UNIVERSIDAD DE SONORA

Departamento de Física

Reporte PDE

Autor:

Sebastián Browarski Ruiz

04/05/21

1. Introducción

Una ecuación diferencial es aquella ecuación matemática en la que se relaciona una función con sus derivadas. Estas cuentan con muchas aplicaciones matemáticas que se extienden a varias ramas como la física, química, ingeniería, etc. En física, estas son fundamentales para poder explicar fenómenos como los que hemos visto, pero nosotros lo que buscamos es poder resolverlas numéricamente mediante la programación.
En este reporte se analizan las tres previas actividades que hemos realizado acerca de las ecuaciones diferenciales parciales en sus respectivos casos, las cuales son la ecuación de calor, de onda, y de Poisson. También veremos la descripción teórica de los métodos numéricos empleados para resolver los ejercicios.

2. Las tres grandes familias de Ecuaciones Diferenciales Parciales: Parabólicas, Hiperbólicas y Elípticas

2.1. Parabólicas

En las EDP de tipo parabólico tenemos

$$B^2 - 4AC = 0 \tag{1}$$

Estas sirven para resolver los problemas de propagación que son problemas transitorios donde la solución de la ecuación diferencial parcial es requerida sobre un dominio abierto, sujeta a condiciones iniciales y de frontera. Los casos más comunes con este tipo son aquellos en los que la solución cambia con el tiempo como en la conducción de calor o problemas de difusión.

2.2. Hiperbólicas

En el caso de las EDP tipo hiperbólicas tenemos

$$B^2 - 4AC > 0 \tag{2}$$

Se usan para problemas de propagación como la ecuación de onda y contienen una segunda derivada respecto al tiempo, por lo que la solución consiste en diferentes etapas de oscilación. Algunos problemas en donde se emplean son en las ecuaciones de ondas, de vibraciones, transmisión de señales acústicas y eléctricas, etc.

2.3. Elípticas

Para las EDP tipo elípticas es

$$B^2 - 4AC < 0 \tag{3}$$

Nos permiten resolver los llamados problemas de equilibrio, que son problemas donde se busca la solución de una ecuación diferencial dada, en un dominio cerrado, sujeta a condiciones de frontera. Los ejemplos más comunes de tales problemas incluyen a distribuciones estacionarias de temperatura, flujo de fluidos incompresibles no viscosos, distribución de tensiones en sólidos en equilibrio, el campo eléctrico en una región que contenga una densidad de carga dada, y en general problemas donde el objetivo sea determinar un potencial.

3. Los tres tipos de Condiciones a la Frontera: Dirichlet, Neumann y Robin (mixto)

3.1. Dirichlet

La condición de frontera de Dirichlet o de primer tipo se da cuando se tiene una ecuación diferencial ordinaria o una EDP y se especifican los valores de la solución que requiere la frontera del dominio. Con estas condiciones se encuentran las soluciones a las ecuaciones.

En el caso de una EDP sobre un dominio $\Omega \subset R^n$ como:

$$\nabla^2 y + y = 0 \tag{4}$$

donde $\nabla^2 y$ es el laplaciano, las condiciones de frontera de Dirichlet toma la forma:

$$y(x) = f(x), \forall \in \partial\Omega \tag{5}$$

donde f es una función conocida definida sobre $\partial\Omega$.

3.2. Neumann

La condición de frontera de Neumann o de segundo tipo se da cuando se tiene una ecuación diferencial ordinaria o una EDP y se especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera.

En el caso de una EDP sobre un dominio $\Omega \subset R^n$ como:

$$\nabla^2 y = 0 \tag{6}$$

donde ∇^2 es el laplaciano, las condiciones de frontera de Neumann toma la forma:

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = f(x), \forall x \in \partial\Omega \tag{7}$$

Aquí n es la normal a la frontera $\partial\Omega$ y f es una función escalar.

La derivada normal $\frac{\partial}{\partial n}$ se define como:

$$\frac{\partial y}{\partial n}(x) = \nabla y(x) * n(x) \tag{8}$$

donde ∇ es el gradiente (vector) y el punto es el producto interno con el vector normal unitario n.

3.3. Robin (mixto)

La condición de frontera de Robin o de tercer tipo se da cuando se tiene una ecuación diferencial ordinaria o una EDP y se específica una combinación lineal de los valores de una función ƨƨ los valores de su derivada sobre la frontera del dominio. Entonces, es una combinación ponderada de las condiciones de Dirichlet y Neumann.

Si Ω es el dominio sobre el cual se resuelve la ecuación dada y $\partial\Omega$ es su frontera, la condición de Robin es:

$$au + b\frac{\partial u}{\partial n} = g, sobre \partial\Omega \tag{9}$$

para algunas constantes distintas de cero a y b y una función dada g definida sobre $\partial\Omega$. Aquí, u es la solución desconocida definida sobre Ω y $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada normal en la frontera. En general a y b pueden ser funciones dadas en lugar de constantes.

4. Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas consiste en una aplicación numérica para resolver ecuaciones diferenciales mediante la aproximación de derivadas con diferencias finitas. Como es un análisis numérico, el espacio y tiempo son divididos en pequeños intervalos los cuales son aproximaciones. Este método es de gran utilidad para trabajar con ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales no lineales ya que las convierte en un sistema de ecuaciones lineales con las cuales son conocidas por nosotros.

El método de diferencias finitas se deriva del polinomio de Taylor:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}h^n + R_n(x) \tag{10}$$

donde $R_n(x)$ detona la diferencia entre el polinomio de Taylor de grado n y el de la función original. De aquí derivamos una aproximación para la primer derivada de la función f truncando el polinomio de Taylor:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(x) \tag{11}$$

Dividimos entre h:

$$\frac{f(x_0 + h)}{h} = \frac{f(x_0)}{h} + f'(x_0) + \frac{R_1(x)}{h} \tag{12}$$

Despejamos $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{R_1(x)}{h} \tag{13}$$

Asumiendo que $R_1(x)$ es suficientemente pequeño, la aproximación hacia adelante para la primer derivada de f queda:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{14}$$

También podemos obtener la aproximación hacia atras:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \tag{15}$$

Si derivamos la ecuación (14) tenemos:

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \tag{16}$$

Con la aproximación hacia delante y atras, y un poco de álgebra, llegamos a que:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \tag{17}$$

5. Solución de la Ecuación del Calor: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución

La ecuación del calor es de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{18}$$

donde la constante κ es el coefficiente de difusividad.

La Ecuación del Calor describe el flujo de calor en una región mediante los cambios de la Temperatura $u(x,t)$.

En un medio unidimensional x, la ecuación se simplifica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \tag{19}$$

A continuación se tiene una solución de la ecuación de calor por un método híbrido (EDP > EDO) visto previamente en la actividad 10.

Podemos escribir la ecuación del calor como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} && (20) \\ &\approx \kappa \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} && (21) \end{aligned}$$

y luego integrar en el tiempo como si tuviéramos una ecuación diferencial ordinaria.

Formalmente, para un determinado punto (jh,t), tendremos la ecuación diferencial ordinaria $u(jh,t) = u_j(t)$

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \kappa \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} \tag{22}$$

para la cual requerimos proporcionar la condición inicial al tiempo $t = 0$

$$u(0) = f(x) \tag{23}$$

Y condiciones a la frontera:

- $u_0 = c_1, u_N = c_2$, para el tipo de Dirichlet
- Del tipo Neumann, $du_0/dx = 0$ ó $dx_N/dx = 0$, para casos de equilibrio térmico.

6. Solución de la Ecuación de Onda: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución

Nos enfocaremos en el caso de una dimensión, por ejemplo el caso de una cuerda vibrante, la Ecuación de Onda se simplifica a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(x,t) \qquad x \in (0, L], t \in (0, T] \tag{24}$$

Requerimos definir 4 condiciones: 2 iniciales (derivada de segundo orden en t) y 2 a la frontera (segundo orden en el espacio), para encontrar la solución.

$$\begin{aligned} u(x,0) &= I(x) && (25) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) &= 0 && (26) \\ u(0,t) &= 0 && (27) \\ u(L,t) &= 0 && (28) \end{aligned}$$

$$(29)$$

Se requiere también especificar el valor de la constante c y la función $I(x)$

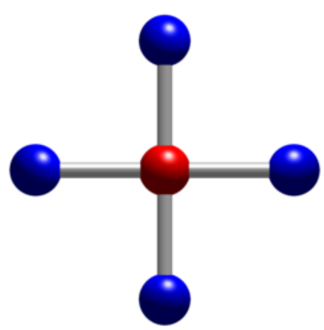
La solución de la ecuación de onda en una dimensión se resolverá por el método de diferencias finitas como los vimos en la actividad 11.

Comenzamos aproximando las segundas derivadas por diferencias finitas centradas de segundo orden.

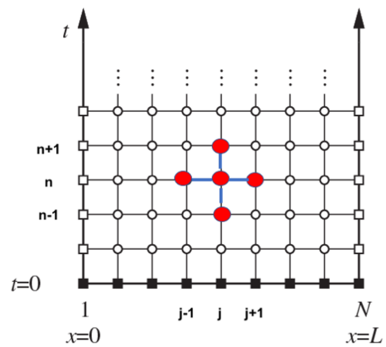
Si h es el incremento en la dirección $x = \Delta x$ y $k = \Delta t$ es el incremento en el tiempo. Entonces en un punto de la malla discreta (x, t) tendremos

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = c^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \tag{30}$$

La ecuación anterior define un esténcil computacional de 5 puntos y se respresenta como



El cual nos permite calcular los valores de $u(x, t)$ en el espacio discretizado: $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_M = L$, $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_N = T$, espaciados uniformemente por $h = \Delta x$ y $k = \Delta t$.



Para iniciar el algoritmo se debe calcular el primer nivel de $u(x,k)$ en $t=k$, usando sólo la información de la condición inicial, con otro esténcil de 4 puntos. Con esto podremos calcular todos los valores futuros de $u(x,t+k)$ ya que se conocen los valores de $u(x,t)$ y $u(x,t-k)$.

Si definimos $u(x,t) = u(jh,nk) = u_j^n$, la ecuación de onda la podemos expresar

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \tag{31}$$

y despejamos para el valor desconocido u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + C^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{32}$$

donde $C^2 = c^2k^2/h^2$, conocida como la constante de Courant.

Al iniciar el algoritmo notaremos que no se puede aplicar el esténcil de 5 puntos, entonces para calcular el primer nivel usaremos un esténcil similar de 4 puntos con la información de la condición inicial para calcular $u(x,t=k)$.

Remplazamos la condición inicial por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j^0 = \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2k} = 0 \tag{33}$$

lo que indica que $u_j^1 = u_j^{-1}$.

Sustituimos la igualdad anterior en la ecuación de onda y nos queda que

$$u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) \tag{34}$$

Y ya tendremos dos niveles de valores para $u(x,t)$ para calcular los valores de u_j^{n+1} usando el esténcil de 5 puntos.

7. Solución de la Ecuación de Poisson: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución

La solución numérica de la ecuación de Poisson es resuelta por diferencias finitas en 2-D con condiciones a la frontera de tipo Dirichlet.

Empezamos con la ecuación:

$$-\nabla^2 u = f \tag{35}$$

dadas las condiciones en la frontera Γ

$$u(x,y)_\Gamma = g(x,y) \tag{36}$$

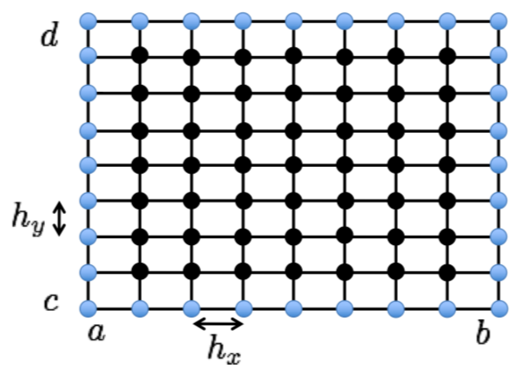
No requerimos una condición inicial, pues no hay dependencia en el tiempo. Sólo requerimos conocer los valores a la frontera.

Supongamos que tenemos un dominio rectangular cartesiano $\Gamma = (a,b) \times (c,d)$, sobre el cual generamos una malla

$$
\begin{aligned}
x_i &= a + ih_x \quad i = 0, 1, 2, \ldots, M & (37)\\
y_k &= c + kh_y \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N & (38)
\end{aligned}
$$

donde los incrementos h_x y h_y estan definidos como

$$
\begin{aligned}
h_x &= \frac{(b-a)}{M} & (39)\\
h_y &= \frac{(d-c)}{N} & (40)
\end{aligned}
$$



Si aproximamos las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación de Poisson por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x_i, y_k)}{\partial x^2} &= \frac{u(x_{i+1}, y_k) - 2u(x_i, y_k) + u(x_{i-1}, y_k)}{h_x^2} + \mathcal{O}(h_x^3) & (41)\\
\frac{\partial^2 u(x_i, y_k)}{\partial y^2} &= \frac{u(x_i, y_{k+1}) - 2u(x_i, y_k) + u(x_i, y_{k-1}}{h_y^2} + \mathcal{O}(h_y^3) & (42)\\
& & (43)
\end{aligned}
$$

Si denotamos por $U_{i,k}$ el valor aproximado de $u(x_i, y_k)$, la ecuación de Poisson se puede aproximar por

$$-\frac{U_{i+1,k}-2U_{i,k}+U_{i-1,k}}{h_x^2}-\frac{U_{i,k+1}-2U_{i,k}+U_{i,k-1}}{h_y^2} = f_{i,k}+\mathcal{O}(h_x^3,h_y^3) \quad (44)$$

Simplificando la expresión anterior y eliminando errores de orden superior, tendremos

$$- \quad \left(\frac{U_{i+1,k}+U_{i-1,k}}{h_x^2}+\frac{U_{i,k+1}+U_{i,k-1}}{h_y^2}\right) \quad (45)$$

$$+ \quad 2\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)U_{i,k}=f_{i,k} \quad (46)$$

donde los valores de $i = 1, 2, \ldots, M-1$ y $k = 1, 2, \ldots, N-1$ representan los puntos del interior del dominio. Los valores en la frontera ya han sido determinados en la definición del problema.

La ecuación anterior requiere un esténcil de 5 puntos como el que ya hemos utilizado con anterioridad.

8. Resumen y conclusiones

Las ecuaciones diferenciales son de gran importancia en la física, y estas actividades nos abrieron camino a las cientos de posibilidades que estas ecuaciones brindan y que a lo largo de la historia han sido fundamentales para nuestro conocimiento. Pudimos observar distintos tipos de ecuaciones diferenciales como parabólicas, elípticas y parabólicas, cómo se diferencian y aplicaciones de la vida real como el caso de la cuerda o el de calor. También analizamos las condiciones de la frontera y los diferentes tipos que hay, de tipo Dirichlet, Neumann y Robin, fue muy interesante ver las diferencias y analizar los códigos correspondientes para cada tipo de frontera. Gracias a las cosas mencionadas previamente, y al famoso método de diferencias finitas, pudimos aprender computacionalmente acerca de la ecuación de calor, de onda y de Poisson las cuales tienen distintos tipos de condiciones a la frontera y ecuaciones diferenciales parciales. Estoy agradecido con el profesor y la buena información que nos proporcionó, me gusto mucho analizar los códigos y ver que cambios debía hacerle. Mis habilidades de programación y conocimiento teórico de ecuaciones diferenciales mejoró bastante, por lo que estoy satisfecho.

9. Bibliografía

- https://github.com/carloslizarragac/FisicaComputacional1
- https://es.wikipedia.org/wiki/Condición$_{d}e_{f}rontera_{d}e_{D}irichlet$
- https://es.wikipedia.org/wiki/Condición$_{d}e_{f}rontera_{d}e_{N}eumann$
- https://es.wikipedia.org/wiki/Condición$_{d}e_{f}rontera_{d}e_{R}obin$
- https://es.wikipedia.org/wiki/Diferencia$_{f}inita$
- https://www.ugr.es/ prodelas/ftp/ETSICCP/ResoluciónNuméricaEDPs.pdf