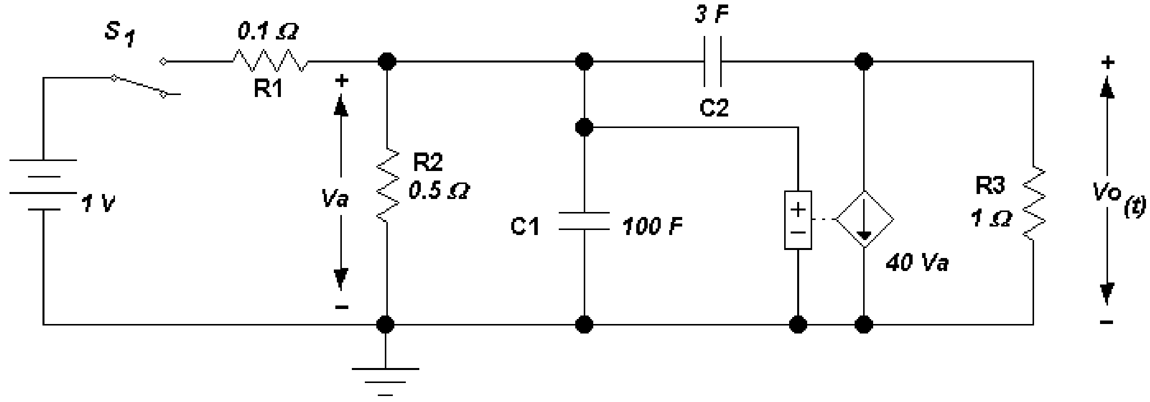
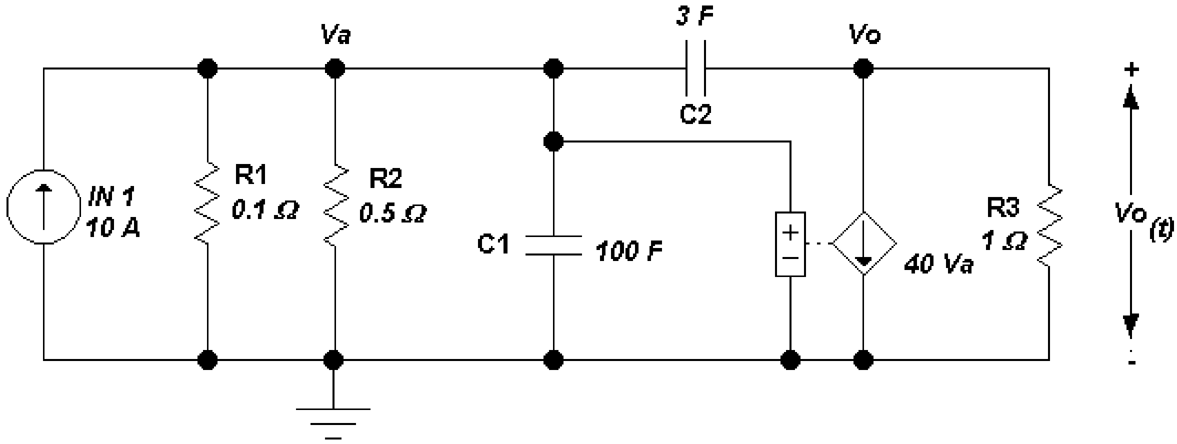
APLICACIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE EN CIRCUITOS CON FUENTES DEPENDIENTES

El circuito de la Figura representa un modelo lineal de un amplificador de baja frecuencia, se desea determinar la salida del mismo, $Vo_{(t)}$, cuando se excita el circuito con una fuente escalon ($\mu_{(t)}$) de 1 Volt. El circuito no tiene energía inicial almacenada.



Nos conviene resolver por método nodal, para ello cambiamos la fuente de tensión de 1Voltio en serie con la resistencia de 0,1 Ω , por una fuente de corriente en paralelo con el mismo valor de resistor.



Escrbimos las ecuaciones de nudos:

I) $$I_{N1(P)} = \frac{10}{P} = Va_{(P)} * Y_{11} - Vo_{(P)} * Y_{12}$$

II) $$-40 * Va_{(P)} = -Va_{(P)} * Y_{21} + Vo_{(P)} * Y_{22}$$

Identificamos las admitancias: $$Y_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{1}{c_1 * P}} + \frac{1}{\frac{1}{c_2 * P}} = \frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}5} + \frac{1}{\frac{1}{100 * P}} + \frac{1}{\frac{1}{3 * P}} = 12 + 103 * P$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{\frac{1}{c_2 * P}} = \frac{1}{\frac{1}{3 * P}} = 3 * P$$

$$Y_{22} = \frac{1}{\frac{1}{c_2 * P}} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{\frac{1}{3 * P}} + \frac{1}{1} = 1 + 3 * P$$

Como la segunda ecuación de nudos tiene una incognita en el primer miembro, la modificamos :

II")
$$0 = -\boldsymbol{Va}_{(\boldsymbol{P})} * \boldsymbol{Y}_{21} + 40 * \boldsymbol{Va}_{(\boldsymbol{P})} + \boldsymbol{Vo}_{(\boldsymbol{P})} * \boldsymbol{Y}_{22}$$

o sea :

II")
$$0 = \boldsymbol{Va}_{(\boldsymbol{P})} * (40 - \boldsymbol{Y}_{21}) + \boldsymbol{Vo}_{(\boldsymbol{P})} * \boldsymbol{Y}_{22}$$

Vemos que : $\boldsymbol{Y}_{21}" = 40 - \boldsymbol{Y}_{21} = 40 - 3 * \boldsymbol{P}$

El determinante principal Δp sera:

$$\boldsymbol{\Delta p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{11} & -\boldsymbol{Y}_{12} \\ \boldsymbol{Y}_{21}" & \boldsymbol{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 103 * \boldsymbol{P} & -3 * \boldsymbol{P} \\ 40 - 3 * \boldsymbol{P} & 1 + 3 * \boldsymbol{P} \end{bmatrix} = 300 * \boldsymbol{P}^2 + 159 * \boldsymbol{P} + 12$$

NOTA : Preste atención, ya que en este caso no hay simetría a ambos lados de la diagonal principal de Δp. Esto sucederá cuando en el circuito existan fuentes dependientes.

Debido a que solo nos interesa la tensión Vo, calculamos solo el determinantes sustituto 2 (Δ_{S2}) :

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{S}2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{11} & \boldsymbol{I}_{N1(\boldsymbol{P})} \\ \boldsymbol{Y}_{21}" & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 + 103 * \boldsymbol{P} & \dfrac{10}{\boldsymbol{P}} \\ 40 - 3 * \boldsymbol{P} & 0 \end{bmatrix} = 30 - \frac{40}{\boldsymbol{P}} = \frac{30}{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{P} - 13{,}333)$$

Luego :

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{O}(\boldsymbol{P})} = \frac{\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{S}2}}{\boldsymbol{\Delta p}} = \frac{\dfrac{30}{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{P} - 13{,}333)}{300 * \boldsymbol{P}^2 + 159 * \boldsymbol{P} + 12} = \frac{\dfrac{30}{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{P} - 13{,}333)}{300\left(\boldsymbol{P}^2 + \dfrac{159}{300} * \boldsymbol{P} + \dfrac{12}{300}\right)} =$$

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{O}(\boldsymbol{P})} = \frac{0.1 * (\boldsymbol{P} - 13{,}333)}{\boldsymbol{P} * (\boldsymbol{P} + 0{,}8142) * (\boldsymbol{P} + 0{,}04912)}$$

Expandiendo en fracciones parciales simples:

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{O}(\boldsymbol{P})} = \frac{-33{,}3333}{\boldsymbol{P}} + \frac{35{,}5}{(\boldsymbol{P} + 0{,}04912)} - \frac{2{,}26}{(\boldsymbol{P} + 0{,}8142)}$$

Antitransformando tendremos:

$$\boxed{\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{O}(\boldsymbol{t})} = -33{,}3333 + 35{,}5 * \boldsymbol{e}^{-0{,}04912 * \boldsymbol{t}} - 2{,}26 * \boldsymbol{e}^{-0{,}8142 * \boldsymbol{t}} \qquad [\boldsymbol{Volts}]}$$

Las constantes de tiempo seran τ_1 = 1 / 0,04912 = 20,4 seg. y τ_2 = 1 / 0,8142 = 1,23 seg. , se alcanzará el estado de regimen en 5 veces la constante de tiempo mayor es decir en aproximadamente 100 seg.

La siguiente figura muestra en linea gruesa la respuesta $Vo_{(t)}$, graficada mediante MATLAB™ , mientras que las lineas restantes son cada uno de los tres componentes de la expresión de $Vo_{(t)}$.

$$\boxed{V_{O(t)} = -33,3333 + 35,5 * e^{-0,04912*t} - 2,26 * e^{-0,8142*t} \qquad [Volts]}$$