Espacios de Banach

Def (Métrica): $(X,d), d: X\times X\to[0,\infty)$:

1. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $d(x,y)=d(y,x)$
3. $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

Def (Norma): V sobre $\mathbb{K}$. $\|\cdot\|: V\to[0,\infty)$:

1. $\|v\|=0\Leftrightarrow v=0$
2. $\|\lambda v\|=|\lambda|\|v\|$
3. $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$

Si solo satisface 2 y 3 es una semi-norma.
Prop: $d(v,w)=\|v-w\|$ define una métrica.
Prop: En $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ todas normas son equivalentes: $\exists c: \frac{1}{c}\|v\|_2\le\|v\|_1\le c\|v\|_2, \forall v\in V$
Def: X e.m., $C_\infty \coloneqq \{f: X\to\mathbb{C}$ continuas y acotadas$\}$
Prop: $\|f\|_\infty\coloneqq\sup_{x\in X}|f(x)|$ define norma en $C_\infty(X)$
Def (Espacio de Banach): $(V,\|\cdot\|)$ es Banach si es completo c.r. a la métrica inducida
Prop: $C_\infty(X)$ es Banach
Def: $(V,\|\cdot\|)$ normado. $v_n\in V, n\in\mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^\infty v_n$ es sumable si $S_m=\sum_{n=1}^m$ converge. $\sum_{n=1}^\infty v_n$ es absolutamente sumable si $\sum_{n=1}^\infty\|v_n\|$ converge
Prop: Si $\sum_{n=1}^\infty v_n$ es absolutamente sumable, entonces $\{S_m\}$ es Cauchy.
Teo: $(V,\|\cdot\|)$ es Banach si y solo si toda serie absolutamente sumable es sumable.
Def: V,W e.v. $T: V\to W$ es lineal si $T(\lambda_1v_1+\lambda_2v_2)=\lambda_1T(v_1)+\lambda_2T(v_2)\forall v_1,v_2\in V,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$
Def: $T: V\to W$, V,W e.m. T continuo si $T^{-1}(O)\overset{\text{ab}}{\subseteq}V,\forall O\overset{\text{ab}}{\subseteq}V \iff T^{-1}(C)\overset{\text{cerr}}{\subseteq}V,\forall C\overset{\text{cerr}}{\subseteq}V \iff (v_n\to v\in V\implies Tv_n\to Tv\in W)$
Teo: V,W normados. $T: V\to W$ lineal es continuo si y solo si $\exists c: \|Tv\|_W\le c\|v\|_V,\forall v\in V$. Decimos que es acotado
Def: V,W normados. $\mathcal{B}(V,W)$ es el conjunto de operadores lineales acotados de V en W. Es un e.v.
Def (Norma Operador): $\|T\|\coloneqq\sup_{\|v\|=1}\|Tv\|=\sup_{v\neq0}\frac{\|Tv\|}{\|v\|}$. $\|Tv\|\le\|T\|\|v\|$
Teo: $\mathcal{B}(V,W)$ es un espacio normado bajo la norma operador
Teo: $\mathcal{B}(V,W)$ es Banach cuando W es Banach.
Def (Espacio Dual): V normado sobre $\mathbb{K}$. $V^*=\mathcal{B}(V,\mathbb{K})$.
Teo: Cuando $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, V^* es Banach
Resultados: $(\ell^1)^*\simeq\ell^\infty,(\ell^2)^*\simeq\ell^2,(\ell^\infty)^*\not\simeq\ell^1$. Si $V=W$ Banach, $T,S\in\mathcal{B}(V,V)\implies TS\in\mathcal{B}(V,V)$
Def (Espacio Cociente): $W\subseteq V$ subespacio vectorial. $V/W\coloneqq\{[v],v\in V\}$. $v_1\sim v_2$ si $v_1-v_2\in W$. Se nota a veces $V \mod W$. Es útil denotar $[v]=v+W$
Teo: $(V,\|\cdot\|)$ e.v. semi-normado. $Z\coloneqq\{v\in V:\|v\|=0\}$ es subespacio de V y $\|v+Z\|_{V/Z}\coloneqq\|v\|$ define una norma en V/Z
Prop: $W\overset{\text{cerr}}{\subseteq}V$, V normado, entonces V/W tiene una norma $\|[v]\|_{V/W}\coloneqq\inf_{w\in W}\|v-w\|$
Def: V normado. Completación de V es Banach $(\tilde V,\|\cdot\|_{\tilde V})$ con aplicación lineal $\mathcal{J}_{\tilde V}: V\to\tilde V$ que satisface

1. $\mathcal{J}_{\tilde V}$ es uno a uno
2. $\mathcal{J}_{\tilde V}(V)$ es denso en $\tilde V$
3. $\mathcal{J}_{\tilde V}(V)$ es una isometría $\|\mathcal{J}_{\tilde V}(u)\|_{\tilde V}=\|v\|_V,\forall v\in V$

Teo: Todo e.n. tiene una completación.
Defs: $O\subseteq X$ abierto si $\forall x\in O\exists B_r(x)\in O$. $\bigcup_\alpha O_\alpha$ es abierto.$F\subseteq X$ cerrado si F^c abierto. $\bigcap_\alpha F_\alpha$ es cerrado. $\overline{E}=\bigcap_{F\supseteq E}F$. $\mathring{E}=\bigcup_{O\subseteq E}O$. $E\subseteq X$ denso si $\overline{E}=X$
Def: $E\subseteq X$ es denso en ninguna parte si $\mathring{\overline{E}}=\varnothing$. E no contiene bolas abiertas
Prop: F cerrado y denso en n.p. $\iff$ F^c abierto y denso
Def: $E\subseteq X$ cat I si $E=\bigcup_k E_k$ con E_k denso en n.p. $\mathbb{Q}$ es cat I
Def: G genérico si G^c es cat I
Def: E es de cat II si no es cat I
Teo (Baire): (X,d) completo. Entonces X de cat II en sí mismo
Coro: $G\subseteq X$ genérico $\implies$ G denso en X, X completo
Coro: X completo, $X=\bigcup_k F_k\leftarrow$ cerrado. Entonces por lo menos un F_k contiene una bola

Teo: El conjunto de funciones continuas no derivables en ningún punto es denso en $C([0,1])$
Def: $T: X\to Y$ es abierta si $T(U)\overset{\text{ab}}{\subseteq}Y,\forall U\overset{\text{ab}}{\subseteq}X$ **Teo (Aplicación Abierta)**: X,Y Banach, $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ biyectiva, entonces $T^{-1}\in\mathcal{B}(Y,X)$ y $\exists c,C>0: c\|x\|_X\le\|Tx\|_Y\le C\|x\|_X,\forall x\in X$. $c\|T^{-1}y\|_X\le\|y\|_Y$
Def: X,Y e.m. $T: X\to Y$ cerrada si $G_T=\{(x,Tx)\in X\times Y\}$ es cerrado en $X\times Y$
Teo: X,Y Banach, $T\in\mathcal{B}(X,Y)\iff T$ lineal y cerrada
Resultado: Para demostrar continuidad, $x_n\to x\implies Tx_n\to Tx$. Podemos asumir que $Tx_n\to Ty$ y mostrar que $y=Tx$

Espacios de Hilbert

Def: H e.v. sobre $\mathbb{K}$. $\langle\cdot,\cdot\rangle: H\times H\to\mathbb{K}$:

1. $\langle\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y\rangle=\lambda_1\langle x_1,y\rangle+\lambda_2\langle x_2,y\rangle$
2. $\langle y,x\rangle=\overline{x,y}$
3. $\langle x,x\rangle\ge0$. $\langle x,x\rangle=0\implies x=0$

De 1 y 2, $\langle x+\lambda y+x\rangle=\overline{\lambda}\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$
Resultado: $\langle x+y,x+y\rangle=\|x\|^2+2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle+\|y\|^2$ **Prop (Cauchy-Schwarz)**: H pre-Hilbertiano $|\langle x,y\rangle|\le\|x\|\|y\|,\forall x,y\in H$
Prop: $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ define una norma en H
Prop: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es continuo en $H\times H$
Def: $x\perp y$ si $\langle x,y\rangle=0$. $E\subseteq H$, $E^\perp\coloneqq\{x\in H: x\perp y,\forall y\in E\}$
Teo (Pitagoras): $x_1,\dots,x_n\in H$ mutuamente ortogonales, entonces $\|x_1+\cdot+x_2\|^2=\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2$ **Prop (Ley del paralelogramo)**: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$
Def: $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es Hilbert si es completo c.r. a $\|\cdot\|$ inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$
Def: $C\subseteq V$ convexo en V si $\forall x,y\in C,(1-t)x+ty\in C,\forall t\in[0,1]$
Teo: $C\subseteq H$ cerrado y convexo. Entonces $\forall x\in H,\exists! y=P_Cx\in C$ que satisface $\|x-P_Cx\|=d(x,C)=\inf_{c\in C}\|x-c\|$. Además $y=P_Cx\iff\operatorname{Re}\langle c-y,x-y\rangle\le0,\forall c\in C$ **Teo**: $F\subseteq H$ subespacio cerrado. Entonces $H=F\oplus F^\perp$, es decir, $\forall x\in H, x=y+z, y\in F, z\in F^\perp$ e $y=P_Fx, z=P_{F^\perp}x$. $P_F: H\to H$ es lineal y acotado, satisface

1. $\|P_F\|\le1$ $(=1$ cuando $F=\{0\})$
2. $P_F^2=P_F$
3. $\operatorname{Im}P_F=F,\ker P_F=F^\perp$
4. $\langle P_Fx_1,x_2\rangle=\langle x_1,P_Fx_2\rangle$

Def: P_F se llama proyección ortogonal
Teo (Representación de Riesz): H Hilbert, $f\in H^*$. Entonces $\exists! u\in H: f(x)=\langle x,u\rangle,\forall x\in H$
Def: H Hilbert, $\{e_\alpha\}_\alpha$ es o.n. si $\langle e_\alpha,e_\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}$
Prop (Bessel) $\{e_\alpha\}_\alpha$ o.n. Entonces $\sum_\alpha|\langle x,e_\alpha\rangle|^2\le\|x\|^2$
Def: $\hat x(\alpha)=\langle x,\alpha\rangle$ coeficientes de Fourier respecto a $\{e_\alpha\}_\alpha$
Teo: $B=\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un subconjunto o.n. de H. TFAE:

1. $\sum_\alpha|\hat x(\alpha)|^2=\|x\|^2$
2. B es maximal: $x\in H: x\perp e_\alpha\forall\alpha\in A\implies x=0$
3. $\forall x\in H, x=\sum_\alpha\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$
4. $\operatorname{Gen}(B)$ es denso en H

Def: Decimos que $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ o.n. es una base ortonormal si satisface cualquiera de 1-4
Teo: Todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal
Def: X e.m. es separable si $\exists C\subseteq X$ contable y denso en X
Teo: H es separable si y solo si $\exists$ una base o.n. para H contable. En este caso toda base o.n. es contable
Def: H_1,H_2 Hilbert. $T: H_1\to H_2$ es unitario si $\langle Tx_1,Tx_2\rangle_{H_2}=\langle x_1,x_2\rangle_{H_1},\forall x_1,x_2\in H_1$
Resultado: T unitario $\implies$ T isométrico
Teo: Todo espacio de Hilbert separable es unitariamente isomorfo a ℓ^2
Indentidad de Parseval: $\|\hat x\|_{\ell^2}^2=\sum_k|\langle x,e_k\rangle|^2=\|x\|^2$
Identidad de Polarización: $\frac14(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)$

Series de Fourier

Prop: $\{e_n\}_\mathbb{Z}$, $e_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ es o.n. en $L^2(\mathbb{T})$
Def: $f\in L^2(\mathbb{T})$, $\hat f(n)=\langle f,e_n\rangle_{L^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^\pi f(x)e^{-inx}\,dx$ coef de Fourier. $f\to\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat f(n)e_n$ serie de Fourier. $S_Nf(x)=\sum_{|n|\le N}\hat f(n)e_n$ suma de Fourier parcial
Teo: $f\in L^2(\mathbb{T}), S_Nf\xrightarrow[n\to\infty]{L^2}f$
Nota: Teo anterior $\iff$ $\{e_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base o.n. para $L^2(\mathbb{T})$

Teo: $f \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces $S_N f(x) = \int_\pi^\pi D_N(x-t)f(t)\,dt$ donde $D_N(x) = \begin{cases} \frac{2N+1}{2\pi} & x=0 \\ \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{2\pi\sin(\frac{x}{2})} & x \neq 0 \end{cases}$

Def (Media de Cesàro): $\sigma_N f = \frac{S_0 f + \cdots + S_{N-1} f}{N}$

Teo (Fejér): $\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$. Si $f \in C(\mathbb{T})$, $\sigma_N \xrightarrow{\text{unif}} f \in \mathbb{T}$

Prop: $f \in L^2(\mathbb{T})$. Entonces $\sigma_N f(x) = \int_{-\pi}^\pi F_N(x-t)f(t)\,dt$ con $F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}N & x=0 \\ \frac{1}{2\pi N}\frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} & x \neq 0 \end{cases}$

Def: $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es familia de buenos kernels en $L^1(\mathbb{T})$ si

1. $\int_\mathbb{T} K_n(x)\,dx = 1$
2. $\sup_n \int_T |k_n(x)|\,dx < \infty$
3. $\int_{\delta \le |x| \le \pi} |K_n(x)|\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0, \forall \delta > 0$

Def: $f * g = \int f(x-t)g(t)\,dt$

Teo: $\{K_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ fam de buenos kernels en $L^1(\mathbb{T})$ y $f \in C(\mathbb{T})$, entonces $K_N * f = f * K_N \to f$

Coro: $\sigma_N f \xrightarrow[N\to\infty]{\text{unif}} f$ para $f \in C(\mathbb{T})$

Coro: $f \in C(\mathbb{T})$ y $\hat{f}(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \implies f \equiv 0$

Coro: $f \in C(\mathbb{T})$ y su serie de Fourier converge absoluta y uniformemente: $\sum_n |\hat{f}(n)e_n(x)| < \infty$. Entonces $S_N f \xrightarrow{\text{unif}} f$

Prop: $\|\sigma_N f\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$

Prop: $f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \le p < \infty$ entonces $\|\sigma_N f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p}$

Teo: $f \in L^p, 1 \le p < \infty$. Entonces $\sigma_N f \xrightarrow{L^p} f$

Coro: $S_N \xrightarrow{L^2} f$

Lema: $f \in L^1(\mathbb{T}), \hat{f}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Misc: $f \in L^2(\mathbb{T}) \to \hat{f} \in \ell^2_\mathbb{Z}$ es un isomorfismo unitario. $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0 = \{(\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots) : \lim_{|n|\to\infty} a_n = 0\}$ **Teo**: $L^1(\mathbb{T}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0$ es lineal, acotado e inyectivo

Prop: $\|D_N\|_{L^1} \ge C\log N$

Coro: $f_N \coloneqq D_N$ contradice $\|f\|_{L^1} \le c\|\hat{f}\|_\infty$

Teo: $\forall x \in \mathbb{T} \exists A_x \subseteq C(\mathbb{T})$ genérico t.q. $\sup_N |S_N f(x)| = \infty$

Teo (Banach-Steinhaus) X Banach, Y normado. $T_k \in \mathcal{B}(X,Y), k \in I$ no necesariamente contable. Entonces o $\sup_k \|T_k\| < \infty$ o $\sup_k \|T_k x\| = \infty, \forall x \in A$ donde $A \subset X$ es genérico G_δ

Coro: X Banach, Y normado. $T_k \in \mathcal{B}(X,Y)$. Suponga que $\forall x \in X, \lim_{k\to\infty} T_k x =: Tx$ existe. Entonces $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $\|T\| \le \liminf k \to \infty \|T_k\| < \infty$

Conv: $0 \le f_n \nearrow f$ c.t.p. $\implies \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$, $f_n \ge 0, \int \liminf_n f_n d\mu \le \liminf_n \int f_n$, $f_n \to f$ c.t.p. y $|f_n| \le g$ c.t.p., $g \in \mathcal{L}^1_\mathbb{R}(\mu) \implies \int f_n d\mu \to \int f d\mu$

Teo: $f \in \mathcal{L}^1_\mathbb{C}(\mu)$, se puede cambiar el orden de integración

Fact: $L^p_\mathbb{K}(\mu) = \mathcal{L}^p_\mathbb{K}(\mu)/\mathcal{N}_\mathbb{K}(\mu)$ es espacio normado con $\|\cdot\|_p$

Teo: $\int |fg| d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \in [1, \infty]$

Teo: $0 \le a, b \le \infty, ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, 1 < p, q < \infty$

Teo: $L^p(\mu)$ es Banach

Teo: $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)\sigma$-finito. $1 \le p < \infty$. ϕ es isomorfismo isométrico: $\forall \ell \in (L^p(\mu))^*, \exists! g \in L^q(\mu) : \ell(f) = \langle f, g\rangle \forall f \in L^p$. $\|\ell\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q$

Teo: μ, ν, σ-finitas. $\nu \ll \mu \implies \exists! h \ge 0$ medible t.q. $\nu(E) = \int_E h d\mu$. $h = \frac{d\nu}{d\mu}$

Def: $\ell \in (L^p_\mathbb{R})^*$ positivo si $\ell(f) \ge 0, \forall 0 \le f \in L^p_\mathbb{R}$

Teo: $\ell \in (L^p_\mathbb{R})^*, 1 \le p < \infty$. $\ell = \ell_+ - \ell_-$ positivos

Def: X e.v. real. $p : X \to \mathbb{R}$ es funcional convexo si

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda \ge 0$
2. $p(x+y) \le p(x) + p(y)$

Prop: X normado. $f \in X'$ acotado si y solo si f dominado por $p(x) \coloneqq M\|x\|$ para algún $M > 0$

Teo (H-B): X, Y e.v. reales, $Y \subseteq X$, $p : X \to \mathbb{R}$ funcional convexo. $f \in Y'$ dominado por p. Entonces $\exists! F \in X'$ extensión de f dominado por p

Coro: X normado real. $Y \subseteq X$ subespacio $Y \neq \{0\}, f \in Y^*$. Entonces, $\exists F \in X^*$ extensión con $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

Teo: $Y_\mathbb{C} \subseteq X_\mathbb{C}$ normado complejo, $f \in Y^*_\mathbb{C}$. Entonces f se extiende a $F \in X^*_\mathbb{C}, \|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$

Coro: $\forall x_0 \in X$ normado, $\exists f_0 \in X^*$ t.q. $\|f_0\| = 1$ y $f_0(x_0) = \|x_0\|$

Coro: $\|x\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\}$

Teo: $\forall x \in X$ normado define funcional en X^*, $\hat{x} : X^* \to \mathbb{K}, f \to f(x)$. $\|\hat{x}\| = \sup_{\|f\|=1} \|f(x)\| = \|x\|$. $\mathcal{J} : X \to (X^*)^*, x \to \hat{x}$ es isometría lineal. Cuando $\mathcal{J}$ es sobre, $X \simeq X^{**}$ es Banach y se dice reflexivo

Teoría de Operadores

Def: $f \in X^*$, $Y \subseteq X$, $Y^\perp \coloneqq \{f \in X^* : \langle f, y\rangle = 0 \forall y \in Y\}$. $Z \subseteq X^*, X^\perp \coloneqq \{x \in X : \langle f, x\rangle = 0 \forall f \in Z\}$

Prop: $Y \subseteq X$ subespacio normado. $(Y^\perp)^\perp = \overline{Y}$

Def: $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ normados. $T^* : Y^* \to X^*$, $f \circ T =: T^*(f)$. $\langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle \forall x \in X$

Teo: $\mathcal{B}(X,Y) \to \mathcal{B}(X^*, Y^*), T \to T^*$ isometría lineal

1. $(\operatorname{Im} T)^\perp = \ker T^*$
2. $(\ker T^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} T}$
3. $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \ker T$

Def: X, Y Banach. $T : X \to Y$ compacto si $\overline{T(B^X)}$ compacto en $Y \iff$ toda sucesión en $T(B^X)$ tiene subsucesión convergente en $Y \iff$ toda sucesión en $T(B^X)$ tiene subsucesión de Cauchy

Teo: $\mathcal{B}_c(X,Y) \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ es subespacio cerrado. $\{T_n\} \subseteq \mathcal{B}(X,Y), \|T_N\| \to 0 \implies T \in \mathcal{B}(X,Y)$

Def: $T : X \to Y$ de rango finito si $\dim(\operatorname{Im} T) < \infty$

Prop: $T : X \to Y$ de rango finito es compacto. $T = \lim T_n$ de rango finito $\implies T$ compacto

Teo: $T \in \mathcal{B}_c(X,Y)$, Y Hilbert. Entonces $\exists T_n$ rango finito t.q. $\|T_n - T\| \to 0$

Prop: Composición de compacto con continuo es compacto

Teo (Schauder): $T \in \mathcal{B}_c(X,Y) \iff T^* \in \mathcal{B}_c(Y^*, X^*)$

Teo (A-A): K métrico compacto, $\mathcal{C} \subseteq C(K)$ t.q.

1. $\exists M > 0 : \|f\|_{C(K)} \le M, \forall f \in \mathcal{C}$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $\forall f \in \mathcal{C} : |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ si $|x-y| < \delta$

Entonces existe $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}, f \in \mathcal{C}$ t.q. $f_n \to f$ en $C(\mathbb{K})$

Teo (Alternativa Fredholm): X Banach, $T \in \mathcal{B}_c(X,X)$. Entonces

1. $\dim(\ker(I-T)) < \infty$
2. $\operatorname{Im}(I-T)$ es cerrado en X e $\operatorname{Im}(I-T) = (\ker(I-T^*))^\perp$
3. $\ker(I-T) = \{0\} \iff \operatorname{Im}(I-T) = X$
4. $\dim(\ker(I-T)) = \dim(\ker(I-T^*))$

Lema X normado, $F \overset{\text{cerr}}{\subsetneq} X$. Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists u \in X, \|u\| = 1$ t.q. $d(u, F) \ge 1 - \varepsilon, \|u - f\| \ge 1 - \varepsilon, \forall f \in F$

Coro: X normado, B^X compacta. Entonces $\dim X < \infty$

Resultado: $T \in \mathcal{B}_c(X,Y), X_1 \overset{\text{cerr}}{\subseteq} X$, X, Y Banach $\implies T\big|_{X_1} : X_1 \to Y$ es compacto

Def: $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de $T : X \to X$, X Banach, si $\exists x \neq 0$ t.q. $Tx = \lambda x$

Def: $\sigma(T) \coloneqq \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I$ no es invertible$\} \supseteq \sigma_p(T)$. $\lambda \in \sigma(T) \iff$ o λ es autovalor o $T - \lambda I$ no es sobre. $\rho(T) = \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$

Teo: $T \in \mathcal{B}(X,X), \sigma(T)$ es compacto de $\mathbb{K}$. $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \le \|T\|\}$

Teo: $T \in \mathcal{B}_c(X,X)$, X Banach, $\dim X = \infty$. Entonces

1. $0 \in \sigma(T)$
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ y cada $\lambda \neq 0$, $\mathcal{N}_\lambda(T) \coloneqq \ker(T - \lambda I)$ tiene dim finita
3. $\forall \delta > 0$ existen nro finito de valores distintos $\lambda \in \sigma(T)$ t.q. $|\lambda| \ge \delta$

Coro: $T \in \mathcal{B}_c(X,X) \implies \sigma(T)$ a lo más numerable. Esto último cuando $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\lambda_n \to 0$

Def: $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. $T^* : H_2 \to H_1 : \langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, Ty\rangle_1$

Def: $A : H \to H$ autoadjunto si $A^* = A : \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$

Prop: $A \in \mathcal{B}(H,H)$ autoadjunto. Entonces $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathcal{N}_{\lambda_1}(A) \perp \mathcal{N}_{\lambda_2}(A)$ si $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Teo: $A \in \mathcal{B}(H,H)$ autoadjunto. Entonces $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

Lema: $A \in \mathcal{B}(H,H)$ autoadjunto. $\lambda \in \rho(A) \iff \exists C > 0 : \|(A - \lambda I)x\| \ge C\|x\| \forall x \in H$

Teo (Espectral): $A \in \mathcal{B}_c(H,H)$ autoadjunto. Entonces H posee base o.n. de autovectores. $Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, u_n\rangle u_n$

Lema: $A \in \mathcal{B}(H,H)$ acotado autoadjunto. Entonces $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| =: M$

Lema: $A \in \mathcal{B}_c(H,H)$ autoadjunto, $A \neq 0$ entonces o $\|A\|$ o $-\|A\|$ es autovalor de A