

Resumen

En el presente artículo se realizan dos modelos matemáticos programables que pueden asistir en el análisis de auditoría, mediante la selección de las muestras de escrutinio más prometedoras, estas muestras más potencialmente significativas son escogidas de manera optimizada teniendo como referencia la distribución natural (fidedigna) de los dígitos, la cual se comprende como la ley de Benford, conocida también como la ley de los dígitos significativos.

A propósito de esta ley, en el presente trabajo escrito se dedica un apartado en realizar la reconstrucción de identidad de manera formal, para esto mismo se hace uso de las propiedades de logaritmos y la acotación de x -valores en un intervalo, derivando formalmente la propiedad, suponiendo así una motivación matemática del análisis de la ley de Benford. En simultáneo se señalan las limitaciones de esta ley, la cual se satisface para conjuntos de datos no tan restrictivos y que satisfagan la propiedad heterogénea, se extrapola la distribución de Benford a la probabilidad para el análisis de conjuntos de datos aplicada en variables indicadoras de eventos, justificando mediante la ley de los grandes números (LGN) la convergencia a la media teórica (convergencia casi segura o en probabilidad, según versión de LGN).

Análogamente se describen los estadísticos utilizados en el modelo, a saber: La prueba chi-cuadrado que suma los desajustes al cuadrado, prueba de Mean Absolute Deviation (MAD) que mide la discrepancia respecto a la muestra observada y Z-score para dígitos individuales que mide cuántas desviaciones estándar un punto de datos está por encima (o debajo) de la media verdadera. Dado que si la distribución de Benford proporciona probabilidades teóricas, es necesario conocer qué tanto se desvían los conjuntos de datos de estudio de esta misma.

A su vez se explora la construcción de estos estadísticos mediante el criterio del Teorema del Límite Central (TLC), donde se puede comprender la distribución chi-cuadrado como la suma de N variables aleatorias independientes donde N_i para cada $i = 1, \dots, n$ siguen una distribución Normal($\mu = 0, \sigma^2 = 1$), MAD se aborda desde su definición como medida absoluta del desajuste respecto a la cantidad de categorías de la desviación entre la frecuencia relativa observada y la probabilidad teórica de Benford, mientras que los Z-score individuales comparan la frecuencia de un dígito observada (individual o par) con los esperados teóricos de Benford, en síntesis se construye todo un marco teórico-metodológico que persigue rescatar las desviaciones más significativas con el objetivo de prevenir la pérdida de información relevante en las muestras a auditar.

Dado que el filtrado de las muestras de auditoría se propone realizar en dos estados, a saber mediante la identificación del subconjunto más pequeño de aquellos resultados más no conformes (es decir atípicos) de un conjunto de datos lo cual se obtiene mediante la asignación de ciertos parámetros por parte del auditor, y la selección de los K registros menos conformes, no obstante el trabajo se centrará en explorar el primer método supracitado.

Resumidamente se puede definir la heurística general del proceso de la identificación del subconjunto de datos más pequeño no conforme, en donde teniendo de referencia las probabilidades teóricas de Benford y las muestras observadas se construyen los estadísticos de prueba previamente mencionados, y mediante el establecimiento de unas bandas de desviación razonables se obtiene la depuración del conjunto de datos fidedigno, que ha de satisfacer comportarse en distribución como la ley natural de los dígitos, es decir, se persigue con esta técnica el filtrado de el conjunto de datos hasta obtener uno que puede comprenderse como depurado y libre de alteraciones ya sea por error o fraudes, para esto mismo se establece una cota $S(T)$, donde T es un experimento, la cual el auditor estipula de referencia con el objetivo de tener una banda de tolerancia respecto a qué tanto soporta la desviación observada de los datos respecto a las teóricas de Benford.

Paralelamente con el propósito de someter a prueba la fiabilidad del modelo y a modo de ejemplificación de la aplicación del mismo, daSilva y Carreira seleccionaron de manera aleatoria 30 conjuntos de datos de cinco mil registros de cuatro dígitos cada uno, con la finalidad de medir en diferentes niveles de contaminación (manipulación de los conjuntos de datos) el grado de efectividad del modelo, pruebas para las que resumidamente se concluyó para un nivel de contaminación de un 10% del total del conjunto de datos, el modelo de la detección del conjunto de datos no conforme más pequeño satisface una efectividad prudente para su implementación en contextos reales, como limitantes se tiene que si las contaminaciones son muy escasas (umbral del 2%) la prueba para la construcción del conjunto de datos depurados se ve ensuciada debido a las ligeras desviaciones producidas por el modelo.

Introducción

Finalidad del trabajo y Explicación de los Modelos Planteados.

El trabajo confeccionado por Gomes da Silva y Carreira surge con la finalidad de proponer un criterio técnico-racional eficiente para la selección de muestras en pruebas de auditoría, focal-

izado principalmente en instituciones financieras, la necesidad de la investigación de este tema surge debido a que los auditores requieren gestionar de forma eficiente el tiempo invertido para el estudio de los conjuntos de datos, más aún se requiere que el auditor sea capaz de realizar un filtrado efectivo del conjunto de datos pues el examinar transacción por transacción es una meta poco realista.

Este objetivo es alcanzado mediante la segmentación en dos bandas de los conjuntos de datos. Primeramente, se identifican las muestras de auditoría observando las propiedades del subconjunto de datos remanente después de retirar la muestra a auditar; esta muestra a auditar proviene del conjunto más pequeño de los datos que no siguen la conformidad deseada en los registros.

Con la finalidad de determinar qué registro t ha de ser examinado, es decir, removido del conjunto inicial de los primeros N registros, se define una variable aleatoria indicatriz:

$$y_t := \begin{cases} 1, & \text{si el registro } t \text{ es removido,} \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad t \in \{1, 2, 3, \dots, N\}.$$

Con esta variable aleatoria se introduce el tamaño del conjunto de conformidad dado por:

$$N - K, \quad \text{donde} \quad K := \sum_{t=1}^N y_t.$$

La idea tras esto, tal como señalan da Silva & Carreira (2013), es identificar en qué datos se encuentra la contaminación y removerla, dado que se persigue la finalidad de recuperar el conjunto de datos original. Una vez hecha esta separación, se toman los K registros más no conformes, dado un tamaño de muestra fijado por el auditor.

Explicación de la Ley de Benford

La particularidad del modelo proviene del filtrado para elegir qué conjuntos de datos están fuera de los parámetros de conformidad siguiendo la Ley de Benford. Esta ley, explicada de modo intuitivo, se puede ejemplificar de la siguiente manera:

Suponer que se toma una muestra de datos fidedignos y heterogéneos, es decir, muy diversos, como por ejemplo: el registro de natalidad por año de un país, el número de distritos por cantón en Costa Rica, o facturas de compras en un supermercado.

De forma intuitiva podría suponerse que cada dígito $\{1, 2, \dots, 9\}$ tiene un peso equiprobable

de ocurrencia, es decir:

$$P(X = i) = \frac{1}{9} \approx 0.111.$$

No obstante, esto no es cierto. En realidad, el dígito 1 ocurre con mucha mayor frecuencia que los demás; el dígito 2 ocurre más que los restantes siete, y así sucesivamente hasta el 9. Los pesos de Benford típicos son aproximadamente: 30% para el 1, 18% para el 2, y valores decrecientes hasta el 9.

La probabilidad teórica de que el primer dígito sea i , donde $i = 1, 2, \dots, 9$, está dada por:

$$P(\text{primer dígito} = i) = \log_{10} \left(1 + \frac{1}{i} \right).$$

Esta expresión tiene una justificación intuitiva debido a que muchos datos económicos se generan mediante productos o cocientes de variables aleatorias, como sucede con el interés compuesto.

Para hacer más natural esta explicación, considérese el caso en que el crecimiento poblacional de un país está modelado con una distribución exponencial $\text{Exp}(\lambda = 1.1)$. En los primeros años, pasar de 100 a 1000 personas tarda más tiempo que pasar de 1000 a 2000, por el crecimiento progresivo de la exponencial. Esto implica más observaciones con primer dígito 1, justificando intuitivamente la ley.

Justificación

El trabajo de investigación *Selecting Audit Samples Using Benford's Law* involucra amplios temas probabilísticos aplicados en la industria financiera. En particular, se vincula fuertemente con:

- la distribución de probabilidad de los dígitos de los datos,
- el uso de la distribución natural de Benford como referencia,
- la identificación de desviaciones respecto a esta distribución.

Aquellos conjuntos que se alejan significativamente de Benford se consideran eventos poco probables bajo el modelo, y por ende, deben ser auditados.

Simultáneamente, el trabajo integra herramientas probabilísticas y estadísticas para pruebas de conformidad, evaluando qué tan lejos se alejan los datos observados del comportamiento esperado. Esto incluye conceptos tales como:

- variables aleatorias,
- funciones indicadoras,
- funciones objetivo basadas en probabilidad,
- restricciones construidas mediante desviaciones estadísticas.

Todos estos conceptos se articulan con el propósito de resolver un problema real: optimizar la selección de muestras de auditoría en datos financieros potencialmente afectados por errores o fraudes.

Objetivos

El objetivo del trabajo de investigación abordado consisten en proporcionar una herramienta técnica eficiente para la recolección de muestras a auditar teniendo como referencia los parámetros de conformidad previamente definidos por el auditor, para este propósito se establecen ciertos criterios para realizar el filtrado del conjunto de datos, bajo los principios de la ley de Benford, por esto mismo el trabajo persigue contribuir al análisis digital mediante modelos matemáticos en la prevención del fraude, delimitando de manera más concreta se puede afirmar:

Objetivo general:

- Proporcionar una metodología técnica para la reconstrucción de un conjunto de datos fidedignos mediante la depuración de las muestras más anómalas que no siguen la ley de Benford para la detección de errores y/o fraudes.

Objetivos específicos:

- Establecer de forma justificada la razón de la toma de referencia de la distribución natural de Benford como un estándar de las muestras a auditar, siempre que satisfagan sus hipótesis.
- Definir los estadísticos de prueba más adecuados, a saber: prueba chi cuadrado, MAD y Z-score para la detección de muestras anómalas del conjunto de datos observado.

- Escrutar la efectividad del modelo mediante la ejecución de experimentos con el propósito de medir el rango de rendimiento óptimo del modelo propuesto.

Marco Teórico

Ley de Benford y representación logarítmica

Después de la introducción y la motivación del trabajo, el siguiente paso es entender con más detalle qué es la Ley de Benford desde el punto de vista probabilístico y por qué tiene sentido usarla como referencia de “normalidad” en los dígitos de los datos contables y financieros.

Representación logarítmica y primer dígito

Antes de entrar a la fórmula explícita de la Ley de Benford, es útil ver por qué el **primer dígito** de un número se puede leer directamente a partir de la **parte fraccionaria** de su logaritmo en base 10. Esta observación es la base de la interpretación logarítmica de la ley.

Todo número positivo x se puede escribir de forma única como

$$x = m \cdot 10^k,$$

con $k \in \mathbb{Z}$ y $m \in [1, 10)$. El factor 10^k nos dice en qué “orden de magnitud” se encuentra el número (si está entre 1 y 10, entre 10 y 100, entre 100 y 1000, etc.), mientras que m es la “mantisa” normalizada en el intervalo $[1, 10)$. El punto importante es que el **primer dígito significativo** de x viene únicamente de m (no de k): si m está entre 1 y 2, el primer dígito es 1; si está entre 2 y 3, el primer dígito es 2; y así sucesivamente.

Podemos formalizar esto con logaritmos. Sea $x > 0$. Definimos

$$k = \lfloor \log_{10} x \rfloor,$$

de modo que se cumple

$$10^k \leq x < 10^{k+1}.$$

Luego definimos

$$m := \frac{x}{10^k},$$

con lo cual $m \in [1, 10)$ y, como antes, $x = m \cdot 10^k$.

Tomando logaritmos en base 10 obtenemos

$$\log_{10} x = \log_{10}(m \cdot 10^k) = \log_{10} m + \log_{10} 10^k = \log_{10} m + k.$$

Es decir, $\log_{10} x$ se descompone en una “parte entera” k y una “parte fraccionaria” $\log_{10} m$. En notación de parte fraccionaria,

$$\{\log_{10} x\} = \log_{10} m,$$

donde $\{y\}$ denota la parte fraccionaria de y (es decir, y menos su parte entera). Esto muestra que **la parte fraccionaria del logaritmo de x** contiene exactamente la misma información que la mantisa m en $[1, 10)$.

Ahora fijemos un dígito $d \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Decir que el primer dígito de x es d equivale a decir que la mantisa m cae en el intervalo

$$d \leq m < d + 1,$$

pues $m \in [1, 10)$. Como la función \log_{10} es estrictamente creciente, al aplicar logaritmo a la desigualdad obtenemos

$$\log_{10} d \leq \log_{10} m < \log_{10}(d + 1).$$

Recordando que $\log_{10} m = \{\log_{10} x\}$, podemos reescribirlo como

$$\log_{10} d \leq \{\log_{10} x\} < \log_{10}(d + 1).$$

Por tanto, tenemos la equivalencia

$$\text{“el primer dígito de } x \text{ es } d\text{”} \iff \{\log_{10} x\} \in [\log_{10} d, \log_{10}(d + 1)).$$

En palabras: **el primer dígito de un número positivo x** está completamente determinado por la región del intervalo $[0, 1)$ donde cae la parte fraccionaria de $\log_{10} x$. Cada dígito d corresponde a un subintervalo $[\log_{10} d, \log_{10}(d + 1))$.

Como ejemplo concreto, si tomamos $x = 400$, tenemos

$$\log_{10}(400) = 2.60206 \dots$$

La parte entera es 2 y la parte fraccionaria es aproximadamente 0.60206. Por otro lado,

$$\log_{10}(4) \approx 0.60206, \quad \log_{10}(5) \approx 0.69897,$$

de modo que

$$\{\log_{10}(400)\} \in [\log_{10} 4, \log_{10} 5).$$

Según la equivalencia anterior, esto indica que el primer dígito de 400 es 4, como es de esperar. Casos como $x = 200$ o $x = 3000$ caen exactamente en los extremos de los intervalos, pero adoptando la convención estándar de intervalos semiabiertos $[\log_{10} d, \log_{10}(d + 1))$ se asignan correctamente al dígito $d + 1$, coincidiendo con la lectura usual del primer dígito.

Uniformidad logarítmica e intuición multiplicativa

La construcción anterior es puramente geométrica. Para convertirla en un modelo probabilístico necesitamos hacer una hipótesis sobre cómo se distribuye la parte fraccionaria del logaritmo.

Si X es una variable aleatoria positiva que modela, por ejemplo, un monto observado, definimos

$$Y := \log_{10} X - \lfloor \log_{10} X \rfloor,$$

de modo que, por construcción, $Y \in [0, 1)$. Tal como vimos, el primer dígito de una realización x de X viene determinado por el subintervalo $[\log_{10} d, \log_{10}(d + 1))$ en el que cae el valor de Y (con $d \in \{1, \dots, 9\}$).

La hipótesis central que conecta esta construcción con la Ley de Benford es que, para muchos fenómenos “naturales” y cuando los datos son suficientemente heterogéneos en escala, la variable Y **se comporta aproximadamente como una uniforme en $[0, 1)$** , es decir $Y \approx \text{Unif}(0, 1)$. Decir que $Y \sim \text{Unif}(0, 1)$ significa que, para cualquier subintervalo $[a, b) \subset [0, 1)$,

$$\mathbb{P}(a \leq Y < b) = b - a,$$

es decir, la probabilidad que cae en un subintervalo depende únicamente de la longitud del subintervalo (todos los puntos del segmento tienen la misma “densidad” de ocurrencia).

Bajo esta hipótesis de **uniformidad logarítmica**, la probabilidad de que el primer dígito de X sea d es exactamente la longitud del subintervalo correspondiente:

$$\mathbb{P}(\text{primer dígito} = d) = \mathbb{P}(Y \in [\log_{10} d, \log_{10}(d+1))) = \log_{10}(d+1) - \log_{10}(d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right).$$

Así se obtiene la fórmula clásica de Benford para el primer dígito.

Esta hipótesis no es gratuita. Hill (1995) demuestra de forma rigurosa que, bajo condiciones muy generales, **mezclas** razonables de distribuciones y de escalas conducen a la Ley de Benford: si se combinan datos provenientes de orígenes distintos y que cubren varios órdenes de magnitud, la distribución límite de esta parte fraccionaria tiende a ser uniforme, y, en consecuencia, los primeros dígitos siguen la distribución logarítmica. De forma complementaria, Boyle (1994) muestra que listas de números obtenidas mediante productos, cocientes y potencias enteras de variables aleatorias también convergen a Benford. En ambos casos la intuición es fuertemente **multiplicativa**: en escala logarítmica, productos se convierten en sumas, y sumas largas de variables aleatorias son el terreno natural del Teorema del Límite Central.

La Ley de Benford como distribución discreta

Con la interpretación anterior, podemos presentar la Ley de Benford como una **distribución de probabilidad** sobre el primer dígito. Definimos la variable aleatoria discreta

$$D_1 := \text{“primer dígito significativo de } X\text{”},$$

con soporte $\{1, 2, \dots, 9\}$. La función de masa de probabilidad (pmf) propuesta por Benford es

$$\mathbb{P}(D_1 = d) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{d}\right), \quad d = 1, \dots, 9.$$

Esta pmf cumple $\mathbb{P}(D_1 = d) \geq 0$ para todo d y

$$\sum_{d=1}^9 \mathbb{P}(D_1 = d) = 1,$$

por lo que D_1 es una variable aleatoria discreta válida en el sentido del curso de Probabilidad.

A partir de aquí pueden definirse, con la notación habitual, su **esperanza**

$$\mathbb{E}[D_1] = \sum_{d=1}^9 d \mathbb{P}(D_1 = d)$$

y su **varianza**

$$\text{Var}(D_1) = \mathbb{E}[D_1^2] - (\mathbb{E}[D_1])^2, \quad \mathbb{E}[D_1^2] = \sum_{d=1}^9 d^2 \mathbb{P}(D_1 = d).$$

De forma análoga se pueden definir variables para el segundo dígito D_2 (soporte $\{0, \dots, 9\}$) y para los dos primeros dígitos (D_1, D_2) (soporte $\{10, \dots, 99\}$), cuyas probabilidades se calculan de formas similares. En la práctica del artículo de Gomes da Silva y Carreira (2013), estas distribuciones teóricas sirven como referencia: se comparan las frecuencias observadas en los datos (conteos de dígitos) con las probabilidades que predice Benford para evaluar conformidad en distintos tests de dígitos.

Cuándo aplicar Benford (ejemplos y limitaciones)

No todos los conjuntos de datos deberían analizarse con Benford. La ley funciona bien cuando los datos:

- se extienden a través de varios órdenes de magnitud (por ejemplo: poblaciones, montos que van desde unidades hasta millones),
- no están forzados por topes, mínimos o reglas de diseño,
- y provienen de procesos que combinan muchas fuentes o factores multiplicativos (precios \times cantidades, intereses compuestos, etc.).

En este tipo de contextos se ha observado que la distribución empírica del primer dígito se parece bastante a la distribución logarítmica. Ejemplos típicos donde Benford suele ajustarse son montos de ventas, cifras de ingresos, saldos contables acumulados, tamaños de poblaciones y volúmenes de transacciones bursátiles.

En cambio, la ley **no es adecuada** para datos que son códigos o números “asignados”: números de factura, números de cuenta, cédulas, códigos postales, precios fijados “a propósito”

(9,99; 19,99; 10 000 exactos), o conjuntos donde casi todos los valores son específicos de una empresa (por ejemplo, muchos códigos internos). En estos casos se rompe la hipótesis de mezcla/heterogeneidad y la uniformidad logarítmica deja de tener sentido.

Esta distinción es clave para el uso del modelo del paper: antes de aplicar la Ley de Benford y sus pruebas de conformidad, el auditor debe tener una buena razón para pensar que el dataset **a priori** debería seguir Benford. Sólo así tiene sentido interpretar desviaciones grandes como señales de posible manipulación o anomalía y alimentar el modelo de selección de muestras con esos resultados.

Ley de los Grandes Números y frecuencias relativas

Para pasar de la Ley de Benford (como modelo teórico) a algo que podamos **contrastar con datos**, necesitamos conectar las probabilidades teóricas con las **frecuencias observadas**. Aquí entra directamente la **Ley de los Grandes Números (LGN)**, aplicada no a promedios numéricos cualquiera, sino a **indicadores de eventos**.

Sea X la variable aleatoria que representa el dígito que estamos analizando (por ejemplo, el primer dígito significativo), con valores posibles en $\{1, 2, \dots, 9\}$ y probabilidades teóricas

$$\mathbb{P}(X = j) = p_j, \quad j = 1, \dots, 9,$$

donde, en el caso de la Ley de Benford para el primer dígito, $p_j = \log_{10}(1 + \frac{1}{j})$.

Tomemos ahora una muestra de tamaño n de esta variable:

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

que modela, por ejemplo, los primeros dígitos de n registros contables. Para cada dígito fijo j , definimos una **variable indicadora**

$$I_k^{(j)} := \begin{cases} 1, & \text{si } X_k = j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad k = 1, \dots, n.$$

Esta $I_k^{(j)}$ es una variable aleatoria discreta con

$$\mathbb{P}(I_k^{(j)} = 1) = p_j, \quad \mathbb{P}(I_k^{(j)} = 0) = 1 - p_j,$$

y, por tanto,

$$\mathbb{E}[I_k^{(j)}] = p_j.$$

Si contamos cuántas veces aparece el dígito j en la muestra, definimos

$$O_j := \sum_{k=1}^n I_k^{(j)},$$

de modo que O_j es la **frecuencia absoluta** del dígito j y la **frecuencia relativa** es

$$\frac{O_j}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k^{(j)}.$$

Aquí es donde usamos la LGN: la media muestral de variables i.i.d. converge a su esperanza. Aplicada a las indicadoras, nos da que, cuando n crece,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n I_k^{(j)} \longrightarrow \mathbb{E}[I_1^{(j)}] = p_j,$$

es decir,

$$\frac{O_j}{n} \longrightarrow p_j \quad (\text{casi seguramente o en probabilidad, según la versión}).$$

En palabras: **si el modelo teórico es correcto**, y tomamos suficientes observaciones, la fracción de veces que aparece cada dígito j debería aproximarse a la probabilidad teórica p_j . Este es el puente entre:

- lo que dice la teoría (distribución de X), y
- lo que se observa en los datos (frecuencias relativas O_j/n).

Cuando el modelo es Benford, esto significa que, para datos “limpios” y con tamaño de muestra grande, la distribución empírica de los primeros dígitos debería parecerse bastante a la

distribución logarítmica de Benford.

Estadísticos: qué son y por qué aparecen aquí

En el curso de Probabilidad se trabaja sobre todo con variables aleatorias y sus distribuciones. En el contexto de contrastar modelo vs. datos aparece un concepto muy cercano, pero formulado “desde la muestra”: el de **estadístico**.

Dada una muestra aleatoria X_1, \dots, X_n (por ejemplo, los primeros dígitos de n transacciones), se llama **estadístico** a cualquier función

$$T = T(X_1, \dots, X_n).$$

Como cada X_k es una variable aleatoria, el valor de T también es aleatorio, y por lo tanto tiene una distribución de probabilidad asociada. Algunos ejemplos muy conocidos de estadísticos son:

- la **media muestral** $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$,
- la **varianza muestral**,
- el **conteo** de cuántas veces ocurre cierto evento (por ejemplo, cuántas veces el primer dígito es 1).

En el estudio de la Ley de Benford, las cantidades O_j y las frecuencias relativas O_j/n son estadísticos contruidos a partir de la muestra. A partir de ellos se definen otros estadísticos que resumen, en un solo número, qué tan lejos están los datos observados de lo que predice Benford. Los tres más importantes que usa el artículo son:

- el **estadístico chi-cuadrado** X^2 , que suma desajustes al cuadrado,
- el **MAD** (Mean Absolute Deviation), que promedia desajustes absolutos,
- los Z -scores individuales para dígitos específicos.

La idea es que Benford da probabilidades teóricas p_j , la muestra produce frecuencias relativas O_j/n , y los estadísticos miden “distancia” entre ambos. Aunque en este curso todavía no se ha visto formalmente “pruebas de hipótesis”, sí tenemos todas las herramientas de Probabilidad para entender de dónde salen las fórmulas de estos estadísticos y cómo se conectan con la LGN y el Teorema del Límite Central.

Teorema del Límite Central y el origen del estadístico χ^2

El siguiente paso es entender **cómo medir cuantitativamente** qué tan lejos están las frecuencias observadas de las probabilidades teóricas. Para eso no basta con la LGN; necesitamos una idea de cómo se comportan las **fluctuaciones** alrededor de los valores esperados. Ahí entra el **Teorema del Límite Central (TLC)**.

Retomemos la notación anterior. Para un dígito fijo j , sabemos que

$$O_j = \sum_{k=1}^n I_k^{(j)}, \quad \mathbb{E}[O_j] = n p_j.$$

La diferencia

$$O_j - n p_j$$

mide cuánto se desvía la frecuencia observada del valor esperado teórico. Por construcción, esta diferencia es una **suma de muchas pequeñas desviaciones** (cada $I_k^{(j)} - p_j$ aporta un “error”); bajo hipótesis estándar (independencia y misma distribución), el TLC se puede aplicar a la suma

$$O_j = I_1^{(j)} + \dots + I_n^{(j)}.$$

La versión clásica del TLC nos dice que, para n grande, la variable aleatoria

$$\frac{O_j - n p_j}{\sqrt{n p_j (1 - p_j)}}$$

se comporta aproximadamente como una **normal estándar** $N(0, 1)$:

$$\frac{O_j - n p_j}{\sqrt{n p_j (1 - p_j)}} \approx Z_j \sim N(0, 1).$$

Es decir, cada desviación estandarizada (dígito por dígito) es aproximadamente normal. Si miráramos sólo un dígito j , podríamos trabajar con este Z_j y un test basado en la normal; de hecho, esto es la idea detrás de los Z -scores que aparecen en el artículo para dígitos particulares (como 0, 5, 9 o pares como 00 y 99). En este trabajo, sin embargo, esos Z se usan sobre todo como apoyo: el foco principal está en dos estadísticos colectivos más simples de interpretar: el χ^2 y el MAD.

Para combinar la información de **todos** los dígitos a la vez, se construye el conocido estadístico

$$X^2 = \sum_j \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}, \quad E_j := n p_j.$$

Cada término puede reescribirse como

$$\frac{(O_j - E_j)^2}{E_j} = \frac{(O_j - n p_j)^2}{n p_j} = \left(\frac{O_j - n p_j}{\sqrt{n p_j (1 - p_j)}} \right)^2 \cdot (1 - p_j).$$

El factor $(1 - p_j)$ está entre 0 y 1, por lo que no cambia la idea esencial: **cada término** es aproximadamente el cuadrado de una normal estándar (es decir, algo parecido a Z_j^2 con $Z_j \sim N(0, 1)$). Por la definición que se ve en Probabilidad, la **distribución chi-cuadrado** es precisamente la distribución de la suma de cuadrados de normales estándar independientes:

$$\chi_k^2 = Z_1^2 + \dots + Z_k^2, \quad Z_i \sim N(0, 1).$$

Así, de manera heurística pero bastante sólida, podemos ver que el estadístico X^2 se comporta aproximadamente como una variable con distribución chi-cuadrado con un cierto número de grados de libertad.

MAD y Z-scores: otras medidas de desviación

Además del χ^2 , el artículo utiliza otros dos tipos de estadísticos para medir discrepancias:

- El **MAD (Mean Absolute Deviation)** se define, para un test de dígitos dado, como

$$\text{MAD} = \frac{1}{n(T)} \sum_i |\hat{p}(i, T) - e(i, T)|,$$

donde $\hat{p}(i, T)$ es la frecuencia relativa observada de la categoría i en el test T , $e(i, T)$ es la probabilidad teórica de Benford y $n(T)$ es el número de categorías posibles (9 para el primer dígito, 100 para dos dígitos, etc.). A diferencia del χ^2 , el MAD no tiene detrás una distribución tan “clásica” en Probabilidad, pero sigue la misma lógica: **si las frecuencias observadas están cerca de las teóricas**, el MAD será pequeño; si hay desajustes importantes,

el MAD crece.

- Los Z -scores individuales comparan la frecuencia de un dígito específico (por ejemplo, el dígito 0 en los centavos, o el par 99 en los dos últimos dígitos) contra lo que predeciría Benford, usando la aproximación normal del TLC:

$$Z(i, T) = \frac{\hat{p}(i, T) - e(i, T)}{\sqrt{e(i, T) [1 - e(i, T)] / (N - k)}}.$$

En este proyecto no profundizamos en pruebas formales basadas en Z , pero sí es útil entender que se trata simplemente de **desviaciones estandarizadas**: valores Z muy grandes en valor absoluto indican que ese dígito concreto aparece mucho más (o mucho menos) de lo que diría el modelo.

En resumen, desde el punto de vista del curso de Probabilidad:

- cada uno de estos objetos (X^2 , MAD, Z) es un **estadístico**, es decir, una función de la muestra;
- su definición usa de manera directa conceptos como variables indicadoras, esperanza, varianza y el Teorema del Límite Central;
- y todos ellos sirven, en el artículo, para cuantificar **qué tan lejos** están los datos observados de la distribución de Benford. En la siguiente parte del marco teórico se explicará cómo estos estadísticos se convierten en restricciones específicas dentro del modelo de programación matemática que busca el “smallest nonconforming set of records”.

Metodología

Inicialmente, *Selecting Audit Samples Using Benford’s Law* presenta dos aplicaciones principales para las auditorías utilizando los tres modelos estadísticos ya definidos. Para un análisis más compacto, se toma en cuenta la primer aplicación, denominada como *Smallest Nonconforming Set of Records*, la cual se modela al final de este apartado, pero de manera intuitiva, corresponde **al conjunto más pequeño de registros no conformes** obtenidos de un dataset.

Estadísticos de prueba y pruebas de conformidad en el modelo

Hasta aquí hemos visto la distribución de Benford como modelo teórico y cómo la LGN y el TLC justifican que las frecuencias relativas en la muestra se acerquen a las probabilidades p_j . Falta explicar cómo esas ideas se convierten, en el artículo de Gomes da Silva y Carreira (2013), en **pruebas de conformidad** concretas y, luego, en restricciones dentro del modelo de programación matemática para el “smallest nonconforming set of records”.

La lógica general es:

1. Benford entrega probabilidades teóricas $e(i, T)$ para cada dígito (o par de dígitos) i , en cada tipo de test T .
2. A partir de los datos (después de eliminar ciertos registros sospechosos) se calculan frecuencias relativas $\hat{p}(i, T)$.
3. Se construyen **estadísticos de prueba** (chi-cuadrado, MAD, Z -scores) que miden distancia entre $\hat{p}(i, T)$ y $e(i, T)$.
4. El modelo exige que esos estadísticos estén por debajo de ciertos valores críticos. Si no, elimina más registros (pone más $y_t = 1$) hasta que el subconjunto remanente “conforme” con Benford.

Tests de dígitos y probabilidades de referencia

En el paper se consideran varios **tests de dígitos**, que se indexan por T :

- $T = 1$: primer dígito,
- $T = 2$: segundo dígito,
- $T = 3$: dos primeros dígitos,
- $T = 4$: último dígito,
- $T = 5$: dos últimos dígitos

Para cada test T :

- el conjunto de categorías posibles (dígitos o pares de dígitos) se indexa por i ;
- $n(T)$ es el número de categorías de ese test (por ejemplo, $n(1) = 9$ para primer dígito, $n(3) = 90$ para dos primeros dígitos);

- $e(i, T)$ es la probabilidad **teórica** asignada a la categoría i en el test T :
 - para primeros dígitos, $e(i, T)$ viene de la Ley de Benford,
 - para últimos dígitos, $e(i, T)$ suele ser aproximadamente $1/10$ o $1/100$ (distribución casi uniforme).

Estas $e(i, T)$ juegan el papel de los p_j en la parte teórica: son las probabilidades que se esperan si los datos son “limpios”.

Variables $h_t(i, T)$ y y_t : cómo se escribe el conteo en el modelo

Para poder incorporar todo esto en un modelo de programación matemática, el artículo introduce dos tipos de variables:

- Para cada registro t y cada categoría i en el test T , se define

$$h_t(i, T) = \begin{cases} 1, & \text{si el registro } t \text{ presenta el dígito (o par) } i \text{ en el test } T, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por ejemplo, si T es el primer dígito y el valor del registro t empieza con 4, entonces $h_t(4, T) = 1$ y $h_t(i, T) = 0$ si $i \neq 4$.

- Para decidir qué registros se retiran en la muestra a auditar, se define, para cada $t = 1, \dots, N$,

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{si el registro } t \text{ se elimina (entra a la muestra a auditar),} \\ 0, & \text{si el registro } t \text{ se mantiene en el dataset “limpio”.} \end{cases}$$

Con esta notación:

- el **tamaño de la muestra a auditar** es

$$k = \sum_{t=1}^N y_t,$$

- el número de registros que **se mantienen** (dataset “limpio”) es $N - k$,

- el número de registros que se mantienen y que tienen el dígito i en el test T es

$$\sum_{t=1}^N h_t(i, T) (1 - y_t) = \sum_{t=1}^N h_t(i, T) - \sum_{t=1}^N h_t(i, T) y_t,$$

- por tanto, la **frecuencia relativa observada** de la categoría i en el test T , sobre el dataset que queda, es

$$\hat{p}(i, T) = \frac{\sum_{t=1}^N h_t(i, T) - \sum_{t=1}^N h_t(i, T) y_t}{N - k}.$$

Esta $\hat{p}(i, T)$ es exactamente el análogo de O_j/n que usamos en la parte teórica, sólo que adaptado para permitir que algunos registros hayan sido eliminados ($y_t = 1$).

Con esto ya se pueden escribir los estadísticos χ^2 , MAD y Z directamente en términos de las variables del modelo.

Prueba 1: restricción tipo chi-cuadrado (ecuación (1))

Recordemos el estadístico clásico de Pearson para bondad de ajuste:

$$X^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \quad E_i = n p_i.$$

En el contexto del modelo, después de eliminar k registros el tamaño de la muestra es $N - k$, y el valor esperado para la categoría i si los datos siguieran $e(i, T)$ sería

$$E_i = (N - k) e(i, T).$$

El conteo observado es $(N - k) \hat{p}(i, T)$, de modo que

$$\frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{((N - k) \hat{p}(i, T) - (N - k) e(i, T))^2}{(N - k) e(i, T)} = (N - k) \frac{(\hat{p}(i, T) - e(i, T))^2}{e(i, T)}.$$

Sumando sobre todas las categorías i del test T obtenemos

$$X^2(T) = (N - k) \sum_i \frac{(\hat{p}(i, T) - e(i, T))^2}{e(i, T)}.$$

El artículo traduce esto directamente a la ecuación (1), escribiendo $\hat{p}(i, T)$ en función de las $h_t(i, T)$ y de las y_t :

$$(N - k) \sum_i \left[\frac{\sum_{t=1}^N h_t(i, T) - \sum_{t=1}^N h_t(i, T) y_t}{N - k} - e(i, T) \right]^2 \frac{1}{e(i, T)} \leq S_1^*(T), \quad T \in X_{S_1}.$$

Interpretación probabilística:

- el término entre corchetes es “frecuencia relativa observada — probabilidad de Benford” para la categoría i en el test T ;
- cada término aporta un “pedazo” de la suma chi-cuadrado;
- el factor $(N - k)$ recoge el efecto del tamaño efectivo de la muestra.

Bajo la hipótesis de que los datos siguen Benford, el TLC sugiere que este estadístico se distribuye aproximadamente como una χ^2 con ciertos grados de libertad. Por eso, el auditor puede fijar un **valor crítico** $S_1^*(T)$: si el lado izquierdo es demasiado grande, la desviación global de Benford es sospechosa. En el modelo, se exige que

$$X^2(T) \leq S_1^*(T)$$

para todos los tests T que se decidan usar. Si esta desigualdad no se cumple, el problema de optimización tendrá que incrementar algunos y_t (eliminar registros adicionales) hasta que la muestra remanente tenga un $X^2(T)$ aceptable.

Prueba 2: restricción tipo MAD (ecuación (2))

El segundo estadístico colectivo que usa el artículo es el **MAD (Mean Absolute Deviation)**. Para un test T dado, se define

$$\text{MAD}(T) = \frac{1}{n(T)} \sum_i |\hat{p}(i, T) - e(i, T)|,$$

donde $n(T)$ es el número de categorías para ese test.

En palabras, el MAD es simplemente el promedio de las desviaciones absolutas entre las frecuencias relativas observadas y las probabilidades teóricas de Benford. No está ligado a una distribución tan clásica como la χ^2 , pero es fácil de interpretar:

- si todas las $\hat{p}(i, T)$ son muy cercanas a $e(i, T)$, el MAD será muy pequeño;
- si hay dígitos con desajustes grandes, el MAD crecerá.

El paper lo incorpora mediante la ecuación (2):

$$\frac{1}{n(T)} \sum_i \left| \frac{\sum_{t=1}^N h_t(i, T) - \sum_{t=1}^N h_t(i, T) y_t}{N - k} - e(i, T) \right| \leq S_2^*(T), \quad T \in X_{S_2}.$$

Aquí $S_2^*(T)$ es un umbral elegido con base en criterios usados en auditoría digital (por ejemplo, valores recomendados por Nigrini y otros autores). De nuevo, el modelo exige que, para los tests T que se consideren relevantes, el MAD del dataset “limpio” esté por debajo del umbral. Si no, será necesario eliminar más registros.

En conjunto, las restricciones de tipo chi-cuadrado y MAD garantizan que, mirando el patrón de dígitos de forma global, el dataset que queda se parece razonablemente a lo que predice Benford.

Prueba 3: restricciones tipo Z -score (ecuación (3))

Además de las medidas globales, el artículo introduce restricciones tipo Z -score para **dígitos específicos**. La idea es sencilla: aunque el conjunto completo pueda parecer razonable, tal vez

haya ciertos dígitos o pares de dígitos muy particulares (por ejemplo, 0, 5, 9, 00, 99) cuya frecuencia individual se vea claramente anómala.

Para un dígito (o par) i y test T , la frecuencia relativa en el dataset que queda es

$$\hat{p}(i, T) = \frac{1}{N - k} \sum_{t=1}^N h_t(i, T) (1 - y_t),$$

y la probabilidad teórica es $e(i, T)$. Por modelo binomial, la desviación estándar teórica de $\hat{p}(i, T)$ es aproximadamente

$$\sqrt{\frac{e(i, T) [1 - e(i, T)]}{N - k}}.$$

El estadístico

$$Z(i, T) = \frac{\hat{p}(i, T) - e(i, T)}{\sqrt{e(i, T) [1 - e(i, T)] / (N - k)}}$$

es entonces una desviación estandarizada: para $N - k$ grande, el TLC sugiere que $Z(i, T)$ es aproximadamente normal estándar si el modelo es correcto.

El artículo no desarrolla una prueba formal completa basada en estos Z , pero sí usa la idea de que valores de $|Z(i, T)|$ “demasiado grandes” señalan dígitos individuales sospechosos. Esto se traduce a la ecuación (3):

$$\left| \frac{\frac{1}{N - k} \sum_{t=1}^N h_t(i, T) (1 - y_t) - e(i, T)}{\sqrt{e(i, T) [1 - e(i, T)] / (N - k)}} \right| \leq Z^*(i, T), \quad (i, T) \in X_Z,$$

donde $Z^*(i, T)$ es un máximo tolerable fijado por el auditor.

En este proyecto no profundizamos en todas las sutilezas estadísticas de estos Z -scores; basta con entender que son estadísticos que miden, en unidades de desviación estándar, cuánto se aleja la frecuencia de un dígito concreto de su valor teórico, y que el modelo exige que estos desajustes individuales no sean excesivos.

Conexión con el “Smallest Nonconforming Set of Records”

Resumiendo, la sección “The Smallest Nonconforming Set of Records” del paper se apoya completamente en los conceptos probabilísticos vistos en el curso:

1. Se modela el comportamiento de los dígitos mediante la **distribución discreta de Benford** (y, para últimos dígitos, una distribución casi uniforme).
2. La **LGN** justifica que las frecuencias relativas observadas deberían aproximarse a las probabilidades teóricas cuando los datos son limpios.
3. El **TLC** permite aproximar las fluctuaciones de los conteos por distribuciones normales y, a partir de ahí, justifica el uso del estadístico χ^2 y de los Z -scores.
4. Se definen **estadísticos de prueba**:
 - $X^2(T)$ (chi-cuadrado colectivo),
 - $MAD(T)$ (desviación media absoluta),
 - $Z(i, T)$ (desviación estandarizada por dígito), todos ellos funciones de la muestra, es decir, estadísticos en el sentido básico de Probabilidad.
5. Cada uno de estos estadísticos se compara con un **valor crítico** fijado por el auditor ($S_1^*(T)$, $S_2^*(T)$, $Z^*(i, T)$). Estas comparaciones se convierten en restricciones en el modelo de programación matemática:
 - si el dataset que queda tras eliminar algunos registros cumple todas las restricciones, se considera **conforme** con Benford;
 - si no, el modelo debe eliminar más registros (poner más $y_t = 1$) hasta que lo sea.

El problema que resuelven Gomes da Silva y Carreira es, precisamente,

$$\min \sum_{t=1}^N y_t$$

sujeto a todas estas restricciones de conformidad. Es decir, buscan el **conjunto más pequeño de registros no conformes** que, una vez retirado, deja un dataset cuyo patrón de dígitos pasa las pruebas de conformidad con la Ley de Benford. Esta formulación conecta directamente los conceptos teóricos de variables aleatorias discretas, LGN, TLC y distribución chi-cuadrado con una herramienta concreta para auditoría en grandes bases de datos financieros.

Parámetros Definidos y Protocolo Iterativo

El modelo requiere que el auditor defina ciertos parámetros antes de ejecutar el procedimiento, en particular:

- los **tests de conformidad** a utilizar (primer dígito, segundo dígito, dos primeros dígitos, últimos dígitos, etc.);
- los **estadísticos** asociados a cada test (χ^2 , MAD o Z-score);
- los **valores críticos** correspondientes a los estadísticos seleccionados.

En la práctica, estas decisiones pueden generar incertidumbre para el auditor. Por ello, Gomes da Silva y Carreira (2013) proponen un **protocolo iterativo** que permite ajustar los valores críticos después de observar el tamaño de la muestra resultante.

Según este procedimiento, el auditor primero fija los tests y estadísticos a emplear, así como los valores críticos iniciales. A continuación, se resuelve el modelo y se obtiene la muestra de auditoría, formada por aquellos registros para los cuales:

$$y_t = 1.$$

Una vez obtenida la solución, el auditor evalúa si el tamaño de la muestra, denotado por z , es adecuado. En caso de no serlo, puede ajustarlo de la siguiente manera:

- Si desea **una muestra más grande**, puede **disminuir los valores críticos**, haciendo más estrictas las pruebas de conformidad.
- Si desea **una muestra más pequeña**, puede **incrementar los valores críticos**, haciendo las pruebas más permisivas.

El proceso continúa hasta que el auditor obtenga un tamaño z satisfactorio. Los registros seleccionados finalizan siendo aquellos con $y_t = 1$ en la solución correspondiente a los valores críticos aceptados.

Este protocolo asiste al auditor en la gestión del riesgo. Valores críticos elevados implican un mayor riesgo de pasar por alto registros fraudulentos (dado que la muestra será más pequeña), mientras que valores críticos bajos generan muestras más amplias, reduciendo la probabilidad de excluir registros relevantes para la auditoría.

Análisis de resultados y efectividad del modelo

Para analizar los resultados del modelo los autores generaron aleatoriamente una muestra de 30 datasets, con 5000 registros de cuatro (4) dígitos cada uno, generados del resultado de 1000×10^r (con r entre 0 y 1), y le aplicaron cuatro tipos típicos de manipulación de datos:

- Redondeo (se redondea el número al múltiplo de 100 más cercano)
- Barrera psicológica (reemplaza los últimos dos dígitos por 99 y le resta una unidad al segundo dígito)
- Invención de números (reemplaza el número por otro generado de la distribución uniforme)
- Uso repetido del mismo número (reemplaza los últimos registros por un único valor de los registros)

Estas simulaciones de datos contaminados se hicieron en cuatro grupos de los mismos 30 datasets cada uno, dejando en total 120 datasets, en los que el primer grupo presentaba un 2% de los datos contaminados; el segundo grupo presentaba un 10% de los datos contaminados; el tercer grupo presentaba un 20% de los datos contaminados; y, el último grupo presentaba un 40% de los datos contaminados. Finalmente el desempeño del modelo se analiza observando las siguientes dos métricas:

1. Porcentaje de registros contaminados dentro de la muestra auditada (cuál es el porcentaje de registros realmente contaminado de la muestra que señaló el modelo)
2. Porcentaje de registros contaminados detectados por el modelo (cuál es el porcentaje de contaminados que señaló el modelo respecto a los contaminados totales)

Efectividad según nivel de contaminación

Contaminación del 2%

- Tamaño promedio de la muestra auditada: 28 registros
- Registros contaminados dentro de la muestra auditada: 42%

- Porcentaje total de contaminaciones detectadas: 11%

Interpretación: La tasa de detección total es baja, esto se puede dar debido a que las desviaciones producidas son mínimas y muchas manipulaciones pasan inadvertidas. Esto evidencia que el poder de detección del Modelo 1 en contextos de fraude leve es limitado.

Contaminación del 10%

- Tamaño promedio de la muestra auditada: 327 registros
- Registros contaminados dentro de la muestra auditada: 77%
- Porcentaje total de contaminaciones detectadas: 50%

Interpretación: Ahora se observa una mayor contaminación, los patrones de desviación son más evidentes y el modelo puede aislar con mayor precisión los grupos manipulados. Aquí el Modelo 1 logra capturar la mitad de todas las manipulaciones y, además, 3 de cada 4 registros que marca son realmente fraudulentos.

Contaminación del 20%

- Tamaño promedio de la muestra auditada: 705 registros
- Registros contaminados dentro de la muestra auditada: 90%
- Porcentaje total de contaminaciones detectadas: 64%

Interpretación: La detección de datos manipulados aumenta cada vez más, casi todos los registros señalados por el modelo están realmente manipulados. Esto sugiere que el Modelo 1 es altamente efectivo en escenarios donde el fraude tiene un peso considerable dentro del dataset.

Contaminación del 40%

- Tamaño promedio de la muestra auditada: 1479 registros
- Registros contaminados dentro de la muestra auditada: 95%

- Porcentaje total de contaminaciones detectadas: 70%

Interpretación: El modelo prácticamente identifica solo registros alterados (95%). A nivel de contaminación total reconoce el 70% de las manipulaciones totales. Esta es la condición donde el modelo funciona mejor, confirmando que su fortaleza crece con la magnitud de la manipulación.

Variabilidad de resultados

En todos los niveles de contaminación la variación entre datasets disminuye conforme aumenta el nivel de manipulación. Esto indica que el Modelo es más estable y predecible en escenarios con más señales de fraude, pero funciona peor cuando la contaminación es baja.

Comparación con métodos alternativos

Los autores realizan una comparación con un método simple basado en Z-scores de dígitos, observando a nivel de la muestra auditada:

Contaminación 2%:

- Modelo 1: 28
- Método alternativo : 214

Contaminación 10%:

- Modelo 1: 327
- Método alternativo : 633

Contaminación 20%:

- Modelo 1: 705
- Método alternativo : 1078

Contaminación 40%:

- Modelo 1: 1479
- Método alternativo : 1851

Gracias a esto y al nivel de detección de los datos contaminados se observa que el modelo del paper genera muestras más pequeñas y es más eficaz a la hora de auditar valores manipulados.

Conclusión general del análisis

Se observa que el modelo tiene las siguientes ventajas:

- Mejora drásticamente con la magnitud del fraude.
- Optimiza el tamaño del audit sample, siendo más eficiente que métodos basados solo en Z-statistics.
- Detecta adecuadamente manipulaciones que afectan patrones de dígitos.

En conjunto, la evidencia muestra que el modelo es una buena herramienta para detectar manipulación en datos contables cuando las distorsiones son suficientemente significativas para alterar las distribuciones de Benford.

Conclusiones:

Referencias:

Boyle, J. 1994. An application of Fourier series to the most significant digit problem. *American Mathematical Monthly* (November): 879–886. Gomes da Silva, C., & Carreira, P. M. R. (2013). Selecting Audit Samples Using Benford's Law. *Auditing: A Journal of Practice & Theory*, 32(2), 53–65. Hill, T. 1995. A statistical derivation of the significant-digit law. *Statistical Science* 10 (4): 354–363. Newcomb, S. 1881. Note of the frequency of use of the different digits in natural numbers. *American Journal of Mathematics* 4: 39–40.