compacto con continuo es compacto

**Teo (Schauder):**  $T \in \mathcal{B}_c(X, Y) \iff T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$

**Teo (A-A):**  $K$  métrico compacto,  $\mathcal{C} \subseteq C(K)$  t.q.

1.  $\exists M > 0 : \|f\|_{C(K)} \leq M, \forall f \in \mathcal{C}$
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  t.q.  $\forall f \in \mathcal{C} : |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$  si  $|x - y| < \delta$

Entonces existe  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}$  t.q.  $f_n \rightarrow f$  en  $C(K)$

**Teo (Alternativa Fredholm):**  $X$  Banach,  $T \in \mathcal{B}_c(X, X)$ . Entonces

1.  $\dim(\ker(I - T)) < \infty$
2.  $\text{Im}(I - T)$  es cerrado en  $X$  e  $\text{Im}(I - T) = (\ker(I - T^*))^\perp$
3.  $\ker(I - T) = \{0\} \iff \text{Im}(I - T) = X$
4.  $\dim(\ker(I - T)) = \dim(\ker(I - T^*))$

**Lema**  $X$  normado,  $F \subsetneq^{crr} X$  subespacio. Entonces  $\forall \varepsilon > 0, \exists u \in X, \|u\| = 1$  t.q.  $d(u, F) \geq 1 - \varepsilon, \|u - f\| \geq 1 - \varepsilon, \forall f \in F$

**Coro:**  $X$  normado,  $B^X$  compacta. Entonces  $\dim X < \infty$

**Resultado:**  $T \in \mathcal{B}_c(X, Y), X_1 \subsetneq^{crr} X, X, Y$  Banach  $\implies T|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y$  es compacto

**Def:**  $\lambda \in \mathbb{K}$  es autovalor de  $T : X \rightarrow X, X$  Banach, si  $\exists x \neq 0$  t.q.  $Tx = \lambda x$

**Def:**  $\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\} \supseteq \sigma_p(T)$ .  $\lambda \in \sigma(T) \iff$  o  $\lambda$  es autovalor o  $T - \lambda I$  no es sobre.  $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$

**Teo:**  $T \in \mathcal{B}(X, X), \sigma(T)$  es compacto de  $\mathbb{K}$ .  $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$

**Teo:**  $T \in \mathcal{B}_c(X, X), X$  Banach,  $\dim X = \infty$ . Entonces

1.  $0 \in \sigma(T)$
2.  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$  y cada  $\lambda \neq 0, \mathcal{N}_\lambda(T) := \ker(T - \lambda I)$  tiene dim finita
3.  $\forall \delta > 0$  existen nro finito de valores distintos  $\lambda \in \sigma(T)$  t.q.  $|\lambda| \geq \delta$

**Coro:**  $T \in \mathcal{B}_c(X, X) \implies \sigma(T)$  a lo más numerable. Esto último cuando  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\lambda_n \rightarrow 0$

**Def:**  $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ .  $T^* : H_2 \rightarrow H_1 : \langle Tx, y \rangle_2 = \langle x, Ty \rangle_1$

**Propiedades:**  $T^{**} = T, \|T^*\| = \|T\|, (ST)^* = T^* S^*$

**Def:**  $A : H \rightarrow H$  autoadjunto si  $A^* = A : \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

**Prop:**  $A \in \mathcal{B}(H, H)$  autoadjunto. Entonces  $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}, \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$  y  $\mathcal{N}_{\lambda_1}(A) \perp \mathcal{N}_{\lambda_2}(A)$  si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

**Teo:**  $A \in \mathcal{B}(H, H)$  autoadjunto. Entonces  $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

**Lema:**  $A \in \mathcal{B}(H, H)$  autoadjunto.  $\lambda \in \rho(A) \iff \exists C > 0 : \|(A - \lambda I)x\| \geq C\|x\| \forall x \in H$

**Teo (Espectral):**  $A \in \mathcal{B}_c(H, H)$  autoadjunto. Entonces  $H$  posee base o.n. de autovectores.  $Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n$

**Lema:**  $A \in \mathcal{B}(H, H)$  acotado autoadjunto. Entonces  $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| =: M$

**Lema:**  $A \in \mathcal{B}_c(H, H)$  autoadjunto,  $A \neq 0$  entonces o  $\|A\|$  o  $-\|A\|$  es