

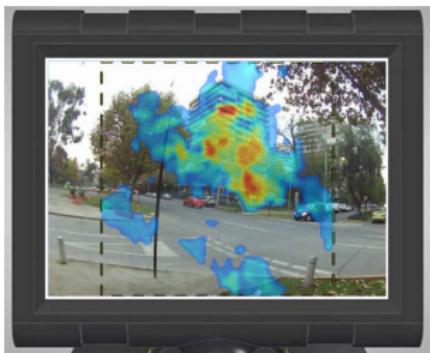
# Arreglos de antenas y Métodos de detección de direcciones de arribo (DoAs)

Diego Gallardo

DIE, FCFM, Universidad de Chile

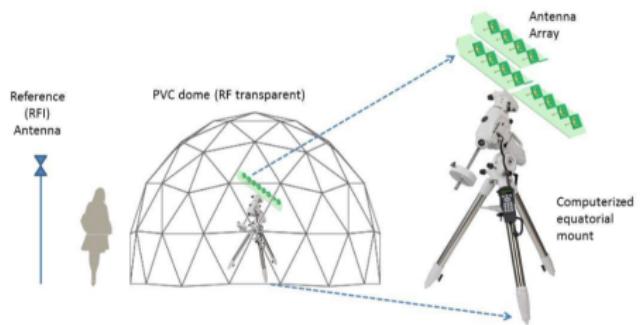
20 de julio de 2020

# Radiovisión



- ✖ Celular:  $\approx < 1$  ms.
- ✖ RV:  $\approx 1$  s.
- ✖ Poca precisión  
 $(\approx 10^\circ)$ .
- ✖ DoAs:  $\approx 1$  ms,  $1^\circ$ .

# Detección de FRBs



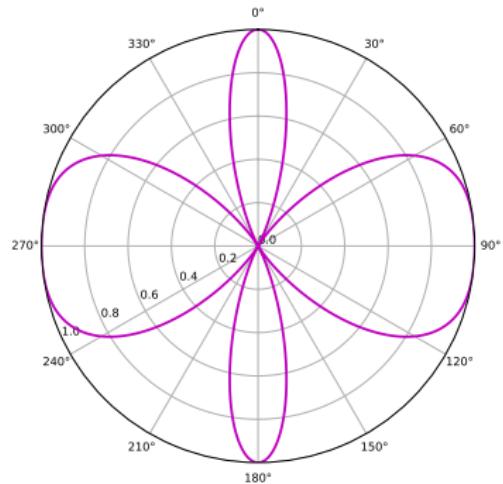
- ✖ FRB:  $\approx < 1$  ms.
- ✖ AA:  $\approx 1$  s.
- ✖ Poca precisión.

# Arreglos de antenas



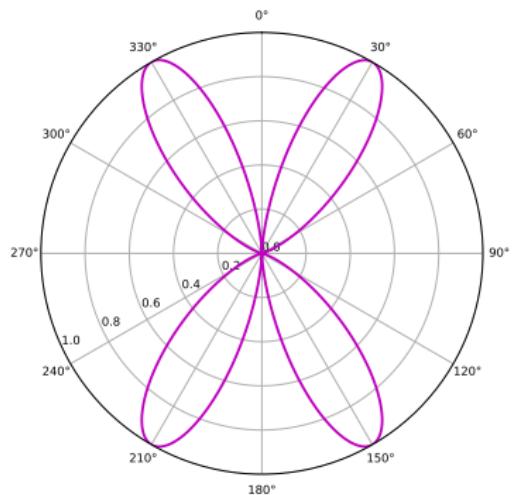
Se puede obtener un mayor SNR y se puede apuntar electrónicamente.

# Capacidad de apuntar



✖ Desfase:  $e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta}$

# BF convencional: Capacidad de apuntar

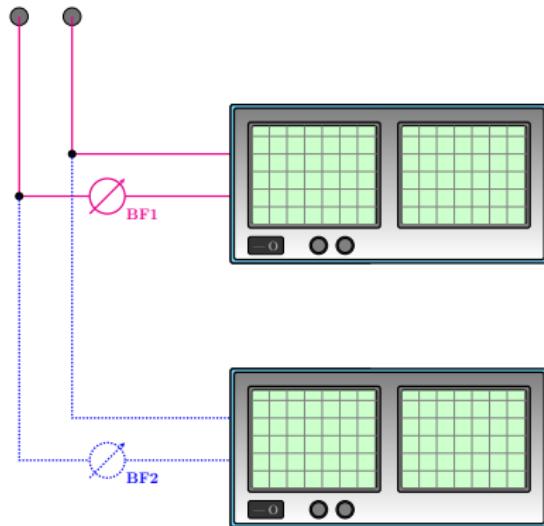


# Capacidad de localizar

$\Phi$	P	$\theta$
0°	0.5	0°
15°	0.63	5°
30°	0.76	10°
45°	0.86	15°
60°	0.94	20°
75°	0.98	25°
90°	1	30°
105°	0.98	35°
120°	0.94	40°

- ✖ Desfase:  $e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta}$
- ✖ RV analógico.
- ✖ Es lento e impreciso.

# Múltiples BF

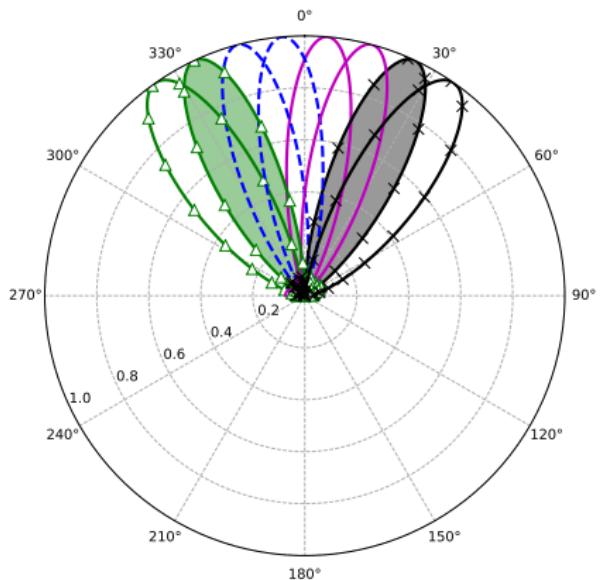


# Múltiples BF

- ✖ 4 *Beamformers*.
- ✖ Arreglo de 4 antenas.

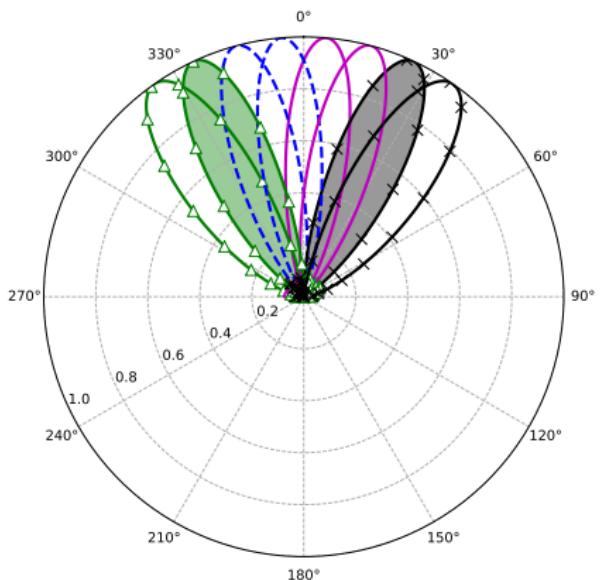
# Múltiples BF

- ✖ 4 *Beamformers*.
- ✖ Arreglo de 4 antenas.



# Múltiples BF

- ✖ 4 *Beamformers*.
- ✖ Arreglo de 4 antenas.
- ✖ RV digital ( $4 \times 4$  antenas y 16 BFs).
- ✖ Mucho más rápido, pero todavía con poca precisión.



# Objetivos

Tres conceptos:

- ✖ Espacio de columnas de una matriz.
- ✖ Criterio de mínimos cuadrados (LS).
- ✖ SVD (descomposición en valores singulares).

# Espacio de columnas

Existen 4 formas de multiplicar matrices. La usual:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

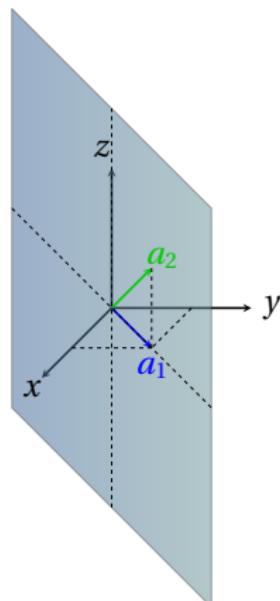
o como combinación lineal de columnas:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} x_2 = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2$$

(las otras dos no son necesarias para esta charla).

# Espacio de columnas

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2$$



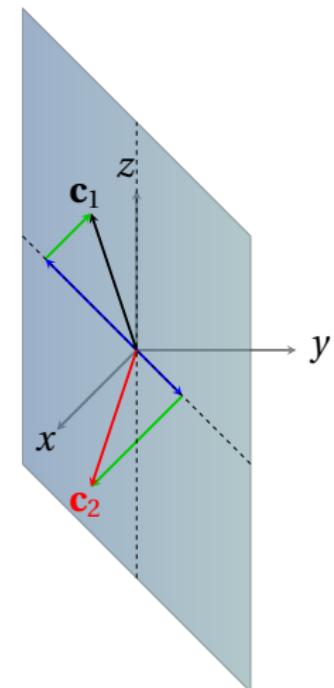
# Espacio de columnas

¿Qué pasa con la multiplicación de matrices?

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A} [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2] = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2]$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2] = [\mathbf{Ab}_1 \ \mathbf{Ab}_2]$$

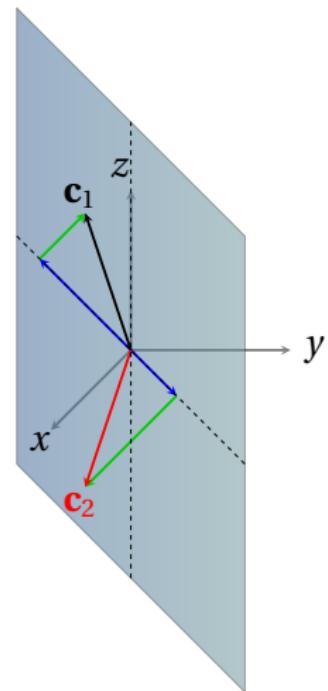
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$



# Espacio de columnas

$\mathfrak{C}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  se denomina **espacio de columnas** de  $\mathbf{A}$ .

- ✖ Cualquier vector  $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$  está en  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ .
- ✖ Las columnas de cualquier matriz  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  están en  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ .



# Criterio de mínimos cuadrados (LS)

- ✚ Un modelo perfecto relaciona causa y efecto:  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ .

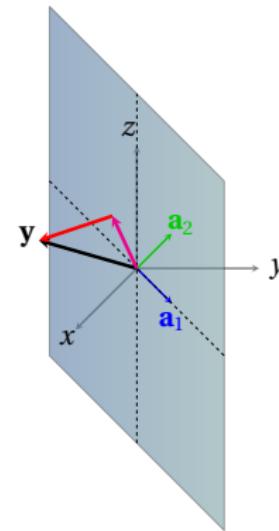
# Criterio de mínimos cuadrados (LS)

- ✚ Un modelo perfecto relaciona causa y efecto:  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ .
- ✚ Pero en realidad siempre hay ruido:  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\eta}$ .
- ✚ Si ignoramos el ruido  $\Leftrightarrow$  Si intentamos resolver  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ :

# Criterio de mínimos cuadrados (LS)

- ✚ Un modelo perfecto relaciona causa y efecto:  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ .
- ✚ Pero en realidad siempre hay ruido:  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \boldsymbol{\eta}$ .
- ✚ Si ignoramos el ruido  $\Leftrightarrow$  Si intentamos resolver  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$ :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



# Criterio de mínimos cuadrados (LS)

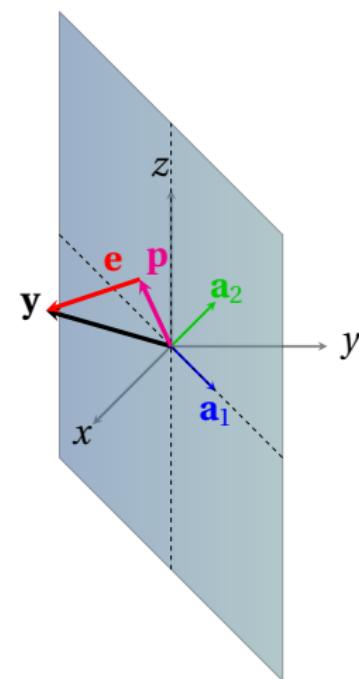
Solución: Resolvemos

$$\mathbf{p} = \mathbf{Ax} \rightarrow \hat{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T}_{\mathbf{A}^+} \mathbf{y}.$$

Mnemotecnia (y solo mnemotecnia):

Si  $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$  y hay ruido ( $\mathbf{y} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$ )  
 $\rightarrow \mathbf{A}^+ \mathbf{y} = \mathbf{A}^+ \mathbf{Ax} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$ .

La solución  $\hat{\mathbf{x}}$  es tal que  $\|\mathbf{e}\|^2$  es mínimo.  
 $\Leftrightarrow \sum_k (y_k - p_k)^2$  es mínimo.



# EVD (*eigenvalue*) y SVD (*singular value*)

- ✚ EVD: Los vectores propios cumplen  $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow$  Si  $\lambda \neq 0$ ,  
 $\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{Ax} \Rightarrow$  ¡Algunos vectores propios están en  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ !
- ✚ SVD: **Cualquier matriz** se puede escribir como  
$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m] \Sigma \mathbf{V}^T.$$

Los vectores  $\mathbf{u}_k$  son ortonormales y son una base para  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ .  $\mathbf{u}_k$  son los vectores propios de  $\mathbf{AA}^H = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T)^*$ .

# Resumen

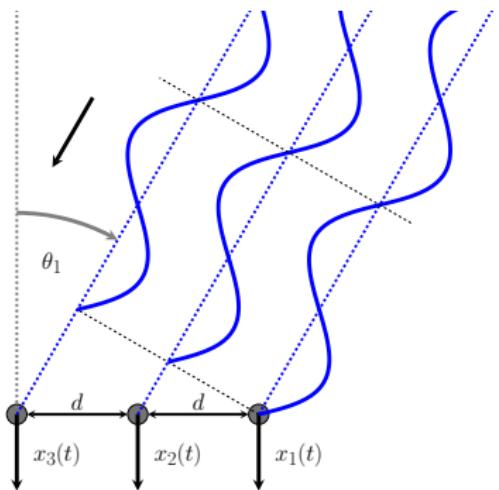
- ✖ El espacio de columnas ( $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ ) es muy importante para este método.
- ✖ Los vectores singulares izquierdos de la SVD son una base para  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ .
- ✖ Un sistema con ruido y de forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

se puede resolver aplicando la pseudoinversa:  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$ .

# Modelo con incidencia armónica

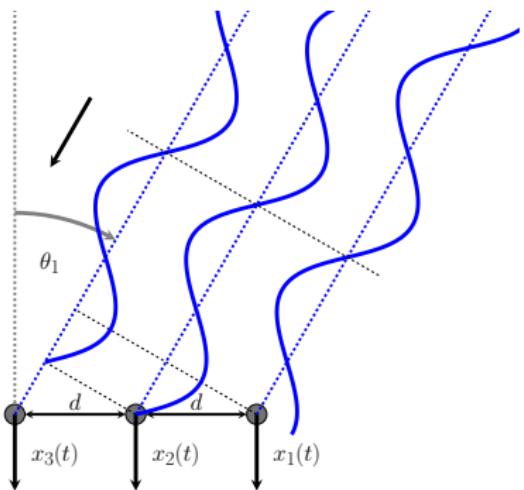
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0 t} \\ F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0(t-\tau_2)} \\ F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0(t-\tau_3)} \end{bmatrix}$$



# Modelo con incidencia armónica

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0 t} \\ F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0(t-\tau_2)} \\ F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0(t-\tau_3)} \end{bmatrix}$$

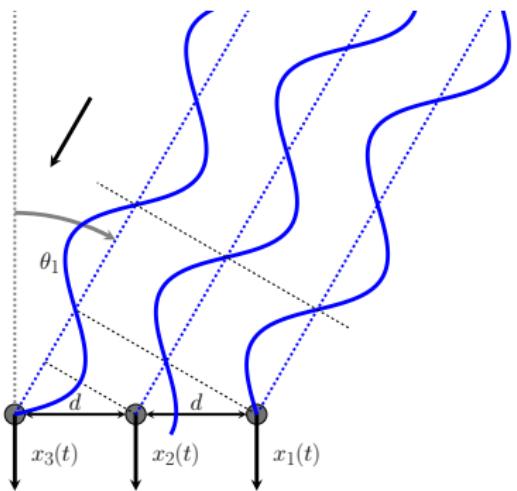
$$\tau_2 = \frac{d \operatorname{sen} \theta_1}{c} \Rightarrow i\omega_0 \tau_2 = i\beta d \operatorname{sen} \theta_1$$



# Modelo con incidencia armónica

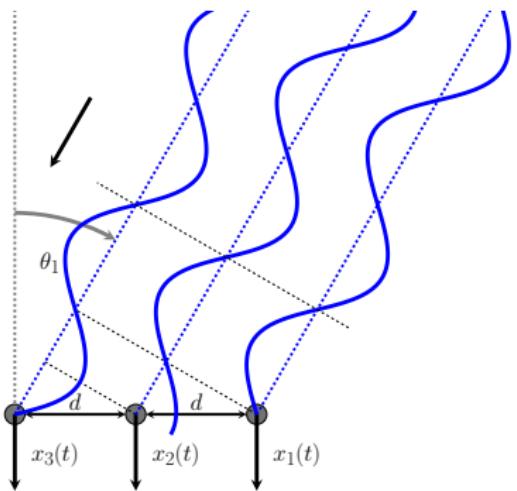
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0 t} \\ F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0(t-\tau_2)} \\ F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0(t-\tau_3)} \end{bmatrix}$$

$$\tau_3 = \frac{2d \operatorname{sen} \theta_1}{c} \Rightarrow i\omega_0 \tau_3 = i2\beta d \operatorname{sen} \theta_1$$



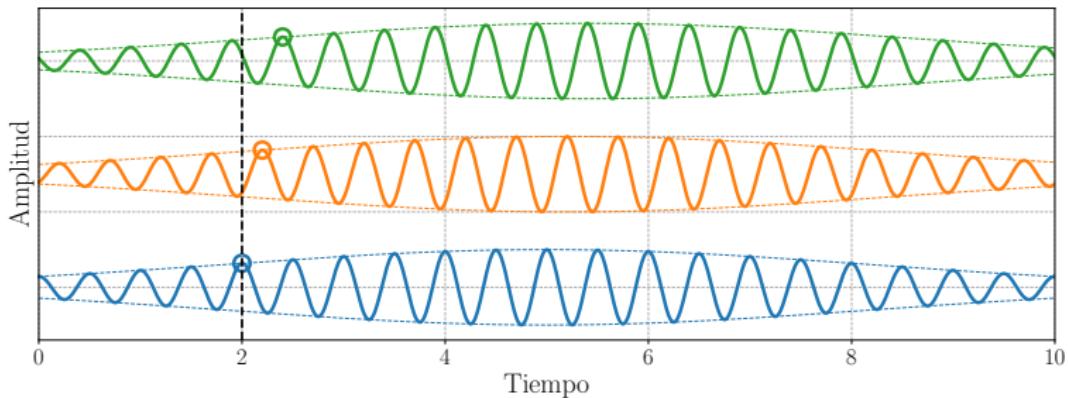
# Modelo con incidencia armónica

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = F(\theta_1)\varphi_1 e^{i\omega_0 t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} \\ e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_1} \end{bmatrix}$$



# Modelo con señal modulada

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = F(\theta_1)\varphi_1 \begin{bmatrix} u_1(t)e^{i(\omega_0 t + f_1(t))} \\ u_1(t - \tau_2)e^{i(\omega_0(t - \tau_2) + f_1(t - \tau_2))} \\ u_1(t - \tau_3)e^{i(\omega_0(t - \tau_3) + f_1(t - \tau_3))} \end{bmatrix}$$



# Modelo con señal modulada

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \approx F(\theta_1)\varphi_1 \begin{bmatrix} u_1(t)e^{i(\omega_0 t + f_1(t))} \\ u_1(t)e^{i(\omega_0(t - \tau_2) + f_1(t))} \\ u_1(t)e^{i(\omega_0(t - \tau_3) + f_1(t))} \end{bmatrix}$$

Post amplificadores y mezcladores:

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} u_1(t)e^{if_1(t)} \\ u_1(t)e^{if_1(t)}e^{-i\omega_0\tau_2} \\ u_1(t)e^{if_1(t)}e^{-i\omega_0\tau_3} \end{bmatrix} = \underbrace{u_1(t)e^{if_1(t)}}_{s_1(t)} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} \\ e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_1} \end{bmatrix}$$

# Modelo con señal modulada

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \approx F(\theta_1)\varphi_1 \begin{bmatrix} u_1(t)e^{i(\omega_0 t + f_1(t))} \\ u_1(t)e^{i(\omega_0(t - \tau_2) + f_1(t))} \\ u_1(t)e^{i(\omega_0(t - \tau_3) + f_1(t))} \end{bmatrix}$$

Post amplificadores y mezcladores:

$$\begin{bmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ z_3(n) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} u_1(n)e^{if_1(n)} \\ u_1(n)e^{if_1(n)}e^{-i\omega_0\tau_2} \\ u_1(n)e^{if_1(n)}e^{-i\omega_0\tau_3} \end{bmatrix} = \underbrace{u_1(n)e^{if_1(n)}}_{s_1(n)} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} \\ e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_1} \end{bmatrix}$$

# Expresión algebraica con 2 señales ( $\theta_1$ y $\theta_2$ )

$$\mathbf{z}(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} \\ e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_1} \end{bmatrix} s_1(n) + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \\ e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \end{bmatrix} s_2(n)$$

$$\mathbf{z}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} & e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \\ e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_1} & e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \boldsymbol{\eta}(n)$$

# Ejemplo

Si se colectan suficientes muestras, es posible estimar  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ :

$$\mathbf{Z} = [ \mathbf{z}(1) \quad \mathbf{z}(2) \quad \dots \quad \mathbf{z}(K) ]$$

¿Cómo estimar  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$  a partir de las muestras?  $\rightarrow \mathbf{Z} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ ,  $\mathbf{U}$  es base de  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ .

# Trucazo # 1

- ✖ ¿U? Vectores propios de  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H$ .
- ✖  $\mathbf{V}_s = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r]$ .
- ✖  $\mathbf{V}_s$  permite determinar  $\mathfrak{C}(\mathbf{A})$ .

Pero  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^H \approx \mathbf{R}_{zz} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \Rightarrow$  ¡El ruido no altera los vectores propios!

Si se juntan los vectores en la matriz  $\mathbf{V}_s$ , entonces

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{AT}$$

## Trucazo # 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} & e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \\ e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_1} & e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{J}_2 \mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} & e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_1} & e^{-i\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \\ e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_1} & e^{-i2\beta d \operatorname{sen} \theta_2} \end{bmatrix}$$

# Solución LS

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{AT} \text{ y } \mathbf{J}_1 \mathbf{A} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{J}_2 \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{J}_1 \mathbf{V}_s \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{J}_2 \mathbf{V}_s \mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{V}_s \overbrace{\mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T}}^{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{J}_2 \mathbf{V}_s \Leftrightarrow \mathbf{V}_{s1} \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{V}_{s2} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{V}_{s1}^+ \mathbf{V}_{s2}$$

$$\begin{bmatrix} e^{-i\beta d \sin \theta_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta d \sin \theta_2} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{T}^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{T} \Rightarrow$  ¡Los valores propios de  $\boldsymbol{\Psi}$  son los elementos diagonales de  $\boldsymbol{\Phi}$ !

# ESPRIT: Algoritmo (y resumen)

- 1) Colectar las muestras del arreglo ( $\mathbf{z}(n)$ ) en  $\mathbf{Z}$ .
- 2) Estimar la matriz de covarianza:  $\mathbf{R}_{zz} = \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H$ .
- 3) Calcular los vectores propios de  $\mathbf{R}_{zz}$  y agruparlos en  $\mathbf{V}_s$ .
- 4) Resolver  $\Psi = \mathbf{V}_{s1}^+ \mathbf{V}_{s2}$ .
- 5) Los valores propios de  $\Psi$  son las direcciones de arriba.

# Arreglos de antenas y Métodos de detección de direcciones de arribo (DoAs)

Diego Gallardo

DIE, FCFM, Universidad de Chile

20 de julio de 2020