Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
MAT255I - Análisis Funcional
2º semestre 2023

MAT255I
Análisis Funcional

Sebastián Guerra (sebastian.guerrap@uc.cl)
Profesor: Nikola Kamburov (nikamburov@mat.uc.cl)

Apuntes aún no revisados, por favor no distribuir

Versión: 16 de agosto de 2023

Índice general

Capítulo 1

Intro al Análisis Funcional

1.1. ¿Qué estudia el Análisis Funcional?

Estudia los espacios vectoriales de dimensión infinita y las transformaciones lineales entre ellos.

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$ campo de escalares tiene dimensión infinita si $\forall n \in \mathbb{N}$ hay n elementos de V que son linealmente independientes sobre $\mathbb{K}$

Ejemplo: $V = C([0,1], \mathbb{R})$ = funciones reales continuas en $[0,1]$.
$\{1, x, \ldots, x^{n-1}\} \subseteq V$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$.

Demostración. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \equiv 0$, $a_k \in \mathbb{R}$.

Reconocemos que existe la operación $\frac{d}{dx}$ definida en $C^\infty([0,1], \mathbb{R})$, funciones suaves, y la operación evaluar en $x = 0$.

Evaluando en $x = 0 \to a_0 = 0$. Derivamos a los lados.

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1} \equiv 0$$

y ahora evaluamos en $x = 0$:

$$a_1 = 0$$

... ■

Demostración alternativa. Reconocemos que hay un producto interno en $V = C([0,1], \mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

$\{f_k = \sin(\pi k x)\}_{k=1}^{n} \subseteq V$

$$\langle \sin(\pi kx), \sin(\pi lx)\rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{1}{2} & k = l \end{cases}$$

$$S = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \equiv 0$$

$$0 = \langle S, f_k\rangle = \left\langle \sum a_k f_k, f_l \right\rangle = a_l \langle f_0, f_l\rangle = \frac{1}{2} a_l$$

$$\implies a_l = 0, \forall l = 1, \dots, n$$

■

1.2. Motivación

Ejemplo (Ecuación de Poisson)**:**

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Seba *Aañdir dibujo*

El problema se reformula así:

$$\begin{cases} D = \Delta : x \to Y \ni f \\ Du = f \end{cases}$$

tiene una solución $u \in X$ para ciertos espacios X, Y apropiados.

El Análaisis Funcional busca construir teoría más general que aplica para todos los problemas que comparten las mismas características topológicas/algebraicas/métricas.

1.3. Objeto central: espacio de Banach

Definición 1.3.1 (Espacio de Banach)**.** $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es un espacio normado completo (clave para sacar límites).

$$\{\text{Espacios de Hilbert}, (V, \langle\cdot,\cdot\rangle) completos\} \subseteq \{\text{Espacios de Banach}, (V, ||\cdot||)\} \subseteq \{\text{Espacios métricos}, (V, d) co$$

Seba *Arreglar*

Lógica de inclusiones

1. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induce una norma $||\cdot||$

$$||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}$$

2. $||\cdot||$ induce una métrica $d(\cdot,\cdot)$

$$d(v, w) = ||v - w||$$

1.4. Resultados que vamos a ver

1. Resultados que se parecen a los teoremas que conocemos en la situación de dimensión finita.

Ejemplo: Cada funcional lineal en $\mathbb{R}$ ($l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) se puede representar como $l(v) = v \cdot w$ para algún vector (único) $w \in \mathbb{R}^n$.
En la situación de dimensión ∞, se tiene el Teorema de Representación de Riesz:

Teorema 1.4.1 (Representación de Riesz)**.** *Sea* $(V, \langle,\rangle)$ *un espacio de Hilbert y* $l : V \to \mathbb{R}$ *un funcional lineal continuo . Entonces existe un único* $w \in V$*, tal que*

$$l(v) = \langle v, w\rangle$$

2. Resultados son muy diferentes de la situación en dimensión finita. contraintuitivos .

Ejemplo: $\overline{B_1(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacta (Heine-Borel).
En $\dim V = \infty$, este teorema es falso.

Proposición 1.4.2. *Sea* V *un espacio de Banach y sea* $B = \{v \in V : ||v|| \leq 1\}$*.*
B *es compacto en* $V \iff \dim V < \infty$

Ejemplo: En particular, la bola unitaria cerrada en

$$B \subsetneq L^p([0,1]), \quad p \in (1, \infty)$$

no es compacta.
$\Longrightarrow$ motiva la definición de topologías débiles.

Capítulo 2

Espacios de Banach

2.1. Nociones básicas

Definición 2.1.1 (Espacios métricos)**.** Un espacio métrico (X, d) y $d : X \times X \to [0, \infty)$ la métrica que satisface:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. (simetría) $d(x, y) = d(y, x)$
3. (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definición 2.1.2. Sea V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en V es una función $|| \cdot || : V \to [0, \infty)$ que satsiface:

1. $||v|| = 0 \iff v = 0$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. (Desigualdad triangular) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Una función $|| \cdot || : V \to [0, \infty)$ que satisface solo 2. y 3. se llama semi-norma .

Una espacio vectorial V con una norma se llama Espacio normado $(V, || \cdot ||)$.

Proposición 2.1.1. *$(V, ||\cdot||)$ define un espacio métrico con métrica $d(v, w) := ||v - w||$.*

Ejemplo:

- $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ tiene la estructura de espacio normado:

$$|x|_2 := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \quad , \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

- En $\mathbb{R}^2$, $|(x_1, x_2)| := |x_1|$ define una semi-norma:

$$|(x_1, x_2)| = 0 \iff x_1 = 0, x_2 \in \mathbb{R}$$

- $|x|_\infty = \max_{k=1,\ldots,n} \{x_k\}$ es una norma.
-

$$|x|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad , \quad p \in [1, \infty)$$

Seba *Añadir dibujos de norma infinito y norma 1*

Proposición 2.1.2. *En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ todas normas son equivalentes: si $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ son 2 normas, existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{1}{c}||v||_2 \leq ||v||_1 \leq c||v||_2, \quad \forall v \in V$$

Definición 2.1.3. Sea X un espacio métrico. Definimos

$$C_\infty(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continuas y acotadas}\}$$

Ejemplo: $C_\infty([0,1]) = C([0,1])$ (funciones continuas)

Proposición 2.1.3. $||f||_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ *define una norma en* $C_\infty(X)$.

Demostración.

1. $||f||_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \, \forall x \in X$.
2. $$\begin{aligned} ||\lambda f||_\infty &= \sup_x |\lambda f(x)| \\ &= \sup_x |\lambda| \cdot |f(x)| \\ &= |\lambda| \cdot ||f||_\infty \end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned} |f_1(x) + f_2(x)| &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \\ &\leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty \end{aligned}$$

■

Convergencia en $||\cdot||_\infty$

$$f_n \to f, \quad \text{en } C_\infty(X)$$

si

$$||f_n - f||_\infty \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

Ejemplo: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

$$\ell^p(\mathbb{K}) := \{\{a_k\}_k \subseteq \mathbb{K} : ||a||_p < \infty\}$$

donde

$$||a||_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p} & p \in [1, \infty) \\ \displaystyle\sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k| & p = \infty \end{cases}$$

Sea $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ un espacio de medida.

$$L^p(x, \sigma) := \{f : X \to \mathbb{K}\, \sigma\text{-medibles, tales que} ||f||_{L^p} < \infty\}$$

donde

$$||f||_{L^p} := \left(\int |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}$$

$$||f||_{L^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_x |f|$$

Ejemplo: $X = [0, 1]$, $\sigma =$ medida de Lebesgue. En $C([0, 1])$ definimos

$$||f||_\infty = \sup |f(x)|$$
$$||f||_{L^1} = \int |f(x)| \, dx$$

Estas 2 normas no son equivalentes

Definición 2.1.4. Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si es completo con respecto a la métrica inducida.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son espacios de Banach (con respecto a cualquier norma)
$L^p(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es un espacio de Banach (cuando $(X, \mathcal{B}, \sigma)$ es completo).

Proposición 2.1.4. *$C_\infty(X)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. $\{f_n\} \subseteq V = C_\infty(X)$ de Cauchy.

1. Adivinar el límite f.
2. Probar la convergencia:
$$||f_n - f|| \to 0$$
3. f está en el espacio.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$ tal que

$$||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Para todo $x \in X$ fijo, tenemos entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||_\infty \leq \varepsilon$$

Esto es $\{f_n(x)\}_n$ es Cauchy en $\mathbb{C}$.

$$\implies f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ existe}$$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ independiente de } x \in X \end{aligned}$$

$$\implies ||f_n - f||_\infty < \varepsilon, \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$$

Esto es $f_n \to f$ uniformemente sobre X.

$\implies f$ es continua sobre X.

¿Por qué f es acotada?

Considere $\varepsilon = 1$

$$\implies ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \leq 1$$

cuando $n \geq \bar{N} := N(1)$.

$$\begin{aligned} ||f_n||_\infty &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + ||f_n - f_{\bar{N}}||_\infty \\ &\leq ||f_{\bar{N}}||_\infty + 1 \end{aligned}$$

$$\implies f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ es acotada}$$

Definición 2.1.5. Sea $(V, ||\cdot||)$ un espacio normado. $v_n \in V, n \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es sumable si

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} v_n$$

converge.
$\sum_n v_n$ es absolutamente sumable si

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||v_n||$$

converge.

■

Proposición 2.1.5. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es absolutamente sumable, entonces, $\{S_m\}$ es Cauchy*

Teorema 2.1.6. *Un espacio normado $(V, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

Demostración. $\Longleftarrow$:

1. Tome una sucesión $\{v_n\}$ de Cauchy. Es suficiente demostrar que una subsucesión converge. $v_{n_k} \to v$ en V. Fije $\varepsilon > 0$. $\implies$ $||v_m - v|| \leq \underbrace{||v_m - v_{n_k}||}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{||v_{n_k} - v||}_{\leq \varepsilon/2} \leq \varepsilon$, tomando k, m suficientemente grandes.

2. Dos trucos: Podemos "acelerar" la convergencia. Existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$||v_{n_{k+1}} - v_{n_k}|| \leq 2^{-k} \tag{2.1}$$

$$||v_n - v_m|| \leq 2^{-k} \quad \forall n, m \geq N(2^{-k}) := N_k$$

$n_k := N_1 + \ldots + N_k$

Afirmamos que $\{v_{n_k}\}$ converge.

Truco de la suma telescopica.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k})$$

es absolutamente sumable debido a (1.1) entonces es sumable:

$$\sum_{k=1}^{m} (v_{n_{k+1}} - v_{n_k}) \xrightarrow{m \to \infty} S \in V$$

Sumas parciales convergen

$$v_{n_{m+1}} - v_{n_1} \xrightarrow{m \to \infty} S \in V$$

$$\implies v_{n_{m+1}} \xrightarrow{m \to \infty} S + v_{n_1} \in V$$

■

2.2. Operadores y funcionales

Nos interesan las aplicaciones lineales entre espacios normados.

Ejemplo:

$$T : C([0,1],\mathbb{C}) \to C([0,1],\mathbb{C})$$
$$f \to F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$$

T es lineal.

$$F(x) = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{y<x\}} f(y)\,dy$$

Definición 2.2.1. V, W son 2 espacios vectoriales.
$T : V \to W$ es lineal si

$$T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$$

$$T : C([0,1]) \to C([0,1])$$
$$f \to \int_0^1 \underbrace{K(x,y)}_{\text{Kernel}} f(y)\,dy := Tf(x)$$

operador integral. Cuando $K \in C([0,1]^2)$, T está bien definida.

En dim ∞ vamos a exigir que los operadores lineales sean continuos .

Definición 2.2.2. $T : V \to W$, V, W son espacios métricos. Decimos que T es continuo si

$$T^{-1}(O) \overset{ab}{\subseteq} V,\ \forall O \overset{ab}{\subseteq} V$$

$$\iff T^{-1}(C) \overset{cerr}{\subseteq} V \quad \forall C \overset{cerr}{\subseteq} W$$

$\iff v_n \to v$ en V entonces $Tv_n \to Tv$ en W.

Teorema 2.2.1. *Sean V, W espacios normados. Entonces $T : V \to W$ operador lineal es continuo si y solo si*

$$||Tv||_W \leq C||v|| \quad \forall v \in V \tag{2.2}$$

para alguna constante C.

Definición 2.2.3. Operador lineal que satisface 1,2 se llama acotado .

Demostración. $\implies$: Sea T continuo. $B := \{||w||_W < 1\}$

$0 \in T^{-1}(B) = B_r^v$

$$T^{-1}(B) \supseteq B_r^v := \{v \in V : ||v||_V < r\}$$

pues $T^{-1}(B)$ es abierto

$$\implies T^{-1}(B) \supseteq \{v \in V : ||v||_V = \frac{r}{2}\}$$

esfera de radio $\frac{r}{2}$.

$$||T\bar{v}||_W < 1$$

Todo $v \in V, v \neq 0$ se puede escribir como $v = \frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V$

Para algún $\bar{v} \in S_{r/2}^v$

Por lo tanto

$$||Tv||_W = ||T(\frac{\bar{v}}{r/2}||v||_V)||_W$$

$$= ||\frac{2}{r}||v||_V T(\bar{v})||_W$$

$$= \frac{2}{r}||v||_V||T\bar{v}||_W < 1$$

$$\leq \frac{2}{r}||v||_V \quad \forall v \neq 0$$

■

Ejemplo:

$$Tf(x) := \int_0^1 K(x,y)f(y)\,dy$$

es acotado en $(C([0,1]), ||||_\infty)$

$$
\begin{aligned}
|Tf(x)| &\leq \int_0^1 \underbrace{|K(x,y)|}_{\leq M} |f(y)|\, dy \\
&\leq M \int_0^1 |f(y)|\, dy \leq M||f||_\infty \quad \forall x \implies ||Tf||_\infty \leq M||f||_\infty
\end{aligned}
$$

Definición 2.2.4. Sean V, W espacios normados. Defina $\mathcal{B}(V,W)$ como el conjunto de operadores lineales continuos acotados de V a W.
Obviamente $\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio vectorial.

Norma operador $T : V \to W$:

$$||T|| := \sup_{||v||=1} ||Tv||$$

Obviamente, $T \in \mathcal{B}(V,W), ||T|| < \infty$

$$||Tv|| \leq C \underbrace{||v||}_{1} = C$$

$$\implies ||T|| \leq C$$

De hecho, para $T \in \mathcal{B}(V,W)$

$$
\begin{aligned}
||T|| = \sup_{v\neq 0} \frac{||Tv||}{||v||} &= \sup_{||v||\leq 1} ||Tv|| \\
&= \inf\{C > 0 : ||Tv|| \leq C||v|| \quad \forall v \in V\}
\end{aligned}
$$

Tenemos $||Tv|| \leq ||T||||v||$

Teorema 2.2.2. *$\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio normado bajo la norma operador.*

Demostración. 1. $||T|| = 0 \implies ||Tv|| = 0 \forall v \in V$

$$\implies Tv = 0 \implies T = 0.$$

2. $||\lambda T|| = |\lambda|||T||$

3. Sea $v \in V, ||v|| = 1$. $\forall T, S \in \mathcal{B}(V, W)$,

$$\begin{aligned} ||(T+S)v|| &= ||Tv + Sv|| \\ &\leq ||Tv|| + ||Sv|| \\ &\leq ||T||||v|| + ||S||||v|| = (||T|| + ||S||)||v|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies ||(T+S)v|| \leq ||T|| + ||S|| \\ &\implies ||T+S|| \leq ||T|| + ||S|| \end{aligned}$$

■

¿Cuándo es $\mathcal{B}(V, W)$ completo?

Teorema 2.2.3. $\mathcal{B}(V, W)$ *es Banach cuando* W *es Banach.*

2.2.1. Aplicaciones

Definición 2.2.5. Sea V un espacio normado sobre $\mathbb{K}$.

$$V^* = \mathcal{B}(V, \mathbb{K})$$

se llama el espacio dual de V.

Teorema 2.2.4. *Cuando* $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *(completos)* V^* *es un espacio de Banach*

Elementos de V^* se llaman funcionales en V.

Ejemplo: $[\ell^p(\mathbb{C})]^* =?, p \in [1, \infty)$
Resulta que $? = l^q(\mathbb{C})$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Si $v \in \ell^p, w \in \ell^q$
podemos definir un funcional en ℓ^p

$$\begin{aligned} \ell_w : \ell^p(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \\ v = \{v_k\} &\to \sum_{k=1}^{\infty} v_k \bar{w}_k \end{aligned}$$

$$|\ell_w| \leq ||w||_{\ell^q}||v||_{\ell^p}$$

Es la desigualdad de Hölder discreta.

$(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$ $(\ell^2)^* \simeq \ell^2$

Nota: $(\ell^\infty)^* \not\simeq \ell^1$