



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TALLER DE MODELACIÓN II

Un problema inverso:

Caída Libre

P R E S E N T A :

BRAVO PEIMBERT SEBASTIAN
CORTÉS CASASOLA DANIELA DE JESÚS
GALLEGOS SORIA ABRIL
VALENCIA RODRÍGUEZ JACQUELINE

PROFESOR

JUAN MARTÍN BARRIOS VARGAS



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2022

Índice general

1. Resumen	1
2. Introducción	2
3. Formulación del problema y Modelación	3
4. Solución o Resultados	13
5. Conclusiones	16
Bibliografía	16

1 Resumen

Para este proyecto se seleccionó un problema inverso a estudiar; dado un conjunto de datos obtenidos de manera experimental sobre un cuerpo en caída libre, se quiere estimar parámetros desconocidos como la gravedad y velocidad que fueron utilizados para dicho experimento, esto, con uso de inferencia bayesiana y de información apriori. Los datos obtenidos son la posición en tiempo t , con la desviación estándar.

En primer lugar, se plantea el modelo del fenómeno a estudiar, en este caso, caída libre, también se realiza un código en Python para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido.

Posteriormente se identifican los parámetros a estimar y con esto el operador solución. Luego, una vez identificados los parámetros y el operador solución se hace el modelado del problema directo.

Ya definido el modelo del problema directo, se hace el modelo del problema inverso, para esto, se dan distintos valores probables de los parámetros buscados, haciendo uso del modelo de información a-priori, y se calcula la verosimilitud con los datos observados experimentalmente.

Por último, se calcula la distribución posterior haciendo uso del Teorema de Bayes, y se exploran las curvas de nivel para encontrar los parámetros buscados.

2 Introducción

Sabemos que los fenómenos naturales son difíciles de investigar pues su comportamiento suele ser inesperado y gracias a esto las variables pueden estar en constante cambio. Modelaremos fenómenos naturales analizando de manera numérica su comportamiento representado con estimación de parámetros, se le conoce así, a la consideración de resultados de un experimento para poder llevar a cabo un modelo matemático.

Ahora veamos que la caída libre representa un caso especial del movimiento de aceleración constante, esto denomina a toda caída vertical sin sustentación de ningún tipo, cuyo trayecto se encuentra sujeto, apenas, a la fuerza de la gravedad.

La estimación de parámetros usa un modelo matemático bajo consideración y utiliza los resultados de un experimento para deducir los parámetros que se vieron en el mismo.

La idea de este trabajo es estimar los parámetros del experimento de caída libre usando solamente los datos que se obtuvieron al final de su realización y las ecuaciones de caída libre, así como la información apriori del problema, es decir, lo que nosotros ya conocemos. Es decir, a lo largo de este trabajo vamos resolver un problema inverso y a mostrar el proceso que llevó a la deducción de estos parámetros.

Un *problema inverso* consiste en utilizar los resultados de las observaciones reales para inferir los valores de los parámetros que caracterizan al sistema objeto de investigación. Los problemas inversos pueden ser difíciles de resolver por al menos dos razones diferentes: Diferentes valores de los parámetros del modelo pueden ser consistentes con los datos, o descubrir los valores de los parámetros del modelo puede requerir la exploración de un enorme espacio de parámetros.

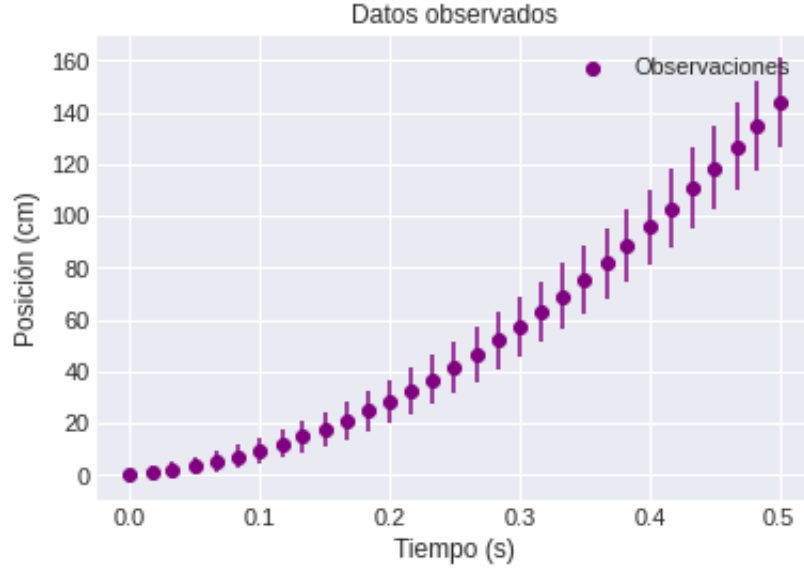
3 Formulación del problema y Modelación

PROBLEMA: Se desean estimar los parámetros con los cuales un experimento se llevó a cabo. El experimento consistió en lanzar un objeto y observar la posición a un tiempo dado. Se desea hacer un modelo del fenómeno y repicar los datos observados, para esto debemos estimar el valor de los parámetros a partir de las observaciones obtenidas en el experimento.

Los datos observados de manera experimental son los siguientes:

Tiempo (s)	y (cm)	sigmax
0	0	0.9
0.017	0.9	1.1
0.033	2	1.5
0.05	3.5	1.7
0.067	5.2	2
0.083	7.2	2.2
0.1	9.4	2.6
0.117	12	2.7
0.133	14.7	3
0.15	17.7	3.3
0.167	21	3.6
0.183	24.6	3.8
0.2	28.4	4.1
0.217	32.5	4.4
0.233	36.9	4.6
0.25	41.5	4.9
0.267	46.4	5.4
0.283	51.8	5.4
0.3	57.2	5.7
0.317	62.9	5.9
0.333	68.8	6.4
0.35	75.2	6.5
0.367	81.7	6.8
0.383	88.5	7.1
0.4	95.6	7.3
0.417	102.9	7.7
0.433	110.6	7.9
0.45	118.5	8.1
0.467	126.6	8.5
0.483	135.1	8.7
0.5	143.8	8.8

Graficando las posiciones de los datos observados, con su error, obtenemos lo siguiente:



Para elaborar un modelo con el que podamos obtener los parámetros que nos permitan replicar los datos observados seguiremos los siguientes pasos.

1. Modelo del Fenómeno

La caída libre de un cuerpo se puede modelar por medio de la segunda ley de Newton

$$F_{total} = m \frac{dv}{dt}$$

donde F_{total} es la suma de las fuerzas actuando sobre un cuerpo.

Hay dos fuerzas actuando en sentidos opuestos sobre el cuerpo: la fuerza de gravedad representado por mg y la fuerza de fricción causada por el aire, haciendo que el cuerpo pierda aceleración.

La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad v . La constante de proporcionalidad k que es el coeficiente de resistencia del aire se dé la viscosidad y la densidad del aire, lo definimos como:

$$C = \frac{k}{mm^{-1}}$$

Usando definiciones básicas del cálculo derivamos las ecuaciones que se usarán para estimar los parámetros a partir de los datos obtenidos en el experimento.

Nos fijamos en las fuerzas actuando sobre el cuerpo y usando la segunda ley de Newton y la ecuación de coeficiente del aire tenemos:

$$F_{total} = mg - Cmv^2$$

$$\frac{dv}{dt} = g - Cv^2$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Las condiciones iniciales son definidas asumiendo el cuerpo se dejó caer en el tiempo cero con cero velocidad inicial:

$$x_0 = 0$$

$$v_0 = 0$$

2. Identificar los parámetros del modelo y operador solución

A partir de nuestro modelo conocido de caída libre nosotros podemos identificar los parámetros del problema.

$$(1) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}v^2 \\ \frac{dx}{dt} = v \end{array} \right. ; \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ x(0) = 0 \end{array} \Rightarrow \Theta = (g, \frac{\alpha}{m} = c, x_0, v_0)$$

Para replicar el fenómeno se porpone un valor de $c = 0.0001$ y una posición inicial $x_0 = 0$. Entonces dados los parámetros θ podemos encontrar una función $(x, v)(t) : R \mapsto R^2$ que llamaremos la solución analítica del problema.

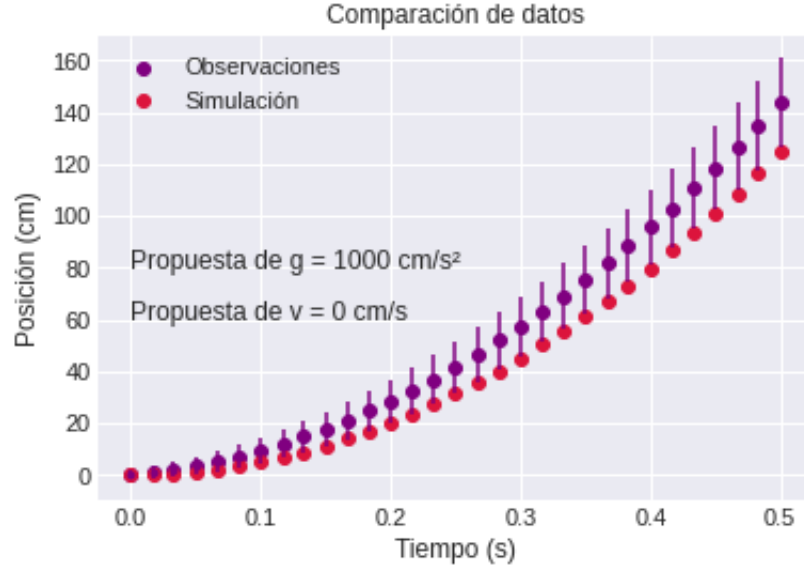
Además, con los parámetros θ podemos definir una serie de tiempos discretos $T = \{0, t_1, \dots, t_n\}$ y una solución numérica del problema:

$$P = \{(x_0, v_0), (x_1, v_1), \dots, (x_n, v_n)\}$$

En cualquier caso tenemos un operador solución de (1).

$$S : \Theta \mapsto P \Rightarrow P = S(\Theta)$$

Ya que hemos definido los parámetros a buscar, y tenemos el modelo del fenómeno, hacemos una primera simulación con propuestas para g y v .



3. Definir el problema directo o Forward Map

Tenemos que a partir de la solución definir un operador de observación. Esto es una función que toma la solución S y da lugar a una simulación de las observaciones.

Asumimos que en el experimento medimos las posiciones en unos tiempos dados:

$$T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \implies D_0 = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$$

$$\tilde{\theta} = (g, v) \quad \text{ya que} \quad x_0 = 0, \quad c = 0.0001$$

Entonces el Forward Map será una función que $F : R^2 \longrightarrow R^n$ tal que

$$F(\tilde{\theta}) = D_s = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

donde x_i es la solución calculada con los parámetros $\tilde{\theta}$

4. Modelo de Ruido y la Verosimilitud

Para esto es necesario definir cómo el ruido afecta a las observaciones y, con esto, un modelo estadístico del ruido.

$$D_0 = D_s + w \quad w \sim \Pi_w(w) \quad D_s = F(\tilde{\theta})$$

donde w es un ruido aditivo

Si esta es así, entonces la verosimilitud será:

$$L(D_0|\tilde{\theta}) = \Pi_w(D_0 - F(\tilde{\theta}))$$

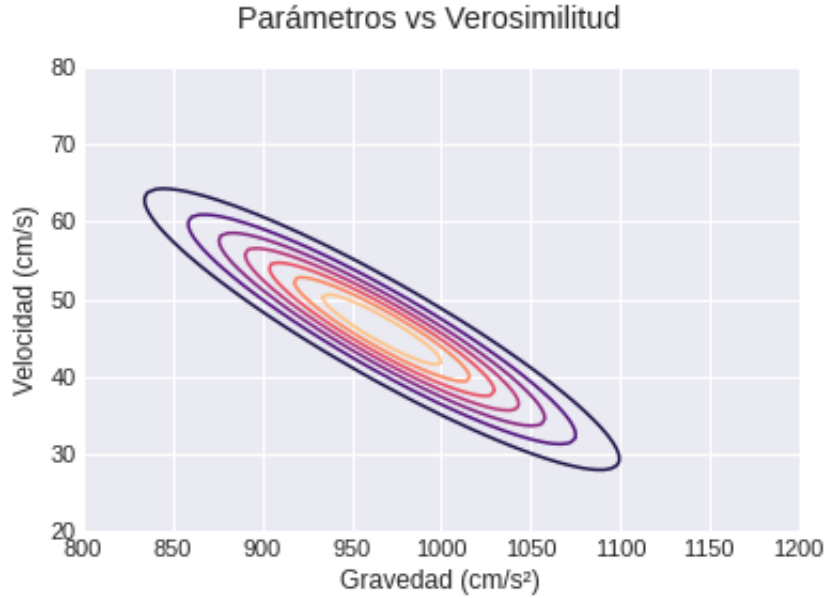
Si $w \sim N(0, \sigma)$ entonces

$$L(D_0|\tilde{\theta}) = \frac{1}{(\sigma^2 2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^n (x_i - y_i)^2\right)$$

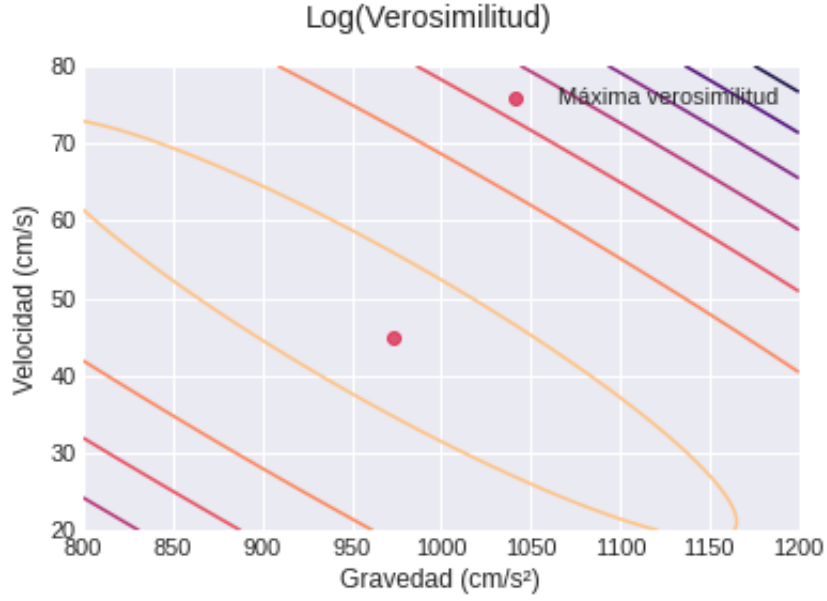
donde (x_0, \dots, x_n) son las soluciones del Forward Map con parámetros $\tilde{\theta} = (g, v)$
Si hay una σ_i para cada y_i entonces

$$L(D_0|\tilde{\theta}) = \frac{1}{((\prod_{i=0}^n 2\pi))^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{(x_i - y_i)^2}{\sigma_i^2}\right)$$

Ahora, ya que conocemos y definimos el forwardmap y la verosimilitud con el ruido, en Python, nosotros generamos un conjunto de puntos con distintas propuestas para g y v , y luego obtenemos la verosimilitud en cada coordenada posible, posteriormente graficamos las curvas de nivel. Se dan 100 valores posibles para g , 100 valores posibles para v y se evalúan cada par de coordenadas posibles.



Para visualizar de mejor manera las curvas de nivel graficamos el logaritmo de lo obtenido anteriormente con eso se puede visualizar de mejor manera en que punto, de los propuestos, se encuentra la máxima verosimilitud, esto nos daría nuestra primer aproximación.



5. Modelo de Información a-priori

¿Qué sabemos antes de hacer el experimento? Primero, ¿qué sabemos de la gravedad? Nosotros ya sabemos que la gravedad es positiva y podemos suponer que $800 \frac{cm}{s^2} \leq g$ y que $g \leq 1200 \frac{cm}{s^2}$. Entonces se tiene que:

$$\Pi_{ap}^g(g) = \begin{cases} \frac{1}{400} & si \quad 800 \leq g \leq 1200 \\ 0 & si \quad g \notin [800, 1200] \end{cases}$$

Luego, ¿qué sabemos de la velocidad?

Como las observaciones fueron tomadas de un experimento pequeño, nosotros intuimos que la velocidad máxima que se podría alcanzar es de $3 \frac{km}{h}$ lo que es aproximadamente $80 \frac{cm}{s}$, y suponemos que $20 \frac{cm}{s} \leq v$. De esta manera:

$$\Pi_{ap}^v(v) = \begin{cases} \frac{1}{60} & si \quad 20 \leq v \leq 80 \\ 0 & si \quad v \notin [20, 80] \end{cases}$$

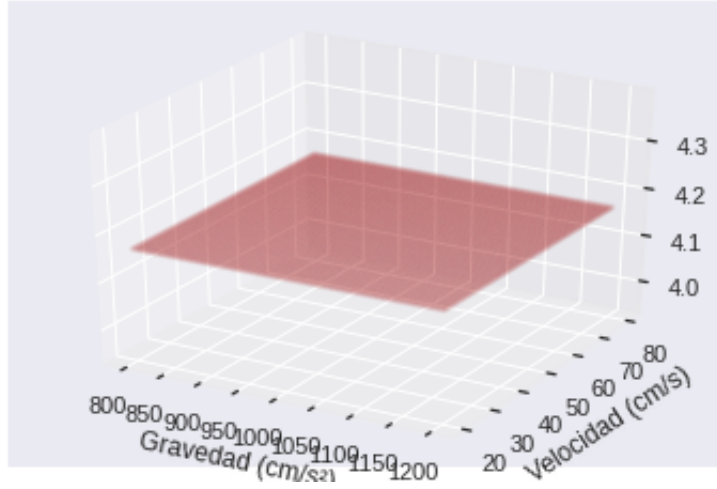
Entonces, nuestro modelo apriori del problema queda:

$$\begin{aligned} \Pi_{ap}(g, c) &= \Pi_{ap}^g(g) \Pi_{ap}^v(v) \\ \Pi_{ap}(g, c) &= \begin{cases} \frac{1}{(60)(400)} & si \quad (g, c) \in R \\ 0 & si \quad (g, c) \notin R \end{cases} \end{aligned}$$

Donde $R = [800, 1200] \times [20, 80] = \{(g, v) : 800 \leq g \leq 1200, 20 \leq v \leq 80\}$

La siguiente gráfica nos muestra como luce la distribución del modelo apriori:

Distribución del modelo apriori



6. Posterior y Teorema de Bayes

Ahora que tenemos la verosimilitud, el ruido y la distribución apriori, podremos calcular la distribución posterior.

Utilizando el Teorema de Bayes, a nosotros nos interesa encontrar el valor de los parámetros $\tilde{\Theta}$ dado las observaciones. Se tiene que:

$$\pi_{pos}(\tilde{\theta}|D_0) = A L(D_0|\tilde{\theta}) \pi_{ap}(\tilde{\theta}), \quad \tilde{\theta} = (g, v)$$

$A :=$ Constante de normalización

En este caso basta ver:

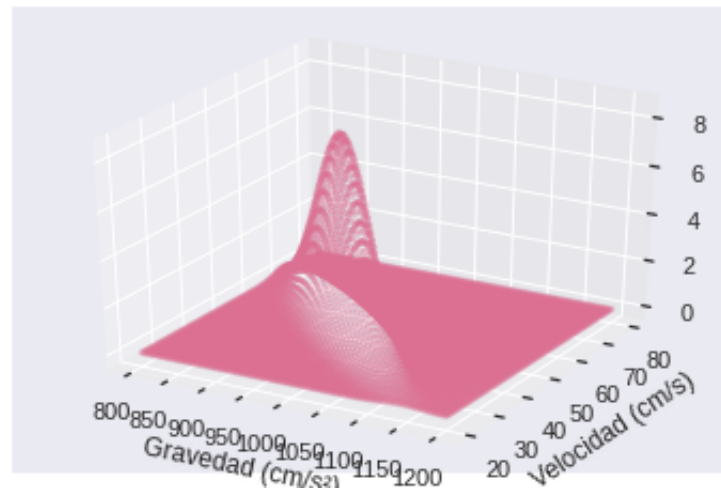
$$\log \pi_{pos}(\tilde{\theta}|D_0) = \log L(D_0|\tilde{\theta}) + \log \pi_{ap}(\tilde{\theta})$$

Entonces:

$$\log \pi_{pos}(\tilde{\theta}|D_0) = \log \left(\frac{1}{((\prod_{i=0}^n 2\pi))^{\frac{n}{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{(x_i - y_i)^2}{\sigma_i^2} \right) \right) + \log \left(\frac{1}{(60)(400)} \right)$$

La gráfica de la distribución posterior queda:

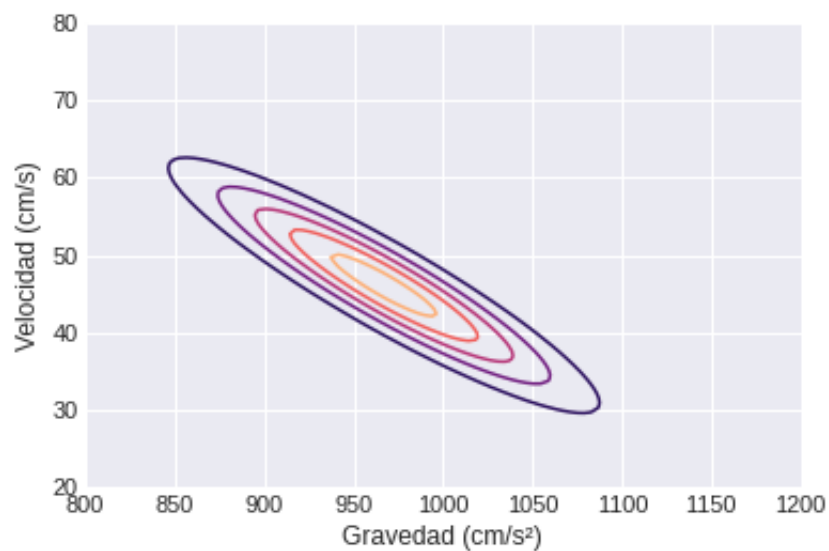
Distribución Posterior



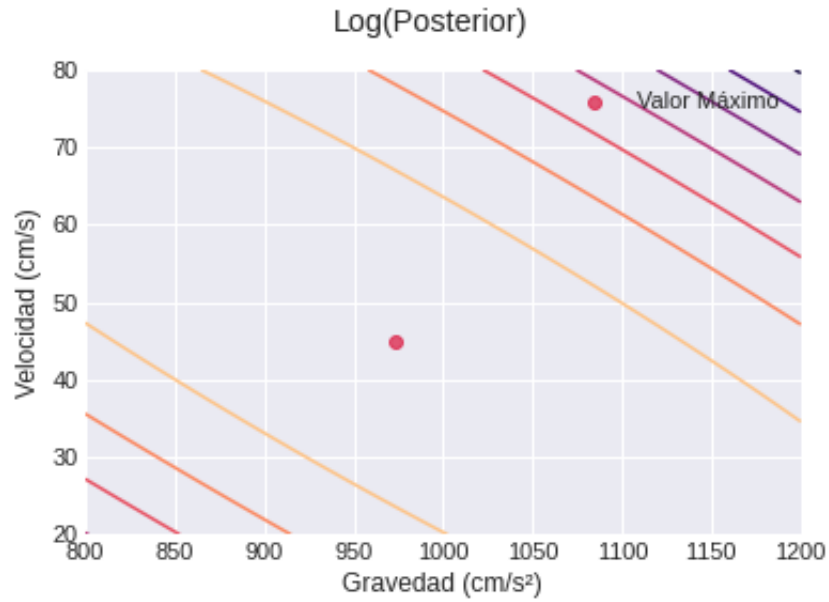
7. Exploración de la posterior

Finalmente, para obtener los datos buscados, exploramos la distribución posterior. Evaluamos los distintos valores de g y v posibles con la distribución posterior y exploramos las curvas de nivel obtenidas. Se dan 100 valores posibles para g , 100 valores posibles para v y se evalúan cada par de coordenadas posibles.

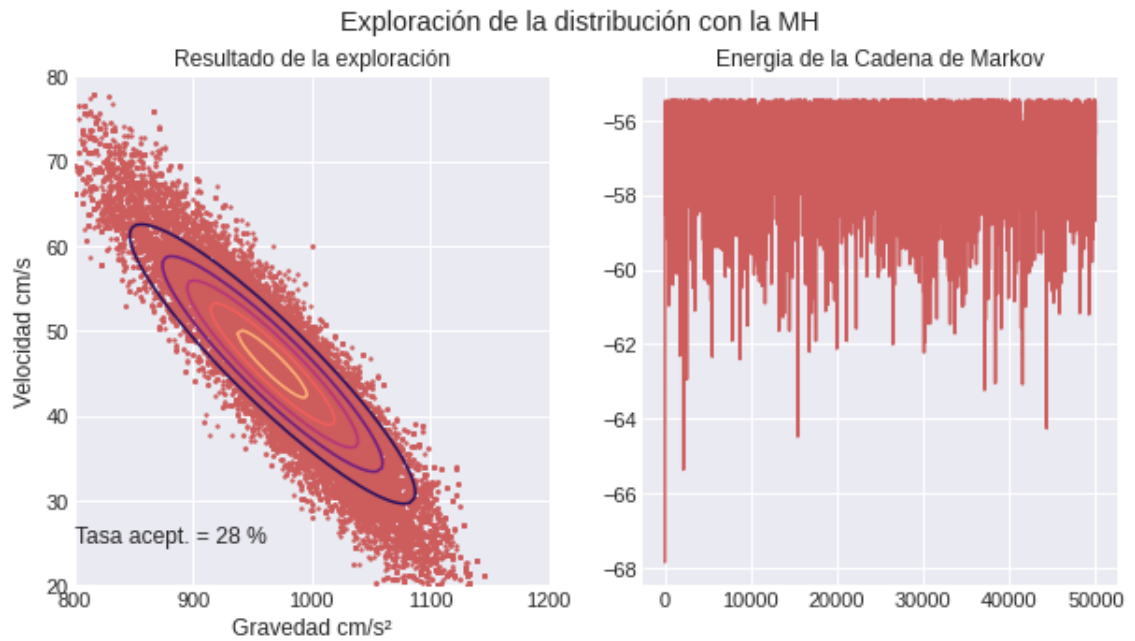
Curvas de nivel: Distribución Posterior



Ahora analizamos el logaritmo de la posterior para encontrar el valor máximo, en este punto encontramos el valor de los parámetros buscados.



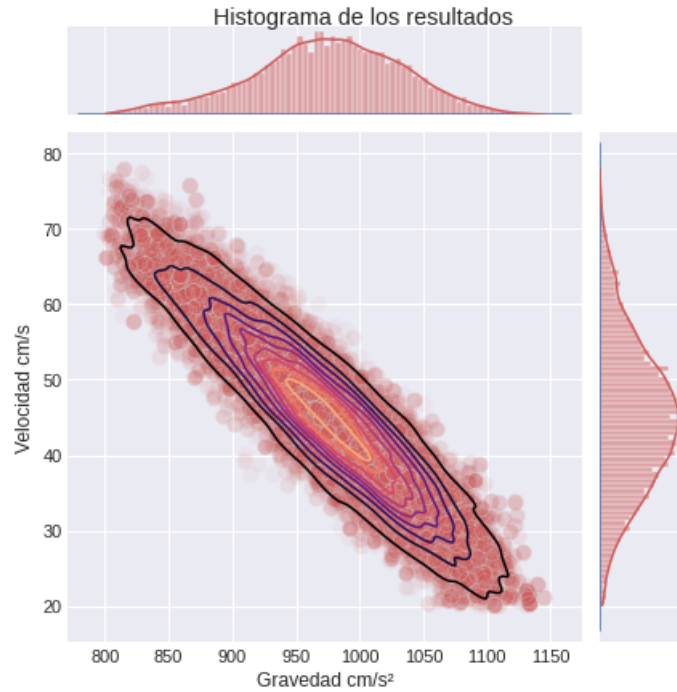
Otra manera de evaluar la distribución posterior, es programar y utilizar el algoritmo Metrópolis-Hastings, haciendo uso de este obtenemos la siguiente simulación:



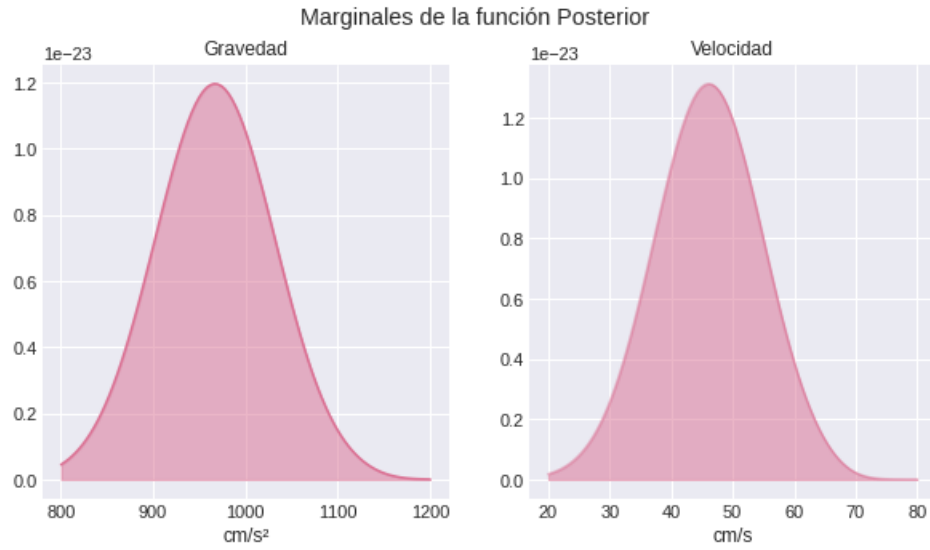
<https://www.overleaf.com/project/6291b0d483488869d28ae446>

4 Solución o Resultados

Finalmente, al explorar la distribución posterior con el algoritmo Metropolis-Hastings se obtuvo lo siguiente:

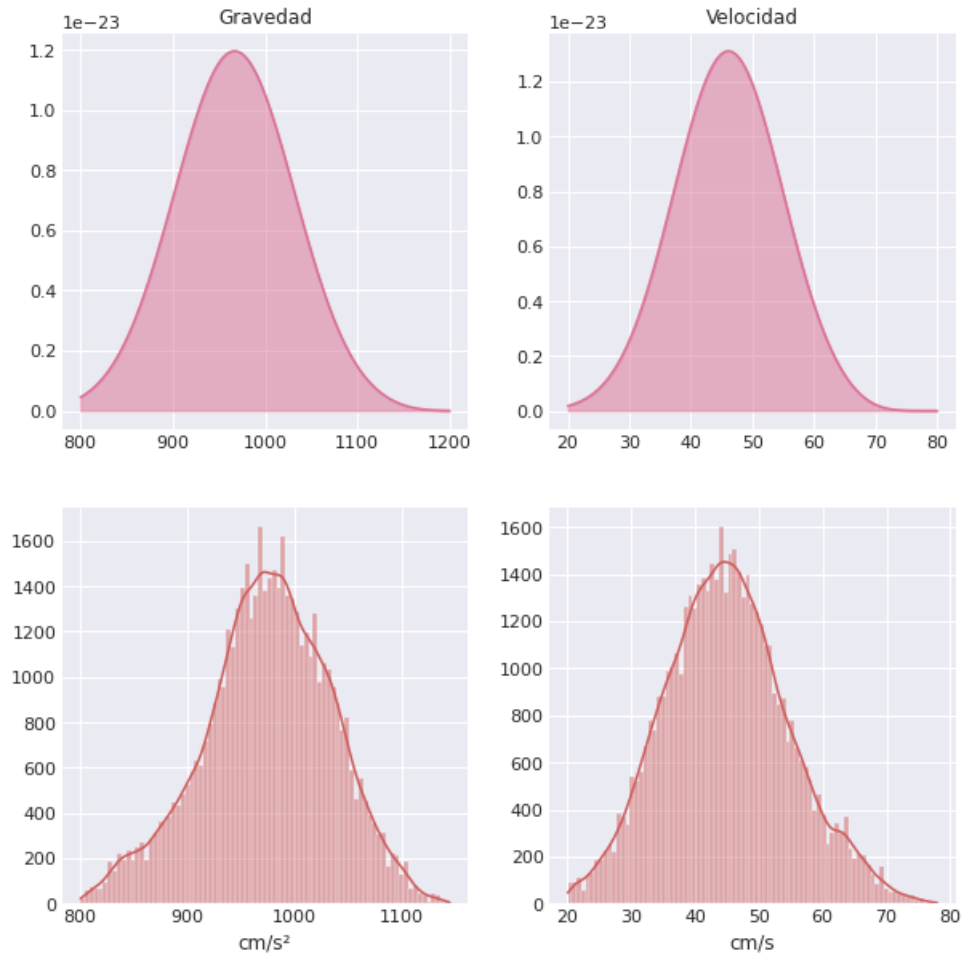


Las distribuciones marginales que se obtuvieron al explorar la distribución posterior dando 100 puntos posibles para g y dando 100 puntos posibles para v , y evaluando cada coordenada posible resultan de la siguiente manera:



Una comparación entre las marginales y las trazas de la cadena de Márkov:

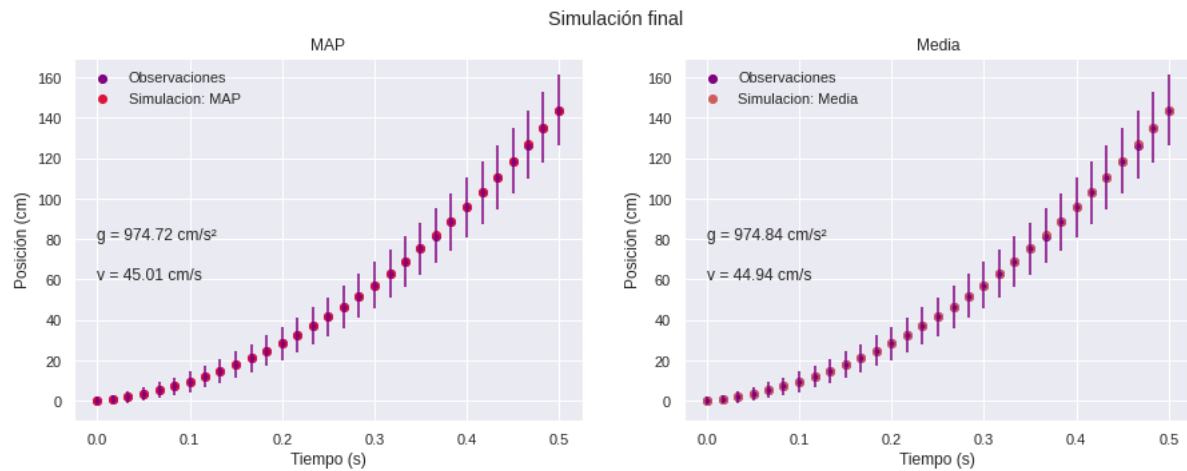
Comparación de los resultados



Finalmente los valores obtenidos fueron:

Exploración de la distribución con la MH		
Parámetro	MAP	Media
Gravedad	974.72 3	974.84
Velocidad	45.01	44.94

Ahora comparamos los valores observados vs. los valores utilizando los parámetros estimados.



5 Conclusiones

Al final los resultados difirieron de la gravead real debido a que se supuso el valor de C , pero los valores que se obtuvieron en el experimento fueron igualados por la implementación de nuestro programa utilizando el modelo de distribución posterior modelado.

Se logró saber más sobre la distribución de g y v pues en nuestro modelo apriori eran distribuciones uniformes ya al final estas distribuciones nos resultaron más parecidas a una distribución normal.

Aunque los datos fueron igualados utilizando las estimaciones de los dos parámetros encontrada, los resultados habrían sido mejores al considerar una tercera variable, la fricción.

En general los problemas inversos se resuelven siguiendo los mismos desarrollados en el presente trabajo.

Bibliografía

- [1] family=Kaipio given i=J., given=Jari and family=Somersalo given i=E, *Statistical and computational inverse problems: 160*, 2005 ed. ed., Springer (spanish).
- [2] family=Linge given i=S., given=Svein and family=Langtangen given i=H.P., given=Hans Petter, *Programming for computations - python: A gentle introduction to numerical simulations with python 3.6 (texts in computational science and engineering book 15) (english edition)*, 2 ed., Springer (spanish).
- [3] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum computation and quantum information: 10th anniversary edition*, Cambridge University Press, 2010.
- [4] Daniel A. Steck, *Rubidium 85 D Line Data*, available online at <http://steck.us/alkalidata>, (revision 2.2.1, 21 November 2019).