INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS NUDOS PARA RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS

Suponemos el circuito generalizado de la Figura 1:

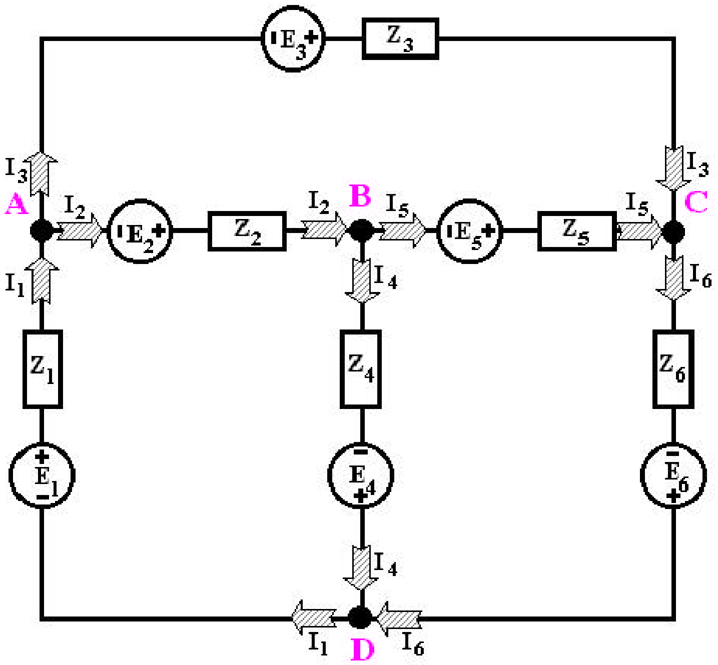

Figura 1.

El grafo para este circuito, será tal como muestra la Figura 2.

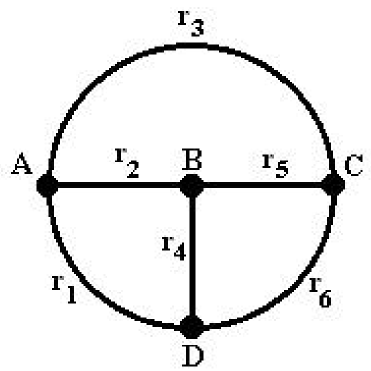

Figura 2.

En el grafo, observamos que el número de ramas será **r = 6**, el número de nudos será **n = 4** y el número de mallas $\mathbf{m = 3 = r - (n - 1)}$. Por su parte el número de ramas de arbol será $\mathbf{r_a = 3}$, mientras que el número de ramas de enlace será $\mathbf{r_e = 3}$. Ver algunas de las distintas configuraciones de ramas de arbol (línea llena) y ramas de enlace (línea punteada), en la Figura 3.

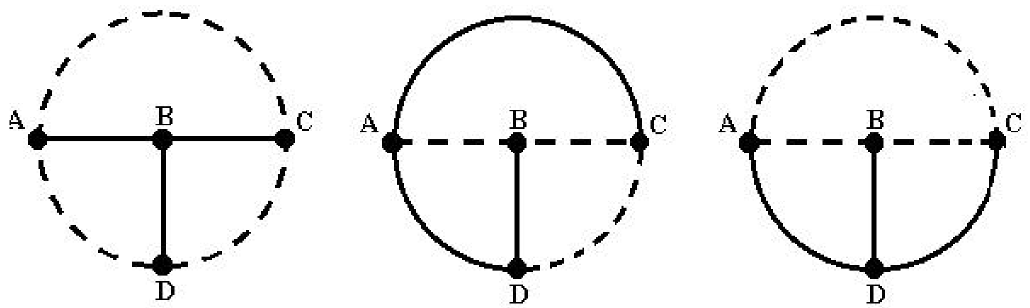

Figura 3.

Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff podemos escribir para cada rama:

Rama 1 ® $E_1 + E_D - E_A = I_1 * Z_1$

Rama 2 ® $E_2 + E_A - E_B = I_2 * Z_2$

Rama 3 ® $E_3 + E_A - E_C = I_3 * Z_3$

Rama 4 ® $E_4 + E_B - E_D = I_4 * Z_4$

Rama 5 ® $E_5 + E_B - E_C = I_5 * Z_5$

Rama 6 ® $E_6 + E_C - E_D = I_6 * Z_6$

Aplicando la primera Ley de Kirchhoff podemos escribir para cada nudo:

Nudo A ® $I_1 - I_2 - I_3 = 0$ ® $I_1 = I_2 + I_3$

Nudo B ® $I_2 - I_4 - I_5 = 0$ ® $I_2 = I_4 + I_5$

Nudo C ® $I_5 + I_3 - I_6 = 0$ ® $I_5 = -I_3 + I_6$

Nudo D ® $I_6 + I_4 - I_1 = 0$ ® $I_6 = -I_4 + I_1$

Vemos que la última expresión es una combinación lineal de las anteriores por lo tanto tendremos tres ecuaciones independientes de nudo, es decir :

$$n_i = n - 1$$

De las ecuaciones de rama despejamos las corrientes:

Rama 1 ® $\frac{E_1 + E_D - E_A}{Z_1} = I_1$

Rama 2 ® $\frac{E_2 + E_A - E_B}{Z_2} = I_2$

Rama 3 ® $\frac{E_3 + E_A - E_C}{Z_3} = I_3$

Rama 4 ® $\frac{E_4 + E_B - E_D}{Z_4} = I_4$

Rama 5 ® $\frac{E_5 + E_B - E_C}{Z_5} = I_5$

Rama 6 ® $\frac{E_6 + E_C - E_D}{Z_6} = I_6$

Escribiendo las ecuaciones de nudo en función de las ecuaciones de rama, tendremos:

Nudo A ® $\frac{E_1 + E_D - E_A}{Z_1} - \left(\frac{E_2 + E_A - E_B}{Z_2}\right) - \left(\frac{E_3 + E_A - E_C}{Z_3}\right) = 0$

Nudo B ® $\frac{E_2 + E_A - E_B}{Z_2} - \left(\frac{E_4 + E_B - E_D}{Z_4}\right) - \left(\frac{E_5 + E_B - E_C}{Z_5}\right) = 0$

Nudo C ® $\frac{E_5 + E_B - E_C}{Z_5} + \left(\frac{E_3 + E_A - E_C}{Z_3}\right) - \left(\frac{E_6 + E_C - E_D}{Z_6}\right) = 0$

Despejando y ordenando en el primer miembro fuentes y en el segundo miembro, diferencias de potencial en las impedancias tendremos:

Nudo A ® $$\frac{E_1}{Z_1} - \frac{E_2}{Z_2} - \frac{E_3}{Z_3} = \frac{E_D - E_A}{Z_1} + \frac{E_A - E_B}{Z_2} + \frac{E_A - E_C}{Z_3}$$

Nudo B ® $$\frac{E_2}{Z_2} - \frac{E_4}{Z_4} - \frac{E_5}{Z_5} = \frac{-E_A + E_B}{Z_2} + \frac{E_B - E_D}{Z_4} + \frac{E_B - E_C}{Z_5}$$

Nudo C ® $$\frac{E_5}{Z_5} + \frac{E_3}{Z_3} - \frac{E_6}{Z_6} = \frac{-E_B + E_C}{Z_5} + \frac{-E_A + E_C}{Z_3} + \frac{E_C - E_D}{Z_6}$$

Recordando que $\mathbf{E_1/Z_1 = I_1}$ y en general, $\mathbf{E_n/Z_n = I_n}$ podemos redibujar el circuito como indica la Figura 4, el cuál equivale a reemplazar fuentes de tensión con impedancia en serie por fuentes de corriente con impedancia en paralelo.

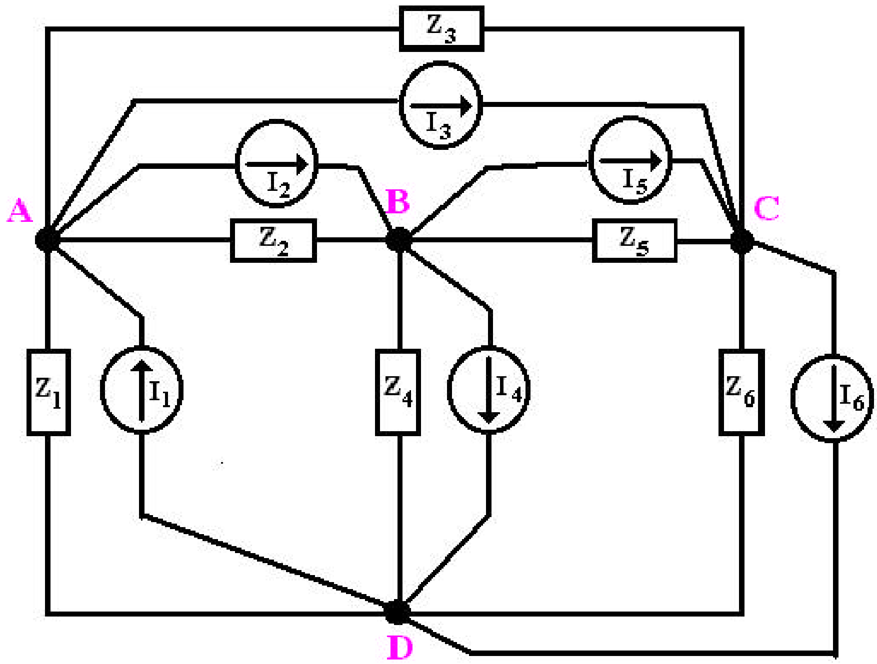

Figura 4.

Si tomamos como referencia de medición de tensiones el nodo "D", tendremos que $E_D = 0$, por lo que:

Nudo A ® $$I_1 - I_2 - I_3 = \frac{E_A}{Z_1} + \frac{E_A - E_B}{Z_2} + \frac{E_A - E_C}{Z_3}$$

Nudo B ® $$I_2 - I_4 - I_5 = \frac{-E_A + E_B}{Z_2} + \frac{E_B}{Z_4} + \frac{E_B - E_C}{Z_5}$$

Nudo C ® $$I_5 + I_3 - I_6 = \frac{-E_B + E_C}{Z_5} + \frac{-E_A + E_C}{Z_3} + \frac{E_C}{Z_6}$$

Luego ordenando:

Nudo A ® $I_1 - I_2 - I_3 = E_A \underbrace{\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)}_{Y_{11}} - E_B \underbrace{\left(\frac{1}{Z_2} \right)}_{Y_{12}} - E_C \underbrace{\left(\frac{1}{Z_3} \right)}_{Y_{13}}$

Nudo B ® $I_2 - I_4 - I_5 = E_B \underbrace{\left(\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} \right)}_{Y_{22}} - E_A \underbrace{\left(\frac{1}{Z_2} \right)}_{Y_{21}} - E_C \underbrace{\left(\frac{1}{Z_5} \right)}_{Y_{23}}$

Nudo C ® $I_5 + I_3 - I_6 = E_C \underbrace{\left(\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} \right)}_{Y_{33}} - E_A \underbrace{\left(\frac{1}{Z_3} \right)}_{Y_{31}} - E_B \underbrace{\left(\frac{1}{Z_5} \right)}_{Y_{32}}$

Y_{nn} recibe el nombre de autoadmitancia de nudo y corresponde a la sumatoria de todas las admitancias que llegan al nudo "n", por su parte Y_{nm} recibe el nombre de admitancia mutua o admitancia compartida entre los nudos "n" y "m" ($Y_{nm} = Y_{mn}$).
Finalmente para cualquier circuito con "n_i" nodos, podemos generalizar haciendo:

Nudo A ® **S** $(I_{nA}) = E_A . Y_{11} - E_B . Y_{12} - E_C . Y_{13} - - - - E_N . Y_{1N}$
Nudo B ® **S** $(I_{nB}) = -E_A . Y_{21} + E_B . Y_{22} - E_C . Y_{23} - - - - E_N . Y_{2N}$
Nudo C ® **S** $(I_{nC}) = -E_A . Y_{31} - E_B . Y_{32} + E_C . Y_{33} - - - - E_N . Y_{3N}$

Nudo N ® **S** $(I_{nN}) = -E_A . Y_{N1} - E_B . Y_{N2} - E_C . Y_{N3} - - - + E_N . Y_{NN}$

Tendremos de este modo un sistema de "n_i" ecuaciones con "n_i" incógnitas donde el numero "n_i" estará dado por el número de nodos menos uno ya que tomamos a uno de ellos como referencia (recordar $n_i = n - 1$). Estos sistemas de ecuaciones pueden ser resueltos por método de determinantes o por método matricial. Lo importante es que si tomamos como convención que las fuentes ingresan corriente al nudo (con el signo correspondiente) y que las admitancias quitan corriente del nudo, para cualquier circuito, independientemente de la cantidad de nudos que contenga, el determinante principal (Δp) tendrá el siguiente formato:

$$\mathbf{Dp} = \begin{vmatrix} & -Y_{12} & -Y_{13} & --- & -Y_{1N} \\ -Y_{21} & & -Y_{23} & --- & -Y_{2N} \\ -Y_{31} & -Y_{32} & & --- & -Y_{3N} \\ ----- & ----- & ----- & ----- & ----- \\ -Y_{N1} & -Y_{N2} & -Y_{N3} & --- & Y_{NN} \end{vmatrix}$$

Se observa que los elementos en la diagonal principal del determinante, los cuales corresponden a las autoadmitancias de nudo (Y_{NN}) tienen signo positivo y que todos los otros elementos que corresponden a admitancias mutuas o compartidas entre nudos (Y_{NM}), llevan signo negativo.

INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE MALLAS PARA RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS

Suponemos el circuito generalizado de la Figura 5:

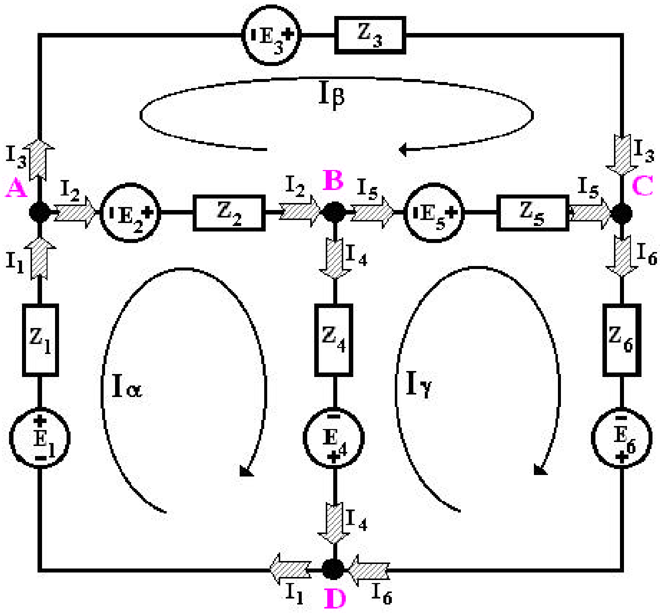

Figura 5.

Aplicando la segunda Ley de Kirchhoff podemos escribir para cada rama:

Rama 1	**®**	$\mathbf{E_1 + E_D - E_A = I_1 * Z_1}$
Rama 2	**®**	$\mathbf{E_2 + E_A - E_B = I_2 * Z_2}$
Rama 3	**®**	$\mathbf{E_3 + E_A - E_C = I_3 * Z_3}$
Rama 4	**®**	$\mathbf{E_4 + E_B - E_D = I_4 * Z_4}$
Rama 5	**®**	$\mathbf{E_5 + E_B - E_C = I_5 * Z_5}$
Rama 6	**®**	$\mathbf{E_6 + E_C - E_D = I_6 * Z_6}$

El método de Maxwell o método de mallas para resolución de circuitos, consiste en tomar lazos cerrados, eliminando las diferencias de tensiones en los nudos y considerando lazos cerrados **a** , **b** y **g** como se indica en la Figura 5.

Lazo a ® $\mathbf{E_1 + E_2 + E_4 = I_1 * Z_1 + I_2 * Z_2 + I_4 * Z_4}$

Lazo b ® $\mathbf{-E_2 + E_3 - E_5 = - I_2 * Z_2 + I_3 * Z_3 - I_5 * Z_5}$

Lazo g ® $\mathbf{-E_4 + E_5 + E_6 = -I_4 * Z_4 + I_5 * Z_5 + I_6 * Z_6}$

Llamando a las corrientes en cada lazo **Ia** , **Ib** y **Ig** tendremos :

$\mathbf{I_1 = Ia}$ $\mathbf{I_2 = Ia - Ib}$ $\mathbf{I_3 = Ib}$ $\mathbf{I_4 = Ia - Ig}$ $\mathbf{I_5 = -Ib + Ig}$ $\mathbf{I_6 = Ig}$

Remplazando en las últimas ecuaciones tendremos:

Lazo a ® $\mathbf{E_1 + E_2 + E_4 = I a * Z_1 + (Ia - Ib) * Z_2 + (Ia - Ig) * Z_4}$

Lazo b ® $\mathbf{-E_2 + E_3 - E_5 = - (Ia - Ib) * Z_2 + Ib * Z_3 - (-Ib + Ig) * Z_5}$

Lazo g ® $\mathbf{-E_4 + E_5 + E_6 = -(Ia - Ig) * Z_4 + (-Ib + Ig) * Z_5 + Ig * Z_6}$

Ordenando: **Lazo a** ® $\mathbf{E_1 + E_2 + E_4 = I\,a\ \underbrace{(Z_1 + Z_2 + Z_4)}_{Z_{11}} - Ib * \underbrace{Z_2}_{Z_{12}} - Ig * \underbrace{Z_4}_{Z_{13}}}$

Lazo b ® $\mathbf{-E_2 + E_3 - E_5 = - I\,a * \underbrace{Z_2}_{Z_{21}} + Ib\ \underbrace{(Z_2 + Z_3 + Z_5)}_{Z_{22}} - Ig * \underbrace{Z_5}_{Z_{23}}}$

Lazo g ® $\mathbf{-E_4 + E_5 + E_6 = - I\,a * \underbrace{Z_4}_{Z_{31}} - Ib * \underbrace{Z_5}_{Z_{32}} + Ig\ \underbrace{(Z_4 + Z_5 + Z_6)}_{Z_{33}}}$

Z_{nn} recibe el nombre de autoimpedancia de malla y corresponde a la sumatoria de todas las impedancias conectadas en la malla o lazo "m", por su parte Z_{nm} recibe el nombre de impedancia mutua o impedancia compartida entre las mallas "n" y "m" ($Z_{nm} = Z_{mn}$). Finalmente para cualquier circuito con **"m"** mallas, podemos generalizar haciendo:

Malla a ® $\mathbf{S\ (E_{ma}) = I_a \cdot Z_{11} - I_b \cdot Z_{12} - I_g \cdot Z_{13} - - - -I_W \cdot Z_{1N}}$
Malla b ® $\mathbf{S\ (E_{mb}) = -I_a \cdot Z_{21} + I_b \cdot Z_{22} - I_g \cdot Z_{23} - - - -I_W \cdot Z_{2N}}$
Malla g ® $\mathbf{S\ (E_{mg}) = -I_a \cdot Z_{31} - I_b \cdot Z_{32} + I_g \cdot Z_{33} - - - -I_W \cdot Z_{3N}}$

Malla W ® $\mathbf{S\ (E_{mW}) = -I_a \cdot Z_{N1} - I_b \cdot Z_{N2} - I_g \cdot Z_{N3} - - + I_W \cdot Z_{NN}}$

Tendremos de este modo un sistema de **"m"** ecuaciones con **"m"** incógnitas donde el numero **"m"** estará dado por el número de mallas o lazos cerrados. Estos sistemas de ecuaciones pueden ser resueltos por método de determinantes o por método matricial. Lo importante es que si tomamos como convención que todas las corrientes de malla, circulan en la misma dirección, para cualquier circuito, independientemente de la cantidad de mallas que contenga, el determinante principal (Δp) tendrá el siguiente formato:

$$\mathbf{Dp} = \begin{vmatrix} & -Z_{12} & -Z_{13} & --- & -Z_{1N} \\ -Z_{21} & & -Z_{23} & --- & -Z_{2N} \\ -Z_{31} & -Z_{32} & & --- & -Z_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -Z_{N1} & -Z_{N2} & -Z_{N3} & --- & \end{vmatrix}$$

Se observa que los elementos en la diagonal principal del determinante, los cuales corresponden a las autoimpedancias de malla (Z_{NN}) tienen signo positivo y que todos los otros elementos que corresponden a impedancias mutuas o compartidas entre distintas mallas (Z_{NM}), llevan signo negativo.