



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
MAT255I - ANÁLISIS FUNCIONAL  
2º SEMESTRE 2023

## **MAT255I**

### **Análisis Funcional**

Sebastián Guerra ([sebastian.guerrap@uc.cl](mailto:sebastian.guerrap@uc.cl))  
Profesor: Nikola Kamburov ([nikamburov@mat.uc.cl](mailto:nikamburov@mat.uc.cl))

*Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir*

Versión: 20 de noviembre de 2023

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Intro al Análisis Funcional</b>              | <b>4</b>  |
| 1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?           | 4         |
| 1.2. Motivación                                    | 5         |
| 1.3. Objeto central: espacio de Banach             | 5         |
| 1.4. Resultados que vamos a ver                    | 6         |
| <b>2. Espacios de Banach</b>                       | <b>8</b>  |
| 2.1. Nociones básicas                              | 8         |
| 2.1.1. Espacios Normados                           | 8         |
| 2.1.2. Espacios de Banach                          | 11        |
| 2.2. Operadores y funcionales                      | 14        |
| 2.2.1. Operadores Lineales                         | 14        |
| 2.2.2. Espacio Dual                                | 18        |
| 2.2.3. Espacio cociente                            | 21        |
| 2.2.4. Completación de espacios normados           | 23        |
| 2.3. El teorema de Baire                           | 23        |
| 2.3.1. Categorías de Baire                         | 23        |
| 2.3.2. Aplicación                                  | 27        |
| 2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta            | 28        |
| 2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado                   | 31        |
| <b>3. Espacios de Hilbert</b>                      | <b>33</b> |
| 3.1. Conceptos Básicos                             | 33        |
| 3.2. Teorema de la Proyección                      | 36        |
| 3.3. Teorema de Representación de Riesz            | 40        |
| 3.4. Bases Ortonormales                            | 41        |
| 3.5. Series de Fourier                             | 48        |
| 3.5.1. Series de Fourier y convergencia            | 48        |
| 3.5.2. Convergencia puntual de la serie de Fourier | 60        |
| 3.6. Repaso/Crash course en teoría de la medida    | 63        |
| 3.6.1. Espacios de medida y funciones medibles     | 64        |
| 3.6.2. La integral de Lebesgue                     | 67        |
| 3.7. Espacios de Lebesgue $L^p$                    | 70        |
| 3.7.1. Espacios $L^p$                              | 70        |
| 3.7.2. Los espacios $L^p$ y dualidad               | 74        |
| 3.7.3. Teorema de Representación de Riesz          | 75        |
| 3.8. Teorema de Hahn-Banach                        | 88        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. Teoría de Operadores</b>                         | <b>96</b> |
| 4.1. Relaciones de Ortogonalidad . . . . .             | 96        |
| 4.2. Operadores Compactos . . . . .                    | 99        |
| 4.3. La Teoría de Riesz-Fredholm . . . . .             | 104       |
| 4.4. Nociones básicas de la teoría espectral . . . . . | 111       |

# Intro al Análisis Funcional

## 1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

**Definición 1.1.1.** Un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{K}$  campo de escalares tiene dimensión infinita si  $\forall n \in \mathbb{N}$  hay  $n$  elementos de  $V$  que son linealmente independientes sobre  $\mathbb{K}$

**Ejemplo:**  $V = C([0, 1], \mathbb{R}) =$  funciones reales continuas en  $[0, 1]$ .  
 $\{1, x, \dots, x^{n-1}\} \subseteq V$  es linealmente independiente sobre  $\mathbb{R}$ .

*Demostración.*  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0, a_k \in \mathbb{R}.$

Reconocemos que existe la operación  $\frac{d}{dx}$  definida en  $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ , funciones suaves, y la operación evaluar en  $x = 0$ .

Evaluando en  $x = 0 \rightarrow a_0 = 0$ . Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en  $x = 0$ :

$$a_1 = 0$$

...



*Demostración alternativa.* Reconocemos que hay un producto interno en  $V = C([0, 1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

$$\{f_k = \sin(\pi kx)\}_{k=1}^n \subseteq V$$

$$\langle \sin(\pi kx), \sin(\pi lx) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^n a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_l \rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_l, f_l \rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \dots, n$$

■

## 1.2. Motivación

**Ejemplo** (Ecuación de Poisson):

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

**Seba** *Añadir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \rightarrow Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución  $u \in X$  para ciertos espacios  $X, Y$  apropiados.

El Análisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que **comparten** las **mismas características** topológicas/algebraicas/métricas.

## 1.3. Objeto central: espacio de Banach

**Definición 1.3.1** (Espacio de Banach).  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es un espacio normado **completo** (clave para sacar límites).

$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ completos} \} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, \|\cdot\|) \} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) \text{ completos} \}$

**Seba** Arreglar

## Lógica de inclusiones

1.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induce una norma  $\|\cdot\|$

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

2.  $\|\cdot\|$  induce una métrica  $d(\cdot, \cdot)$

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

## 1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

**Ejemplo:** Cada funcional lineal en  $\mathbb{R}$  ( $l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) se puede representar como  $l(v) = v \cdot w$  para algún vector (único)  $w \in \mathbb{R}^n$ .

En la situación de dimensión  $\infty$ , se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

**Teorema 1.4.1** (Representación de Riesz). *Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert y  $l : V \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal **continuo**. Entonces existe un único  $w \in V$ , tal que*

$$l(v) = \langle v, w \rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. **contraintuitivos**.

**Ejemplo:**  $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$  es compacta (Heine-Borel).

En  $\dim V = \infty$ , este teorema es falso.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $V$  un espacio de Banach y sea  $B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ .  $B$  es compacto en  $V \iff \dim V < \infty$*

**Ejemplo:** En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subseteq L^p([0, 1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.

$\Rightarrow$  motiva la definición de topologías débiles.

# Espacios de Banach

## 2.1. Nociones básicas

### 2.1.1. Espacios Normados

**Definición 2.1.1** (Espacios métricos). Un espacio métrico  $(X, d)$  y  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  la métrica que satisface:

1.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría)  $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Definición 2.1.2.** Sea  $V$  un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ). Una norma en  $V$  es una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface:

1.  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. (Desigualdad triangular)  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Una función  $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$  que satisface solo 2. y 3. se llama **semi-norma**.

Una espacio vectorial  $V$  con una norma se llama **Espacio normado**  $(V, \|\cdot\|)$ .

**Proposición 2.1.1.**  $(V, \|\cdot\|)$  define un espacio métrico con métrica  $d(v, w) := \|v - w\|$ .

**Ejemplo:** ■  $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

- En  $\mathbb{R}^2$ ,  $|(x_1, x_2)| := |x_1|$  define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} \{x_k\}$  es una norma.



■

$$|x|_p := \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty)$$

**Seba** Añadir dibujos de norma infinito y norma 1

**Proposición 2.1.2.** En  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{C}^n$  todas normas son equivalentes: si  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  son 2 normas, existe  $c > 0$  tal que

$$\frac{1}{c} \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq c \|v\|_2, \quad \forall v \in V$$

**Definición 2.1.3.** Sea  $X$  un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

**Ejemplo:**  $C_\infty([0, 1]) = C([0, 1])$  (funciones continuas)

**Proposición 2.1.3.**  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$  define una norma en  $C_\infty(X)$ .

*Demostración.* 1.  $\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \forall x \in X$ .

2.

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot \|f\|_\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en  $\|\cdot\|_\infty$

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

**Ejemplo:**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{ \{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : \|a\|_p < \infty \}$$

donde

$$\|a\|_p := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ } \sigma\text{-medibles, tales que } \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

donde

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int |f|^p d\sigma \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_x |f|$$

**Ejemplo:**  $X = [0, 1]$ ,  $\sigma$  = medida de Lebesgue. En  $C([0, 1])$  definimos

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$$

$$\|f\|_{L^1} = \int |f(x)| dx$$

Estas 2 normas **no son equivalentes**

### 2.1.2. Espacios de Banach

**Definición 2.1.4.** Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si es **completo** con respecto a la métrica inducida.

**Ejemplo:**  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)  
 $L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es un espacio de Banach (cuando  $(X, \mathcal{B}, \sigma)$  es completo).

**Proposición 2.1.4.**  $C_\infty(X)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.*  $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$  de Cauchy.

1. Adivinar el límite  $f$ .
2. Probar la convergencia:

$$\|f_n - f\| \rightarrow 0$$

3.  $f$  está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo  $x \in X$  fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es  $\{f_n(x)\}_n$  es Cauchy en  $\mathbb{C}$ .

$$\implies f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es  $f_n \rightarrow f$  uniformemente sobre  $X$ .

$\implies f$  es continua sobre  $X$ .

¿Por qué  $f$  es acotada?

Considere  $\varepsilon = 1$

$$\implies \|f_n - f_{\bar{N}}\|_\infty \leq 1$$

cuando  $n \geq \bar{N} := N(1)$ .

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &\leq \|f_{\bar{N}}\|_\infty + \|f_n - f_{\bar{N}}\|_\infty \\ &\leq \|f_{\bar{N}}\|_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

**Definición 2.1.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado.  $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es **sumable** si

$$S_m = \sum_{n=1}^m v_n$$

converge.

$\sum_n v_n$  es **absolutamente sumable** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|$$

converge.

■

**Proposición 2.1.5.** Si  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  es absolutamente sumable, entonces,  $\{S_m\}$  es Cauchy

**Teorema 2.1.6.** *Un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

*Demostración.*  $\Leftarrow$  :

1. Tome una sucesión  $\{v_n\}$  de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge.  $v_{n_k} \rightarrow v$  en  $V$ . Fije  $\varepsilon > 0$ .  $\Rightarrow \|v_m - v\| \leq \underbrace{\|v_m - v_{n_k}\|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{\|v_{n_k} - v\|}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$ ,  
tomando  $k, m$  suficientemente grandes.
2. Dos trucos: Podemos “acelerar” la convergencia. Existe una subsucesión  $\{v_{n_k}\}$  tal que

$$\|v_{n_{k+1}} - v_{n_k}\| \leq 2^{-k} \quad (2.1)$$

$$\|v_n - v_m\| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$$n_k := N_1 + \dots + N_k$$

Afirmamos que  $\{v_{n_k}\}$  converge.

Truco de la suma telescópica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^m (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S \in V$$

$$\Rightarrow v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

## 2.2. Operadores y funcionales

### 2.2.1. Operadores Lineales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

**Ejemplo:**

$$T : C([0, 1], \mathbb{C}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{C})$$

$$f \rightarrow F(x) = \int_0^x f(y) dy$$

$T$  es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y < x\}} f(y) dy$$

**Definición 2.2.1.**  $V, W$  son 2 espacios vectoriales.

$T : V \rightarrow W$  es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$$

$$f \rightarrow \int_0^1 \underbrace{K(x, y)}_{\text{Kernel}} f(y) dy := T f(x)$$

operador integral. Cuando  $K \in C([0, 1]^2)$ ,  $T$  está bien definida.

En  $\dim \infty$  vamos a exigir que los operadores lineales sean **continuos**.

**Definición 2.2.2.**  $T : V \rightarrow W$ ,  $V, W$  son espacios métricos. Decimos que  $T$  es continuo si

$$T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} V, \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} W$$

$$\iff T^{-1}(C) \stackrel{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \stackrel{cerr}{\subseteq} W$$

$$\iff v_n \rightarrow v \text{ en } V \text{ entonces } T v_n \rightarrow T v \text{ en } W.$$

**Teorema 2.2.1.** Sean  $V, W$  espacios normados. Entonces  $T : V \rightarrow W$  operador lineal es continuo si y solo si

$$\|Tv\|_W \leq C\|v\| \quad \forall v \in V \quad (2.2)$$

para alguna constante  $C$ .

**Definición 2.2.3.** Operador lineal que satisface (2.2) se llama **acotado**.

*Demostración.*  $\Rightarrow$  : Sea  $T$  continuo.  $B := \{\|w\|_W < 1\}$

$$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : \|v\|_V < r\}$$

pues  $T^{-1}(B)$  es abierto

$$\Rightarrow T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : \|v\|_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio  $\frac{r}{2}$ .

$$\|T\bar{v}\|_W < 1$$

Todo  $v \in V, v \neq 0$  se puede escribir como  $v = \frac{\bar{v}}{r/2}\|v\|_V$

Para algún  $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$\|Tv\|_W = \|T(\frac{\bar{v}}{r/2}\|v\|_V)\|_W$$

$$= \|\frac{2}{r}\|v\|_V T(\bar{v})\|_W$$

$$= \frac{2}{r}\|v\|_V \|T\bar{v}\|_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r}\|v\|_V \quad \forall v \neq 0$$

■

**Ejemplo:**

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x, y)f(y) dy$$

es acotado en  $(C([0, 1]), |||_\infty)$

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x, y)|}_{\leq M} |f(y)| dy \\ &\leq M \int_0^1 |f(y)| dy \leq M ||f||_\infty \quad \forall x \implies ||Tf||_\infty \leq M ||f||_\infty \end{aligned}$$

**Definición 2.2.4.** Sean  $V, W$  espacios normados. Defina  $\mathcal{B}(V, W)$  como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de  $V$  a  $W$ . Obviamente  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio vectorial.

Norma operador  $T : V \rightarrow W$ :

$$||T|| := \sup_{||v||=1} ||Tv||$$

Obviamente,  $T \in \mathcal{B}(V, W), ||T|| < \infty$

$$||Tv|| \leq C \underbrace{||v||}_1 = C$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

De hecho, para  $T \in \mathcal{B}(V, W)$

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup_{v \neq 0} \frac{||Tv||}{||v||} = \sup_{||v|| \leq 1} ||Tv|| \\ &= \inf \{C > 0 : ||Tv|| \leq C||v|| \quad \forall v \in V\} \end{aligned}$$

Tenemos  $||Tv|| \leq ||T|| ||v||$

**Teorema 2.2.2.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es un espacio normado bajo la norma operador.



*Demostración.* 1.  $\|T\| = 0 \implies \|Tv\| = 0 \forall v \in V$   
 $\implies Tv = 0 \implies T = 0.$

2.  $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$

3. Sea  $v \in V, \|v\| = 1. \forall T, S \in \mathcal{B}(V, W),$

$$\begin{aligned} \|(T + S)v\| &= \|Tv + Sv\| \\ &\leq \|Tv\| + \|Sv\| \\ &\leq \|T\| \|v\| + \|S\| \|v\| = (\|T\| + \|S\|) \|v\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \|(T + S)v\| &\leq \|T\| + \|S\| \\ \implies \|T + S\| &\leq \|T\| + \|S\| \end{aligned}$$

■

¿Cuándo es  $\mathcal{B}(V, W)$  completo?

**Teorema 2.2.3.**  $\mathcal{B}(V, W)$  es Banach cuando  $W$  es Banach.

*Demostración.*  $T_n \in \mathcal{B}(V, W)$  Cauchy. Queremos demostrar que converge en  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(V, W)}$ .

1.  $\forall v \in V, \{T_n v\}$  es Cauchy en  $W$  pues

$$\|T_n v - T_m v\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|v\|$$

$\implies \{T_n v\}$  converge. Definimos

$$Tv := \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v$$

2. ¿Por qué  $T \in \mathcal{B}(V, W)$ ?  $\rightarrow$  lineal:

$$T(\lambda v) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\lambda v) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v = \lambda T(v)$$

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$$

$\rightarrow$  acotado:

$\{T_n\}$  es Cauchy.

$\{\|T_n\|\}$  es Cauchy en  $[0, \infty)$

$$\begin{aligned} |||T_n| - |T_m||| &\leq \|T_n - T_m\| \\ \implies \|T_n\| &\leq C \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Sea  $v \in V, \|v\| = 1$ .

$$\begin{aligned} \|Tv\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} T_n v \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\|T_n v\|}_{\leq C\|v\|=C} \leq C \end{aligned}$$

$$\implies \|T\| \leq C$$

3. Convergencia:  $T_n \rightarrow T$  en norma operador. Sea  $v \in V, \|v\| = 1$ .

$$\|(T_n - T)v\|$$

$$T_m v \rightarrow Tv$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T_n - T_m)v\| \\ &\leq \underbrace{\|T_n - T_m\|}_{\leq \varepsilon} \cdot \|v\| \quad \forall n, m \geq N(\varepsilon) \\ \implies \|T_n - T\| &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \end{aligned}$$

■

### 2.2.2. Espacio Dual

**Definición 2.2.5.** Sea  $V$  un espacio normado sobre  $\mathbb{K}$ .

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio **dual** de  $V$ .

**Teorema 2.2.4.** Cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  (completos)  $V^*$  es un espacio de Banach

Elementos de  $V^*$  se llaman **funcionales** en  $V$ .

**Ejemplo:**  $[\ell^p(\mathbb{C})]^* = ?, p \in [1, \infty)$   
 Resulta que  $? = \ell^q(\mathbb{C})$  donde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .  
 Si  $v \in \ell^p, w \in \ell^q$   
 podemos definir un funcional en  $\ell^p$

$$\ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$v = \{v_k\} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k$$

$$|\ell_w| \leq \|w\|_{\ell^q} \|v\|_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty \quad (\ell^2)^* \simeq \ell^2$$

**Nota:**  $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$

Cuando  $V = W$  espacio de Banach, entonces  $B(V, V)$  es un espacio de Banach. Es también **álgebra**.

$$T, S \in B(V, V) \implies TS \in B(V, V)$$

$$\begin{aligned} \|TS\| &= \sup_{\|v\|=1} \|T(Sv)\| \leq \|T\| \cdot \|Sv\| \\ &\leq \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|v\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \end{aligned}$$

Cómo resolver ecuaciones del tipo

$$(T - \lambda I)u = v$$

donde  $v \in V \leftarrow$  un espacio de Banach,  $T \in B(V, V)$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Queremos construir el operador **inverso**

$$S := (T - \lambda I)^{-1}$$

Cuando  $|\lambda| > \|T\|$ ,  $S$  se puede construir a través de la **serie de Neumann**

$$-\lambda \underbrace{\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)}_{\|T/\lambda\| < 1} u = v$$

Sabemos que

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1$$

Definimos

$$S := -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \quad (2.3)$$

2.3 define  $S \in B(V, V)$  ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

es sumable pues es absolutamente sumable en el espacio de Banach  $B(V, V)$ .

→ ¿por qué  $(T - \lambda I)S = S(T - \lambda I) = I$ ?

Para verificar que  $S(T - \lambda I) = I$ ,

$$S_N = \sum_{n=0}^N -\frac{1}{\lambda} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^n$$

$$\begin{aligned} S_N(T - \lambda I) &= S_N T - S_N \lambda = \sum_{n=0}^N -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n+1} - \sum_{n=0}^N -\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n \\ &= -\underbrace{\left(\frac{T}{\lambda}\right)^{N+1}}_{\rightarrow 0 \text{ en } B(V, V)} + I \end{aligned}$$

### 2.2.3. Espacio cociente

¿Cómo obtener espacios normados/Banach de otros espacios?

**Definición 2.2.6** (Espacio cociente). Sea  $W$  un subespacio del espacio vectorial  $V$ .

$$V/W := \{[v], v \in V\}$$

$[\cdot]$  se define a través  $v_1 \sim v_2$  si  $v_1 - v_2 \in W$ .

Se nota también  $V \bmod W$  y se llama el espacio cociente.

Es útil denotar  $[v] = v + W$

Una construcción de subespacio  $W \subseteq V$  tal que  $V/W$  es normado es a través de una **semi-norma** definida en  $V$ .

**Ejemplo:**  $V = C^1([0, 1])$  = espacio de funciones en  $[0, 1]$  con derivadas continuas en  $[0, 1]$ .

$$\|f\| := \max_{t \in [0, 1]} |f'(t)|$$

$$\|f\| = 0 \iff f = \text{const}$$

**Teorema 2.2.5.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial semi-normado. Entonces  $Z := \{v \in V : \|v\| = 0\}$  es un subespacio de  $V$  y

$$\|v + Z\|_{V/Z} := \|v\| \tag{2.4}$$

define una norma en  $V/Z$ .

*Demostración.* 1.  $Z$  es un subespacio vectorial.

$$z_1, z_2 \in Z \implies z_1 + z_2 \in Z$$

$$\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\| = 0$$

$$z \in Z \implies \lambda z \in Z$$

Así,  $V/Z$  tiene la estructura de un espacio vectorial.

2. Tenemos que comprobar que 2.4 es una buena definición:

Si  $v_1, v_2$  son 2 representantes de  $[v]$ :

$$v_1 = v_2 + z, \quad z \in Z$$

$$\begin{aligned} \|v_1\| &\leq \|v_2\| + \|z\| \implies \|v_1\| \leq \|v_2\| \\ \|v_2\| &\leq \|v_1\| \implies \|v_1\| = \|v_2\| \end{aligned}$$

$$\|v + z\|_{V/Z} = 0$$

$$\implies v + Z = Z \implies v \in Z$$

Las otras 2 proposiciones se heredan de manera obvia

■

$C^1([0, 1])/const$  es un espacio normado con la norma inducida.

Otra construcción similar:

**Proposición 2.2.6.** Si  $W \stackrel{cerr}{\subseteq} V$  subespacio cerrado de un espacio normado  $(V, \|\cdot\|)$ , entonces  $V/W$  tiene una norma:

$$\|[v]\|_{V/W} := \inf_{w \in W} \|v - w\|$$

*Demostración.* En ayudantía

■

### 2.2.4. Completación de espacios normados

**Definición 2.2.7.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado. La **completación** de  $V$  es un espacio de Banach  $(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}})$  con una aplicación lineal

$$\mathcal{J}_{\tilde{V}} : V \rightarrow \tilde{V}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}$  es uno a uno
2.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es denso en  $\tilde{V}$
3.  $\mathcal{J}_{\tilde{V}}(V)$  es una isometría:

$$\|\mathcal{J}_{\tilde{V}}(v)\|_{\tilde{V}} = \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

**Teorema 2.2.7.** *Todo espacio normado  $V$  tiene una completación. Esta es única en el siguiente sentido:*

**Seba** *hacer dibujo*

$\tilde{V} = \{\text{sucesiones de Cauchy en } V \text{ que convergen}\}$

$\{v_n\} \sim \{w_n\}$  si  $\|v_n - w_n\| \rightarrow 0$

Sea  $\tilde{v} \in \tilde{V}$

**Seba** *ESTOY HASTA EL PICO*

## 2.3. El teorema de Baire

### 2.3.1. Categorías de Baire

$(X, d)$  espacio métrico.

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B_r}(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

$O \subseteq X$  es abierto si  $\forall x \in O, \exists B_r(x) \subseteq O$ .  $\bigcup_{\alpha} O_{\alpha}$  es abierto.

$F \subseteq X$  es cerrado si  $F^c$  es abierto.  $\bigcap_{\alpha} F_{\alpha}$  es cerrado.

$$\overline{E} = \bigcap_{F \supseteq E} F$$

$$\overset{\circ}{E} = \bigcup_{O \subseteq E} O$$

$$E \overset{\text{denso}}{\subseteq} X \text{ si } \overline{E} = X$$

**Definición 2.3.1.**  $E \subseteq X$  es **denso en ninguna parte** si  $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$ .

esencialmente, denso en ninguna parte  $E$  significa que  $E$  no contiene bolas abiertas.

**Ejemplo:**  $E = \{x\}$  es denso en ninguna parte.

**Proposición 2.3.1.**  $F$  es cerrado y denso en ninguna parte  $\iff F^c$  es abierto y denso.

## La noción de categoría de Baire

**Definición 2.3.2.**  $E \subseteq X$  cat I si  $E = \bigcup_k E_k$  donde  $E_k$  es denso en ninguna parte.

**Ejemplo:**  $\mathbb{Q}$  es cat I.

**Definición 2.3.3.** Si  $G$  tiene  $G^c$  que es cat I, decimos que  $G$  es **genérico**.

**Definición 2.3.4.**  $E$  es de cat II si no es de primera categoría.

## Observaciones

1. Si  $E$  es cat I, y  $F \subseteq E$  es cat I

$$\begin{aligned} F &\subseteq E \subseteq \bigcup_k E_k \\ \implies F &= \bigcup_k E_k \cap F, \quad \overline{E_k \cap F} \subseteq \overline{E_k} \\ \implies E_k \cap F &\text{ son densos en ninguna parte.} \end{aligned}$$



2. Si  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  de cat I,  $\bigcup_k E_k = \bigcup_k \underbrace{\bigcup_l E_{kl}}_{\text{denso en NP}}$  es una unión contable.
3. No hay conexión entre conjuntos de cat I y conjuntos despreciables del punto de vista de teoría de la medida.

**Ejemplo:**  $G_j = \bigcup_n (q_n - 2^{-(n+j+1)}, q_n + 2^{-(n+j+1)})$   
 $\{q_j\}$  enumeración de  $\mathbb{Q}$ .  
 $G_j$  es abierto y denso en  $\mathbb{R}$ .

$$\implies E_j = G_j^c \text{ es cerrado y denso en NP}$$

$$\implies E := \bigcup_j E_j \text{ es cat I}$$

y de plena medida en  $\mathbb{R}$ .

$\iff E^c$  es de medida 0 de Lebesgue.

$$\begin{aligned} |E^c| &= \left| \bigcap_j E_j^c \right| \\ &= \left| \bigcap_j G_j \right| \leq |G_j| \\ |G_j| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-(n+j+1)} \\ &= 2^{-j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.2** (Teorema de Baire). *Sea  $(X, d)$  **completo**. Entonces,  $X$  es de la cat II en sí mismo.*

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es de cat I en sí:

$$X = \bigcup_k \underbrace{E_k}_{\text{densos en NP}} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k}}_{=F_k \text{ denso en NP y cerrado}}$$

Llegaremos a una contradicción si demostramos que hay un  $x \notin F_k, \quad \forall k$ .

$$F_1 \neq X. \quad \overline{B_{r_1}}(x_1) \subseteq F^c, \quad \overline{B_{r_2}}(x_2) \subseteq F_2^c.$$

De esta manera obtenemos bolas cerradas  $\overline{B_{r_k}}(x_k)$  tales que

1.

$$\overline{B_{r_{k+1}}}(x_{k+1}) \subseteq \overline{B_{r_k}}(x_k)$$

2.

$$\overline{B_{r_k}}(x_k) \subseteq F_k^c$$

3.

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k}{2} \implies r_k \rightarrow 0$$

$\{x_k\}$  es Cauchy pues:

$$\forall k, l \geq n, x_k, x_l \in \overline{B_{r_n}}(x_n)$$

$$\implies |x_k - x_l| \leq 2r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\implies x_k \rightarrow x \in X$$

Como  $x_k \in \overline{B_{r_k}} \quad \forall k \geq n$ ,

$$\implies x = \lim x_k \in \overline{B_{r_n}}(x_n) \subseteq F_n^c$$

Por lo que  $x \notin F_n \quad \forall n$ .

■

**Corolario 2.3.2.1.**  $G \subseteq X$  es **genérico**  $\implies$  denso en  $X$ , con  $X$  completo.

*Demostración.* Asumimos que  $G$  genérico no es denso, entonces hay una bola  $B$

$$\implies \overline{B} \subseteq G^c = \bigcup_k E_k \subseteq \bigcup_k \overline{E_k}$$

$$\implies \overline{B} = \bigcup_k \underbrace{\overline{E_k} \cap \overline{B}}_{\text{cerrados y densos en NP}}$$

Pero  $\overline{B}$  es un espacio métrico completo, contradicción con el teorema de Baire.

■

**Corolario 2.3.2.2.**  $X$  completo,  $X = \bigcup_k F_k \leftarrow$  cerrado.  
Entonces, por lo menos uno  $F_k$  contiene una bola.

### 2.3.2. Aplicación

**Teorema 2.3.3.** *El conjunto de funciones continuas en  $[0, 1]$  que no son derivables en ningún punto es **denso** en  $C([0, 1])$*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{D} = \{f \in C([0, 1]) : f'(x_*) \text{ existe en un punto } x_* \in [0, 1]\}$

Queremos demostrar que  $\mathcal{D}$  es cat I en  $C([0, 1])$ .

Por 2.3.2.1,  $\mathcal{D}^c$  es genérico  $\implies$  denso en  $C([0, 1])$ .

Si  $f \in \mathcal{D} \implies f'(x_*)$  existe

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - f(x_*)}{x - x_*}$$

existe.

$$\implies |f(x) - f(x_*)| \leq M|x - x_*| \quad \forall x \in [0, 1]$$

para algún  $M > 0$ .

$$\implies \mathcal{D} \subseteq \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$$

$E_N := \{f \in C([0, 1]) : |f(x) - f(x_*)| \leq N|x - x_*| \text{ para algún } x_* \in [0, 1]\}$

Estaremos listos si probamos que:

1.  $E_N$  es cerrado en  $C([0, 1])$
2.  $E_N$  es denso en ninguna parte.
1.  $f_n \in E_N$  y  $f_n \rightarrow f$ , en  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

$[0, 1] \ni x_n^* \rightarrow x^*$  (podemos extraer una subsucesión que converge)

$$|f_n(x) - f_n(x_n^*)| \leq N|x - x_n^*| \quad \forall x \in [0, 1]$$

Queremos demostrar que

$$|f(x) - f(x^*)| \leq N|x - x^*|$$

$$|f(x) - f(x^*)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2} + |f_n(x) - f_n(x^*)| + \underbrace{|f_n(x^*) - f(x^*)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x^*)| &\leq |f_n(x) - f_n(x_n^*)| + |f_n(x_n^*) - f_n(x^*)| \\ &\leq N|x - x_n^*| + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N(|x - x^*| + |x^* - x_n^*|) + N|x_n^* - x^*| \\ &\leq N|x - x^*| + \underbrace{2N|x_n^* - x^*|}_{\varepsilon/3} \end{aligned}$$

2. ¿Por qué  $E_N$  es denso en NP de  $X$ ?

$$P_M = \{\text{funciones continuas en } [0, 1] \text{ derivables a trozos, } |f'| = M\}$$

son funciones zig-zag. Cuando  $M > N$ ,  $P_M \cap E_N = \emptyset$ . Además,  $P_M$  es denso en  $C([0, 1])$ . Como consecuencia,  $E_N$  no puede tener interior no trivial ya que  $E_N$  no puede tener una bola abierta (hay funciones de  $P_M$  en  $E_N$  y  $P_M$  es denso).

Mostraremos que  $P_M$  es denso.

$$P = \{\text{las funciones continuas lineales a tozos}\} \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} C([0, 1])$$

Podemos aproximar cada  $f \in P$  con una función  $g \in P_M$  arbitrariamente bien. ■

### 2.3.3. Teorema de la Aplicación Abierta

Sean  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  espacios de Banach.

$$T \in \mathcal{B}(X, Y) \implies T^{-1}(O) \stackrel{ab}{\subseteq} X \quad \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} Y$$

Si  $T$  es biyectiva adicionalmente, entonces  $S := T^{-1}$  es lineal (no necesariamente acotada).

Sin embargo, si  $S$  es continua, entonces  $S^{-1}(U) \stackrel{ab}{\subseteq} \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$

$$\iff T(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$$

**Definición 2.3.5.** Sea  $T : X \rightarrow Y$  una aplicación. Decimos que  $T$  es abierta si

$$T(U) \stackrel{ab}{\subseteq} Y \quad \forall U \stackrel{ab}{\subseteq} X$$

Si  $T : X \rightarrow Y$  es lineal, continua y biyectiva, entonces  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  es lineal. ¿Es  $T^{-1}$  continua?

Lo será cuando  $T$  es abierta.

**Teorema 2.3.4** (Aplicación Abierta). *Si  $X, Y$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  y sobreyectiva, entonces  $T$  es abierta.*

**Corolario 2.3.4.1.** *Si  $X, Y$  son espacios de Banach,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  es biyectiva, entonces  $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$ . Existen  $c, C > 0$  tales que*

$$c\|x\|_X \leq \|\underbrace{Tx}_y\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \forall x \in X$$

$$c\|T^{-1}y\|_X \leq \|y\|_Y$$

*Demostración del teorema 2.3.4.* 1. Será suficiente demostrar que  $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$ . ( $B_r^X = B_r^X(0)$ )

Por linealidad

$$\begin{aligned} T(B_r^X(x)) &= T(x + B_r^X) \\ &= Tx + T(B_r^X) = y + \frac{r}{2}T(B_2^X) \\ &\supseteq y + \frac{r}{2}B_\delta^Y = B_{\frac{\delta r}{2}}^Y(y) \end{aligned}$$

2. Vamos a demostrar que  $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^X$  para algún  $\delta > 0$

Por la sobreyectividad:

$$cat II \rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(B_n^X)}$$

Entonces,  $T(B_n^X) \supseteq B_r^Y(y)$  para algún  $n \in \mathbb{N}, r > 0, y \in Y$ . Tomamos  $\tilde{y}$  tal que  $|\tilde{y} - y| \leq \frac{r}{2}$  e  $\tilde{y} = T\tilde{x}$  para algún  $\tilde{x} \in B_n^X$ .

$$T(B_{2n}^x(\tilde{x})) \supseteq \overline{T(B_n^X)} \supseteq B_r^Y(y) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^Y(\tilde{y})$$

Restando  $T\tilde{x}$

$$T(B_{2n}^X) \supseteq B_{\frac{r}{2}}^X$$

Reescalando

$$\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_{\frac{r}{4n}}^Y \quad \delta = \frac{r}{4n}$$

3. Tenemos  $\overline{T(B_1^X)} \supseteq B_\delta^Y$ . Reescalando

$$\overline{T(B_{2^{-k}}^X)} \supseteq B_{\delta 2^{-k}}^Y$$

¿Por qué  $T(B_2^X) \supseteq B_\delta^Y$ ?

Fije  $y_0 \in B_\delta^Y$ . Podemos encontrar  $x_0 \in B_1^X$  tal que

$$\|y_0 - Tx_0\|_Y < \frac{\delta}{2}$$

$$\implies y_1 := y_0 - Tx_0 \in B_{\delta/2}^Y$$

$\implies$  existe  $x_1 \in B_{\frac{1}{2}}^X$  tal que

$$\|y_1 - Tx_1\| < \frac{\delta}{4}$$

De esta manera construimos sucesiones  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , tales que

$$a) \quad x_n \in B_{2^{-n}}^X, y_n \in B_{\delta 2^{-n}}^Y$$

$$b) \quad y_{n+1} = y_n - Tx_n$$

$x := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in X$  porque  $X$  es Banach. Veremos que  $Tx = y$  y  $x \in B_2^X$ .

$x$  es convergente puesto que es absolutamente convergente.

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_k\| \leq 2$$

Afirmamos que  $Tx = y_0$  por construcción.

$$\begin{aligned}
 Tx &= \lim_{N \rightarrow \infty} T \left( \sum_{n=0}^N x_n \right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \underbrace{Tx_k}_{y_k - y_{k+1}} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} (y_0 - y_{N+1}) \\
 &= y_0
 \end{aligned}$$

ya que  $y_{N+1} \rightarrow 0$ .

■

#### 2.3.4. Teorema del Grafo Cerrado

**Definición 2.3.6.** Sean  $X, Y$  espacios métricos. Decimos que  $T : X \rightarrow Y$  es **cerrada** si su grafo en  $X \times Y$

$$G_T = \{(x, Tx) \in X \times Y\}$$

es cerrado en  $X \times Y$ .

En otras palabras,

$$(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y) \in X \times Y \implies (x, y) \in G_T \iff y = Tx$$

**Nota:**  $T : X \rightarrow Y$  es continua  $\implies T$  es cerrada.

$$x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx \implies (x_n, Tx_n) \rightarrow (x, Tx)$$

**Teorema 2.3.5.** Sean  $X, Y$  Banach. Entonces,  $T \in \mathcal{B}(X, Y) \iff T$  es lineal y cerrada.

*Demostración.*  $\Leftarrow$  : Utilizaremos el hecho que si  $X, Y$  son Banach, entonces  $X \times Y$  es Banach.

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$$

$$G_T := \{(x, Tx)\} \subseteq X \times Y$$

1.  $G_T$  es un subespacio de  $X \times Y$ .

2.  $G_T \stackrel{cerr}{\subseteq} X \times Y$

Entonces  $G_T$  es un espacio de Banach en sí. Tenemos las proyecciones  $\Pi_X : G_T \rightarrow X$  y  $\Pi_Y : G_T \rightarrow Y$  continuas y lineales.

$$T = \Pi_Y \circ (\Pi_X)^{-1}$$

ya que  $\Pi_x$  es biyectiva, continua y lineal (en un espacio de Banach a otro Banach). Por el teorema 2,3,4,1,  $\Pi_X^{-1}$  es continua. Por lo que  $T = \Pi_Y \circ \Pi_X^{-1}$  es continua.

■

**Significado** Si queremos demostrar que una aplicación lineal  $T : X \rightarrow Y$  es continua,  $x_n \rightarrow x \implies Tx_n \rightarrow Tx$

Podemos asumir adicionalmente que  $Tx_n \rightarrow Ty$ , y demostrar que  $y = Tx$



## Espacios de Hilbert

### 3.1. Conceptos Básicos

**Definición 3.1.1.** Sea  $H$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una función  $H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  que satisface

1. Linealidad en  $\langle \cdot, y \rangle$ ,  $\forall y \in H$ :

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

2. (Hermiticidad)

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

(En  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , esto es simetría)

3. (Definidad)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

**Nota:** 1. y 2., implican que  $\langle x, \cdot \rangle$  es lineal conjugada en la segunda entrada.

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

**Terminología** Tal función se llama **forma sesquilineal**

**Nota:**  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una **forma simétrica definida positiva**

Decimos que  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un **espacio pre-Hilbertiano**

De 1. y 2.,  $\langle 0, y \rangle = 0$ ,  $\langle x, 0 \rangle = 0$

Definimos  $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$

**Proposición 3.1.1** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Sea  $H$  un espacio pre-Hilbertiano

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in H$$

*Demostración.* Si  $y = 0$ , la desigualdad es verdadera. Podemos asumir que  $y \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \\
 &= \langle x, x \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle + \lambda \bar{\lambda} \langle y, y \rangle \\
 &= \|x\|^2 + \underbrace{\lambda \overline{\langle x, y \rangle} + \bar{\lambda} \langle x, y \rangle}_{2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle \bar{\lambda})} + |\lambda|^2 \cdot \|y\|^2
 \end{aligned}$$

Evaluyendo en  $\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle \frac{-\overline{\langle x, y \rangle}}{\|y\|^2}) \\
 0 &\leq \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \\
 \implies \|x\|^2 &\geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}
 \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.2.**  $\|\cdot\|$  define una norma  $H$ .

*Demostración.* 1. Definidad ✓

$$2. \|\lambda x\| = \langle \lambda x, \lambda x \rangle^{1/2} = (\lambda \bar{\lambda} \|x\|^2)^{1/2} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

3. (Desigualdad triangular)

$$\begin{aligned}
 \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
 &= (\|x\| + \|y\|)^2
 \end{aligned}$$

■

**Proposición 3.1.3.**  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es continuo en  $H \times H$

*Demostración.*  $x_n \rightarrow x$  en  $\|\cdot\|$  e  $y_n \rightarrow y$  en  $\|\cdot\|$

$$\begin{aligned}
|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n - x, y_n \rangle + \langle x, y_n - y \rangle| \\
&\leq |\langle x_n - x, y_n \rangle| + |\langle x, y_n - y \rangle| \\
&\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

■

**Definición 3.1.2.** Decimos que  $x \perp y$  en el espacio pre-Hilbertiano  $H$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ . Si  $E \subseteq H$  subconjunto, definimos el **espacio ortogonal**

$$E^\perp := \{x \in H : x \perp y \quad \forall y \in E\}$$

$E^\perp$  es un **subespacio** de  $H$  y es cerrado:

$x_n \in E^\perp$  y  $x_n \rightarrow x$  en  $H$  entonces

$$\langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = 0 \quad \forall y \in E$$

**Teorema 3.1.4** (Pitagoras). Si  $x_1, \dots, x_n \in H$  (pre-Hilbertiano) son mutuamente ortogonales, entonces

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

**Proposición 3.1.5** (Ley del paralelogramo).

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

*Demostración.*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Sumando los 2 términos (diagonales), estamos listos.

■

**Definición 3.1.3.** Decimos que un espacio  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  pre-Hilbertiano es un espacio de **Hilbert** si es **completo** respecto  $\|\cdot\|$  inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$

**Ejemplo:**  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$  es un espacio de Hilbert.

**Ejemplo:**  $(\ell^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .  $\langle \{x_k\}, \{y_k\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

$\ell^p$  tiene una estructura de espacio de Hilbert?  $\iff p = 2$

**Ejemplo:**  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  es un espacio de medida, definimos

$$L^2(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_X |f|^2 d\mu < \infty\} / \sim$$

$f_1 \sim f_2$  si  $\{f_1 \neq f_2\}$  es despreciable.

### 3.2. Teorema de la Proyección

Sea  $H$  un espacio de Hilbert.  $C \subseteq H$  cerrado y convexo. Existe único  $y \in C$  tal que  $y$  minimiza la distancia entre  $x$  y  $C$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $C$  un subconjunto de un espacio vectorial  $V$ . Decimos que  $C$  es **convexo** en  $V$  si

$$\forall x, y \in C \quad (1-t)x + ty \in C \quad \forall t \in [0, 1]$$

**Teorema 3.2.1.** Sea  $C \subseteq H$  un subconjunto cerrado y convexo del espacio de Hilbert  $H$ . Entonces  $\forall x \in H, \exists! y = P_C x \in C$  que satisface:

$$\|x - P_C x\| = d(x, C) = \inf_{c \in C} \|x - c\|$$

Además,  $y = P_C x \iff \operatorname{Re} \langle c - y, x - y \rangle \leq 0, \quad \forall c \in C$

*Demostración.* Tome  $\{y_n\} \subseteq C$ , tal que

$$d_n := \|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d := d(x, C)$$

$\{y_n\}$  será convergente si es Cauchy, ya que  $y_n \rightarrow y \in H$ . Ya que  $C$  es cerrado, de hecho  $y \in C$ .

Por la ley del paralelogramo, con  $v = x - y_n, w = x - y_m$

$$\begin{aligned}
2d_n^2 + 2d_m^2 &= \|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 \\
&= \|y_n - y_m\|^2 + \|2x - (y_n + y_m)\|^2 \\
&= \|y_n - y_m\|^2 + 4 \left\| x - \underbrace{\frac{y_n + y_m}{2}}_{\in C} \right\|^2 \\
&\geq \|y_n - y_m\|^2 + 4d^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2d_n^2 + d_m^2 - 4d^2 \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$$

por lo que  $\{y_n\}$  es Cauchy.

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

$$\|x - y\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\|x - y_n\|}^{d_n} = d$$

Este minimizador es el único!. Si hubiera otro  $z \neq y$ , aplicamos el mismo argumento a  $\{y, z, y, z, \dots\}$  que no converge por construcción, pero es Cauchy, lo que es una contradicción.

$\implies$  : Sea  $c \in C$  y considere  $(1 - t)y + tc$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned}
\|x - (1 - t)y - tc\|^2 &= \|x - y - t(c - y)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 - 2t \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle + t^2 \|c - y\|^2 \\
&\geq \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\implies 2t \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle \leq t^2 \|c - y\|^2 \\
&\implies 2 \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle \leq 0
\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$  : Evalúe  $\|x - (1 - t)y + tc\|^2$  en  $t = 1$ .

$$\begin{aligned}
\|x - c\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle + \|c - y\|^2 \\
\implies \|x - c\|^2 - \|x - y\|^2 &= \|c - y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - y, c - y \rangle \\
\implies \|x - c\|^2 &\geq \|x - y\|^2 \quad \forall c \in C
\end{aligned}$$

Tenemos igualdad  $\iff c = y$ . ■

**Ejemplo:**  $W \subseteq H$  es un subespacio  $\implies W$  es convexo.

**Teorema 3.2.2.** Sea  $F \subseteq H$  un subespacio cerrado. Entonces  $H = F \oplus F^\perp$ , es decir, que todo  $x \in H$  se puede escribir de manera única como  $x = y + z$  con  $y \in F$  y  $z \in F^\perp$ . Además  $y = P_F x, z = P_{F^\perp} x$ .

$$P_F : H \rightarrow H$$

es lineal, acotado y satisface:

- $\|P_F\| \leq 1$  ( $= 1$  cuando  $F = \{0\}$ )
- $P_F^2 = P_F$
- $\operatorname{Im} P_F = F, \operatorname{ker} P_F = F^\perp$
- $\langle P_F x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, P_F x_2 \rangle$

**Definición 3.2.2.**  $P_F$  se llama la **proyección ortogonal**

*Demostración.* Ya que  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , la unicidad se cumple.

$$y + z = y' + z' \implies y - y' = z' - z = 0$$

Tome  $x \in H$ . Define  $y = P_F x$ . Queremos demostrar que  $x - y \in F^\perp$ . Del teorema ?? sabemos que

$$\operatorname{Re} \langle c - y, x - y \rangle \leq 0 \quad \forall c \in F$$

.

$$\implies \operatorname{Re} \langle v, z \rangle \leq 0 \quad \forall v \in F$$

$$\implies \operatorname{Re} \langle \lambda v, z \rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\implies \operatorname{Re} \lambda \langle v, z \rangle \leq 0$$

**Seba** *añadir align*

tome  $\lambda = \overline{\langle v, z \rangle}$

$$\begin{aligned} &\implies \operatorname{Re} |\langle v, z \rangle|^2 \leq 0 \\ &\implies |\langle v, z \rangle| = 0 \implies z \in F^\perp \end{aligned}$$

Propiedades de  $P_F$ :  $x_1 = y_1 + z$ ,  $x_2 = y_2 + z_2$

$$\begin{aligned} \langle P_F x_1, x_2 \rangle &= \langle y_1, x_2 \rangle \\ &= \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x_1, P_F x_2 \rangle &= \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle \\ &= \langle y_1, y_2 \rangle \end{aligned}$$

Por lo que  $P_F$  es lineal

$$\begin{aligned} \langle P_F(x_1 + x_2), x_3 \rangle &= \langle x_1 + x_2, P_F x_3 \rangle \\ &= \langle x_1, P_F x_3 \rangle + \langle x_2, P_F x_3 \rangle \\ &= \langle P_F x_1, x_3 \rangle + \langle P_F x_2, x_3 \rangle \\ &= \langle (P_F x_1 + P_F x_2), x_3 \rangle \end{aligned}$$

$$\iff P_F(x_1 + x_2) = P_F x_1 + P_F x_2$$

$P_F(\lambda x) = \lambda P_F x$  de la misma manera.

$$P_F|_F = \operatorname{Id}|_F$$

$$\begin{aligned} &\implies P_F^2 x = P_F(P_F x) = P_F x \quad \forall x \in H \\ &\implies P_F^2 = P_F \end{aligned}$$

$||P_F x||^2 = ||y||^2 \leq ||x||^2$  mientras

$$\begin{aligned} ||x||^2 &\leq ||y||^2 + ||z||^2 \\ \implies ||P_F|| &\leq 1 \end{aligned}$$

■

### 3.3. Teorema de Representación de Riesz

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert y sea  $f \in H^*$  un funcional lineal acotado. Entonces existe único  $u \in H$  tal que*

$$f(x) = \langle x, u \rangle \quad \forall x \in H$$

#### Observaciones

1.  $||f||_* = ||u||$  por Cauchy-Schwarz
- 2.

$$\begin{aligned} H^* &\rightarrow H \\ f &\rightarrow u_f \end{aligned}$$

es una isometría biyectiva, lineal-conjugada. Para todo  $v \in H$  define  $f_v(x) : \langle x, v \rangle$

3.  $f_1 + f_2 \rightarrow u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2}$ , ya que

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) = \langle x, u_{f_1} \rangle + \langle x, u_{f_2} \rangle \\ &= \langle x, u_{f_1} + u_{f_2} \rangle \implies u_{f_1+f_2} = u_{f_1} + u_{f_2} \end{aligned}$$

4.  $\lambda f \rightarrow u_{\lambda f} = \lambda u_f$ ?

$$[\lambda f](x) = \lambda(f(x)) = \lambda \langle x, u_f \rangle = \langle x, \bar{\lambda} u_f \rangle$$



**Nota:** Teorema falso. Cuando  $H$  es solo espacio pre-Hilbertiano, por ejemplo,

$$H = C([-1, 1])$$

con producto interno usual.

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dt \in H^*$$

*Demostración.* Si  $f = 0 \implies u = 0$ . Asumimos que  $f \neq 0$  y consideramos  $F := \ker f = \{x \in H : f(x) = 0\}$ .  $F$  es un subespacio de  $H$  cerrado. Si  $f \neq 0 \implies F \neq H$ . Por el teorema de la proyección (3.2.2)

$$H = F \oplus F^\perp$$

Elije  $z \in F^\perp \setminus \{0\}$ . Afirmamos que  $u = \overline{f(z)}z|z|^2 \neq 0$  satisface  $f = \langle \cdot, u \rangle$ . Ya que

$$\begin{aligned} f(z)x - f(x)z &\in F \\ \implies f(z)x - f(x)z &\perp z \\ \langle f(z)x, z \rangle - \langle f(x)z, z \rangle &= 0 \\ \implies \left\langle x, \overline{f(z)}z \right\rangle &= f(x)||z||^2 \\ \implies f(x) &= \left\langle x, \frac{\overline{f(z)}z}{||z||^2} \right\rangle \end{aligned}$$

Entonces  $u \in H$  que satisface  $f = \langle \cdot, u \rangle$ . Es único: si tenemos  $u, u' \in H$

$$\begin{aligned} f(x) &= \langle x, u \rangle = \langle x, u' \rangle \\ \implies \langle x, u - u' \rangle &= 0 \quad \forall x \in H \\ \implies u - u' &\in H^\perp = \{0\} \end{aligned}$$

■

### 3.4. Bases Ortonormales

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ . Un subconjunto  $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es LI si  $\forall I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A$ ,

$$\sum_{i \in I} c_i v_i = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i \in I$$

$$\text{Gen}(\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}) = \left\{ \sum_{i \in I} c_i u_i : I \overset{\text{finito}}{\subseteq} A, c_i \in \mathbb{K} \right\}$$

**Definición 3.4.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert,  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es ortonormal (o.n.) si

$$\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad \delta \text{ de Kronecker}$$

Suponga que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es o.n.

$$F := \text{Gen}(\{e_i\}_i^n) \subseteq H$$

es un subespacio cerrado. Podemos definir  $P_F$

$$P_F x = \underbrace{\sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i}_y$$

Es suficiente demostrar que  $x - y \perp F$ .

$$\left\langle x - \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i, e_k \right\rangle = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$\|P_F x\|^2 \leq \|x\|^2$$

Por Pitagoras

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n \|\langle x, e_i \rangle e_i\|^2 \leq \|x\|^2 \\ \implies &\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

**Proposición 3.4.1** (Desigualdad de Bessel). Sea  $S = \{e_\alpha\}_\alpha$  un conjunto o.n. Entonces,

$$\sum_{\alpha} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

$$\sum_{\alpha} r_{\alpha} := \sup \left\{ \sum_{i \in I} r_i : I \subseteq A \right\}$$

*Demostración.* Utilizando  $\sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ , y tomando supremo. ■

**Consecuencias**  $\{\alpha : \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\alpha \in A : |\langle x, e_\alpha \rangle| \geq \frac{1}{n}\}$  es **contable**: Si es infinito:  $|\langle x, e_{\alpha_k} \rangle|^2 > \frac{1}{n^2}, k = 1, \dots$ . Sumando suficientes términos superaríamos  $\|x\|^2$ , que no es posible por Bessel.

**Definición 3.4.2.**

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha \rangle$$

**coeficientes de Fourier** respecto a  $\{e_\alpha\}$

$$\sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

¿Cuándo tenemos igualdad?

**Teorema 3.4.2.** Sea  $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un subconjunto o.n. del espacio de Hilbert  $H$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

1.

$$\sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \|x\|^2$$

2.  $\mathcal{B}$  es **maximal** en el sentido de:

Si  $x \in H$ , tal que  $x \perp e_\alpha, \forall \alpha \in A \implies x = 0$

3.  $\forall x \in H$ ,

$$x = \sum_{\alpha} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$$

donde la suma en el lado derecho tiene solo un número contable de términos no ceros y la suma de estos converge a  $x$  en  $\|\cdot\|$  independiente de su orden.

4.  $\text{Gen}(\mathcal{B})$  es denso en  $H$

**Definición 3.4.3.** Decimos que un conjunto  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$  o.n. es una **base ortonormal** si satisface cualquiera de 1.-4.

*Demostración.* 2.  $\implies$  3. Sea  $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n}, \dots$  una enumeración de los  $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$  para los cuales  $\hat{x}(\alpha) \neq 0$ . Por Bessel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{x}(\alpha_k)|^2 &\leq \|x\|^2 < \infty \\ \implies \sum_{k=n}^m |\hat{x}(\alpha_k)|^2 &\xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Por Pitagoras,

$$\left\| \sum_{k=n}^m \langle x, e_{\alpha_k} \rangle e_{\alpha_k} \right\| \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$$

Sea  $S_n = \sum_{k=1}^n \hat{x}(\alpha_k) e_{\alpha_k}$ .  $\{S_n\}$  es Cauchy en  $H$

$$\implies S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \quad \text{en } H$$

Además

$$\begin{aligned} \langle x - S, e_\alpha \rangle &= \langle x, e_\alpha \rangle - \langle S, e_\alpha \rangle \\ &= \langle x, e_\alpha \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n, e_\alpha \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{cuando } \alpha \in \mathcal{J} \\ 0 & \text{cuando } \alpha \notin \mathcal{J} \end{cases} \implies x - S = 0 \implies x = S \end{aligned}$$

3.  $\implies$  1.: Por continuidad de la norma

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\hat{x}(\alpha_k)|^2 \\ &= \sum_{\alpha} |\hat{x}(\alpha)|^2 \end{aligned}$$

1.  $\implies$  2.: obvio

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha} |\langle x, e_{\alpha} \rangle|^2 = 0 \implies x = 0$$

3.  $\implies$  4.: Si  $x \perp e_{\alpha}$ ,  $\forall \alpha$ ,

$$\begin{aligned} &\implies x \perp \text{Gen}(\{e_{\alpha}\}) \\ &\stackrel{\text{continuidad}}{\implies} x \perp \overline{\text{Gen}(\{e_{\alpha}\})} = H \\ &\implies x = 0 \end{aligned}$$

■

**Ejemplo:**  $\ell^2$ ,  $e_k = \{(0, \dots, \underbrace{1}_k, 0, \dots)\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

$$\|x\|^2 = \sum |x_i|^2 = \sum |\langle x, e_i \rangle|^2$$

**Teorema 3.4.3.** *Todo espacio de Hilbert tiene una **base ortonormal**.*

*Demostración.* Utiliza el Lema de Zorn

■

**Definición 3.4.4.**  $X$  espacio métrico es **separable** si existe un subconjunto  $C \subseteq X$  contable y denso en  $X$ .

**Ejemplo:**  $\ell^p$ ,  $p \in [1, \infty)$  es separable.

$L^2([0, 1])$  es separable. Polinomios con coeficientes  $\in \mathbb{K} \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} C([0, 1]) \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} L^2([0, 1])$

**Seba** *Faltan los polinomios con coefs  $\in \mathbb{Q}$  cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ .*

**Teorema 3.4.4.**  $H$  es separable si y solo si existe una **base ortonormal** para  $H$  que es **contable**. En este caso, toda base o.n. es contable.

*Demostración.*  $\implies$  :  $\{x_n\} \subseteq H$  es denso.  $x_1, \dots, x_n, \dots$  Descartando posiblemente términos, podemos asumir que  $x_1, \dots, x_n$  son LI  $\forall n \in \mathbb{N}$  y todos los descartados pertenecen a  $\text{Gen}(\{x_k\})$ . De esta manera,  $\text{Gen}(\{x_k\})$  es denso en  $H$ .

Por Gram-Schmidt producimos una sucesión  $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$  tal que,  $\text{Gen}(\{y_k\}_{k=1}^n) = \text{Gen}(\{x_k\}_{k=1}^n) \forall n \in \mathbb{N}$  y  $\mathcal{B} = \{y_k\}$  es un conjunto o.n.

$\mathcal{B}$  es o.n. y  $\text{Gen}(\mathcal{B}) = \text{Gen}(\{x_k\})$  es denso en  $H$ . Entonces  $\mathcal{B}$  es una base ortonormal contable.

$\Leftarrow$  : Sea  $\{e_k\}_k$  una base o.n. contable.

$$G_n := \text{Gen}(\{e_k\}_{k=1}^n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k, \lambda_k \in \mathbb{K} \right\}$$

$\Rightarrow$   $\text{Gen}(\{e_k\}_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$  es denso en  $H$ .

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{G}_n \stackrel{\text{denso}}{\subseteq} \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

donde  $\hat{G}_n = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \lambda_k \in \mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \lambda_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C}\}$

**Seba** *añadir cases en vola*

Sea  $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  otra base o.n.

$$A_n = \left\{ \alpha \in \mathcal{A} : \left\langle \overbrace{x}^{e_n}, u_\alpha \right\rangle \neq 0 \right\} \text{ es contable}$$

Además, para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ ,

$$\langle u_\alpha, e_k \rangle \neq 0 \text{ para algún } k$$

por la maximalidad de la base  $\{e_n\}_n$  (que es contable). Entonces,  $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  es contable. ■

Vamos a demostrar que todo espacio de Hilbert separable es  $\ell^2 = \{\{x_k\} \in \mathbb{K}^n : \sum ||x_k|^2| < \infty\}$

**Definición 3.4.5.** Sean  $H_1, H_2$  dos espacios de Hilbert. Un **isomorfismo**  $T : H_1 \rightarrow H_2$  se llama **unitario** si

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{H_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{H_1} \quad \forall x_1, x_2 \in H_1$$

$T$  unitario  $\Rightarrow T$  es una **isometría**:

$$||Tx||_{H_2}^2 = \langle Tx, Tx \rangle_{H_2} = \langle x, x \rangle_{H_1} = ||x||_{H_1}^2$$

**Teorema 3.4.5.** *Todo espacio de Hilbert separable es unitariamente isomorfo a  $\ell^2$ .*

*Demostración.* Sea  $\{e_n\}$  una base o.n. contable para  $H$ .

$$\begin{aligned} H &\rightarrow \ell^2 \\ x &\rightarrow \hat{x} = (\hat{x}(1), \hat{x}(2), \dots) \end{aligned}$$

donde  $\hat{x}(k) = \langle x, e_k \rangle$ .

Por Parseval,

$$\|\hat{x}\|_{\ell^2}^2 = \sum_k |\hat{x}(k)|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

$$\implies \hat{x} \in \ell^2 \implies T \text{ es bien definido}$$

es lineal, inyectivo (por maximalidad), sobreyectivo: si  $c \in \ell^2$ ,  $\sum_{k=1}^n c_k e_k \xrightarrow{H} x_c$ , donde

$$\hat{x}_c(k) = \langle x_c, e_k \rangle = c_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Es una isometría: **Identidad de Parseval.**

$$\|Tx\|_{\ell^2}^2 = \|x\|_H^2$$

Identidad de Polarización:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2)$$

Por lo tanto,  $T$  preserva el producto interno:

$$\langle Tx_1, Tx_2 \rangle_{\ell^2} = \langle x_1, x_2 \rangle_H$$

■

### 3.5. Series de Fourier

#### 3.5.1. Series de Fourier y convergencia

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  periódica de período  $2\pi$ .

$F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{T}$  es el círculo unitario.

$$F(e^{i\theta}) = f(\theta)$$

$$\hookrightarrow \tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

con

$$\tilde{f}(-\pi) = \tilde{f}(\pi)$$

Vamos a asumir que  $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$

$$f \in L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles, periódicas-}2\pi \text{ t.q. } \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\} = L^2([-\pi, \pi])$$

Definimos

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

**Proposición 3.5.1.**  $\{e_n\}$  es un conjunto ortonormal de  $L^2(\mathbb{T})$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} e_n(x) \overline{e_m(x)} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \\ &= \begin{cases} \frac{2\pi}{2\pi} = 1 & n = m \\ \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$





**Definición 3.5.1.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Defina

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \langle f, e_n \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx\end{aligned}$$

coeficiente de Fourier.

$$f \rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$$

serie de Fourier.

$$S_N f(x) = \sum_{|n| \leq N} \hat{f}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$$

suma de Fourier parcial.

Preguntas:

1. ¿Converge  $S_N f$  a  $f$  en  $L^2$ ?
2. ¿Converge  $S_N f(x)$  a  $f(x)$  puntualmente?

Si falla para algún  $x$ , ¿es este comportamiento raro o genérico?

3. ¿Converge  $S_N f$  a  $f$  en otras normas (e.g.  $L^p, p > 1$ )?

**Teorema 3.5.2.**  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$  cuando  $N \rightarrow \infty$ .

**Nota:** El enunciado  $\iff$ ,  $\mathcal{B} = \{e_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base o.n. para  $L^2(\mathbb{T})$

Entonces será suficiente demostrar que  $\mathcal{B}$  es maximal:

$$\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies f = 0$$

**Teorema 3.5.3.**  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Entonces,

$$S_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-t) f(t) dt$$

donde

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{2N+1}{2\pi} & x = 0 \\ \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{2\pi \sin \frac{x}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} S_N f &= \sum_{|n| \leq N} \langle f, e_n \rangle e_n(x) \\ &= \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \underbrace{\left( \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} e^{in(x-t)} \right)}_{D_N(x-t)} f(t) dt \end{aligned}$$

donde

$$D_N(x) = \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} e^{inx}$$

Kernel de Dirichlet.

$$D_N(0) = \frac{2N+1}{2\pi}$$

Para  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2i \sin(N+\frac{1}{2})x}{2i \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$



**Nota:**  $D_N(x)$  es  $2\pi$ -periodico, par, suave y

$$\int_{\mathbb{T}} D_N(x) dx = 1$$

**Seba** *añadir foto del kernel de Dirichlet*

Es difícil demostrar directamente que  $S_N f(x) \rightarrow f(x)$  ( $D_N(x)$  cambia de signo y oscila muy rápidamente).

**Desvío** En lugar de demostrar que  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$  directamente, vamos a considerar la sucesión **media de Cesàro**

$$\sigma_N f = \frac{S_0 f + S_1 f + \cdots + S_{N-1} f}{N}$$

**Nota:**  $S_N f$  converge a  $f$ ,  $\sigma_N f$  converge a  $f$

**Teorema 3.5.4** (Fejér).

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$$

Cuando  $f \in C(\mathbb{T})$ ,

$$\sigma_N f \xrightarrow{\text{unif.}} f \text{ en } \mathbb{T}$$

Si  $\hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\implies S_n f \equiv 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \implies \sigma_N f \equiv 0$$

$$\xrightarrow{\text{Fejér}} f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f = 0 \implies \text{Maximalidad de } \mathcal{B}$$

**Proposición 3.5.5.** Sea  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . Entonces

$$\sigma_N f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x-t)f(t) dt$$

donde

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}N & x = 0 \\ \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2 \frac{x}{2}} & x \neq 0 \end{cases}$$

es el Kernel de Fejér.

*Demostración.*

$$\sigma_N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f$$

$\downarrow$

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$$

$x = 0$

$$\begin{aligned} F_N(0) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \overbrace{\frac{1}{2\pi}(2n+1)}^{D_n(0)} \\ &= \frac{1}{2\pi}N \end{aligned}$$

$x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\sin(n + \frac{1}{2})x \sin \frac{x}{2}}_{\frac{1}{2}(\cos(nx) - \cos((n+1)x))} \\ &= \frac{2}{\pi N} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \frac{1}{2} \underbrace{(\cos(0x) - \cos(Nx))}_{\sin^2 \frac{Nx}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2 \frac{Nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

■

Propiedades de  $F_N(x)$

1.  $F_N(x) \geq 0$ , suave, periódico- $2\pi$ , par

2.

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(x) dx = 1$$

(como promedio de  $D_N(x)$ )

3.

$$|F_N(x)| \leq \frac{1}{2\pi N \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad \delta \leq |x| \leq \pi$$

**Seba** *añadir foto pero borrarla pa zapit*

**Notación**

$$S_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} D_N(x-t) f(t) dt = D_N * f$$

$$\sigma_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} F_N(x-t) f(t) dt = F_N * f$$

Convolución:  $f \in C(\mathbb{T})$ ,  $g \in L^1(\mathbb{T})$

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt$$

tomando  $\tau = x - t$

$$f * g(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tau) g(x-\tau) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) g(x-\tau) = g * f(x)$$

**Definición 3.5.2.**  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels en  $L^1(\mathbb{T})$  si

1.

$$\int_{\mathbb{T}} K_n(x) dx = 1$$

2.

$$\sup_n \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)| dx < \infty$$

3.

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \delta > 0$$

**Nota:**  $\{F_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels pero  $\{D_N\}$  **no** lo es. Veremos que 2. falla para el kernel de Dirichlet.

**Teorema 3.5.6.** Si  $\{K_N\}_{N \in \mathbb{N}}$  es una familia de buenos kernels en  $L^1(\mathbb{T})$  y  $f \in C(\mathbb{T})$ , entonces

$$K_N * f = f * K_N \rightarrow f$$

uniformemente en  $\mathbb{T}$

**Corolario 3.5.6.1.**

$$\sigma_N f \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{unif}} f \text{ para } f \in C(\mathbb{T})$$

*Demostración del teorema 3.5.6.*

$$\begin{aligned} K_n * f(x) - f(x) &= f * K_n(x) - f(x) \\ &= \int f(x-y) K_n(y) dy - f(x) \\ &= \int (f(x-y) - f(x)) K_n(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |K_n * f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{T}} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy \\ &= \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy + \int_{|y| > \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_n(y)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{T}} |K_n(y)| dy + 2 \max_{\mathbb{T}} |f| \int_{|y| > \delta} |K_n(y)| dy \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

cuando  $n$  es suficientemente grande. ■

**Corolario 3.5.6.2.** Si  $f \in C(\mathbb{T})$  y  $\hat{f}(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \implies f \equiv 0$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \sigma_N f &\equiv 0 \\ \downarrow \text{unif} \\ f &\equiv 0 \end{aligned}$$



**Corolario 3.5.6.3.** *Suponga que  $f \in C(\mathbb{T})$  y su serie de Fourier converge absoluta y uniformemente, es decir:*

$$\sum_n |\hat{f}(n)e_n(x)| = \sum_n |\hat{f}(n)| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \infty$$

*Entonces,*

$$S_N f \rightarrow f \text{ unif}$$

*Demostración.* Defina

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n(x) \in C(\mathbb{T})$$

por convergencia absoluta uniforme.

$$h(x) := g(x) - f(x)$$

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \hat{g}(n) - \hat{f}(n) = \left\langle \sum_k \hat{f}(k)e_k(x), e_n(x) \right\rangle - \hat{f}(n) \\ &= \hat{f}(n) - \hat{f}(n) = 0 \end{aligned}$$

Se puede intercambiar la suma con la integral por convergencia uniforme y el corolario anterior, se concluye que  $h \equiv 0$ . ■

Tenemos la convergencia  $\sigma_N f \xrightarrow{\text{unif}} f$  para  $f \in C(\mathbb{T})$ . Queremos pasar a convergencia en  $L^2$ . Vamos a utilizar la **densidad** de  $C(\mathbb{T}) \subseteq L^2(\mathbb{T})$ . Vamos a necesitar la estimación adicional:

**Proposición 3.5.7.**

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$$

*Demostración.*  $\sigma_N f = \frac{1}{N}(S_0 f + \cdots + S_{N-1} f)$

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|S_k f\|_{L^2}$$

Tenemos,

$$\|S_k f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \text{ (Bessel)}$$

$S_k f$  = proyección de  $f$  en  $\text{Gen}(\{e_l\}_{|l| \leq k})$

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \leq \frac{1}{N} N \|f\|_{L^2}$$

■

De hecho, tenemos

**Proposición 3.5.8.** *Si  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ , entonces*

$$\|\sigma_N f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$$

**Teorema 3.5.9.** *Sea  $f \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Entonces,*

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^p} f$$

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ . Aproxime  $f \in L^p(\mathbb{T})$  con  $g \in C(\mathbb{T})$ :

$$\|f - g\|_{L^p} \leq \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \sigma_N f - f &= \sigma_N g - g + \sigma_N(f - g) - (f - g) \\ \|\sigma_N f - f\|_{L^p} &\leq \|\sigma_N g - g\|_{L^p} + \|\sigma_N(f - g)\|_{L^p} + \|f - g\|_{L^p} \\ &\leq C\varepsilon \end{aligned}$$

Podemos elegir  $N$  suficientemente grande, tal que

$$\|\underbrace{\sigma_N g - g}_h\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

por convergencia uniforme.

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^p} &= \left( \int_{\mathbb{T}} |h|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{T}} \varepsilon^p dx \right)^{1/p} = (2\pi)^{1/p} \varepsilon \end{aligned}$$





**Corolario 3.5.9.1.**

$$S_N f \xrightarrow{L^2} f$$

*Demostración.*

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$$



**Lema 3.5.10** (Riemann-Lebesgue).  $f \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ . Utilizaremos que

$$\sigma_N f \xrightarrow{L^1} f$$

Podemos encontrar  $N$  suficientemente grande, tal que

$$\| \underbrace{f - \sigma_N f}_g \|_{L^1} \leq \varepsilon$$

$n > N$ ,

$$\begin{aligned} \hat{g}(n) &= \hat{f}(n) - \widehat{\sigma_N f}(n) \xrightarrow{0} 0 \\ \Rightarrow |\hat{f}(n)| &= |\hat{g}(n)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |g(x) e^{-inx}| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |g| dx \leq \varepsilon / \sqrt{\pi} \end{aligned}$$



$$L^2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell_{\mathbb{Z}}^2 = \{(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < \infty\}$$

$$f \rightarrow \hat{f} = (\dots, \hat{f}_{(-1)}, \hat{f}_{(0)}, \hat{f}_{(1)}, \dots)$$

es un isomorfismo unitario.

$$L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0 = \{(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) : \lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n = 0\}$$

$$f \rightarrow \hat{f}$$

**Teorema 3.5.11.**  $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0$  es lineal, acotado e inyectivo.

*Demostración.* lineal ✓

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{\ell^\infty} &\leq? \\ |\hat{f}(n)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |f(x)e^{-inx}| dx \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

por lo que  $\|\hat{f}\|_{\ell^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1}$

→ inyectivo? Suponga que  $\hat{f} = 0 \iff \hat{f}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \sigma_N f &\equiv 0 \\ \downarrow L^1 \\ f &\equiv 0 \end{aligned}$$

pero  $\mathcal{F}$  no es sobreyectiva. Si  $\mathcal{F}$  fuera inyectivo, sería un isomorfismo continuo. Por teorema de aplicación abierta, tenemos que  $\mathcal{F}^{-1}$  es acotada:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1} \hat{f}\|_{L^1} &\leq c \|\hat{f}\|_\infty \\ \|f\|_{L^1} &\leq c \|\hat{f}\|_\infty \end{aligned}$$

Tomamos  $f(x) = D_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|n| \leq N} e_n(x)$ .

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \langle f, e_n \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle e_n, e_n \rangle \quad |n| \leq N \\ &= 0 \quad |n| > N \end{aligned}$$

$$\|\hat{f}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

**Proposición 3.5.12.**

$$\|D_N\|_{L^1} \geq C \log N$$

**Corolario 3.5.12.1.**  $f_N := D_N$  contradice  $\|f\|_{L^1} \leq c\|\hat{f}\|_\infty$

$$\begin{aligned} D_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \\ \|D_N\| &= \int_{-\infty}^{\infty} |D_N(x)| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})x|}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ \|D_N\| &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(N + \frac{1}{2})x}{x} dx \end{aligned}$$

$$u = (N + \frac{1}{2})x$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3\pi} \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \frac{2}{\pi} \int_0^{N\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u| du \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \underbrace{\int_0^{\pi} |\sin u| dy}_{c'} \\ &= \frac{2c'}{\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \geq c \log N \end{aligned}$$

**Seba** añadir align

■

Vimos que  $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$ .

Q. ¿Converge  $S_n f \rightarrow f$  puntualmente?

A. ¡Generalmente no!

Q. ¿Converge  $S_N f \rightarrow f$  c.t.p? Es fácil ver (si conocemos teoría de integración) que existe una subsucesión

$$S_{N_k}f \rightarrow f \quad \text{c.t.p}$$

(dada la convergencia  $S_N f \xrightarrow{L^2} f$ )

A. (Teorema de Carleson) Sí,  $S_n f \rightarrow f$  c.t.p (Difícil).

### 3.5.2. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Vieron en ayudantía un ejemplo de función  $f \in C(\mathbb{T})$  tal que

$$S_N f(0) \not\rightarrow f(0)$$

De hecho, este ejemplo es **genérico**

**Teorema 3.5.13.** *Para todo  $x \in \mathbb{T}$ , existe un conjunto genérico  $A_x \subseteq C(\mathbb{T})$  tal que*

$$\sup_N |S_N f(x)| = \infty$$

La demostración utiliza el marco del **principio de acotación uniforme**/Teorema de Banach-Steinhaus

**Teorema 3.5.14** (Banach-Steinhaus). *Sea  $X$  Banach,  $Y$  un espacio normado. Sean  $T_k \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $k \in I$ , no necesariamente contable. Entonces*

1. o  $\sup_k \|T_k\| < \infty$
2. o  $\sup_k \|T_k x\| = \infty$  para todo  $x \in A$ , donde  $A \subseteq X$  es un subconjunto genérico  $G_\delta$ .

**Seba** cambiar enumerate a letras a., b.

**Nota:** Si  $\sup_k \|T_k x\| < \infty \forall x \in X$ , entonces  $\|T_k\|$  son uniformemente acotadas.

**Corolario 3.5.14.1.** *Sean  $X$  Banach,  $Y$  normado. Sean  $T_k \in \mathcal{B}(X, Y)$ . Suponga que  $\forall x \in X$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k x =: Tx \quad \text{existe}$$

Entonces,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$  y

$$\|T\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T_k\| < \infty$$

*Demostración.*  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k x = T x$ .

$$\implies \forall x \in X \quad \sup_k \|T_k x\| < \infty$$

(sucesión que converge es acotada)

$$\implies \sup_k \|T_k\| < \infty$$

Que  $T$  es lineal, fácil ✓

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} T_k x \right\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T_k x\| \\ &= \sup_n \inf_{k \geq n} \|T_k x\| \leq \left( \sup_n \inf_{k \geq n} \|T_k\| \right) \|x\| = \left( \liminf_{k \rightarrow \infty} \|T_k\| \right) \|x\| \end{aligned}$$

**Seba** *añadir align* ■

*Demostración del teorema de Banach-Steinhaus (3.5.14).* Defina  $\psi(x) := \sup_k \|T_k x\|$ .

$$U_n = \{x \in X : \psi(x) > n\} = \bigcup_k \underbrace{\{\|T_k x\| > n\}}_{\text{abierto pues } T_k \text{ es continuo}}$$

Tenemos 2 posibilidades:

1. Si todos los  $U_n$ 's son densos en  $X$ ,

$$\implies A := \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \quad \text{es genérico, } G_\delta$$

$$\forall x \in A, \psi(x) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\implies \psi(x) = \infty \quad (\text{caso } b.)$$

2. Si unos de los  $U_n$ 's **no** es denso, entonces  $U_m^c$  contiene una bola  $B = B_r(a)$ .

$$\begin{aligned} \psi(x) &\leq m \quad \forall x \in B_r(a) \\ \implies \|T_k x\| &\leq m \quad \forall x \in B_r(a), \forall k \\ \implies \|T_k(a+y)\| &\leq m \quad \forall y \in B_r(0), \forall k \end{aligned}$$

$$\forall y \in B_r(0)$$

$$\begin{aligned} \|T_k y\| &\leq \|T_k a\| + \|T_k(y - a)\| \\ &= \|T_k a\| + \|T_k(a - y)\| \\ &\leq m + m = 2m \end{aligned}$$

$$\implies \|T_k y\| \leq \frac{2m}{r} \|y\| \quad \forall y \in X, \forall k$$

■

*Demostración del teorema 3.5.13.* Será suficiente demostrar el teorema para  $x = 0$ . Aplicaremos el principio de acotación uniforme (Banach-Steinhaus) a

$$\begin{aligned} S_N^0 : C(\mathbb{T}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\rightarrow S_n f(0) \end{aligned}$$

Estaremos listos cuando probemos que

$$\sup_N \|S_N^0\| = \infty$$

$\iff$  estamos en la alternativa  $b$ .

$$\implies \sup_N |S_N f(0)| = \infty \forall f \in A, A \stackrel{gen.}{\subseteq} C(\mathbb{T})$$

Recordando que  $(S_N f(x) = D_N * f(x))$

$$\begin{aligned} S_N^{(0)} &= S_N f(0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(0 - y) f(y) dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(y) dy \\ \implies |S_N f(0)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(y)| \cdot |f(y)| dy \leq \|D_N\|_{L^1} \|f\|_{\infty} \\ \implies \|S_N^0\| &\leq \|D_N\|_{L^1} \end{aligned}$$

Pero, de hecho, afirmamos que

$$\|S_N^0\| = \|D_N\|_{L^1}$$

Noten que cuando ponemos  $f(y) = \operatorname{sgn} D_N(y)$

$$S_N f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) \operatorname{sgn} D_N(y) dy = \|D_N\|_{L^1}$$

$f = \operatorname{sgn} D_N \in L^1(\mathbb{T})$ ,  $\implies$  podemos encontrar  $f_k \in C(\mathbb{T})$ :

$$\|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$S_N f_k(0) = \int D_N(y)(f_k - f)(y) dy + \underbrace{\int D_N(y)f(y) dy}_{\|D_N\|_{L^1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|D_N\|_{L^1}$$

mientras

$$\left| \int D_N(y)(f_k - f)(y) dy \right| \leq \max_{\mathbb{T}} |D_N| \|f_k - f\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

■

### 3.6. Repaso/Crash course en teoría de la medida

$\Omega = \{M_1, \dots, M_{100}\}$  pila de monedas.  $V : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ . En el caso de Chile tenemos  $\operatorname{Im} V = \{1, 5, 10, 50, 100, 500\}$ . Queremos calcular el valor total de la pila de monedas. Hay 2 métodos:

1. Dividimos la pila en grupos de digamos 10 monedas:  $M_1, \dots, M_{10}$  y así sucesivamente. Luego, sumamos los valores de cada grupo y sumamos los resultados. Esto corresponde con la integral de Riemann
2. Dividimos las monedas en grupos de acuerdo al valor

$$E_1 = \{M \in \Omega : V(M) = \alpha_1\}$$

$$E_2 = \{M \in \Omega : V(m) = \alpha_2\}$$

$\vdots$

$$E_N$$

Luego,  $S = \sum_{k=1}^N \alpha_k(\#E_k)$ . Esto corresponde con la integral de Lebesgue.

### 3.6.1. Espacios de medida y funciones medibles

**Definición 3.6.1** (Espacio de medida). un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ .

**Definición 3.6.2** ( $\sigma$ -álgebra). Una colección  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de  $\Omega$  es una  $\sigma$ -álgebra si

1.  $\Omega \in \mathcal{M}$
2.  $E \in \mathcal{M} \implies E^c := \Omega \setminus E \in \mathcal{M}$
3.  $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subseteq \mathcal{M} \implies \bigcup_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{M}$

Podemos ver que  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ,  $\bigcap_k E_k \in \mathcal{M}$  si  $\forall E_k \in \mathcal{M}$  y  $E \setminus F \in \mathcal{M}$  si  $E, F \in \mathcal{M}$ .

**Ejemplo:**  $\Omega = \{a, b\}$ ,

$$\mathcal{M}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

son  $\sigma$ -álgebras.

**Ejemplo:** Si  $\Omega$  es un espacio métrico (topológico más general).

$$\mathcal{B}_\Omega \rightarrow \sigma\text{-álgebra de Borel}$$

definida como la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los abiertos de  $\Omega$ .

**Definición 3.6.3.** Una medida  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  que satisface:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$
2.  $\{E_k\}_{k=1}^\infty$  de conjuntos en  $\mathcal{M}$  mutuamente disjuntos,

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^\infty E_k \right) = \sum_{k=1}^\infty \mu(E_k)$$

Esto se llama  $\sigma$ -aditividad



Las siguientes propiedades son consecuencias fáciles de la definición:

1. (Aditividad finita)

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^N E_k \right) = \sum_{k=1}^N \mu(E_k)$$

2. Si  $A, B \in \mathcal{M}$  y  $A \subseteq B$

$$\implies \mu(B) = \mu(A \cup B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$$

3. (subaditividad) Si  $\{E_k\} \subseteq \mathcal{M}$ , no necesariamente disjuntos,

$$\mu \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

4.  $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots \subseteq E_{k+1} \subseteq \cdots$ , sucesión creciente de medibles,

$$E = \bigcup_k E_k, E_k \uparrow E$$

$$\mu(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k)$$

5.  $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \downarrow E$$

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_k)$$

$$\text{si } \mu(E_1) < \infty$$

**Ejemplo:**  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ ,

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} \mu_n \leftarrow \text{pesos} \in [0, \infty)$$

Cuando todos los  $\mu_n \equiv 1$ ,  $\mu$  es la medida de contar.

**Teorema 3.6.1.** *Existe una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  y*

$$|\cdot| : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$$

*con las siguientes propiedades:*

1.  $\mathcal{M}$  contiene todos los abiertos ( $\supseteq B_{\mathbb{R}^n}$ )
2.  $|B| = \text{Vol}(B)$  para toda la bola abierta  $B \subseteq \mathbb{R}^n$
3. (completitud) Si  $A \subseteq B$ , donde  $B \in \mathcal{M}$  y  $|B| = 0$ , entonces  $A \in \mathcal{M}$  y  $|A| = 0$ .

Conjuntos de medida 0 = conjuntos **despreciables**.

**Notación:** Una propiedad se cumple para x.c.t.p (en casi todas partes) si se cumple para todo  $x \in E^c$  donde  $E$  es despreciable.

**La medida producto** :  $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$  y  $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ . Existe una única medida  $\mu : \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \rightarrow [0, \infty]$  donde  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 :=$  la menor  $\sigma$ -álgebra que contiene todos los  $E_1 \times E_2$  con  $E_1 \in \mathcal{M}_1, E_2 \in \mathcal{M}_2$  tal que

$$\mu(E_1 \times E_2) = \mu_1(E_1)\mu_2(E_2)$$

**Ejemplo:**  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, |\cdot| = \lambda_n)$  y  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}, |\cdot| = \lambda_m)$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}$$

$$\lambda := \lambda_n \times \lambda_m = \lambda_{m+n}$$

que es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^{m+n}$ .

**Definición 3.6.4.**  $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  es **medible** si  $\{x \in \Omega : f(x) > r\} \in \mathcal{M} \quad \forall r \in [-\infty, \infty]$

$$\iff f^{-1}(I) \in \mathcal{M} \quad \forall I \subseteq [-\infty, \infty]$$

$$\iff f^{-1}(O) \in \mathcal{M} \quad \forall O \stackrel{ab}{\subseteq} [-\infty, \infty]$$

Esta clase de funciones con valores reales es cerrada bajo las operaciones usuales:  $+$ ,  $\times$  y tomar  $\sup_k, \inf_k, \limsup_k, \liminf_k$ . Si  $\{f_k\}_{k=1}^\infty$  sucesión de funciones medibles, entonces  $\sup_k f_k, \inf_k f_k, \liminf_k f_k, \limsup_k f_k$  son medibles.

**Ejemplo:** La funciones simples

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$$

De hecho toda función medible es límite de funciones simples  $s_n(x)$  tal que

$$|s_n(x)| \nearrow |f(x)|$$

Descomponemos  $f = f^+ - f^-$ ,

$$0 \leq f^+ = \max\{f, 0\}$$

$$0 \leq f^- = \max\{-f, 0\}$$

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Cuando  $f \geq 0$  es medible, podemos aproximarla con

$$s_n(x) = n \chi_{\{f > n\}} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq f < \frac{k}{2^n}\}}$$

$$s_n(x) \nearrow f(x), \quad n \rightarrow \infty$$

### 3.6.2. La integral de Lebesgue

#### Funciones simples

$$\int_{\Omega} s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$$

donde  $s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$

#### Funciones medibles

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int s \, d\mu : 0 \leq s \leq f \right\}$$

#### Propiedades

1.

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

2.

$$\int c f \, d\mu = c \int f \, d\mu, \quad c \geq 0$$

3.

$$\int f d\mu = 0 \iff f \equiv 0 \quad \text{c.t.p.}$$

4.

$$\int f d\mu < \infty \implies f < \infty \quad \text{c.t.p.}$$

### Propiedades de convergencia

1. Teorema de Convergencia Monotona:

$$0 \leq f_n \nearrow f \quad \text{c.t.p.} \implies \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

2. Lema de Fatou:

$$f_n \geq 0 \quad \int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n$$

**Funciones reales**  $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ ,  $f = f^+ - f^-$

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

si uno de estos dos términos  $< \infty$ .

Cuando ambos son finitos,

$$\iff \int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < \infty$$

decimos que  $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$  es integrable.

En  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , la integral es un funcional lineal (POS) que es  $\geq 0$  cuando  $f \geq 0$ . Como consecuencia, para  $f, g \in \mathcal{L}^1$ :

1.

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

cuando  $f \geq g$  c.t.p.

2.

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

3.

$$|f| < \infty \quad \text{c.t.p.}$$

### Funciones complejas

**Definición 3.6.5.**  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es medible si  $u := \operatorname{Re} f$ ,  $v := \operatorname{Im} f$  son medibles.

$$\int f d\mu := \int u d\mu + i \int v d\mu$$

**Definición 3.6.6.**  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$  si  $|f|$  es integrable  $\iff u, v \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ .

**Teorema 3.6.2** (Convergencia Dominada).  $f_n \rightarrow f$  c.t.p. y  $|f_n| \leq g$  c.t.p. donde  $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$ , entonces

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$$

De hecho,

$$\int |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Teorema 3.6.3** (Tonelli).  $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ ,  $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$  espacio de medida  $\sigma$ -finitos.  $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mu = \mu_1 \times \mu_2)$ . Sea  $f(x, y)$   $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ -medible y no negativa. Entonces, denotando  $f^y(x) = f(x, y)$  para  $y$  fijo es una función en  $\Omega_1$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  para  $x$  fijo es una función en  $\Omega_2$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f^y(x) d\mu_1(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f_x(y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \end{aligned}$$

donde toda función integrada es medible en el espacio correspondiente.

**Teorema 3.6.4** (Fubini). *Es posible cambiar el orden de integración cuando  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ :*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\mu &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f^y(x) \, d\mu_1(x) \right) d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f_x(y) \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \end{aligned}$$

### 3.7. Espacios de Lebesgue $L^p$

#### 3.7.1. Espacios $L^p$

Defina:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty) \\ \|f\|_{\infty} &:= \inf \{ M > 0 : |f| \leq M \text{ c.t.p.} \} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \{ \text{funciones medibles} : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_p < \infty \}$$

**Proposición 3.7.1.**  $\|\cdot\|_p$  es una **semi-norma** en  $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ . Además,

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ c.t.p.}$$

**Corolario 3.7.1.1.**  $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mu) = \{f = 0 \text{ c.t.p.}\}$ . Entonces,

$$L_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) / \mathcal{N}_{\mathbb{K}}(\mu)$$

es un espacio **normado** con norma  $\|\cdot\|_p$ .

*Demostración de la proposición 3.7.1.*  $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$ .

Desigualdad triangular = desigualdad de Minkowski

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

( $p = 1, \infty$  es obvio) ■

**Teorema 3.7.2** (Desigualdad de Hölder).

$$\int |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

donde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y  $p, q \in [1, \infty]$

*Demostración.* Podemos asumir que

$$0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$$

$p = 1, q = \infty$ .  $0 < \|f\|_1 < \infty, 0 < \|g\|_\infty < \infty$ .

$$\begin{aligned} \int |fg| d\mu &\leq \int (|f| d\mu) \|g\|_\infty \\ &\leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty \quad \text{c.t.p.} = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Para los demás,  $1 < p, q < \infty$ . Podemos asumir  $\|f\|_p = 1, \|g\|_q = 1$  y será suficiente demostrar

$$\int |fg| d\mu \leq 1$$

Aplicamos Young (lo que viene después) a  $a = |f|, b = |g|$

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$$

$$\int |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} \underbrace{\int |f|^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\int |g|^q}_{=1}$$

■

**Teorema 3.7.3** (Desigualdad de Young).  $0 \leq a, b \leq \infty$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad 1 < p, q < \infty$$

*Demostración.* Podemos asumir  $a, b > 0$ .

$$ab = e^{\log(ab)} = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{q} \log(b^q)}$$

$$e^{sx + (1-s)y} \leq se^x + (1-s)e^y \quad (\text{convexidad de } e^x)$$

por lo que

$$\leq \frac{1}{p} e^{\log(a^p)} + \frac{1}{q} e^{\log(b^q)}$$

■

*Desigualdad de Minkowski.* en  $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned} |f + g|^p &= |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ &\leq |f| \cdot |f + g|^{p-1} + |g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ \int |f + g|^p d\mu &\leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.7.4** (Riesz-Fischer).  $L^p(\mu)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.*  $f_k \in L^p(\mu)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Queremos demostrar que si

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p &=: M < \infty \\ \implies \sum_{k=1}^n f_k &\xrightarrow{L^p} F \in L^p \end{aligned}$$

$p = \infty$  (ejercicio). Sea  $p \in [1, \infty)$



$$G_n(x) := \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \quad \text{medible, } \geq 0 \nearrow_{n \rightarrow \infty} G(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

Por teorema de convergencia monotonía,

$$\int G(x)^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int G_n(x)^p d\mu$$

$$\left( \int G_n(x)^p d\mu \right) = \|G_n\|_p^p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p^p \leq M^p$$

por Minkowski.

$$\implies \int G(x)^p d\mu \leq M^p$$

$$\implies G^p \in L^1 \quad (G \in L^p)$$

En particular,  $0 \leq G^p(x) < \infty \quad \mu - \text{c.t.p.}$

$$\implies G(x) < \infty \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

es decir,  $\mu - \text{c.t.p.}$ ,  $\sum |f_k(x)|$  converge. Defina

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) & x \text{ tal que } G(x) < \infty \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$F$  es medible y  $F \in L^p(\mu)$  pues

$$|F(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = G(x) \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies |F(x)|^p \leq G(x)^p \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies \int |F(x)|^p \leq \int G(x)^p < \infty$$

Falta establecer la convergencia en  $L^p$ :

$$\left\| F - \sum_{k=1}^N f_k \right\|_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

$$\left| F - \sum_{k=1}^n f_k \right|(x) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k|(x) \leq G(x) \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$\implies \left| F - \sum_{k=1}^N f_k \right|^p \leq G^p \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Por definición de  $F$ ,

$$\left| F - \sum_{k=1}^N f_k \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Por el teorema de convergencia dominada

$$\int \left| F - \sum_{k=1}^N f_k \right|^p d\mu \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int 0 d\mu = 0$$

■

### 3.7.2. Los espacios $L^p$ y dualidad

$1 \leq p \leq \infty$ ,  $q \rightarrow$  exponente dual:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$p = 1 \rightarrow q = \infty$$

$$p = 2 \rightarrow q = 2$$

$$p = \infty \rightarrow q = 1$$

Se puede definir un **emparejamiento** entre  $L^p$  y  $L^q$ .

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^p(\mu) \times L^q(\mu) \rightarrow \mathbb{K}$$

$$f, g \rightarrow \langle f, g \rangle := \int f g d\mu$$

es bien definido:

$$f \in L^p, g \in L^q \implies |fg| \in L^1$$

$$\begin{aligned}
\left( \int |fg| d\mu \right) &\leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty \\
&\implies fg \in L^1 \\
\implies |\langle f, g \rangle| &= \left| \int fg \right| \leq \int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q
\end{aligned}$$

Debido a esto podemos definir  $\ell_g \in (L^p)^*$

$$\begin{aligned}
\ell_g : L^p(\mu) &\rightarrow \mathbb{K} \\
f &\rightarrow \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

es lineal y acotado con

$$\|\ell_g\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_q$$

De esta manera tenemos una aplicación

$$\begin{aligned}
\phi : L^q(\mu) &\rightarrow [L^p(\mu)]^* \\
g &\rightarrow \ell_g
\end{aligned}$$

$\phi$  es lineal, acotada e inyectiva ( $\ell_g = 0 \implies g = 0$ ).

### 3.7.3. Teorema de Representación de Riesz

**Teorema 3.7.5.** Sea  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$   $\sigma$ -finito. Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces  $\phi$  es un **isomorfismo isométrico**:

$$\begin{aligned}
&\forall \ell \in (L^p(\mu))^*, \exists ! g \in L^q(\mu) \text{ tal que } \ell(f) = \langle f, g \rangle \quad \forall f \in L^p \\
&\text{con } \|\ell\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q.
\end{aligned}$$

**Nota:** 1. Incluye el caso  $p = 2$  (Espacio de Hilbert).  
2.  $\Omega : \mathbb{N}, \mu = \text{medida de contar}$

$$L^p(\mu) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} : \left( \sum |f_k|^p \right)^{1/p} < \infty\} = \ell^p$$

3. El teorema dice que

$$(\ell^p)^* \simeq \ell^q \quad p \in [1, \infty)$$

4.  $p = \infty$ :  $(L^\infty)^* \not\simeq L^1$

$$\phi : L^1 \not\rightarrow (L^\infty)^* \quad \text{no es sobreyectiva}$$

La demostración requiere la herramienta del Teorema de Radon-Nikodym.

**Definición 3.7.1.**  $(\Omega, \mathcal{M})$  y medidas  $\mu, \nu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ . Decimos que  $\nu$  es **absolutamente continua** respecto a  $\mu$  si

$$\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$$

y escribimos  $\nu \ll \mu$ .

**Ejemplo:** Si  $h \geq 0, h \in L^1(\mu)$  podemos definir  $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$

$$\nu(E) := \int h \chi_E d\mu =: \int_E h d\mu$$

$\nu$  es una medida.

$$“d\nu = h d\mu” \quad h \text{ es densidad}$$

$$\nu \ll \mu \text{ pues } \mu(E) = 0$$

$$\implies \nu(E) = \int h \chi_E d\mu = 0$$

**Teorema 3.7.6** (Radon-Nikodym). Sean  $\mu$  y  $\nu$  medidas en  $(\Omega, \mathcal{M})$   $\sigma$ -finitas. Si  $\nu \ll \mu$ , entonces  $\exists! h \geq 0$  medible tal que  $\nu(E) = \int_E h d\mu$ .  
( $h$  es única  $\mu$ -c.t.p.)

$(d\nu = h d\mu)$ ,  $h = [\frac{d\nu}{d\mu}]$  derivada de Radon-Nikodym.

*Demostración.* **Unicidad:**

$$\int h_1 \chi_E d\mu = \int h_2 \chi_E d\mu = \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

$$\int (h_1 - h_2) \chi_E d\mu = 0 \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

$$E = \{h_1 > h_2\}$$

$$0 = \int_{\{h_1 - h_2 > 0\}} (h_1 - h_2) d\mu \implies \mu(\{h_1 > h_2\}) = 0 \implies \mu(\{h_1 \neq h_2\}) = 0 \implies h_1 = h_2 \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

**Existencia:** (argumento de Von Neumann) que utiliza el Teorema de Representación de Riesz en  $L^2$ .

idea:  $\lambda = \mu + \nu$ . Suponga que  $\mu(\Omega), \nu(\Omega) < \infty$

$$\mu(E) = 0 \iff \lambda(E) = 0$$

Vamos a definir un funcional lineal acotado

$$\begin{aligned} \ell : L^2_{\mathbb{R}}(\lambda) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \int f d\mu \end{aligned}$$

$\ell$  es obviamente lineal y acotado:

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu \right| &\leq \int |f| d\mu \\ &= \int |f| \cdot 1 d\mu \\ &\leq \int |f| \cdot 1 d\lambda \\ &\leq \|f\|_{L^2(\lambda)} \underbrace{\|1\|_{L^2(\lambda)}}_{[\lambda(\Omega)]^{1/2}} \end{aligned}$$

Es decir,  $|\ell(f)| \leq (\lambda(\Omega))^{1/2} \|f\|_{L^2(\lambda)}$

Por Teorema de Representación de Riesz:

$$\ell(f) = \int f g d\lambda, \quad g \in L^2(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu &= \int f g d\lambda \\ &= \int f g d\mu + \int f g d\nu \\ \int f(1-g) d\mu &= \int f g d\nu \quad \forall f \in L^2(\lambda) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Formalmente “ $(1-g) d\mu = g d\nu$ ”  $\implies$  “ $h = \frac{1-g}{g}$ ”.

Primero vamos a demostrar que

$$0 < g \leq 1 \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

$$(a) \quad F := \{g \leq 0\}$$

$$\mu(F) = \int \chi_F d\mu \leq \int \chi_F(1-g) d\mu$$

por (3.1),

$$\begin{aligned} &= \int \chi_F g d\nu \leq 0 \\ &\implies \mu(F) = 0 \end{aligned}$$

$$(b) \quad G := \{g > 1\}. \text{ Suponga que } \mu(G) > 0$$

$$\begin{aligned} 0 > \int_G (1-g) d\mu &= \int (1-g) \chi_G d\mu \\ &= \int (1-g) \chi_G d\nu \\ &= \int_G g d\nu \geq 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

$g \in L^2(\lambda)$ . Podemos elegir representante  $g$ , tal que  $0 < g \leq 1$  en  $\Omega$ . Definimos

$$h := \frac{1-g}{g} \geq 0 \quad \text{en } \Omega$$

Tome  $A \in \mathcal{M}$ ,  $f_n = \chi_{\{A \cap g \geq \frac{1}{n}\}}/g \in L^2(\lambda)$ . Ponemos  $f_n$  en (3,1):

$$\int f_n(1-g) d\mu = \int f_n g d\nu$$

$x \in \{g < \frac{1}{n}\}, f_n = 0$ .  $x \in \{g \geq \frac{1}{n}\}, f_n \leq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ .  $\implies f_n$  es acotada.  $\implies f \in L^2(\lambda)$ .

$$\int \frac{1-g}{g} \chi_{A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\}} d\mu = n \int \chi_{A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\}} d\nu$$

$$A \cap \{g \geq \frac{1}{n}\} \nearrow A$$

Tomando  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ , por Teorema de Convergencia Monótona obtenemos

$$\int h \chi_A d\mu = \int \chi_A d\nu$$

Ahora suponga que  $\mu, \nu$  son  $\sigma$ -finitas: existe  $\Omega_n \nearrow \Omega$ , tales que

$$\mu(\Omega_n), \nu(\Omega_n) < \infty$$

Aplicaremos el resultado a  $(\Omega_n, \mathcal{M}, \mu$  y  $\nu|_{\Omega_n})$ .  $\mathcal{M}_n = \{E \cap \Omega_n : E \in \mathcal{M}\}$ .

$$\nu(A) = \int h_n \chi_A d\mu \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$$

para alguna  $h_n \geq 0$  y  $\mathcal{M}_n$ -medible.

$$= \int h_{n+1} \chi_A d\mu$$

por unicidad

$$h_{n+1}|_{\Omega_n} = h_n \quad \mu - \text{c.t.p.}$$

Extienda cada  $h_n$  por 0 fuera de  $\Omega_n$ . De esta manera  $h_n$  es  $\mathcal{M}$ -medible. Defina  $h := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$

$$h_n \nearrow h$$

Para todo  $E \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\Omega_n \cap E) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_n} h_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_n} h d\mu \\ &= \int_E h d\mu \end{aligned}$$

■

Necesitaremos también el siguiente resultado:

**Definición 3.7.2.**  $\ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$  es **positivo** si  $\ell(f) \geq 0 \quad \forall f \in L_{\mathbb{R}}^p, f \geq 0$

**Teorema 3.7.7.** Sea  $\ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Entonces

$$\ell = \ell_+ - \ell_-$$

$\ell_{\pm} \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$  son positivos.

*Demostración.* Sea  $\ell \in (L^p)^*$ .

1. Definiremos  $\ell_+$  para  $f \geq 0$ .

$$\ell_+(f) := \sup_{0 \leq g \leq f} \ell(g)$$

Obviamente,  $\ell_+(cf) = c\ell_+(f)$ ,  $c \geq 0$ . Probemos la aditividad:

$$\ell_+(f_1 + f_2) = \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \geq 0 \text{ en } L^p$$

$$\underbrace{\ell(g_1 + g_2)}_g = \ell(g_1) + \ell(g_2)$$

Si  $0 \leq g_1 \leq f_1$ ,  $0 \leq g_2 \leq f_2$



$$\implies g = g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$$

$$\sup_{0 \leq g \leq f_1 + f_2} \ell(g) \geq \ell(g_1) + \ell(g_2)$$

Tomando sup sobre  $0 \leq g_1 \leq f_1$ ,  $0 \leq g_2 \leq f_2$

$$\ell_+(f_1 + f_2) \geq \ell(f_1) + \ell(f_2)$$

Para demostrar la otra, notamos que cada  $0 \leq g \leq f_1 + f_2$  se puede escribir

$$g = g_1 + g_2$$

donde  $g_1 := \min(g, f_1) \leq f_1$ ,  $g_2 := g - g_1 \leq f_2$ .

$$\begin{aligned} \ell(g) &\leq \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2) \\ \implies \ell_+(f) &\leq \ell_+(f_1) + \ell_+(f_2) \end{aligned}$$

2. Extendemos  $\ell_+$  a toda  $f \in L^p$ .

$$f = f_+ - f_-$$

Definimos  $\ell_+(f) = \ell_+(f_+) - \ell_+(f_-)$ .

Esta definición no depende de como descomponemos  $f$  como diferencia de 2 funciones no negativas.

$$\begin{aligned} f = f_+ - f_- = f_1 - f_2 &\implies f_+ f_2 = f_1 + f_- \\ \implies \ell_+(f_1 + f_2) &= \ell_+(f_1 + f_-) \\ \implies \ell_+(f_+) + \ell_+(f_2) &= \ell_+(f_1) + \ell_+(f_-) \\ \implies \ell_+(f_+) - \ell_+(f_-) &= \ell_+(f_1) - \ell_+(f_2) \end{aligned}$$

3. Por lo tanto,  $\ell_+$  es **lineal**

$$\begin{aligned} \ell_+(cf) &= c\ell_+(f) \quad \forall c \geq 0 \\ \ell_+(-cf) &= \ell_+(c(-f)) = c\ell_+(-f) = -c\ell_+(f) \\ \implies \ell_+(-f) &= \ell_+(f_-) - \ell_+(f_+) = -\ell_+(f) \end{aligned}$$

$\ell_+$  es acotado.

$$\begin{aligned}
 |\ell_+(f)| &= |\ell_+(f_+) - \ell_+(f_-)| \\
 &\leq |\ell_+(f_+)| + |\ell_+(f_-)| \\
 &\leq \|\ell\| \cdot \|f_+\|_{L^p} + \|\ell\| \cdot \|f_-\|_{L^p} \\
 &\leq 2\|\ell\| \cdot \|f\|_{L^p}
 \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 \ell_+(f) &\leq \sup_{0 \leq g \leq f} \|\ell\| \cdot \|g\|_{L^p} \\
 &\leq \|\ell\| \cdot \|f\|_{L^p}
 \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned}
 \ell_- &:= \ell_+ - \ell \\
 \implies \ell &\in (L_{\mathbb{R}}^p)^*
 \end{aligned}$$

$\ell_-$  es positiva pues  $\forall f \geq 0, f \in L^p$ .

$$\begin{aligned}
 \ell_-(f) &= \ell_+(f) - \ell(f) \geq 0 \\
 &= \sup\{\ell(g) : 0 \leq g \leq f\} - \ell(f) \geq 0
 \end{aligned}$$

■

*Demostración del Teorema de Riesz (3.7.5).*  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$  y positivo. Supondremos que  $\mu(\Omega) < \infty$ . Definimos

$$\begin{aligned}
 \nu : \mathcal{M} &\rightarrow [0, \infty) \\
 A &\rightarrow \ell(\chi_A)
 \end{aligned}$$

Afirmamos que  $\nu$  es una medida finita.

(a)  $\nu \geq 0$

$$\nu(\Omega) \leq \|\ell\| \cdot \|\chi_{\Omega}\|_{L^p} = \|\ell\| \left( \int_{\Omega} 1^p d\mu \right)^{1/p} = \|\ell\| (\mu(\Omega)^{1/p}) < \infty$$

(b)  $\nu(\emptyset) = 0$

(c) Si  $E = \biguplus E_k$ ,  $\chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k} \nearrow \chi_E$

$$0 \leq |\chi_E - \chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k}|^p \leq \chi_E^p \in L^1$$

Por Teorema de Convergencia Dominada

$$\begin{aligned} &\implies \chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k} \xrightarrow{L^p} \chi_E \\ \implies \ell(\chi_{\bigcup_{k=1}^N E_k}) &\rightarrow \ell(\chi_E) \iff \sum_{k=1}^N \ell(\chi_{E_k}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \ell(\chi_E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \ell(\chi_E) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \ell(\chi_{E_k}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \nu(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k) \end{aligned}$$

Además,  $\nu \ll \mu$

$$\nu(A) \leq \|\ell\| \mu(A)^{1/p}$$

Si  $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$  Por el teorema de Radon-Nikodym,

$$\ell(\chi_A) = \nu(A) = \int \chi_A h d\mu$$

para una  $h \geq 0$ . Tomando combinaciones lineales finitas de  $\chi_A$ 's:

$$\ell(s) = \int s h d\mu$$

para toda función simple  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora, cada función  $f \geq 0$  no negativa

$$0 \leq s_n \leq f, \quad s_n \nearrow f$$

Por Teorema de Convergencia Dominada,

$$\implies s_n \xrightarrow{L^p} f$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n h \, d\mu \\ &= \int f h \, d\mu \end{aligned}$$

Cuando  $\mu$  es  $\sigma$ -finita,

$$\Omega = \bigsqcup_n \Omega_n, \quad \mu(\Omega_n) < \infty$$

En cada  $\Omega_n$ , tenemos  $h_n \geq 0$ , tal que

$$\ell(f\chi_{\Omega_n}) = \int f\chi_{\Omega_n} h_n \, d\mu \quad \forall f \geq 0, f \in L^p$$

Extienda  $h_n$  por 0 fuera de  $\Omega_n$ . Tenemos que

$$\sum_{n=1}^N f\chi_{\Omega_n} \xrightarrow{L^p} f$$

por lo que

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \ell\left(\sum_{n=1}^N f\chi_{\Omega_n}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int f\chi_{\Omega_n} h_n \, d\mu \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int \Omega f h_n \, d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int f \sum_{n=1}^N h_n \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} f h \, d\mu \end{aligned}$$

donde  $h := \sum_{n=1}^{\infty} h_n$ . En particular,

$$fh \in L^1(\mu)$$

Tomaremos ahora un  $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$  con signo arbitrario.  $\ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$  y positivo

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \ell(f_+ - f_-) \\ &= \ell(f_+) - \ell(f_-) \\ &= \int f_+ h - \int f_- h = \int fh \, d\mu \end{aligned}$$

$$f \in L^p \implies |f| \in L^p, |f| \geq 0$$

$$\implies \ell(|f|) = \int |f|h \, d\mu \implies |f|h \in L^1$$

Por lo tanto,  $f_{\pm}h \in L^1$

$$\int (f_+ - f_-)g = \int f_+h - \int f_-h = \int f_+h - \int f_-h$$

Si  $\ell \in (L^p)^*$ , lo expresamos como diferencia de 2 funcionales positivos:

$$\ell = \ell_+ - \ell_-$$

cada una con su  $h_{\pm}$  correspondiente,  $h := h_+ - h_-$

$$\begin{aligned} &\forall f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu), fh_{\pm} \in L^1 \\ \implies fh &= fh_+ - fh_- \in L^1 \\ \implies \ell(f) &= \ell_+(f) - \ell_-(f) = \int fh_+ - \int fh_- = \int fh \end{aligned}$$

En esta etapa hemos demostrado que  $\forall \ell \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$  se puede escribir como

$$\ell(f) = \int fh \, d\mu$$

para alguna  $h$  medible donde  $fh \in L^1$ .

Para extender al caso complejo, noten que si  $\ell \in (L_{\mathbb{C}}^p)^*$  y  $f \in L_{\mathbb{R}}^p$ .

$$\implies \ell(f) = \operatorname{Re} \ell(f) + i \operatorname{Im} \ell(f)$$

donde  $\operatorname{Re} \ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$  y  $\operatorname{Im} \ell \in (L_{\mathbb{R}}^p)^*$ .

$$|\operatorname{Re} \ell(f)| \leq |\ell(f)| \leq \|\ell\|_{L_{\mathbb{C}}^p}^* \|f\|_{L_{\mathbb{C}}^p} = \|\ell\|_{(L_{\mathbb{C}}^p)^*} \|f\|_{L_{\mathbb{R}}^p}$$

$$\operatorname{Re} \ell = \langle \cdot, h_1 \rangle$$

$$\operatorname{Im} \ell = \langle \cdot, h_2 \rangle$$

donde  $fh_i \in L^1$ . Por lo tanto, si

$$h := h_1 + ih_2$$

$$|fh| \leq |fh_1| + |fh_2| \quad \forall f \in L_{\mathbb{R}}^p$$

y

$$\ell(f) = \langle f, h_1 \rangle + i \langle f, h_2 \rangle = \langle f, h_1 + ih_2 \rangle \quad \forall f \in L_{\mathbb{R}}^p$$

Por linealidad

$$\ell(f) = \langle f, h \rangle \quad \forall f \in L_{\mathbb{C}}^p$$

donde  $|fh| \in L^1$ .

$\ell \in (L^p)^*$ . Hemos demostrado que existe  $h$  medible tal que

$$fh \in L^1 \quad \forall f \in L^p$$

y

$$\ell(f) = \int fh \, d\mu$$

Afirmamos que  $h \in L^q$  y  $\|\ell\| = \|h\|_q$ . Por Hölder,

$$\begin{aligned}
|\ell(f)| &\leq \int |fh| d\mu \leq \|f\|_p \|h\|_q \\
&\implies \|\ell\| \leq \|h\|_q
\end{aligned}$$

Mostraremos ahora la otra desigualdad

(a)  $p \in (1, \infty)$ . Defina

$$\begin{aligned}
B_n &:= \Omega_n \cap \{|h| \leq n\}, \quad \Omega_n \nearrow \Omega \\
f_n &:= |h|^{q-1} \operatorname{sgn} h \chi_{B_n}
\end{aligned}$$

$$f_n \in L^p$$

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_p^p &= \int_{B_n} (|h|^{q-1})^p = \int_{B_n} |h|^q \\
\implies \|f_n\|_p &= \left( \int |h|^q \right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ell(f_n) &= \int f_n h d\mu = \int |h|^{q-1} \operatorname{sgn} h h d\mu \\
&= \int_{B_n} |h|^q d\mu
\end{aligned}$$

$$\int_{B_n} |h|^q d\mu = \ell(f_n) \leq \|\ell\| \cdot \|f_n\|_p = \|\ell\| \left( \int |h|^q d\mu \right)^{1/p}$$

$$\left( \int_{B_n} |h|^q d\mu \right)^{1-1/p} \leq \|\ell\|$$

$$\left( \int_{B_n} |h|^q \right)^{1/q} \leq \|\ell\|$$

Por Teorema de Convergencia Monótona,

$$\left( \int_{B_n} |h|^q \right)^{1/q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|h\|_q$$

(b)  $p = 1, q = \infty$ . Suponga que  $||\ell|| + 2\varepsilon \leq ||h||_\infty$ , para algún  $\varepsilon > 0$ .

$$||h||_\infty = \inf\{M > 0 : |h| \leq M \text{ c.t.p.}\}$$

$\exists A \in \mathcal{M}, \mu(A) > 0$ , tal que

$$|h| \geq ||h||_\infty - \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Ya que  $\mu$  es  $\sigma$ -finita,  $\Omega_n \nearrow \Omega$

$$A_n := A \cap \Omega_n \nearrow A$$

Tenemos  $|h| \geq ||h||_\infty - \varepsilon$  en  $A_n$  donde  $0 < \mu(A_n) < \infty$ . Tome  $f_n := \text{sgn } h \chi_{A_n} \in L^1$

$$\begin{aligned} \ell(f) \int f h d\mu &= \int_{A_n} |h| \\ &\geq (||h||_\infty - \varepsilon) \mu(A_n) \\ &\geq (||\ell||_\infty + \frac{2}{\varepsilon} - \varepsilon) ||f||_1 \\ &= (||\ell||_\infty + \varepsilon) ||f||_1 \end{aligned}$$

$\implies f$  viola la norma de  $||\ell||$ . Contradicción

■

### 3.8. Teorema de Hahn-Banach

Sea  $X$  un espacio normado, y sea  $X^*$  su dual = espacio de funcionales lineales acotados. No hemos visto si **existen** aún funcionales lineales acotados en  $X$  **no triviales**. Resulta ser el caso que hay una **abundancia** de funcionales lineales acotados en  $X$ .

$X \rightarrow$  espacio vectorial.  $X' \rightarrow$  espacio de funcionales lineales ( $X \neq X'$ ). Diremos que  $f \in X'$  ( $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ) extiende,  $g \in Y'$  ( $Y \subseteq X$  subespacio,  $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$ ). Si

$$f(y) = g(y) \quad \forall y \in Y$$

$(X, f) \succ (Y, g)$ .



**Definición 3.8.1.** Sea  $X$  un espacio vectorial **real**. Decimos que

$$p : X \rightarrow \mathbb{R}$$

es un **funcional** convexo si satisface

1. (Homogeneidad positiva)  $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ ,  $\forall \lambda \geq 0$
2. (subaditividad)  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

Se dice convexo porque

$$\begin{aligned} p(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq p(\lambda x) + p((1 - \lambda)y) \\ &= \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y) \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Una seminorma/norma es un funcional convexo.

**Ejemplo:** Un funcional lineal (sobre  $\mathbb{R}$ ) es un funcional convexo.

**Definición 3.8.2.** Decimos que el funcional convexo  $p$  domina el funcional lineal  $f$  si

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

**Proposición 3.8.1.** Sea  $X$  normado.  $f \in X'$  es **acotado** si y solo si  $f$  es dominado por  $p(x) := M||x||$  para alguna  $M > 0$ .

*Demostración.* ( $\implies$ ):  $f \in X^*$

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq M||x|| \\ \implies f(x) &\leq M||x|| \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ):

$$\begin{aligned} f(x) &\leq M||x|| \quad \forall x \in X \\ -f(x) = f(-x) &\leq M||-x|| = M||x|| \\ \implies -M||x|| &\leq f(x) \leq M||x|| \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.8.2** (Hahn-Banach). Sean  $X, Y$  espacios vectoriales **reales**,  $Y \subseteq X$  y sea  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal **convexo**. Si  $f \in Y'$  es dominado por  $p$ ,

$$f(y) \leq p(y) \quad \forall y \in Y$$

entonces existe una **extensión**  $F \in X'$  dominado por  $p$ :

$$F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

**Corolario 3.8.2.1.**  $X$  es un espacio normado **real**.  $Y \subseteq X$  subespacio  $Y \neq \{0\}$ .  $f \in Y^*$ . Entonces existe una extensión  $F \in X^*$  con

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$$

( $Y = \text{Gen}(v)$ ),  $f(\lambda v) = \lambda$ ,  $\|f\|_{Y^*} = \frac{1}{\|v\|}$ . Por Hahn-Banach,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$ .

*Demostración.* Defina  $p(x) := \|f\|_{Y^*} \|x\|$ .  $f$  es dominado por  $p$ ., por lo que por el Teorema de Hahn-Banach nos da una extensión

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) \leq p(x) = \|f\|_{Y^*} \|x\|$$

$$\implies F \in X^* \text{ y } \|F\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*}.$$

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$$

pues es una extensión. ■

*Demostración del Teorema de Hahn-Banach (3.8.2).* Asumimos que  $Y \subsetneq X \implies$  existe  $z \in X \setminus Y$ . Vamos a extender  $f$  a  $F : Y + \text{Gen}(z) \rightarrow \mathbb{R}$  de la manera que  $F$  sea **dominado** por  $p$ .

$$F(y + tz) := f(y) + ts, \quad F(z) = s$$

define un funcional lineal en  $Y + \text{Gen}(z)$ . La meta es elegir  $s$  de tal manera que  $F(y + tz) = f(y) + ts \leq p(y + tz)$ . Noten que se satisface cuando  $t = 0$ . Afirmamos que para demostrar su validez  $\forall t \neq 0$  basta ver que se satisface para  $t = \pm 1$ .

$$\begin{aligned}
F(y + tz) &= |t|F\left(\frac{y}{|t|} + \frac{t}{|t|}z\right) \\
&= |t|f\left(\frac{y}{|t|} + \operatorname{sgn} ts\right) \\
&\leq |t|p\left(\frac{y}{|t|} + \operatorname{sgn} ts\right) = p(y + tz)
\end{aligned}$$

Meta: elija  $s$  de modo que

$$\begin{aligned}
f(y) + s &\leq p(y + z) & t = 1 \\
f(y') - s &\leq p(y' - z) & t = -1
\end{aligned}$$

$\forall y, y' \in Y$ . Tal  $s$  existe si

$$\sup_{y' \in Y} f(y') - p(y' - z) \leq \inf_{y \in Y} p(y + z) - f(y)$$

Esto es válido cuando

$$\begin{aligned}
f(y') - p(y' - z) &\leq p(y + z) - f(y) \quad \forall y, y' \in Y \\
&\iff f(y') + f(y) \leq p(y + z) + p(y' - z) \\
\iff f(y' + y) &\leq p(y + z) + p(y' - z) \quad \forall y, y' \in Y
\end{aligned}$$

Lo que es verdadero por la convexidad de  $p$  y porque  $f$  está dominado por  $p$ .

$$\begin{aligned}
f(y' + y) &\leq p(y + y') = p(y + z + y' - z) \\
&\leq p(y + z) + p(y' - z) \quad \forall y, y' \in Y
\end{aligned}$$

De esta manera obtuvimos

$$(\tilde{Y}, F) \succ (Y, f)$$

Para extender a todo  $X$  utilizaremos un argumento estándar por el Lema de Zorn.

**Definición 3.8.3.** Orden parcial  $\prec$  en un conjunto  $E$  es una relación entre algunos de los elementos de  $E$  que satisface

1.  $e \prec e$
2.  $e \prec f$  y  $f \prec e \implies e = f$
3.  $e \prec f$  y  $f \prec g \implies e \prec g$

**Definición 3.8.4.** Un subconjunto  $C \subseteq E$  se llama **cadena** si es totalmente ordenado. Es decir, todo par de elementos de  $C$  son relacionados.

**Definición 3.8.5.** Una cota superior de  $D \subseteq E$  es un elemento  $e \in E$  tal que

$$d \prec e \quad \forall d \in D$$

**Definición 3.8.6.** Un elemento **maximal**  $m \in E$  es un elemento de  $E$  que no puede ser dominado: si

$$m \prec g \implies m = g$$

**Lema 3.8.3** (Lema de Zorn). *Si toda cadena de un conjunto  $E$  parcialmente ordenado tiene una cota superior, entonces  $E$  tiene un elemento maximal.*

Lema de Zorn  $\iff$  Axioma de Elección

En nuestro contexto,

$$E = \{(L, \ell) : (L, \ell) \succ (y, f), \ell : L \rightarrow \mathbb{R} \text{ es dominado por } p\}$$

Orden es:  $(L_1, \ell_1) \succ (L_2, \ell_2)$ . Sea  $C \subseteq E$  una cadena.

$$C = \{(L_\alpha, \ell_\alpha)\}_\alpha$$

$$L := \bigcup_{\alpha} L_{\alpha} \text{ es un subespacio vectorial de } X$$

$$\begin{aligned} x, y \in L &\implies x \in L_{\alpha_1}, y \in L_{\alpha_2} \supseteq L_{\alpha_1} \\ \implies x + y \in L_{\alpha_2} &\implies \lambda x + \mu y \in L_{\alpha_2} \subseteq L \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned}\ell : L &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \ell_\alpha(x) \quad \text{si } x \in L_\alpha\end{aligned}$$

Por la razón anterior, no hay ambigüedad en esta definición: si  $x \in L_\beta$ , podemos asumir que  $(L_\beta, \ell_\beta) \succ (L_\alpha, \ell_\alpha)$

$$\implies \ell_\beta(x) = \ell_\alpha(x) \quad \forall x \in L_\alpha$$

Concluimos que  $(L, \ell)$  es una cota superior de  $C$ . Por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal  $(\tilde{L}, \tilde{F})$ .  $\tilde{L} = X$ . Si  $\tilde{L} \subsetneq X$ , podemos extender  $\tilde{F}$  a  $\tilde{L} + \text{Gen}(z)$ ,  $z \in X \setminus \tilde{L}$  siendo dominado por  $p$ . Esto contradice la maximalidad de  $(\tilde{L}, \tilde{F})$ . ■

En el caso de espacios normados **complejos**, utilizaremos la siguiente observación: Todo  $X_{\mathbb{C}}$  se puede ver como un espacio vectorial **real**  $X_{\mathbb{R}}$ .

Tenemos la siguiente correspondencia **biyectiva**:

$$\begin{aligned}X'_{\mathbb{R}} &\xrightarrow{\sim} X'_{\mathbb{C}} \\ u &\longrightarrow x \rightarrow u(x) + \frac{1}{i}u(ix) =: F(x) \\ \text{Re } F &\longleftarrow F\end{aligned}$$

$$F(x) = \underbrace{\text{Re } F(x)}_{u(x)} + i \text{Im } F(x)$$

$$\begin{aligned}\text{Im } F(x) &= \text{Re} \left[ \frac{1}{i} F(x) \right] \\ &= -\text{Re}[iF(x)] \\ &= -\text{Re}[F(ix)] \\ &= -u(ix)\end{aligned}$$

Además, tenemos  $\alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$

$$\begin{aligned}|F(x)| &= \underbrace{\text{sgn } F(z)}_{\alpha} F(x) = \alpha F(x) = F(\alpha x) \\ &= \text{Re } F(\alpha x) = u(\alpha x) = |u(\alpha x)|\end{aligned}$$

Cuando  $X_{\mathbb{C}}$  es normado,  $X_{\mathbb{R}}$  hereda la norma de  $X_{\mathbb{C}}$ . Si

$$F \in X_{\mathbb{C}}^* \implies u = \operatorname{Re} F \in X_{\mathbb{R}}^*$$

y

$$\|F\|_{X_{\mathbb{C}}^*} = \|u\|_{X_{\mathbb{R}}^*}$$

**Teorema 3.8.4.** *Suponga que  $Y_{\mathbb{C}} \subseteq X_{\mathbb{C}}$ ,  $X_{\mathbb{C}}$  un espacio normado complejo, y  $f \in Y_{\mathbb{C}}^*$ . Entonces  $f$  se puede extender a  $F \in X_{\mathbb{C}}^*$  preservando la norma:  $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$*

*Demostración.*  $f = \underbrace{\operatorname{Re} f}_{u \in Y_{\mathbb{R}}^*} + \underbrace{I \operatorname{Im} f}_{\frac{1}{i}u(i \cdot)}$

Extendemos  $U \in X_{\mathbb{R}}^*$  donde  $\|U\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \|u\|_{Y_{\mathbb{R}}^*}$ . Definimos

$$F(x) := U(x) + \frac{1}{i}U(ix)$$

Tenemos  $\|F\|_{X_{\mathbb{C}}^*} = \|U\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \|u\|_{Y_{\mathbb{R}}^*} = \|f\|_{Y_{\mathbb{C}}^*}$  ■

**Corolario 3.8.4.1.** *Para todo  $x_0 \in X$ ,  $X$  normado, existe  $f_0 \in X^*$  tal que  $\|f_0\| = 1$  y tal que  $f_0(x_0) = \|x_0\|$ .*

*Demostración.* Aplicamos el teorema anterior a  $Y = \operatorname{Gen}(x_0)$  y

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 : Y &\rightarrow \mathbb{K} \\ tx_0 &\rightarrow t\|x_0\| \end{aligned}$$

$$\bar{f}_0(x_0) = \|x_0\|, \|\bar{f}_0\|_{Y^*} = 1$$

Lo extendemos  $f_0 \in X^*$ . ■

**Corolario 3.8.4.2.**

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\}$$

*Demostración.*

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = \|x\|$$

Por 3.8.4.1,  $\|x\| = |f(x)|$  para algún  $f \in X^*$  con  $\|f\| = 1$ .

$$\implies \|x\| \leq \sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\}$$

■

**Teorema 3.8.5.**  $\forall x \in X, X$  espacio normado, define un funcional lineal acotado en  $X^*$

$$\begin{aligned} \hat{x} : X^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

$$\|\hat{x}\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\|=1}} \|f(x)\| = \|x\|$$

Entonces, el mapeo

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : X &\rightarrow (X^*)^* \\ x &\rightarrow \hat{x} \end{aligned}$$

es una isometría lineal.

**Nota:**

- $\mathcal{J}$  es inyectivo.
- 

$$\overline{\mathcal{J}(X)} \subseteq (X^*)^* \implies \overline{\mathcal{J}(X)} \simeq \text{completación de } X$$

- Cuando  $\mathcal{J}$  es sobreyectivo,  $X \simeq X^{**}$  es un espacio de Banach. que se llama **reflexivo**.

**Ejemplo:** (Espacio de dimensión finita)  $L^p(\mu)$ ,  $p \in (1, \infty]$ .

## Teoría de Operadores

### 4.1. Relaciones de Ortogonalidad

**Notación:**  $x \in X, f \in X^*, X$  normado.  $f(x) := \langle f, x \rangle$ .  $Y \subseteq X$ , definimos el **aniquilador** de  $Y$

$$Y^\perp := \{f \in X^* : \langle f, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\} \subseteq X^*$$

Similarmente,  $Z \subseteq X^*$ ,

$$Z^\perp := \{x \in X : \langle f, x \rangle = 0 \quad \forall f \in Z\} \subseteq X$$

Obviamente  $Y^\perp$  es un subespacio cerrado de  $X^*$  y  $Z^\perp$  es un subespacio cerrado de  $X$ .

**Ejemplo:** Cuando  $X$  es un espacio de Hilbert,  $X^* \simeq X$  por Riesz.  $Y \subseteq X$ , el complemento ortogonal

$$Y^\perp = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y\}$$

$\simeq$  aniquilador de  $Y$ .

**Proposición 4.1.1.** Sea  $Y \subseteq X$  subespacio del espacio normado  $X$ . Entonces,  $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$

*Demostración.* Es fácil ver que  $Y \subseteq (Y^\perp)^\perp$ .

Para demostrar la otra inclusión, suponga que  $\overline{Y} \subsetneq (Y^\perp)^\perp$ . Entonces existe  $x \neq 0, x \in (Y^\perp)^\perp \setminus \overline{Y}$ . Defina

$$\begin{aligned} f : \overline{Y} + \text{Gen}(x) &\rightarrow \mathbb{K} \\ y + \lambda x &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$

Obviamente  $f$  es un funcional lineal en  $\overline{Y} + \text{Gen}(x)$  que satisface:

$$f(x) = 1$$



$$f(y) = 0$$

Además  $f$  es acotado en  $Z := \overline{Y} + \text{Gen}(x)$ :

$$f(y) = 0 \quad \forall y \in Y$$

Sea  $z = y + \lambda x, \lambda \neq 0. \implies z \neq 0$ .

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |\lambda| = \frac{|\lambda|}{\|z\|} \|z\| \\ &= \frac{|\lambda|}{\|y + \lambda x\|} \|z\| = \frac{1}{\|\frac{y}{\lambda} + x\|} \|z\| \leq \frac{1}{\text{dist}(x, \overline{Y})} \|z\| \end{aligned}$$

Por Teorema de Hahn-Banach, podemos extender  $f$  a todo  $X$ , y asumir que  $f \in X^*$ . Además,

$$\langle f, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \overline{Y} \implies f \in \overline{Y}^\perp \supseteq Y^\perp$$

pero  $f(x) \neq 0$ . Por otro lado,

$$x \in (Y^\perp)^\perp \implies \langle g, x \rangle = 0 \quad \forall g \in Y^\perp$$

En particular,  $\langle f, x \rangle = 0$ , lo que es una contradicción. ■

Suponga que  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $X, Y$  normados. Definimos el **operador adjunto/transpuesto**

$$\begin{aligned} T^* : Y^* &\rightarrow X^* \\ f &\rightarrow f \circ T =: T^*(f) \\ \langle T^* f, x \rangle &= \langle f, T(x) \rangle \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Obviamente  $T^*$  es lineal y es acotado:

$$\begin{aligned} |T^* f(x)| &= |f(Tx)| \leq \|f\|_{Y^*} \|Tx\|_Y \leq \|f\|_{Y^*} \|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \|x\|_X \\ &\implies \|T^* f\|_{X^*} \leq \|f\|_{Y^*} \|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \\ &\implies \|T^*\|_{\mathcal{B}(Y^*, X^*)} \leq \|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \\ &\implies \|T^*\| \in \mathcal{B}(Y^*, X^*) \end{aligned}$$

**Teorema 4.1.2.** *La asignación*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(X, Y) &\rightarrow \mathcal{B}(Y^*, X^*) \\ T &\rightarrow T^*\end{aligned}$$

*es una isometría lineal. Además,*

- (a)  $(\operatorname{Im} T)^\perp = \ker T^* (\subseteq Y^*)$
- (b)  $(\ker T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T} (\subseteq Y)$
- (c)  $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \ker T (\subseteq X)$

*Demostración.* Obviamente,  $(\lambda T_1 + T_2)^* = \lambda T_1^* + T_2^*$

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \\ &= \sup_{\|x\|_X=1} \left( \sup_{\|f\|_{Y^*}=1} |\langle f, Tx \rangle| \right) \\ &= \sup_{\substack{\|x\|_X=1 \\ \|f\|_{Y^*}=1}} |\langle f, Tx \rangle| = \sup_{\|f\|_{Y^*}=1} |\langle T^* f, x \rangle| \\ &= \sup_{\|f\|_{Y^*}=1} \sup_{\|x\|_X=L} |T^* f(x)| \\ &= \sup_{\|f\|_{Y^*}=1} \|T^* f\| = \|T^*\|\end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned}f \in (\operatorname{Im} T)^\perp &\iff \langle T^* f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle = 0 \quad \forall x \in X \\ &\iff T^* f = 0 \iff f \in \ker T^*\end{aligned}$$

(b)

$$(\ker T^*)^\perp = ((\operatorname{Im} T)^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$$

(c)

$$\begin{aligned}x \in (\operatorname{Im} T^*)^\perp &\iff \langle T^* f, x \rangle = 0 \quad \forall f \in Y^* \\ &\iff \langle f, Tx \rangle = 0 \quad \forall f \in Y^* \\ &\iff Tx = 0 \iff x \in \ker T\end{aligned}$$

■

## 4.2. Operadores Compactos

**Definición 4.2.1.** Sean  $X, Y$  espacios de Banach.

$$B^X := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$$

Decimos que un operador lineal  $T : X \rightarrow Y$  es **compacto** si  $\overline{T(B^X)}$  es compacto en  $Y$ .

$\iff$  toda sucesión en  $T(B^X)$  tiene una subsucesión convergente en  $Y$ .

$\iff$  toda sucesión en  $T(B^X)$  tiene una subsucesión de Cauchy.

Denotamos la clase de operadores **compactos** con  $\mathcal{B}_c(X, Y)$

**Teorema 4.2.1.**  $\mathcal{B}_c(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$  es un subespacio cerrado.

$$\{T_n\} \subseteq \mathcal{B}_c(X, Y) \text{ y } \|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$$

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ . Elige  $N$  grande tal que

$$\|T - T_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overline{T_n(B^X)} \subseteq \bigcup_{k=1}^M B_{\varepsilon/2}(y_k)$$

$$T(B^X) \subseteq \bigcup_{k=1}^M B_{\varepsilon}(y_k)$$

Tomaremos  $\varepsilon_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Sea  $\{x_n\} \subseteq B^X$ .

1. Extraemos una subsucesión  $\{x_{n,1}\}$  tal que  $Tx_{n,1} \subseteq B_{\varepsilon_1}(\bar{y}_1)$
2.  $\{x_{n,1}\} \rightarrow \{x_{n,2}\}$  tal que

$$Tx_{n,2} \subseteq B_{\varepsilon_2}(\bar{y}_2)$$

así hasta  $\{x_{n,m}\}$  tal que

$$Tx_{n,m} \subseteq B_{\varepsilon_m}(\bar{y}_m)$$

Definimos  $\tilde{x}_m := x_{m,m}$ .  $\{T\tilde{x}_m\}$  es una sucesión de Cauchy. ■

**Definición 4.2.2.** Un operador  $T : X \rightarrow Y$  es de **rango finito** si  $\text{Im } T$  tiene dim finita.

**Proposición 4.2.2.** Un operador  $T : X \rightarrow Y$  de rango finito es compacto. Como consecuencia si  $T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ ,  $T_n$  de rango finito, entonces  $T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$

*Demostración.*  $X \xrightarrow{T} \text{Im } T \simeq \mathbb{K}^m$ ,  $m = \dim \text{Im } T$ .

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^m &\rightarrow \text{Im } T \\ (c_1, \dots, c_m) &\rightarrow \sum_{i=1}^m c_i e_i \end{aligned}$$

donde  $\{e_i\}$  es una base de  $\text{Im } T$ .  $\varphi$  es un isomorfismo continuo (con inversa continua). Por lo tanto,  $\varphi^{-1}(\overline{T(B_X)}) \subseteq \mathbb{K}^m$  cerrado y acotado  $\implies \varphi^{-1}(\overline{T(B_X)})$  es compacto en  $\mathbb{K}^m$ . Por lo tanto,  $\overline{T(B_X)}$  es compacto en  $\text{Im } T \subseteq Y$ . ■

Q. Es un operador  $T : \mathcal{B}_c(X, Y)$ , límite de operadores de rango finito?

A. En general, no. Sí, en el caso cuando  $Y$  es un espacio de Hilbert.

**Teorema 4.2.3.**  $T \in \mathcal{B}_c(X, Y)$ ,  $Y$  espacio de Hilbert. Entonces existen  $T_n$  de rango finito tal que

$$\|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

*Demostración.* Fije  $\varepsilon > 0$ .  $\overline{T(B^X)} \subseteq \bigcup_{k=1}^M B_\varepsilon(y_k)$

$$F := \text{Gen}(\{y_k\}_{k=1}^M) \stackrel{\text{cerr}}{\subseteq} Y$$

Tenemos  $P_F : Y \rightarrow Y$ .

$$T_\varepsilon := P_F \circ T \quad \text{es de rango finito}$$

Ahora, cada  $x \in B^X$  tiene imagen  $Tx \in B_\varepsilon(y_k) \implies \|Tx - y_k\| < \varepsilon$

$$\|P_F(Tx) - P_F(y_k)\| \leq \|Tx - y_k\| \leq \varepsilon$$

$$\|T_\varepsilon x - y_k\| < \varepsilon$$

Concluimos que  $\forall x \in B^X$ ,

$$\begin{aligned} \|Tx - T_\varepsilon x\| &\leq \|Tx - y_k\| + \|T_\varepsilon x - y_k\| \leq 2\varepsilon \\ \implies \|T - T_\varepsilon\| &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

■

**Ejemplo** (Operadores de Hilbert-Schmidt):  $X_i := (\Omega_i, \mu_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

$$K(x_1, x_2) \in L^2_{\mathbb{R}}(X_1 \times X_2)$$

Sea  $f \in L^2(X_2)$ . Defina

$$(T_k f)(x_1) = \int_{\Omega_2} K(x_1, x_2) f(x_2) d\mu_2$$

$T_k$  es un operador  $\mathcal{B}(L^2(X_2), L^2(X_1))$ .

$$\begin{aligned} |T_k f(x_1)|^2 &\leq \left( \int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)| |f(x_2)| d\mu_2 \right)^2 \\ &\leq \underbrace{\int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)|^2 d\mu_2}_{\text{finita } \mu_1\text{-c.t.p.}} \|f\|_{L^2(X_2)}^2 \end{aligned}$$

$$\int \left( \int K(x_1, x_2)^2 d\mu_2 \right) d\mu_1 < \infty$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |T_k f(x_1)|^2 d\mu_1(x_1) &\leq \|K\|_{L^1(X_1 \times X_2)}^2 \|f\|_{L^2(X_2)}^2 \\ \implies T_k f &\in L^2(X_1) \end{aligned}$$

y

$$\|T_k f\|_{L^2(X_1)} \leq \|K\|_{L^2(X_1 \times X_2)} \|f\|_{L^2(X_2)}$$

Además,  $\forall g \in L^2(X_1)$ ,

$$\begin{aligned} \langle T_k f, g \rangle_1 &= \int_{X_1 \times X_2} K(x_1, x_2) f(x_2) g(x_1) d(\mu_1 \times \mu_2) \\ &= \int_{X_2} \left( \underbrace{\int_{X_1} K(x_1, x_2) g(x_1) d\mu_1}_{T_{K^*} g, K^*(x_2, x_1) = K(x_1, x_2)} \right) f d\mu_2 = \langle f, T_{K^*} g \rangle_2 \end{aligned}$$

$$T_K^* = T_{K^*}$$

Asumimos que  $L^2(X_1), L^2(X_2)$  son separables. Sean  $\{e_m\}_m$  una base o.n. de  $L^2(X_1)$ ,  $\{f_n\}_n$  una base o.n. de  $L^2(X_2)$ .

$\{h_{mn}(x_1, x_2) := e_m(x_1)f_n(x_2)\}_{mn}$  es una base o.n. de  $L^2(X_1 \times X_2)$

(Por Fubini  $h_{mn}$  es maximal)

$$K(x_1, x_2) = \sum_{m,n} a_{mn} e_m(x_1) f_n(x_2)$$

$$K_N(x_1, x_2) = \sum_{\substack{n \leq N \\ m \leq n}} a_{mn} h_{mn}(x_1, x_2)$$

$$\|K - K_N\|_{L^2(X_1 \times X_2)}^2 = \sum_{m \text{ ó } n > N} |a_{mn}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\|T_K - T_{K_N}\| = \|T_{K-K_N}\| \leq \|K - K_N\|_{L^2(X_1 \times X_2)}$$

$T_{K_N}$  es un operador de rango finito!

$$\begin{aligned} T_{K_N} f(x_1) &= \langle K_N(x_1, \cdot), f \rangle_{L^2(X_2)} \\ &= \left\langle \sum_{\substack{m \leq N \\ n \leq m}} a_{mn} e_m(x_1) f_n(x_2), f(x_2) \right\rangle \\ &= \sum_{\substack{m \leq N \\ n \leq m}} a_{mn} \langle f_n, f \rangle_{L^2(X_2)} e_m(x_1) \\ &\implies \text{Im } T_{K_N} \subseteq \text{Gen}(\{e_m\}_{m=1}^N) \end{aligned}$$

**Proposición 4.2.4.** *Composición de un operador compacto y un operador continuo es compacto.*

$$X \xrightarrow[\text{compacto}]{T} Y \xrightarrow[\text{continuo}]{S} Z$$

$S \circ T$  es compacto.

$$Z \xrightarrow[\text{continuo}]{S} X \xrightarrow[\text{compacto}]{T} Y$$

*Demostración.*  $\{x_n\} \subseteq B^X$ . Por composición,

$$Tx_{n_k} \rightarrow y \implies (S \circ T)(x_{n_k}) \rightarrow Sy \text{ converge} \implies S \circ T \in \mathcal{B}_c(X, Z)$$

Por otro lado,

$$\{z_n\} \subseteq B^Z \implies x_n := Sz_n \in B_{\|S\|}^X \implies \frac{x_n}{\|S\|} \in B^X \implies T\left(\frac{x_{n_k}}{\|S\|}\right) \rightarrow \frac{y}{\|S\|}$$

$$\begin{aligned} &\implies T \circ S(z_{n_k}) \rightarrow y \\ &\implies T \circ S \in \mathcal{B}_c(Z, Y) \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.2.5** (Schauder).  $T \in \mathcal{B}_c(X, Y) \iff T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$

Recuerden,

**Teorema 4.2.6** (Arzelà-Ascoli).  $K \rightarrow$  espacio métrico **compacto**.  $\mathcal{C} \subseteq C(K)$  una colección de funciones continuas que satisfacen:

1. (Acotamiento)  $\|f\|_{C(K)} \leq M, \forall f \in \mathcal{C}$  para una constante  $M > 0$ .
2. (Equicontinuidad)  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $\forall f \in \mathcal{C}$

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

cuando  $|x - y| < \delta$ .

Entonces  $\mathcal{C}$  existe  $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}$  tal que  $f_n \rightarrow f$  en  $C(K)$ .

*Demostración del Teorema de Schauder (4.2.5).*  $\Leftarrow$  : En ayudantía

$\Rightarrow$  : Sea  $\{f_n\} \subseteq B^{Y^*}$ . Queremos demostrar que existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}$  tal que  $T^*f_{n_k}$  es Cauchy.

Sea  $K := \overline{T(B^X)}$  es compacto en  $Y$ .

$$\mathcal{C} = \{f_n|_K : K \rightarrow \mathbb{K}\}$$

es una colección de funciones continuas.

1. (Acotamiento)

$$|f_n(x)| \leq \underbrace{\|f_n\|}_{\leq 1} \cdot \|x\| \leq \|x\| \leq M$$

porque el compacto  $K$  es acotado.

## 2. (Equicontinuidad)

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \|f_n\| \cdot \|x - y\| \leq \|x - y\|$$

(Equi-Lipschitz)

Por Teorema de Arzelà-Ascoli, existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\} \in B^{Y^*}$  y una función  $f \in C(K)$  tal que

$$\begin{aligned} f_{n_k} &\rightarrow f \in C(K) \\ f_{n_k}(y) &\rightarrow f(y) \quad \text{uniformemente en } y \in K \\ \iff f_{n_k}(Tx) &\rightarrow f(Tx) \quad \text{uniformemente en } x \in B^X \\ \implies f_{n_k}(Tx) - f_{n_l}(Tx) &\xrightarrow{k,l \rightarrow \infty} 0 \quad \text{uniformemente en } x \in B^X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle f_{n_k}, Tx \rangle - \langle f_{n_l}, Tx \rangle &\rightarrow 0 \quad \text{uniformemente en } x \in B^X \\ \langle T^* f_{n_k}, x \rangle - \langle T^* f_{n_l}, x \rangle &\rightarrow 0 \quad \text{uniformemente en } x \in B^X \\ \langle T^*(f_{n_k} - f_{n_l}), x \rangle &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\|T^* f_{n_k} - T^* f_{n_l}\|_{X^*} = \sup_{x \in B^X} \|\langle T^*(f_{n_k} - f_{n_l}), x \rangle\| \xrightarrow{r,l \rightarrow \infty} 0$$

■

## 4.3. La Teoría de Riesz-Fredholm

**Teorema 4.3.1** (Alternativa de Fredholm). *Sea  $X$  un espacio de Banach,  $T \in \mathcal{B}_c(X, X)$ . Entonces,*

- a)  $\ker(I - T)$  tiene  $\dim < \infty$ .
- b)  $\text{Im}(I - T)$  es cerrado en  $X$  e  $\text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$
- c)  $\ker(I - T) = \{0\} \iff \text{Im}(I - T) = X$
- d)  $\dim \ker(I - T) = \dim \ker(I - T^*)$



**Nota:** La alternativa de Fredholm concierne la solubilidad de la ecuación

$$\begin{aligned}(I - T)u &= f \\ u - Tu &= f\end{aligned}$$

Dice:

- o  $\forall f \in X$ , tiene una única solución  $u$ .
- o la ecuación **homogénea**

$$u - Tu = 0$$

tiene  $k$  soluciones linealmente independientes,  $k < \infty$ .  $k = \dim \ker(I - T)$ . En este caso, la ecuación **no homogénea**

$$u - Tu = f$$

se puede resolver solo cuando  $f \in \text{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^\perp$ .

$$\iff \ell(f) = 0 \quad \forall \ell \in \underbrace{\ker(I - T^*)}_{\dim=k}$$

Es decir, se satisfacen las condiciones de ortogonalidad.

**Nota:**  $c) \implies$  inyectividad implica sobreyectividad de  $I - T$ .  
Hay operadores acotados en  $\ell^2$ :

$$S : (x_1, x_2, \dots) \rightarrow (x_2, x_3, \dots)$$

operador shift es sobreyectivo pero no inyectivo.

$$\tilde{S} : (x_1, x_2, \dots) \rightarrow (0, x_1, \dots)$$

es inyectivo pero no es sobreyectivo.

Necesitaremos los siguientes resultados auxiliares

**Lema 4.3.2** (Riesz). Sea  $X$  un espacio normado y sea  $F \stackrel{\text{cerr}}{\subsetneq} X$ . Entonces  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists u \in X$ ,  $\|u\| = 1$  tal que

$$\begin{aligned}d(u, F) &\geq 1 - \varepsilon \\ \|u - f\| &\geq 1 - \varepsilon \quad \forall f \in F\end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $v \in X \setminus F$

$$\implies d := d(v, F) > 0 \quad (F \text{ es cerrado})$$

Elija  $v_0 \in F$  tal que

$$d \leq \|v - v_0\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Ahora,  $u := \frac{v - v_0}{\|v - v_0\|}$  satisface el Lema pues

$$\begin{aligned} \|u - f\| &= \left\| \frac{v - v_0 - f\|v - v_0\|}{\|v - v_0\|} \right\| \\ &= \frac{1}{\|v - v_0\|} \underbrace{\|v - (v_0 + f\|v - v_0\|)\|}_{\geq d} \\ &\geq \frac{d}{\|v - v_0\|} \geq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

■

**Corolario 4.3.2.1.** *Sea  $X$  un espacio normado, y suponga que  $B^X$  es **compacta**. Entonces  $\dim X < \infty$ .*

*Demostración.* Suponga que  $\dim X = \infty$ . Sucesivamente construimos vectores  $u_n \in X$

$$\|u_n\| = 1, F_{n-1} := \text{Gen}(\{u_k\}_{k=1}^{n-1})$$

tal que

$$d(u_n, F_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

Entonces  $F_{n-1} \subseteq F_n$  y cuando  $m > n$

$$\|u_m - u_n\| \geq d(u_m, F_n) \geq \frac{1}{2}$$

En particular,  $\{u_m\}$  no tiene una subsucesión que converge. Lo que es una contradicción porque la bola unitaria es compacta por suposición. ■

**Nota:**  $T : X \rightarrow Y$  compacto.  $X_1 \stackrel{\text{cerr}}{\subseteq} X$ ,  $X, Y$  Banach.

$$\implies T|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y \text{ es compacto}$$

*Demostración del Teorema de Alternativa de Fredholm.* a)  $X_1 = \ker(I - T) \stackrel{\text{cerr}}{\subseteq} X$

$$\implies T|_{X_1} : X_1 \rightarrow X$$

es compacto. Por otra parte,  $T|_{X_1} = (id)|_{X_1}$  ya que

$$\forall x \in \ker(I - T), (I - T)x = 0 \iff Tx = x$$

Luego,  $B^X$  es compacta  $\implies \dim X_1 < \infty$

- b) Si demostramos que  $\text{Im}(I - T)$  es cerrada,  $\implies \text{Im}(I - T) = \overline{\text{Im}(I - T)} = \ker(I - T^*)^\perp$ .  
Sea

$$f_n := (I - T)u_n \rightarrow f \in X$$

y queremos demostrar que  $f \in \text{Im}(I - T)$

$$d_n := d(u_n, \ker(I - T))$$

ya que  $\dim \ker(I - T) < \infty$ , entonces

$$d_n := d(u_n, \ker(I - T)) = \|u_n - v_n\|$$

$v_n \in \ker(I - T)$ . Afirmamos que  $\sup_n d_n \leq M$ . Suponga que (reindexando)  $d_n \nearrow \infty$ ,  
 $w_n := \frac{u_n - v_n}{d_n}$ ,  $\|w_n\| = 1$

$$(I - T)w_n = \frac{1}{d_n} \underbrace{((I - T)u_n - (I - T)v_n)}_{f_n} \xrightarrow{0} 0 \quad (f_n \rightarrow f \text{ es acotado})$$

$Tw_n \rightarrow 0$  por compacidad, reindexando

$$\implies w_n \rightarrow z \quad \text{con } \|z\| = 1$$

$$\implies (I - T)z = \lim_{n \rightarrow \infty} (I - T)w_n = 0 \implies z \in \ker(I - T)$$

Esto no es posible ya que

$$w_n - z = \frac{u_n - v_n}{d_n} - z = \frac{u_n - (v_n + zd_n)}{d_n}$$

$$\left\| \frac{u_n - (v_n + zd_n)}{d_n} \right\| = \frac{1}{d_n} \left\| \overbrace{u_n - (v_n + zd_n)}^{\geq d_n} \right\| \geq 1$$

$\ker(I - T)$

Entonces

$$\|u_n - v_n\| = d_n \leq M$$

Reindexados, por compacidad

$$\begin{aligned} T(u_n - v_n) &\rightarrow y \\ (I - T)(u_n - v_n) &= (I - T)u_n = f_n \rightarrow f \\ u_n - v_n &\rightarrow f + y \\ (I - T)(u_n - v_n) &\rightarrow (I - T)(f + y) \end{aligned}$$

Como  $(I - T)(u_n - v_n) \rightarrow f$  se tiene que

$$\begin{aligned} (I - T)(f + y) &= f \\ \implies f &\in \text{Im}(I - T) \end{aligned}$$

- c)  $\implies$  : Por contradicción, asuma que  $X_1 := (I - T)X \subsetneq X$ .  $X_1$  es cerrado en  $X \implies X_1$  es Banach. Además,  $T|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1$  es compacto. Por inyectividad de  $T$ ,  $X_2 := (I - T)(X_1) \subsetneq X_1$ . De esta manera, producimos una sucesión anidada

$$X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots \supsetneq X_k = (I - T)^k X$$

de cerrados.

Si  $X_2 = X_1 \implies \forall x_1 \in X_1$  existe  $x \in X_1$  tal que

$$(I - T)x = x_1 = (I - T)x_0 \quad \text{algún } x_0 \in X$$

Si  $x_0 \in X \setminus X_1$ , no existe  $x_0 \in X_1$  tal que

$$(I - T)x = (I - T)x_0$$

Aplicando el Lema de Riesz, obtenemos  $u_n \in X_n$ ,  $\|u_n\| = 1$  tal que

$$d(u_n, x_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} Tu_n - Tu_m &= \underbrace{-(I - T)u_n}_{\in X_{n+1} \subseteq X_{m+1}} + \underbrace{(I - T)u_m}_{\in X_{m+1}} + \underbrace{u_n}_{\in X_n \subseteq X_{m+1}} - u_m, n > m \\ &= -u_m + v \in X_{m+1} \\ \implies \|Tu_n - Tu_m\| &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\implies \{Tu_n\}$  no contiene una subsucesión de Cauchy  $\implies$  contradicción a la compacidad de  $T$ .

$\Leftarrow :$

$$\text{Im}(I - T) = X \implies \ker(I - T^*) = \text{Im}(I - T)^\perp = \{0\}$$

$$T^* \text{ es compacto} \implies (I - T^*)(X^*) = X^*$$

$$\implies \ker(I - T) = \text{Im}(I - T^*)^\perp = (X^*)^\perp = \{0\}$$

- d)  $k := \dim \ker(I - T) < \infty$ ,  $k^* := \dim \ker(I - T^*) < \infty$ . Vamos a demostrar que  $k^* \leq k$ .  
 $X = \ker(I - T) \oplus W$ . Podemos definir una proyección continua usando  $\{e_i\}_{i=1}^k$  base de  $\ker(I - T)$  y  $\{\bar{f}_i\}_{i=1}^k \langle \bar{f}_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\begin{aligned} P : X &\rightarrow \ker(I - T) \\ x &\rightarrow \sum \langle \bar{f}_i, x \rangle e_i \end{aligned}$$

Se puede complementar  $\ker(I - T^*)$  en  $X^*$ . Sea  $\{\ell_i\}_{i=1}^{k^*}$  una base de  $\ker(I - T^*)$ .  
 $0 = \langle (I - T^*)(\ell_i), x \rangle = \langle \ell_i, (I - T)x \rangle = 0$

$\implies$  los  $\ell_i$  aniquilan  $\text{Im } I - T$ . Existen vectores  $\{x_i\}_{i=1}^{k^*} \subseteq X$  tal que

$$\begin{aligned} \ell_i(x_j) &= \delta_{ij} \\ \iff (\ell_1, \dots, \ell_{k^*}) : X &\rightarrow \mathbb{K}^{k^*} \end{aligned}$$

es sobreyectivo.  $x_1 \rightarrow (1, 0, \dots), x_2 \rightarrow (0, 1, 0, \dots)$ . Si no existe  $\alpha \neq 0 \in \mathbb{K}^{k^*}$  tal que

$$\alpha \cdot (\ell_1, \dots, \ell_{k^*}) = 0$$

$\alpha_i f_i = 0$ .  $\sum_{i=1}^{k^*} \alpha_i \ell_i = 0$  no es posible pues  $\ell_i$  son Linealmente Independientes.

Sea  $F := \text{Gen}(\{x_i\}_{i=1}^{k^*})$  Resulta ser el caso que

$$X = \text{Im}(I - T) \oplus F$$

ningún  $x_i \in \text{Im}(I - T)$ . Si  $x_i \in \text{Im}(I - T) \implies \ell_j(x_i) = 0 \forall j = 1, \dots, k$ .

Queremos demostrar que  $k^* \leq k$ . Suponga que  $k < k^*$ . Tenemos una aplicación lineal

$$\Lambda : \ker(I - T) \rightarrow \underbrace{F}_{\dim=k^* < k}$$

que es inyectiva pero no sobreyectiva.

Defina

$$S := \underbrace{T}_{\text{compacto}} + \underbrace{\Lambda \circ P}_{\text{rango finito}}$$

es compacto. Afirmamos que

$$\ker(I - S) = \{0\}$$

Si  $u \in \ker(I - S)$

$$\begin{aligned} 0 &= (I - T)u - \Lambda \circ Pu \\ \ell_i(0) &= \ell_i(I - T)u - \ell_i(\Lambda \circ Pu) \\ \implies \ell_i(\Lambda \circ Pu) &= 0 \quad \forall i = 1, \dots, k^* \\ \implies \Lambda \circ Pu &= 0 \implies (I - T)u = 0 \\ u \in \ker(I - T) &\implies Pu = u \\ \implies 0 &= \Lambda Pu = \Lambda u \implies u = 0 \end{aligned}$$

por la inyectividad de  $\Lambda$ . Por parte  $c)$   $(I - S)X = X$ . En particular, podemos resolver

$$(I - T) - \Lambda Pu = v$$

para  $v \in F$  tal que  $v \notin \text{Im } \Lambda$ .

$\exists \ell \in \text{Gen}(\ell_i)$  tal que  $\ell(v) \neq 0$  y  $\ell(\text{Im } \Lambda) = 0$ .

$$\implies 0 = \Lambda v$$

contradicción. Entonces  $k^* \leq k$ .

$$\dim \ker(I - T^*) \leq \dim(I - T)$$

Aplicando esto a  $T^*$ ,

$$\dim \ker(I - T^{**}) \leq \dim \ker(I - T^*) \leq \dim \ker(I - T)$$

Por otro lado,  $\ker(I - T^{**}) \supseteq \ker(I - T) \implies k = k^*$ .

■

#### 4.4. Nociones básicas de la teoría espectral

**Definición 4.4.1.**  $\lambda \in \mathbb{K}$  es **autovalor** de

$$T : X \rightarrow X$$

con  $X$  Banach, si  $\exists x \neq 0$  tal que

$$Tx = \lambda x$$

**Nota:** Cuando  $\dim X < \infty$ ,  $\lambda$  es autovalor  $\iff \ker(T - \lambda I) \neq \{0\} \iff T - \lambda I$  no es uno a uno.

$$\iff T - \lambda I \text{ no es sobre}$$

Esto último no es verdad en dimensión infinita.

**Ejemplo:**

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\rightarrow \ell^2 \\ (x_1, \dots) &\rightarrow (0, x_1, \dots) \end{aligned}$$

¿Es  $\lambda = 0$  autovalor de  $T$ ?

$$Tx = 0 \implies x = 0$$

$\implies$  no hay  $x \neq 0$  tal que  $Tx = 0x$ .

$$T - \lambda I = T - 0I = T$$

tampoco es sobre.

#### Definición 4.4.2. El espectro

$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ no es invertible}\} \supseteq \text{conjunto de autovalores}(\sigma_p(T))$

$$\lambda \in \sigma(T) \iff \begin{cases} \circ \lambda & \text{es autovalor} \\ \circ T - \lambda I & \text{no es sobre} \end{cases}$$

$$\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ es invertible}\}$$

es el conjunto **resolvente**

$\lambda \in \rho(T)$ ,  $T - \lambda I$  es invertible y  $(T - \lambda I)^{-1}$  es continuo por el teorema de la aplicación abierta.

**Ejemplo:** Para el operador del ejemplo anterior.

$$o \notin \sigma_p(T)$$

$$o \in \sigma(T)$$

**Teorema 4.4.1.**  $T \in \mathcal{B}(X, X)$  entonces  $\sigma(T)$  es un subconjunto **compacto** de  $\mathbb{K}$ . Además,

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq \|T\|\}$$

*Demostración.* Sea  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $|\lambda| > \|T\|$ . Demostraremos que  $\lambda \in \rho(T)$ .

$$(\lambda I - T)u = f$$

(Serie de Neumann)

$$(\lambda I - T)u = f$$



$$\left( I - \underbrace{\frac{T}{\lambda}}_{\tilde{T}} \right) u = \frac{f}{\lambda}$$

$$u = (I - \tilde{T})^{-1} \frac{f}{\lambda} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{T}^k \right) \left( \frac{f}{\lambda} \right)$$

converge  $\|\tilde{T}\| = \frac{1}{|\lambda|} \|T\| < 1$ .

$\sigma(T)$  es cerrado  $\iff \rho(T)$  es abierto.  $\lambda_0 \in \rho(T)$  y queremos demostrar que cuando  $|\lambda - \lambda_0|$  es suficientemente pequeño  $\lambda I - T$  es invertible.

$$\lambda I - T = \underbrace{(\lambda_0 I - T)}_{S \text{ es isom con inversa cont}} + (\lambda + \lambda_0)I = S(I + S^{-1}(\lambda - \lambda_0)) = SU$$

Cuando  $|\lambda - \lambda_0|$  es suficientemente pequeño,  $\bar{S} = S^{-1}(\lambda - \lambda_0)$  tiene norma  $\|\bar{S}\| < 1$ . Por la serie de Neumann,  $U = I + \bar{S}$  es un isomorfismo con inversa continua. ■

**Teorema 4.4.2.** Sea  $T \in \mathcal{B}_c(X, X)$  en espacio de Banach  $X$ ,  $\dim X = \infty$ . Entonces

- (a)  $0 \in \sigma(T)$
- (b)  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$  y cada  $\lambda \neq 0$ ,

$$\mathcal{N}_T(\lambda) := \ker(T - \lambda I)$$

tiene dimensión finita

- (c)  $\forall \delta > 0$  existen solo un número finito de valores distintos  $\lambda \in \sigma(T)$  tal que  $|\lambda| \geq \delta$ .

**Corolario 4.4.2.1.**  $T \in \mathcal{B}_c(X, X) \implies \sigma(T)$  es **discreto**. i.e. o  $\sigma(T)$  es finito o contablemente  $\infty$ . Esto último ocurre cuando  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\lambda_n \rightarrow 0$

*Demostración del teorema 4.4.2.*

- a) Suponga que  $0 \notin \sigma(T)$ .  $\implies T = T - 0I$  es invertible con  $T^{-1}$  continua.

$$\implies I = T \circ T^{-1} \text{ es compacto}$$

$\implies \dim X < \infty$ . Contradicción.

b) Sea  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ .  $\implies T - \lambda I$  no es invertible.  $\implies \frac{T}{\lambda} - I$  no es invertible.

$$\stackrel{?}{\implies} \ker\left(\frac{T}{\lambda} - I\right) \neq \{0\} \quad (\implies \lambda \in \sigma_p(T))$$

Por la alternativa de Fredholm, si  $\ker\left(\frac{T}{\lambda} - I\right) = \{0\} \iff \frac{T}{\lambda} - I$  es sobre  $\iff \frac{T}{\lambda}I$  es invertible.

$$\mathcal{N}_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I) = \ker\left(\frac{T}{\lambda} - I\right)$$

es de dimensión finita ya que  $\frac{T}{\lambda}$  es compacto.

c) Suponga que hay un número infinito de autovalores  $\lambda_n$  distintos con  $|\lambda_n| \geq \delta \iff \frac{1}{|\lambda_n|} \leq \frac{1}{\delta}$ .

$$Tx_n = \lambda_n x_n, \|x_n\| = 1$$

Los  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son linealmente independientes (álgebra lineal). Sea

$$F_n := \text{Gen}(x_1, \dots, x_n)$$

Por el lema de Riesz existen  $u_n \in F_n$ ,  $\|u_n\| = 1$  tal que

$$d(u_n, F_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$$

Notamos que  $\frac{u_n}{\lambda_n}$  es una sucesión **acotada**.

$$\implies \left\{ \frac{T u_n}{\lambda_n} \right\}$$

debería contener una subsucesión de Cauchy. Además,  $u_n - \frac{T u_n}{\lambda_n} \in F_{n-1}$

$$u_n = \sum_{k=1}^n c_k x_k$$

$$\implies T u_n = \sum_{k=1}^n c_k T x_k = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda_k x_k + c_n \lambda_n x_n$$

$$\lambda_n u_n = \left( \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda_k x_k \right) + c_n \lambda_n x_n$$

= combinación lineal de  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .  $m \geq n$

$$\begin{aligned} \frac{Tu_m}{\lambda_m} - \frac{Tu_n}{\lambda_n} &= \underbrace{\frac{Tu_m}{\lambda_m} - u_m}_{\in F_{m-1}} - \underbrace{\frac{Tu_n}{\lambda_n}}_{F_n \subseteq F_{m-1}} + u_m \\ &= u_m - x, \quad x \in F_{m-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{Tu_m}{\lambda_m} - \frac{Tu_n}{\lambda_n} \right\| \geq d(u_m, F_m) \geq \frac{1}{2}$$

■