Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT255I - Análisis Funcional
2º semestre 2023

# MAT255I
# Análisis Funcional

Sebastián Guerra (sebastian.guerrap@uc.cl)
Profesor: Nikola Kamburov (nikamburov@mat.uc.cl)

*Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir*

Versión: 11 de septiembre de 2023

# Índice general

Capítulo 1

# Intro al Análisis Funcional

## 1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

**Definición 1.1.1.** Un espacio vectorial $V$ sobre $\mathbb{K}$ campo de escalares tiene dimensión infinita si $\forall n \in \mathbb{N}$ hay $n$ elementos de $V$ que son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$

**Ejemplo:** $V = C([0,1], \mathbb{R})$ = funciones reales continuas en $[0,1]$.
$\{1, x, \ldots, x^{n-1}\} \subseteq V$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$.

*Demostración.* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Reconocemos que existe la operación $\frac{d}{dx}$ definida en $C^\infty([0,1], \mathbb{R})$, funciones suaves, y la operación evaluar en $x = 0$.

Evaluando en $x = 0 \to a_0 = 0$. Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en $x = 0$:

$$a_1 = 0$$

... ■

*Demostración alternativa.* Reconocemos que hay un producto interno en $V = C([0,1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

$\{f_k = \sin(\pi k x)\}_{k=1}^{n} \subseteq V$

$$\langle \sin(\pi k x), \sin(\pi l x)\rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_k\rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_0, f_l\rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \ldots, n$$

■

## 1.2. Motivación

**Ejemplo** (Ecuación de Poisson)**:**

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Seba *Aañdir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \to Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución $u \in X$ para ciertos espacios $X, Y$ apropiados.

El Análaisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que comparten las mismas características topológicas/algebraicas/métricas.

## 1.3. Objeto central: espacio de Banach

**Definición 1.3.1** (Espacio de Banach)**.** $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es un espacio normado completo (clave para sacar límites).

$$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle\cdot,\cdot\rangle) completos\} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, ||\cdot||)\} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) co$$

Seba *Arreglar*

**Lógica de inclusiones**

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una norma $||\cdot||$

$$||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$$

2. $||\cdot||$ induce una métrica $d(\cdot,\cdot)$

$$d(v, w) = ||v - w||$$

## 1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

**Ejemplo:** Cada funcional lineal en $\mathbb{R}$ ($l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) se puede representar como $l(v) = v \cdot w$ para algún vector (único) $w \in \mathbb{R}^n$.
En la situación de dimensión $\infty$, se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

**Teorema 1.4.1** (Representación de Riesz)**.** *Sea $(V, \langle,\rangle)$ un espacio de Hilbert y $l : V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo . Entonces existe un único $w \in V$, tal que*

$$l(v) = \langle v, w\rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. contraintuitivos .

**Ejemplo:** $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacta (Heine-Borel).
En $\dim V = \infty$, este teorema es falso.

**Proposición 1.4.2.** *Sea $V$ un espacio de Banach y sea $B = \{v \in V : ||v|| \leq 1\}$. $B$ es compacto en $V \iff \dim V < \infty$*

**Ejemplo:** En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subsetneq L^p([0,1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.
$\Longrightarrow$ motiva la definición de topologías débiles.

Capítulo 2

# Espacios de Banach

## 2.1. Nociones básicas

### 2.1.1. Espacios Normados

**Definición 2.1.1** (Espacios métricos)**.** Un espacio métrico $(X, d)$ y $d : X \times X \to [0, \infty)$ la métrica que satisface:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría) $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Definición 2.1.2.** Sea $V$ un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en $V$ es una función $||\cdot|| : V \to [0, \infty)$ que satsiface:

1. $||v|| = 0 \iff v = 0$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. (Desigualdad triangular) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Una función $||\cdot|| : V \to [0, \infty)$ que satisface solo 2. y 3. se llama semi-norma .

Una espacio vectorial $V$ con una norma se llama Espacio normado $(V, ||\cdot||)$.

**Proposición 2.1.1.** $(V, ||\cdot||)$ *define un espacio métrico con métrica* $d(v, w) := ||v - w||$.

**Ejemplo:**

- $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left( \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

- En $\mathbb{R}^2$, $|(x_1, x_2)| := |x_1|$ define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} \{x_k\}$ es una norma.

- $$|x|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

**Seba** *Añadir dibujos de norma infinito y norma 1*

**Proposición 2.1.2.** *En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ todas normas son equivalentes: si $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ son 2 normas, existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{1}{c}||v||_2 \leq ||v||_1 \leq c||v||_2, \quad \forall v \in V$$

**Definición 2.1.3.** Sea $X$ un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

**Ejemplo:** $C_\infty([0,1]) = C([0,1])$ (funciones continuas)

**Proposición 2.1.3.** $||f||_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ *define una norma en $C_\infty(X)$.*

*Demostración.*

1. $||f||_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \, \forall x \in X$.
2. $$\begin{aligned} ||\lambda f||_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot ||f||_\infty \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en $||\cdot||_\infty$

$$f_n \to f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

**Ejemplo:** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{\{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : ||a||_p < \infty\}$$

donde

$$||a||_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} & p \in [1,\infty) \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ un espacio de medida.

$$L^p(x,\sigma) := \{f : X \to \mathbb{K}\, \sigma\text{-medibles, tales que} ||f||_{L^p} < \infty\}$$

donde

$$||f||_{L^p} := \left(\int |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}$$

$$||f||_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_x |f|$$

**Ejemplo:** $X = [0,1]$, $\sigma =$ medida de Lebesgue. En $C([0,1])$ definimos

$$||f||_\infty = \sup |f(x)|$$

$$||f||_{L^1} = \int |f(x)|\, dx$$

Estas 2 normas no son equivalentes

### 2.1.2. Espacios de Banach

**Definición 2.1.4.** Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida.

**Ejemplo:** $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)
$L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es un espacio de Banach (cuando $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es completo).

**Proposición 2.1.4.** *$C_\infty(X)$ es un espacio de Banach.*

*Demostración.* $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$ de Cauchy.

1. Adivinar el límite $f$.
2. Probar la convergencia:
$$||f_n - f|| \to 0$$
3. $f$ está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tal que

$$||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo $x \in X$ fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es $\{f_n(x)\}_n$ es Cauchy en $\mathbb{C}$.

$$\implies f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies ||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es $f_n \to f$ uniformemente sobre $X$.

$\implies$ $f$ es continua sobre $X$.

¿Por qué $f$ es acotada?

Considere $\varepsilon = 1$

$$\implies ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \leq 1$$

cuando $n \geq \bar{N} := N(1)$.

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \\ &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

**Definición 2.1.5.** Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es sumable si

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} v_n$$

converge.
$\sum_n v_n$ es absolutamente sumable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||v_n||$$

converge.

■

**Proposición 2.1.5.** *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *es absolutamente sumable, entonces,* $\{S_m\}$ *es Cauchy*

**Teorema 2.1.6.** *Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

*Demostración.* $\Longleftarrow$ :

1. Tome una sucesión $\{v_n\}$ de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge. $v_{n_k} \to v$ en $V$. Fije $\varepsilon > 0$. $\implies$ $||v_m - v|| \leq \underbrace{||v_m - v_{n_k}||}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{||v_{n_k} - v||}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$, tomando $k, m$ suficientemente grandes.

2. Dos trucos: Podemos "acelerar" la convergencia. Existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$||v_{n_{k+1}} - v_{n_k}|| \leq 2^{-k} \tag{2.1}$$

$$||v_n - v_m|| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$n_k := N_1 + \ldots + N_k$

Afirmamos que $\{v_{n_k}\}$ converge.

Truco de la suma telescopica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^{m} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \to \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \to \infty} S \in V$$

$$\implies v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \to \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

## 2.2. Operadores y funcionales

### 2.2.1. Operadores Lineales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

**Ejemplo:**

$$\begin{aligned} T : C([0,1],\mathbb{C}) &\to C([0,1],\mathbb{C}) \\ f &\to F(x) = \int_0^x f(y)\,dy \end{aligned}$$

$T$ es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y<x\}} f(y)\,dy$$

**Definición 2.2.1.** $V, W$ son 2 espacios vectoriales.
$T : V \to W$ es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} T : C([0,1]) &\to C([0,1]) \\ f &\to \int_0^1 \underbrace{K(x,y)}_{\text{Kernel}} f(y)\,dy := Tf(x) \end{aligned}$$

operador integral. Cuando $K \in C([0,1]^2), T$ está bien definida.

En dim $\infty$ vamos a exigir que los operadores lineales sean continuos .

**Definición 2.2.2.** $T : V \to W$, $V, W$ son espacios métricos. Decimos que $T$ es continuo si

$$T^{-1}(O) \overset{ab}{\subseteq} V, \forall O \overset{ab}{\subseteq} V$$

$$\iff T^{-1}(C) \overset{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \overset{cerr}{\subseteq} W$$

$\iff$ $v_n \to v$ en $V$ entonces $Tv_n \to Tv$ en $W$.

**Teorema 2.2.1.** *Sean $V, W$ espacios normados. Entonces $T : V \to W$ operador lineal es continuo si y solo si*

$$||Tv||_W \leq C||v|| \quad \forall v \in V \tag{2.2}$$

*para alguna constante $C$.*

**Definición 2.2.3.** Operador lineal que satisface 1,2 se llama acotado .

*Demostración.* $\implies$ : Sea $T$ continuo. $B := \{||w||_W < 1\}$

$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : ||v||_V < r\}$$

pues $T^{-1}(B)$ es abierto

$$\implies T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : ||v||_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio $\frac{r}{2}$.

$$||T\bar{v}||_W < 1$$

Todo $v \in V, v \neq 0$ se puede escribir como $v = \frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V$

Para algún $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$||Tv||_W = ||T(\frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V)||_W$$

$$= ||\frac{2}{r}||v||_V T(\bar{v})||_W$$

$$= \frac{2}{r}||v||_V||T\bar{v}||_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r}||v||_V \quad \forall v \neq 0$$

∎

**Ejemplo:**

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$$

es acotado en $(C([0,1]), ||||_\infty)$

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y)|}_{\leq M} |f(y)|\,dy \\ &\leq M \int_0^1 |f(y)|\,dy \leq M||f||_\infty \quad \forall x \implies ||Tf||_\infty \leq M||f||_\infty \end{aligned}$$

**Definición 2.2.4.** Sean $V, W$ espacios normados. Defina $\mathcal{B}(V,W)$ como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de $V$ a $W$.
Obviamente $\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio vectorial.

Norma operador $T : V \to W$:

$$||T|| := \sup_{||v||=1} ||Tv||$$

Obviamente, $T \in \mathcal{B}(V,W), ||T|| < \infty$

$$||Tv|| \leq C \underbrace{||v||}_{1} = C$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

De hecho, para $T \in \mathcal{B}(V,W)$

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup_{v\neq 0} \frac{||Tv||}{||v||} = \sup_{||v||\leq 1} ||Tv|| \\ &= \text{ínf}\{C > 0 : ||Tv|| \leq C||v|| \quad \forall v \in V\} \end{aligned}$$

Tenemos $||Tv|| \leq ||T||||v||$

**Teorema 2.2.2.** $\mathcal{B}(V,W)$ *es un espacio normado bajo la norma operador.*

*Demostración.* 1. $||T|| = 0 \implies ||Tv|| = 0 \forall v \in V$

$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$

2. $||\lambda T|| = |\lambda|||T||$

3. Sea $v \in V, ||v|| = 1$. $\forall T, S \in \mathcal{B}(V, W)$,

$$\begin{aligned} ||(T+S)v|| &= ||Tv + Sv|| \\ &\leq ||Tv|| + ||Sv|| \\ &\leq ||T||||v|| + ||S||||v|| = (||T|| + ||S||)||v|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies ||(T+S)v|| \leq ||T|| + ||S|| \\ &\implies ||T+S|| \leq ||T|| + ||S|| \end{aligned}$$

■

¿Cuándo es $\mathcal{B}(V, W)$ completo?

**Teorema 2.2.3.** *$\mathcal{B}(V, W)$ es Banach cuando $W$ es Banach.*

*Demostración.* $T_n \in \mathcal{B}(V, W)$ Cauchy. Queremos demostrar que converge en $|| \cdot ||_{\mathcal{B}(V,W)}$.

1. $\forall v \in V, \{T_n v\}$ es Cauchy en $W$ pues

$$||T_n v - T_n v|| \leq ||T_n - T_w|| \cdot ||v||$$

$\implies \{T_n v\}$ converge. Definimos

$$Tv := \lim_{n \to \infty} T_n v$$

2. ¿Por qué $T \in \mathcal{B}(V, W)$? $\to$ lineal:

$$T(\lambda v) = \lim_{n \to \infty} T_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n \to \infty} T_n v = \lambda T(v)$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$\to$ acotado:

$\{T_n\}$ es Cauchy.

$\{||T_n||\}$ es Cauchy en $[0, \infty)$

$$||T_n|| - ||T_m||| \leq ||T_n - T_w||$$
$$\implies ||T_n|| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sea $v \in V, ||v|| = 1$.

$$\begin{aligned} ||Tv|| &= ||\lim_{n\to\infty} T_n v|| \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{||T_n v||}_{\leq C||v||=C} \leq C \end{aligned}$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

3. Convergencia: $T_n \to T$ en norma operador. Sea $v \in V, ||v|| = 1$.

$$||(T_n - T)v||$$

$T_m v \to Tv$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m\to\infty} ||(T_n - T_m)v|| \\ &\leq \underbrace{||T_n - T_m||}_{\leq \varepsilon} \cdot ||v|| \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \\ &\implies ||T_n - T|| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

### 2.2.2. Espacio Dual

**Definición 2.2.5.** Sea $V$ un espacio normado sobre $\mathbb{K}$.

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio dual de $V$.

**Teorema 2.2.4.** *Cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (completos) $V^*$ es un espacio de Banach*

Elementos de $V^*$ se llaman funcionales en $V$.

**Ejemplo:** $[\ell^p(\mathbb{C})]^* =?, p \in [1, \infty)$
Resulta que $? = l^q(\mathbb{C})$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Si $v \in \ell^p, w \in \ell^q$
podemos definir un funcional en $\ell^p$

$$\begin{aligned} \ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \\ v = \{v_k\} &\to \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k \end{aligned}$$

$$|\ell_w| \leq ||w||_{\ell^q} ||v||_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$ $(\ell^2)^* \simeq \ell^2$

**Nota:** $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$

Cuando $V = W$ espacio de Banach, entonces $B(V, V)$ es un espacio de Banach. Es también álgebra .

$$T, S \in B(V, V) \implies TS \in B(V, V)$$

$$\begin{aligned} ||TS|| = \sup_{||v||=1} ||T(Sv)|| &\leq ||T|| \cdot ||Sv|| \\ &\leq ||T|| \cdot ||S|| \cdot ||v|| \leq ||T|| \cdot ||S|| \end{aligned}$$

Cómo resolver ecuaciones del tipo

$$(T - \lambda I)u = v$$

donde $v \in V \leftarrow$ un espacio de Banach, $T \in B(V, V)$, $\lambda \neq 0$.

Queremos construir el operador inverso

$$S := (T - \lambda I)^{-1}$$

Cuando $|\lambda| > ||T||$, $S$ se puede construir a través de la serie de Neumann

$$-\lambda(I - \underbrace{\frac{T}{\lambda}}_{||T/\lambda||<1})u = v$$

Sabemos que

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Definimos

$$S := -\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \tag{2.3}$$

2.3 define $S \in B(V, V)$ ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

es sumable pues es absolutamente sumable en el espacio de Banach $B(V, V)$.

$\rightarrow$ ¿por qué $(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$?

Para verificar que $S(T - \lambda I) = I$,

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

$$S_N(T - \lambda I) = S_N T - S_N \lambda = \sum_{n=0}^{N} -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{N} -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$
$$= \underbrace{-\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{N+1}}_{\rightarrow 0 \text{ en } B(V,V)} + I$$

### 2.2.3. Espacio cociente

¿Cómo obtener espacios normados/Banach de otros espacios?

**Definición 2.2.6** (Espacio cociente)**.** Sea $W$ un subespacio del espacio vectorial $V$.

$$V/W := \{[v], v \in V\}$$

$[\cdot]$ se define a través $v_1 \sim v_2$ si $v_1 - v_2 \in W$.
Se nota también $V \mod W$ y se llama el espacio cociente.

Es útil denotar $[v] = v + W$

Una construcción de subespacio $W \subseteq V$ tal que $V/W$ es normado es a través de una semi-norma definida en $V$.

**Ejemplo:** $V = C^1([0,1])$ = espacio de funciones en $[0,1]$ con derivadas continuas en $[0,1]$.

$$||f|| := \max_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

$$||f|| = 0 \iff f = \text{const}$$

**Teorema 2.2.5.** *Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio vectorial semi-normado. Entonces $Z := \{v \in V : ||v|| = 0\}$ es un subespacio de $V$ y*

$$||v + Z||_{V/Z} := ||v|| \tag{2.4}$$

*define una norma en $V/Z$.*

*Demostración.* 1. $Z$ es un subespacio vectorial.

$$z_1, z_2 \in Z \implies z_1 + z_2 \in Z$$

$$||z_1 + z_2|| \leq ||z_1|| + ||z_2|| = 0$$

$$z \in Z \implies \lambda z \in Z$$

Así, $V/Z$ tiene la estructura de un espacio vectorial.

2. Tenemos que comprobar que 2.4 es una buena definición:

   Si $v_1, v_2$ son 2 representantes de $[v]$:

$$v_1 = v_2 + z, \quad z \in Z$$

$$\begin{aligned} ||v_1|| \leq ||v_2|| + ||z|| &\implies ||v_1|| \leq ||v_2|| \\ ||v_2|| \leq ||v_1|| &\implies ||v_1|| = ||v_2|| \end{aligned}$$

$$||v + z||_{V/Z} = 0$$

$$\implies v + Z = Z \implies v \in Z$$

   Las otras 2 proposiciones se heredan de manera obvia

■

$C^1([0,1])/const$ es un espacio normado con la norma inducida.

Otra construcción similar:

**Proposición 2.2.6.** *Si* $W \overset{cerr}{\subseteq} V$ *subespacio cerrado de un espacio normado* $(V, ||\cdot||)$*, entonces* $V/W$ *tiene una norma:*

$$||[v]||_{V/W} := \inf_{w \in W} ||v - w||$$

*Demostración.* En ayudantía ■

### 2.2.4. Completación de espacios normados

**Definición 2.2.7.** Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. La completación de $V$ es un espacio de Banach $(\tilde{V}, ||\cdot||_{\tilde{V}})$ con una aplicación lineal

$$\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \to \tilde{V}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$ es uno a uno
2. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$ es denso en $\tilde{V}$
3. $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$ es una isometría:

$$||\mathcal{J}_{\tilde{V}}(v)||_{\tilde{V}} = ||v||_V \quad \forall v \in V$$

**Teorema 2.2.7.** *Todo espacio normado $V$ tiene una completación. Esta es única en el siguiente sentido:*
Seba *hacer dibujo*
$\tilde{V} = \{\textit{sucesiones de Cauchy en } V \textit{ que convergen}\}$
$\{v_n\} \sim \{w_n\}$ *si* $||v_n - w_n|| \to 0$
*Sea* $\tilde{v} \in \tilde{V}$
Seba *ESTOY HASTA EL PICO*

## 2.3. El teorema de Baire

### 2.3.1. Categorias de Baire

$(X, d)$ espacio métrico.

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

$$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$$

$O \subseteq X$ es abierto si $\forall x \in O, \exists B_r(x) \in O$. $\bigcup_\alpha O_\alpha$ es abierto.

$F \subseteq X$ es cerrado si $F^c$ es abierto. $\bigcap_\alpha F_\alpha$ es cerrado.

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$$

$$\mathring{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$$

$$E \overset{denso}{\subseteq} X \text{ si } \overline{E} = X$$

**Definición 2.3.1.** $E \subseteq X$ es **denso en ninguna parte** si $\mathring{\overline{E}} = \varnothing$.

esencialmente, denso en ninguna parte $E$ significa que $E$ no contiene bolas abiertas.

**Ejemplo:** $E = \{x\}$ es denso en niguna parte.

**Proposición 2.3.1.** *$F$ es cerrado y denso en ninguna parte $\iff$ $F^c$ es abierto y denso.*

### La noción de categoria de Baire

**Definición 2.3.2.** $E \subseteq X$ cat I si $E = \bigcup_k E_k$ donde $E_k$ es denso en ninguna parte.

**Ejemplo:** $\mathbb{Q}$ es cat I.

**Definición 2.3.3.** Si $G$ tiene $G^c$ que es cat I, decimos que $G$ es **genérico**.

**Definición 2.3.4.** $E$ es de cat II si no es de primera categoría.

### Observaciones

1. Si $E$ es cat I, y $F \subseteq E$ es cat I

$$\begin{aligned} & F \subseteq E \subseteq \bigcup_k E_k \\ \implies & F = \bigcup_k E_k \cap F, \quad \overline{E_k \cap F} \subseteq \overline{E_k} \\ \implies & E_k \cap F \text{ son densos en niguna parte.} \end{aligned}$$

2. Si $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de cat I, $\bigcup_k E_k = \bigcup_k \bigcup_l \underbrace{E_{kl}}_{\text{denso en NP}}$ es una unión contable.

3. No hay conexión entre conjuntos de cat I y conjuntos despreciables del punto de vista de teoría de la medida.

> **Ejemplo:** $G_j = \bigcup_n (q_n - 2^{-(n+j+1)}, q_n + 2^{-(n+j+1)})$
> $\{q_j\}$ enumeración de $\mathbb{Q}$.
> $G_j$ es abierto y denso en $\mathbb{R}$.
>
> $$\begin{aligned} &\implies E_j = G_j^c \text{ es cerrado y denso en NP} \\ &\implies E := \bigcup_j E_j \text{ es cat I} \end{aligned}$$
>
> y de plena medida en $\mathbb{R}$.
> $\iff E^c$ es de medida 0 de Lebesgue.
>
> $$\begin{aligned} |E^c| &= |\bigcap E_j^c| \\ &= |\bigcap G_j| \leq |G_j| \\ |G_j| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+j+1)} \\ &= 2^{-j} \xrightarrow{j\to\infty} 0 \end{aligned}$$

> **Teorema 2.3.2** (Teorema de Baire)**.** *Sea $(X, d)$ **completo**. Entonces, $X$ es de la cat II en sí mismo.*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es de cat I en sí:

$$X = \bigcup_k \underbrace{E_k}_{\text{densos en NP}} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k}}_{=F_k \text{ denso en NP y cerrado}}$$

Llegaremos a una contradicción si demostramos que hay un $x \notin F_k, \quad \forall k$.

$F_1 \neq X$. $\overline{B_{r_1}}(x_1) \subseteq F^c$, $\overline{B_{r_2}}(x_2) \subseteq F_2^c$.

De esta manera obtenemos bolas cerradas $\overline{B_{r_k}}(x_k)$ tales que

1. $$\overline{B_{r_{k+1}}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_k}}(x_k)$$

2. $$\overline{B_{r_k}}(x_k) \subseteq F_k^c$$

3. $$r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2} \implies r_k \to 0$$

$\{x_k\}$ es Cauchy pues:

$$\forall k, l \geq n, x_k, x_l \in \overline{B_{r_n}}(x_n)$$

$$\implies |x_k - x_l| \leq 2r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\implies x_k \to x \in X$$

Como $x_k \in \overline{B_{r_k}} \quad \forall k \geq n$,

$$\implies x = \lim x_k \in \overline{B_{r_n}}(x_n) \subseteq F_n^c$$

Por lo que $x \notin F_n \quad \forall n$.

■

**Corolario 2.3.2.1.** *$G \subseteq X$ es **genérico** $\implies$ denso en $X$, con $X$ completo.*

*Demostración.* Asumimos que $G$ genérico no es denso, entonces hay una bola $B$

$$\implies \overline{B} \subseteq G^c = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup \overline{E_k}$$

$$\implies \overline{B} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k} \cap \overline{B}}_{\text{cerrados y densos en NP}}$$

Pero $\overline{B}$ es un espacio métrico completo, contradicción con el teorema de Baire. ■

**Corolario 2.3.2.2.** *$X$ completo, $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$ cerrado.*
*Entonces, por lo menos uno $F_k$ contiene una bola.*

### 2.3.2. Aplicación

> **Teorema 2.3.3.** *El conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ que no son derivables en nigún punto es **denso** en $C([0,1])$*

*Demostración.* Sea $\mathcal{D} = \{f \in C([0,1]) : f'(x_*) \text{ existe en un punto } x_* \in [0,1]\}$

Queremos demostrar que $\mathcal{D}$ es cat I en $C([0,1])$.

Por 2.3.2.1, $\mathcal{D}^c$ es genérico $\implies$ denso en $C([0,1])$.

Si $f \in \mathcal{D} \implies f'(x_*)$ existe

$$\implies \lim_{x \to x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

existe.

$$\implies |f(x) - f(x_*)| \leq M|x - x_*| \quad \forall x \in [0,1]$$

para algún $M > 0$.

$$\implies \mathcal{D} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

$E_N := \{f \in C([0,1]) : |f(x) - f(x_*)| \leq N|x - x_*| \text{ para algún } x_* \in [0,1]\}$

Estaremos listos si probamos que:

1. $E_N$ es cerrado en $C([0,1])$
2. $E_N$ es denso en ninguna parte.

1. $f_n \in E_N$ y $f_n \to f$, en $||\cdot||_\infty$.

   $[0,1] \ni x_n^* \to x^*$ (podemos extraer una subsucesión que converge)

$$|f_n(x) - f_n(x_n^*)| \leq N|x - x_n^*| \quad \forall x \in [0,1]$$

   Queremos demostrar que

$$|f(x) - f(x^*)| \leq N|x - x^*|$$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq ||f-f_n||_\infty \leq \varepsilon/2} + |f_n(x) - f_n(x^*)| + \underbrace{|f_n(x^*) - f(x^*)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x^*)| &\leq |f_n(x) - f_n(x^*)| + |f_n(x_n^*) - f_n(x^*)| \\ &\leq N|x - x_n^*| + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N(|x - x^*| + |x^* - x_n^*|) + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N|x - x^*| + \underbrace{2N|x_n^* - x^*|}_{\varepsilon/3} \end{aligned}$$

2. ¿Por qué $E_N$ es denso en NP de $X$?

$$P_M = \{\text{funciones continuas en } [0,1] \text{ derivables a trozos, } |f'| = M\}$$

son funciones zig-zag. Cuando $M > N$, $P_M \cap E_N = \varnothing$. Además, $P_M$ es denso en $C([0,1])$. Como consecuencia, $E_N$ no puede tener interior no trivial ya que $E_N$ no puede tener una bola abierta (hay funciones de $P_M$ en $E_N$ y $P_M$ es denso).

Mostraremos que $P_M$ es denso.

$$P = \{\text{las funciones continuas lineales a tozos}\} \overset{denso}{\subseteq} C([0,1])$$

Podemos aproximar cada $f \in P$ con una función $g \in P_M$ arbitrariamente bien.

■

### 2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta

Sean $(X, ||\cdot||_X), (Y, ||\cdot||_Y)$ espacios de Banach.

$$T \in \mathcal{B}(X,Y) \implies T^{-1}(O) \overset{ab}{\subseteq} X \quad \forall O \overset{ab}{\subseteq} Y$$

Si $T$ es biyectiva adicionalmente, entonces $S := T^{-1}$ es lineal (no necesariamente acotada). Sin embargo, si $S$ es continua, entonces $S^{-1}(U) \overset{ab}{\subseteq}, \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$

$$\iff T(U) \overset{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$$

**Definición 2.3.5.** Sea $T : X \to Y$ una aplicación. Decimos que $T$ es abierta si

$$T(U) \overset{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \overset{ab}{\subseteq} X$$

Si $T : X \to Y$ es lineal, continua y biyectiva, entonces $T^{-1} : Y \to X$ es lineal. ¿Es $T^{-1}$ continua?

Lo será cuando $T$ es abierta.

**Teorema 2.3.4** (Aplicación Abierta)**.** *Si $X, Y$ son espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y sobreyectiva, entonces $T$ es abierta.*

**Corolario 2.3.4.1.** *Si $X, Y$ son espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ es biyectiva, entonces $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$. Existen $c, C > 0$ tales que*

$$c||x||_X \leq ||\underbrace{Tx}_{y}||_Y \leq C||x||_X \quad \forall x \in X$$

$$c||T^{-1}y||_X \leq ||y||_Y$$

*Demostración del teorema 2.3.4.*

1. Será suficiente demostrar que $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$. ($B_r^X = B_r^X(0)$)

   Por linealidad

$$\begin{aligned} T(B_r^X(x)) &= T(x + B_r^X) \\ &= Tx + T(B_r^X) = y + \frac{r}{2}T(B_2^X) \\ &\supseteq y + \frac{r}{2}B_\delta^Y = B_{\frac{\delta r}{2}}^Y(y) \end{aligned}$$

2. Vamos a demostrar que $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^X$ para algún $\delta > 0$

   Por la sobreyectividad:

$$catII \to Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^X)}$$

   Entonces, $T(B_n^X) \supseteq B_r^Y(y)$ para algún $n \in \mathbb{N}, r > 0, y \in Y$. Tomamos $\tilde{y}$ tal que $|\tilde{y} - y| \leq \frac{r}{2}$ e $\tilde{y} = T\tilde{x}$ para algún $\tilde{x} \in B_n^X$.

$$T(B_{2n}^x(\tilde{x})) \supseteq \overline{T(B_n^X)} \supseteq B_r^Y(y) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^Y(\tilde{y})$$

Restando $T\tilde{x}$

$$T(B_{2n}^X) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^X$$

Reescalando

$$\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_{\frac{r}{4n}}^Y \quad \delta = \frac{r}{4n}$$

3. Tenemos $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^Y$. Reescalando

$$\overline{T(B_{2^{-k}}^X)} \supseteq B_{\delta 2^{-k}}^Y$$

¿Por qué $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$?

Fije $y_0 \in B_\delta^Y$. Podemos encontrar $x_0 \in B_1^X$ tal que

$$||y_0 - Tx_0||_Y < \frac{\delta}{2}$$

$$\implies y_1 := y_0 - Tx_0 \in B_{\delta/2}^Y$$

$\implies$ existe $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X$ tal que

$$||y_1 - Tx_1|| < \frac{\delta}{4}$$

De esta manera construimos sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$, tales que

*a*) $x_n \in B_{2^{-n}}^X, y_n \in B_{\delta 2^{-n}}^Y$

*b*) $y_{n+1} = y_n - Tx_n$

$x := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x_n \in X$ porque $X$ es Banach. Veremos que $Tx = y$ y $x \in B_2^X$.

$x$ es convergente puesto que es absolutamente convergente.

$$||x|| = \sum_{n=1}^{\infty} ||x_k|| \leq 2$$

Afirmamos que $Tx = y_0$ por construcción.

$$\begin{aligned} Tx &= \lim_{N\to\infty} T\left(\sum_{n=0}^{N} x_k\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \underbrace{Tx_k}_{y_k - y_{k+1}} \\ &= \lim_{N\to\infty} (y_0 - y_{N+1}) \\ &= y_0 \end{aligned}$$

ya que $y_{N+1} \to 0$.

■

### 2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado

**Definición 2.3.6.** Sean $X, Y$ espacios métricos. Decimos que $T : X \to Y$ es **cerrada** si su grafo en $X \times Y$

$$G_T = \{(x, Tx) \in X \times Y\}$$

es cerrado en $X \times Y$.

En otras palabras,

$$(x_n, Tx_n) \to (x, y) \in X \times Y \implies (x, y) \in G_T \iff y = Tx$$

**Nota:** $T : X \to Y$ es continua $\implies$ $T$ es cerrada.

$$x_n \to x \implies Tx_n \to Tx \implies (x_n, Tx_n) \to (x, Tx)$$

**Teorema 2.3.5.** *Sean $X, Y$ Banach. Entonces, $T \in \mathcal{B}(X, Y) \iff T$ es lineal y cerrada.*

*Demostración.* $\Longleftarrow$ : Utilizaremos el hecho que si $X, Y$ son Banach, entonces $X \times Y$ es Banach.

$$||(x,y)||_{X\times Y} := ||x||_X + ||y||_Y$$

$$G_T := \{(x,Tx)\} \subseteq X \times Y$$

1. $G_T$ es un subespacio de $X \times Y$.
2. $G_T \overset{cerr}{\subseteq} X \times Y$

   Entonces $G_T$ es un espacio de Banach en sí. Tenemos las proyecciones $\Pi_X : G_T \to X$ y $\Pi_Y : G_T \to Y$ continuas y lineales.

$$T = \Pi_Y \circ (\Pi_X)^{-1}$$

   ya que $\Pi_x$ es biyectiva, continua y lineal (en un espacio de Banach a otro Banach). Por el teorema 2,3,4,1, $\Pi_X^{-1}$ es continua. Por lo que $T = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1}$ es continua.

■

**Significado** Si queremos demostrar que una aplicación lineal $T : X \to Y$ es continua, $x_n \to X \implies Tx_n \to T_x$

Podemos asumir adicionalmente que $TX_n \to Ty$, y demostrar que $y = Tx$

Capítulo 3

# Espacios de Hilbert

## 3.1. Conceptos Básicos

**Definición 3.1.1.** Sea $H$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una función $H \times H \to \mathbb{K}$ que satisface

1. Linealidad en $\langle \cdot, y \rangle, \quad \forall y \in H$:

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$
$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

2. (Hermiticidad)

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

(En $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, esto es simetría)

3. (Definidad) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = \implies x = 0$

**Nota:** 1. y 2., implican que $\langle x, \cdot \rangle$ es lineal conjugada en la segunda entrada.

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

**Terminología** Tal función se llama **forma sesquilineal**

**Nota:** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una **forma simétrica definida positiva**

Decimos que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio pre-Hilbertiano**

De 1. y 2., $\langle 0, y \rangle = 0$, $\langle x, 0 \rangle = 0$

Definimos $||x|| := \langle x, x \rangle^{1/2}$

**Proposición 3.1.1** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea $H$ un espacio pre-Hilbertiano*

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad \forall x, y \in H$$

*Demostración.* Si $y = 0$, la desigualdad es verdadera. Podemos asumir que $y \neq 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle y, y \rangle \\ &= ||x||^2 + \underbrace{\lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \overline{\lambda} \langle x, y \rangle}_{2\Re(\langle x,y \rangle \overline{\lambda})} + |\lambda|^2| \cdot |y||^2 \end{aligned}$$

Evaluando en $\lambda = -\dfrac{\langle x, y \rangle}{||y||^2}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq ||x||^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle \frac{-\overline{\langle x, y \rangle}}{||y||^2}) \\ 0 &\leq ||x||^2 - 2\frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} + \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} \\ \implies& ||x||^2 \geq \frac{| \langle x, y \rangle |^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.2.** $|| \cdot ||$ *define una norma* $H$.

*Demostración.*

1. Definidad ✓
2. $||\lambda x|| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \overline{\lambda} ||x||^2)^{1/2} = |\lambda| \cdot ||x||$
3. (Desigualdad triangular)

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 = ||x||^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + ||y||^2 &\leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.3.** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *es continuo en* $H \times H$

*Demostración.* $x_n \to x$ en $||\cdot$ e $y_n \to y$ en $|| \cdot ||$

$$
\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle| \\
&\leq ||x_n - x|| \cdot ||y_n|| + ||x|| \cdot ||y_n - y|| \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

■

**Definición 3.1.2.** Decimos que $x \perp y$ en el espacio pre-Hilbertiano $H$ si $\langle x, y\rangle = 0$. Si $E \subseteq H$ subconjunto, definimos el **espacio ortogonal**

$$E^{\perp} := \{x \in H : x \perp y \quad \forall y \in E\}$$

$E^{\perp}$ es un **subespacio** de $H$ y es cerrado:

$x_n \in E^{\perp}$ y $x_n \to x$ en $H$ entonces

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0 \quad \forall y \in E$$

**Teorema 3.1.4** (Pitagoras)**.** *Si $x_1, \ldots, x_n \in H$ (pre-Hilbertiano) son mutuamente ortogonales, entonces*

$$||x_1 + \cdots + x_n||^2 = \sum_{k=1}^{n} ||x_k||^2$$

**Proposición 3.1.5** (Ley del paralelogramo)**.**

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

*Demostración.*

$$||x \pm y||^2 = ||x||^2 \pm 2\Re\langle x, y\rangle + ||y||^2$$

Sumando los 2 términos (diagonales), estamos listos. ■

**Definición 3.1.3.** Decimos que un espacio $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ pre-Hilbertiano es un espacio de **Hilbert** si es **completo** respecto $||\cdot||$ inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$

**Ejemplo:** $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n x_k\overline{y_k}$ es un espacio de Hilbert.

**Ejemplo:** $(\ell^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. $\langle\{x_k\}, \{y_k\}\rangle = \sum_{k=1}^\infty x_k\overline{y_k}$

¿$\ell^p$ tiene una estructura de espacio de Hilbert? $\iff p = 2$

**Ejemplo:** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida, definimos

$$L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_X |f|^2\, d\mu < \infty\}/_\sim$$

$f_1 \sim f_2$ si $\{f_1 \neq f_2\}$ es despreciable.

## 3.2. Teorema de la Proyección

Sea $H$ un espacio de Hilbert. $C \subseteq R^n$ cerrado y convexo. Existe único $y \in C$ tal que $y$ minimiza la distancia entre $x$ y $C$.

**Definición 3.2.1.** Sea $C$ un subconjunto de un espacio vectorial $V$. Decimos que $C$ es **convexo** en $V$ si

$$\forall x, y \in C \quad (1-t)x + ty \in C \quad \forall t \in [0,1]$$

**Teorema 3.2.1.** *Sea $C \subseteq H$ un subconjunto cerado y convexo del espacio de Hilbert $H$. Entonces $\forall x \in H, \exists! y = P_C x \in C$ que satisface:*

$$||x - P_C x|| = d(x, C) = \inf_{c\in C} ||x - c||$$

*Además, $y = P_C x \iff \Re\langle c - y, x - y\rangle \leq 0, \quad \forall c \in C$*

*Demostración.* Tome $\{y_n\} \subseteq C$, tal que

$$d_n := ||x - y_n|| \xrightarrow{n\to\infty} d := d(x_n, c)$$

$\{y_n\}$ será convergente si es Cauchy, ya que $y_n \to y \in H$. Ya que $C$ es cerrado, de hecho $y \in C$.

Por la ley del paralelogramo, con $v = x - y_n, w = x - y_m$

$$\begin{aligned}
2d_n^2 + 2d_m^2 &= ||v-w||^2 + ||v+w||^2 \\
&= ||y_n - y_m||^2 + ||2x - (y_n + y_m)||^2 \\
&= ||y_n - y_m||^2 + 4 \left|\left| x - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C} \right|\right|^2 \\
&\geq ||y_n - y_m||^2 + 4d^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
||y_n - y_m||^2 &\leq 2d_n^2 + d_m^2 - 4d^2 \\
&\xrightarrow{n,m\to\infty} 0
\end{aligned}$$

por lo que $\{y_n\}$ es Cauchy.

$y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

$$||x - y|| = \lim_{n\to\infty} \overbrace{||x - y_n||}^{d_n} = d$$

Este minimizador es el único!. Si hubiera otro $z \neq y$, aplicamos el mismo argumento a $\{y, z, y, z, \ldots\}$ que no converge por construcción, pero es Cauchy, lo que es una contradicción.

$\Longrightarrow$ : Sea $c \in C$ y considere $(1-t)y + tc$, $t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
||x - (1-t)y - tc||^2 &= ||x - y - t(c-y)||^2 \\
&= ||x-y||^2 - 2t\Re\langle x-y, c-y\rangle + t^2||c-y||^2 \\
&\geq ||x-y||^2
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; 2t\Re\langle x-y, c-y\rangle \leq t^2||c-y||^2$$

$$\Longrightarrow \; 2\Re\langle x-y, c-y\rangle \leq 0$$

$\Longleftarrow$ : Evalúe $||x - (1-t)y + tc||^2$ en $t = 1$.

$$\begin{aligned}||x-c||^2 &= ||x-y||^2 - 2\Re\langle x-y, c-y\rangle + ||c-y||^2 \\ &\implies ||x-c||^2 - ||x-y||^2 = ||c-y||^2 - 2\Re\langle x-y, c-y\rangle \\ &\implies ||x-c||^2 \geq ||x-y||^2 \quad \forall c \in C\end{aligned}$$

Tenemos igualdad $\iff c = y$. ■

**Ejemplo:** $W \subseteq H$ es un subespacio $\implies W$ es convexo.

**Teorema 3.2.2.** *Sea $F \subseteq H$ un subespacio cerrado. Entonces $H = F \oplus F^{\perp}$, es decir, que todo $x \in H$ se puede escribir de manera única como $x = y + z$ con $y \in F$ y $z \in F^{\perp}$. Además $y = P_F x$, $z = P_{F^{\perp}} x$. y*

$$P_F : H \to H$$

*es lineal, acotado y satisface:*

- $||P_F|| \leq 1$ *(= 1 cuando $F = \{0\}$)*
- $P_F^2 = P_F$
- $\operatorname{Im} P_F = F$, $\ker P_F = F^{\perp}$
- $\langle P_F x_1, x_2\rangle = \langle x_1, P_F x_2\rangle$

**Definición 3.2.2.** $P_F$ se llama la **proyección ortogonal**

*Demostración.* Ya que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, la unicidad se cumple.

$$y + z = y' + z' \implies y - y' = z' - z = 0$$

Tome $x \in H$. Define $y = P_F x$. Queremos demostrar que $x : x - y \in F^{\perp}$. Del teorema **??** sabemos que

$$\Re\langle c - y, x - y\rangle \leq 0 \quad \forall c \in F$$

.

$$\implies \Re\langle v, z\rangle \leq 0 \quad \forall v \in F$$

$$\implies \Re\langle \lambda v, z\rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\implies \Re\lambda\langle v, z\rangle \leq 0$$

Seba *añadir align*

tome $\lambda = \overline{\langle v, z\rangle}$

$$\implies \Re |\langle v, z\rangle|^2 \leq 0$$
$$\implies |\langle v, z\rangle| = 0 \implies z \in F^{\perp}$$

Propiedades de $P_F$: $x_1 = y_1 + z, \quad x_2 = y_2 + z_2$

$$\begin{aligned}\langle P_F x_1, x_2\rangle &= \langle y_1, x_2\rangle \\ &= \langle y_1, y_2 + z_2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x_1, P_F x_2\rangle &= \langle y_1 + z_1, y_2\rangle \\ &= \langle y_1, y_2\rangle\end{aligned}$$

Por lo que $P_F$ es lineal

$$\begin{aligned}\langle P_F(x_1 + x_2), x_3\rangle &= \langle x_1 + x_2, P_F x_3\rangle \\ &= \langle x_1, P_F x_3\rangle + \langle x_2, P_F x_3\rangle \\ &= \langle P_F x_1, x_3\rangle + \langle P_F x_2, x_3\rangle \\ &= \langle (P_F x_1 + P_F x_2), x_3\rangle\end{aligned}$$

$$\iff P_F(x_1 + x_2) = P_F x_1 + P_F x_2$$

$P_F(\lambda x) = \lambda P_F x$ de la misma manera.

$P_F/_F = \operatorname{Id}/_F$

$$\begin{aligned}&\implies P_F^2 x = P_F(P_F x) = P_F x \quad \forall x \in H \\ &\implies P_F^2 = P_F\end{aligned}$$

$||P_F x||^2 = ||y||^2 \leq ||x||^2$ mientras

$$||x||^2 \leq ||y||^2 + ||z||^2$$
$$\implies ||P_F|| \leq 1$$

■

## 3.3. Teorema de Representación de Riesz

**Teorema 3.3.1.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $f \in H^*$ un funcional lineal acotado. Entonces existe único $u \in H$ tal que*

$$f(x) = \langle x, u \rangle \quad \forall x \in H$$

**Observaciones**

1. $||f||_* = ||u||$ por Cauchy-Schwarz
2. $$\begin{aligned} H^* &\to H \\ f &\to u_f \end{aligned}$$

   es una isometría biyectiva, lineal-conjugada. Para todo $v \in H$ define $f_v(x) : \langle x, v \rangle$
3. $f_1 + f_2 \to u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2}$, ya que

   $$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) = \langle x, u_{f_1} \rangle + \langle x, u_{f_2} \rangle \\ &= \langle x, u_{f_1} + u_{f_2} \rangle \implies u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2} \end{aligned}$$
4. ¿$\lambda f \to u_{\lambda f} = \lambda u_f$?

   $$[\lambda f](x) = \lambda(f(x)) = \lambda \langle x, u_f \rangle = \left\langle x, \overline{\lambda} u_f \right\rangle$$

**Nota:** Teorema falso. Cuando $H$ es solo espacio pre-Hilbertiano, por ejemplo,

$$H = C([-1, 1])$$

con producto interno usual.

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt \in H^*$$

*Demostración.* Si $f = 0 \implies u = 0$. Asumimos que $f \neq 0$ y consideramos $F := \ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$. $F$ es un subespacio de $H$ cerrado. Si $f \neq 0 \implies F \neq H$. Por el teorema de la proyección (3.2.2)

$$H = F \oplus F^{\perp}$$

Elije $z \in F^{\perp} \setminus \{0\}$. Afirmamos que $u = \overline{f(z)}z|z|^2 \neq 0$ satisface $f = \langle \cdot, u\rangle$. Ya que

$$\begin{aligned} f(z)x - f(x)z &\in F \\ \implies f(z)x - f(x)z &\perp z \\ \langle f(z)x, z\rangle - \langle f(x)z, z\rangle &= 0 \\ \implies \left\langle x, \overline{f(z)}z \right\rangle &= f(x)||z||^2 \\ \implies f(x) &= \left\langle x, \frac{\overline{f(x)}z}{||z||^2} \right\rangle \end{aligned}$$

Entonces $u \in H$ que satisface $f = \langle \cdot, u\rangle$. Es único: si tenemos $u, u' \in H$

$$\begin{aligned} f(x) = \langle x, u\rangle &= \langle x, u'\rangle \\ &\implies \langle x, u - u'\rangle = 0 \quad \forall x \in H \\ &\implies u - u' \in H^{\perp} = \{0\} \end{aligned}$$

■

## 3.4. Bases Ortonormales

Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es LI si $\forall I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A$,

$$\sum_{i\in I} c_i v_i = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i \in I$$

$$\text{Gen}(\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}) = \left\{ \sum_{i\in I} c_i u_i : I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A, c_i \in \mathbb{K} \right\}$$

**Definición 3.4.1.** Sea $H$ un espacio de Hilbert, $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es ortonormal (o.n.) si

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \delta \text{ de Kronecker}$$

Suponga que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es o.n.

$$F := \text{Gen}(\{e_i\}_i^n) \subseteq H$$

es un subespacio cerrado. Podemos definir $P_F$

$$P_F x = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i}_{y}$$

Es suficiente demostrar que $x - y \perp F$.

$$\left\langle x - \sum_{x, e_i} e_i, e_k \right\rangle = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, n$$

$$||P_F x||^2 \leq ||x||^2$$

Por Pitagoras

$$= \sum_{i=1}^{n} || \langle x, e_i \rangle e_i||^2 \leq ||x||^2$$
$$\implies \sum_{i=1}^{n} | \langle x, e_i \rangle |^2 \leq ||x||^2$$

**Proposición 3.4.1** (Desigualdad de Bessel)**.** *Sea* $S = \{e_\alpha\}_\alpha$ *un conjunto o.n. Entonces,*

$$\sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq ||x||^2$$

$$\sum_\alpha r_\alpha := \sup\left\{\sum_{i\in I} r_i : I \subseteq A\right\}$$

*Demostración.* Utilizando $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq ||x||^2$, y tomando supremo. ∎

**Consecuencias** $\{\alpha : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{\alpha \in A : |\langle x, e_\alpha\rangle| \geq \frac{1}{n}\}$ es **contable**: Si es infinito: $|\langle x, e_{\alpha_k}\rangle|^2 > \frac{1}{n^2}, k = 1, \ldots$. Sumando suficientes términos superaríamos $||x||^2$, que no es posible por Bessel.

**Definición 3.4.2.**

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha\rangle$$

**coeficientes de Fourier** respecto a $\{e_\alpha\}$

$$\sum_\alpha |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq ||x||^2$$

¿Cuando tenemos igualdad?

**Teorema 3.4.2.** *Sea* $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *un subconjunto o.n. del espacio de Hilbert* $H$*. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $$\sum_\alpha |\hat{x}(\alpha)|^2 = ||x||^2$$
2. $\mathcal{B}$ *es* ***maximal*** *en el sentido de:*
   *Si* $x \in H$*, tal que* $x \perp e_\alpha, \forall\alpha \in A \implies x = 0$
3. $\forall x \in H$,
   $$x = \sum_\alpha \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$$
   *donde la suma en el lado derecho tiene solo un número contable de términos no ceros y la suma de estos converge a* $x$ *en* $||\cdot||$ *independiente de su orden.*
4. $\mathrm{Gen}(\mathcal{B})$ *es denso en* $H$

**Definición 3.4.3.** Decimos que un conjunto $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o.n. es una **base ortonormal** si satisface cualquiera de *1.-4.*

*Demostración. 2.* $\implies$ *3.* Sea $e_{\alpha_1},\ldots,e_{\alpha_n},\ldots$ una enumeración de los $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{J}}$ para los cuales $\hat{x}(\alpha)\neq 0$. Por Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\hat{x}(\alpha_k)|^2 \leq ||x||^2 < \infty$$

$$\implies \sum_{k=n}^{m}|\hat{x}(\alpha_k)|^2 \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Por Pitagoras,

$$||\sum_{k=n^m}\langle x, e_{\alpha_k}\rangle\, e_{\alpha_k}|| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$

Sea $S_n=\sum_{k=1}^n \hat{x}(\alpha_k)e_{\alpha_k}$. $\{S_n\}$ es Cauchy en $H$

$$\implies S_n \xrightarrow{n\to\infty} S \quad \text{en } H$$

Además

$$\begin{aligned}\langle x-S, e_\alpha\rangle &= \langle x, e_\alpha\rangle - \langle S, e_\alpha\rangle\\ &= \langle x, e_\alpha\rangle - \lim_{n\to\infty}\langle S_n, e_\alpha\rangle\\ &= \begin{cases}0 & \text{cuando } \alpha\in\mathcal{J}\\ 0 & \text{cuando } \alpha\notin\mathcal{J}\end{cases} \qquad\qquad \implies x-S=0 \implies x=S\end{aligned}$$

*3.* $\implies$ *1.*: Por continuidad de la norma

$$\begin{aligned}||x||^2 &= ||\lim_{n\to\infty} S_n||^2\\ &= \lim_{n\to\infty}||S_n||^2\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|\hat{x}(\alpha_k)|^2\\ &= \sum_{\alpha}|\hat{x}(\alpha)|^2\end{aligned}$$

*1.* $\implies$ *2.*: obvio

$$||x||^2 = \sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 = 0 \implies x = 0$$

*3.* $\implies$ *4.*: Si $x \perp e_\alpha, \quad \forall\alpha,$

$$\begin{aligned} &\implies x \perp \text{Gen}(\{e_\alpha\}) \\ &\overset{\text{continuidad}}{\implies} x \perp \overline{\text{Gen}(\{e_\alpha\})} = H \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

■

**Ejemplo:** $\ell^2$, $e_k = \{(0, \dots, \underbrace{1}_{k}, 0, \dots)\}, k \in \mathbb{N}$.

$$||x||^2 = \sum |x_i|^2 = \sum |\langle x, e_i\rangle|^2$$

**Teorema 3.4.3.** *Todo espacio de Hilbert tiene una* ***base ortonormal****.*

*Demostración.* Utiliza el Lema de Zorn ■

**Definición 3.4.4.** $X$ espacio métrico es **separable** si existe un subconjunto $C \subseteq X$ contable y denso en $X$.

**Ejemplo:** $\ell^p, p \in [1, \infty)$ es separable.

$L^2([0,1])$ es separable. Polinomios con coeficientes $\in \mathbb{K} \overset{\text{denso}}{\subseteq} C([0,1]) \overset{\text{denso}}{\subseteq} L^2([0,1])$

**Seba** *Faltan los polinomios con coefs* $\in \mathbb{Q}$ cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

**Teorema 3.4.4.** *$H$ es separable si y solo si existe una* ***base ortonormal*** *para $H$ que es* ***contable****. En este caso, toda base o.n. es contable.*

*Demostración.* $\implies$ : $\{x_n\} \subseteq H$ es denso. $x_1, \dots, x_n, \dots$ Descartando posiblemente términos, podemos asumir que $x_1, \dots, x_n$ son LI $\forall n \in \mathbb{N}$ y todos los descartados pertenecen a $\text{Gen}(\{x_k\})$. De esta manera, $\text{Gen}(\{x_k\})$ es denso en $H$.

Por Gram-Schmidt producimos una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que, $\text{Gen}(\{y_k\}_{k=1}^n) = \text{Gen}(\{x_k\}_{k=1}^n) \forall n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B} = \{y_k\}$ es un conjunto o.n.

$\mathcal{B}$ es o.n. y $\text{Gen}(\mathcal{B}) = \text{Gen}(\{x_k\})$ es denso en $H$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base ortonormal contable.

$\Longleftarrow$ : Sea $\{e_k\}_k$ una base o.n. contable.

$$G_n := \text{Gen}(\{e_k\}_{k=1}^n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}$$

$\implies$ $\text{Gen}(\{e_k\}_k) = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$ es denso en $H$.

$$\bigcup_{n=1}^\infty \hat{G_n} \overset{\text{denso}}{\subseteq} \bigcup_{n=1}^\infty G_n$$

donde $\hat{G_n} = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_k \in \mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}\}$

**Seba** *añadir cases en vola*

Sea $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ otra base o.n.

$$A_n = \left\{ \alpha \in \mathcal{A} : \left\langle \overbrace{x}^{e_n}, u_\alpha \right\rangle \neq 0 \right\} \text{ es contable}$$

Además, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$,

$$\langle u_\alpha, e_k \rangle \neq 0 \text{ para algún } k$$

por la maximalidad de la base $\{e_n\}_n$ (que es contable). Entonces, $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ es contable.

■

Vamos a demostrar que todo espacio de Hilbert separable es $\ell^2 = \{\{x_k\} \in \mathbb{K}^n : \sum ||x_k|^2| < \infty\}$

**Definición 3.4.5.** Sean $H_1, H_2$ dos espacios de Hilbert. Un **isomorfismo** $T : H_1 \to H_2$ se llama **unitario** si

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{H_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \quad \forall x_1, x_2 \in H_1$$

$T$ unitario $\implies$ $T$ es una **isometría**:

$$||Tx||_{H_2}^2 = \langle Tx, Tx \rangle_{H_2} = \langle x, x \rangle_{H_1} = ||x||_{H_1}^2$$

**Teorema 3.4.5.** *Todo espacio de Hilbert separable es unitariamente isomorfo a $\ell^2$.*

*Demostración.* Sea $\{e_n\}$ una base o.n. contable para $H$.

$$\begin{aligned} &H \to \ell^2 \\ &x \to \hat{x} = (\hat{x}(1), \hat{x}(2), \ldots) \end{aligned}$$

donde $\hat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle$.

Por Parseval,

$$||\hat{x}||_{\ell^2}^2 = \sum_k |\hat{x}(k)|^2 = ||x||^2 < \infty$$

$$\implies \hat{x} \in \ell^2 \implies T \text{ es bien definido}$$

es lineal, inyectivo (por maximalidad), sobreyectivo: si $c \in \ell^2, \sum_{k=1}^n c_k e_k \xrightarrow{H} x_c$, donde

$$\hat{x}_c(k) = \langle x_c, e_k \rangle = c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es una isometría: **Identidad de Parseval**.

$$||Tx||_{\ell^2}^2 = ||x||_H^2$$

Identidad de Polarización:
$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$
$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^1 - i||x-iy||^2)$

Por lo tanto, $T$ preserva el producto interno:

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{\ell^2} = \langle x_1, x_2 \rangle_H$$

$\blacksquare$

## 3.5. Series de Fourier

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periódica de período $2\pi$.

$F : \Pi \to \mathbb{C}$, $\Pi$ es el círculo unitario.

$$F(e^{i\theta}) = f(\theta)$$

$$\hookrightarrow \tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$$

con

$$\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$$

Vamos a asumir que $\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$

$$f \in L^2(\Pi) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ medibles, periódicas-}2\pi \text{ t.q.} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < \infty \right\} = L^2([-\pi, \pi])$$

Definimos

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

**Proposición 3.5.1.** *$\{e_n\}$ es un conjunto ortonormal de $L^2(\Pi)$.*

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n(x)\overline{e_m(x)}\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi} e^{inx} e^{-imx}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\, dx \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{2\pi} = 1 & n = m \\ \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} & n \neq m \end{cases}
\end{aligned}$$

∎

**Definición 3.5.1.** Sea $f \in L^2(\Pi)$. Defina

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \langle f, e_n \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx\end{aligned}$$

coeficiente de Fourier.

$$f \to \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$$

serie de Fourier.

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

suma de Fourier parcial.

Preguntas:

1. ¿Converge $S_n f$ a $f$ en $L^2$?
2. ¿Converge $S_N f(x)$ a $f(x)$ puntualmente?

   ¿Si falla para algún $x$, es este comportamiento raro o genérico?
3. ¿Converge $S_N f$ a $f$ en otras normas (e.g. $L^p$,p>1)?