Apunte de física

Mecánica

Sebastián Coca

2022

v.202237

Las siguientes notas corresponden a agregados o correcciones al texto presentado en el libro de Máximo y Alvarenga, que son necesarias desde mi punto de vista para tener una mejor comprensión de la temática.

Tener presente que es una versión preliminar y que se está mejorando constantemente, por este motivo se van a encontrar con secciones incompletas y comentarios.

También se van a encontrar con links a distintos vídeos de Coca (n.d.) donde se desarrollan varios temas.

Índice general

Capítulo 1

Cinemática

1.1. Partícula puntual y movimiento relativo

La definición dada en el libro de partícula es: "Un cuerpo es una *partícula* cuando sus dimensiones son muy pequeñas en comparación con las demás dimensiones que participan en el fenómeno" (Máximo & Alvarenga, 2008, p. 62).

!!!dar la extensión de la definición para cuerpos "grandes"

El *concepto* del movimiento relativo planteado en Máximo y Alvarenga (2008, p. 62), deja en claro que la descripción del problema visto por un observador depende del punto de referencia en el cual se haya situado. Por este motivo es necesario introducir la noción de *sistema de referencia*.

1.1.1. Sistema de referencia

Un sistema de referencia es un conjunto de convenciones usada por un observador para poder medir la posición y otras magnitudes físicas de un sistema físico y de mecánica. Las trayectorias medidas y el valor numérico de muchas magnitudes son relativas al sistema de referencia que se considere, por esa razón, se dice que el movimiento es relativo. Sin embargo, aunque los valores numéricos de las magnitudes pueden diferir de un sistema a otro, siempre están relacionados por relaciones matemáticas tales que permiten a un observador predecir los valores obtenidos por otro observador (Wikipedia, 2020).

De forma sintética y para el uso práctico, podemos definir a un sistema de referencia al que se corresponde con un punto físico de observación desde el cual se describe la posición y movimiento de los cuerpos, generalmente utilizando un *sistema de coordenadas* espacial (sistema de coordenadas cartesianas - 1D, 2D y 3D) y temporal.

Los sistemas de referencia poseen características:

- Independencia respecto al movimiento del cuerpo. Esto implica que la descripción del problema físico no depende del sistema de referencia (por ejemplo, soltar un piedra descripto por un observador al lado del que suelta la piedra, ser el que suelta la piedra o estar arriba de un árbol no cambia el proceso física: la piedra cae al suelo).

- El tiempo, para todos los sistemas de referencia, es absoluto. Es decir, para todos los observadores de un mismo fenómeno, el tiempo en que transcurre es el mismo.[1]

- Las ecuaciones que rigen el movimiento de un cuerpo se cumplen equivalentemente, cualquiera sea el sistema de referencia que se observe. Es decir, que las ecuaciones utilizadas para describir el movimiento van a ser las mismas independiente del sistema de referencia escogido.

Además, existen *"libertades"* en la elección del sistema de referencia:

- Libertad de elegir el origen temporal. Es decir desde cuando comienzo a contar (largo el cronómetro).

- Libertad en la elección de donde ubicar el origen del sistema de coordenadas, normalmente utilizado para ubicar al observador.

Estas libertadas se "restringen" cuando en el problema se especifica que se tiene que describir desde tal lugar y/o contar desde tal otro.

!!!hablar sobre la flecha en los gráficos, su significado y lo mínimo para comprender el s.c.

Temporal

Podemos definir/imaginar un sistema temporal como una recta numérica con un origen arbitrario, una dirección positiva y la opuesta negativa, además de la unidad para definir la escala y su unidad (por ej. 1 h).

[1]Esto es válido para la mecánica clásica, que corresponde a lo estudiado en este curso.

En la vida diaria se identifican muchos de estos sistemas de referencia temporales, por ejemplo el reloj que puede contar de 0 a 12 h (o de 0 a 24 h) y luego comenzar nuevamente. Podemos deducir que las 23 h de ayer corresponden a las -1 h del día de hoy; y que las 30 h de hoy se corresponden con las 6 h de mañana (ambos ejemplos aplicados a relojes de 24 h). Lo mismo es aplicable a los meses, los años, etc. Otro ejemplo muy claro y que se utiliza mucho es la designación AC y DC para indicar fechas antes de Cristo y después de Cristo, donde el nacimiento sería el origen del sistema.

Espacial

Los sistemas de referencia espaciales son básicamente sistemas de coordenadas cartesianos ortogonales en 1, 2 ó 3 dimensiones, según la necesidad. Dónde nuevamente será una o varias rectas numéricas perpendiculares entre sí, todas con un origen que puede o no coincidir (es a elección y necesidad de lo que se quiera describir) y una dirección positiva indicada por la flecha en el eje, junto con su partición y las unidades utilizadas (por ej. 1 km, 5 m, etc.).

Nuevamente, en la vida diaria estamos constantemente utilizando éste tipo de sistema de referencia espaciales, por ejemplo las calles y alturas de la ciudad. Para el caso de Córdoba Capital se corresponde con un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales cuyo origen está ubicado en la esquina de la Plaza San Martín y el Cabildo. Con el uso de los Sistemas de Posicionamiento Global (GPS), proporcionado por los teléfonos móviles al día de hoy, se naturaliza otro sistema utilizado a nivel mundial. Las coordenadas de este sistema poseen nombres: latitud y longitud, utilizadas para ubicar objetos y trayectorias en los distintos tipos de planos. Por ejemplo, la Ciudad de Córdoba posee las siguientes coordenadas geográficas:

$$(\phi = 31^\circ\, 25'\, 0''\,\mathrm{S};\, \lambda = 64^\circ\, 11'\, 0''\,\mathrm{W}),$$

o

$$(\phi = -31^\circ\, 25'\, 0'';\, \lambda = -64^\circ\, 11'\, 0'').$$

Donde en el primer conjunto de coordenadas se indica que es latitud Sur y longitud W (Oeste). Esto se puede obviar al poner el signo menos al comienzo de las coordenadas como se indica en el segundo par, sabiendo que para el Norte y Este se considera positivo.

1.2. Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

Un problema muy común se da, por ejemplo, cuando se quiere viajar a Bs. As. desde Cba. Se sabe que el viaje toma 7 h y que hay que recorrer unos 700 km. Con esta información se puede calcular la velocidad del viaje, unos 100 km/h. De manera equivalente, sabemos que si se viaja a la misma velocidad pero durante 3 h, se puede calcular que la distancia recorrida, 300 km. Por último, si recorrimos 550 km a 100 km/h, se puede saber que se viajó por 5,5 h, es decir, por cinco horas y media. Estos son los problemas que se presentan al trabajar en M.R.U.

La relación matemática que define al M.R.U. es (Máximo & Alvarenga, 2008, p. 64):

$$d = v \cdot t. \tag{1.1}$$

De la misma se pueden derivar relaciones para calcular la velocidad v y el tiempo t:

$$v = \frac{d}{t}; \tag{1.2}$$

$$t = \frac{d}{v}. \tag{1.3}$$

Con las Ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) es posible resolver prácticamente todos los problemas relacionados a M.R.U. El problema surge cuando se introduce el concepto de velocidad negativa. La interpretación física de la velocidad negativa es que el cuerpo en lugar de "avanzar" está retrocediendo. Es decir, que se mueve en dirección hacia los valores negativos en un sistema de coordenadas (sistema de referencia). Pero según la Ecuación (1.2) si la velocidad es negativa, entonces t o d deben ser negativos, uno de ellos, ya que el cociente entre la distancia y el tiempo es la velocidad, la cual es negativa. Por definición, la distancia d no puede ser negativa, por lo tanto el tiempo t es negativo... ¿Pero tiene sentido que el tiempo sea negativo? Según lo visto en (1.1.1) el tiempo negativo tiene sentido físico, pero por ejemplo para un problema donde un auto demora 7 h en recorrer 700 km jamás dará como resultado una velocidad negativa. Esto se debe a que al calcular la velocidad, no se especificó ni el momento de salida ni de llegada, solo que el cuerpo demora cierto tiempo. Podemos decir que en la Ecuación (1.2) no se utiliza el tiempo absoluto, sino el intervalo de tiempo.

1.2.1. Intervalo de tiempo

Se define intervalo de tiempo Δt a la duración de un evento definido entre dos tiempos específicos, final e inicial:

$$\Delta t = t_f - t_i, \tag{1.4}$$

donde t_f se corresponde al tiempo final cuando termina el viaje para nuestro caso y t_i el tiempo de inicio del viaje. Esta magnitud nunca puede ser negativa ya que esto implicaría que se está volviendo en el tiempo. Esto está prohibido por los principios básicos de la mecánica clásica.

Ejemplo. Para nuestro caso en estudio, el viaje a Bs. As., se puede partir a las 7 h y llegar a las 14 h, o de manera equivalente salir a las 12 h y llegar a las 19 h. En ambos casos el intervalo de tiempo fue de $\Delta t = 7\,\text{h}$. ♦

Por lo tanto, en las Ecuaciones (1.1–1.3) la variable tiempo t no tiene sentido, ya que se corresponde con el tiempo absoluto. La magnitud física que evalúa la duración de un suceso es el intervalo de tiempo Δt, y es éste el que se debe utilizar.

1.2.2. Desplazamiento o cambio de posición

Desplazamiento positivo

Según lo visto en la sección (1.2.1) el intervalo de tiempo no es negativo por definición. Entonces, retomando las Ecuaciones (1.1–1.3) jamás podremos obtener una velocidad negativa... si es que seguimos conservando la distancia d.

Si se utiliza d tampoco vamos a poder ubicar a un objeto en un sistema de coordenadas con valor negativo, ya que la distancia evalúa la longitud del punto al origen o la longitud entre dos puntos. Para realizar una descripción correcta la distancia no es útil, en su lugar se puede utilizar la posición del cuerpo (sus coordenadas espaciales en un sistema de referencia) o el desplazamiento que realiza el cuerpo. La correcta es el desplazamiento Δx y no la posición de un cuerpo x.

Se define desplazamiento o cambio de posición Δx a la diferencia de posiciones que experimenta un cuerpo:

$$\Delta x = x_f - x_i, \tag{1.5}$$

donde x_f se corresponde a la posición que alcanza y x_i a la posición inicial desde donde partió.

Los siguientes ejemplos demuestran porque se debe usar Δx y no x.

Ejemplo. Volviendo al problema de viajar a Bs. As. desde Cba., recorriendo 700 km en $\Delta t = 7\,\mathrm{h}$, queremos calcular la velocidad del auto. La misma da $v = \dfrac{700\,\mathrm{km}}{7\,\mathrm{h}} = 100\,\mathrm{km/h}$. Ahora utilicemos un sistema de coordenadas con origen en Cba. ($x_i = 0\,\mathrm{km}$) y positivo hacia Bs. As. ($x_f = 700\,\mathrm{km}$). ¿Cuál de las dos coordenadas deberíamos utilizar? ¿Tiene sentido tener la posibilidad de elegir qué coordenada utilizar? No, lo que tiene sentido es que el desplazamiento realizado por el auto, que fue de $\Delta x = x_f - x_i = 700\,\mathrm{km} - 0\,\mathrm{km} = 700\,\mathrm{km}$. ♦

Ejemplo. Si ahora se utiliza un sistema de coordenadas con origen en La Cumbre, ubicada a 100 km de Cba. entonces tenemos que Cba. está en $x_i = 100\,\mathrm{km}$ y Bs. As. en $x_f = 800\,\mathrm{km}$. Si solo se utilizan coordenadas, seríamos incapaces de obtener la velocidad anterior. Pero el desplazamiento no cambio, sigue siendo de $\Delta x = x_f - x_i = 800\,\mathrm{km} - 100\,\mathrm{km} = 700\,\mathrm{km}$. Este desplazamiento es el mismo que utilizando el sistema de coordenadas con origen en Cba. ♦

Se puede concluir que el desplazamiento que realiza un cuerpo es independiente del sistema de coordenadas utilizado.

Desplazamiento negativo

Comencemos con un par de preguntas, ¿tiene sentido un desplazamiento negativo? ¿Qué significa? En ningún momento se especificó que el desplazamiento debe ser positivo, por lo tanto podría ser negativo. Al analizar la Ecuación (1.5) se observa que si el desplazamiento es negativo, significa que la posición inicial es mayor a la posición final, matemáticamente: $x_i > x_f$. Esto significa que el cuerpo se está dirigiendo en sentido decreciente en el sistema de coordenadas, disminuyendo su coordenada.

Ejemplo. Ahora se considera el caso que el auto vuelve a Cba. desde Bs. As. El sistema de coordenadas utilizado se corresponde a tomar el origen en Cba. y contar hacia Bs. As. Entonces, al considerara la "vuelta" cambian los valores de las coordenadas inicial y final. El auto parte de Bs. As. ($x_i = 700\,\mathrm{km}$) y llega a Cba. ($x_f = 0\,\mathrm{km}$). El desplazamiento del auto en este caso es $\Delta x = 0\,\mathrm{km} - 700\,\mathrm{km} = -700\,\mathrm{km}$. Y por lo establecido en la sección anterior, al calcular la velocidad se utiliza el desplazamiento en lugar de la distancia, cuyo resultado es: $v = \dfrac{-700\,\mathrm{km}}{7\,\mathrm{h}} = -100\,\mathrm{km/h}$. ¡La velocidad es negativa! ♦

Por lo tanto, podemos redefinir las Ecuaciones (1.1–1.3) con todas las consideraciones y análisis realizados:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t; \tag{1.6}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v}. \tag{1.7}$$

Y por último la definición formal que se utilizará de ahora en adelante para la velocidad:

$$\boxed{v \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}}, \tag{1.8}$$

que representa el cambio de posición que realiza un cuerpo en un determinado intervalo de tiempo.

1.2.3. Análisis de unidades

INCLUIR LO DEL SIMELA, UNIDADES FUNDAMENTALES Y ESPECIFICAR QUE POSICIÓN PUEDE SER EN º!!!!

https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_Internacional_de_Unidades

Artículo en la wikipedia sobre el sistema internacional de unidades. Es un artículo muy completo, con muy buena información y referencias. Las secciones que les recomiendo leer principalmente son:

Unidades básicas Unidades derivadas Normas ortográficas relativas a los símbolos

Al realizar el análisis de unidades de las distintas magnitudes físicas presentes: tiempo o intervalo de tiempo; distancia, posición o desplazamiento y velocidad se debe encerrar la variable entre corchetes y solo analizar las unidades que posea, sin importar el valor numérico:

$$
\begin{aligned}
[d] &= \text{ m, km}, \dots; \\
[x] &= \text{ m, km}, \dots; \\
[\Delta x] &= [x_f] - [x_i] = \text{ m, km}, \dots; \\
[t] &= \text{ s, h, días, año}, \dots; \\
[\Delta t] &= [t_f] - [t_i] = \text{ s, h, días, años}, \dots
\end{aligned}
$$

Para el caso de la velocidad que es una magnitud que se calcula en base a una relación, se realiza el análisis de manera equivalente:

$$[v] = \frac{[\Delta x]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m, km}, \dots}{\text{s, h}, \dots} = \text{ m/s, km/h}, \dots$$

Solo se escribieron las unidades más utilizadas: m/s o km/h. Esto no implica que se puedan utilizar otras unidades para la velocidad, como por ejemplo: km/año.

Ejemplo. Un cuerpo recorre una distancia $d = 60\,\text{m}$, sus posiciones inicial y final son respectivamente $x_i = -30\,\text{m}$ y $x_f = 30\,\text{m}$ y su desplazamiento de $\Delta x = 60\,\text{m}$. Análisis de unidades:

$$[d] = \text{ m}; \qquad [x_f] = [x_i] = \text{ m}; \qquad [\Delta x] = \text{ m}.$$

Como todas las variables del problema están en las mismas unidades no hay problema en trabajar directamente con sus magnitudes. ♦

Ejemplo. Un cuerpo posee una velocidad de $v = 60\,\text{km/h}$ y recorre $180\,\text{km}$. Se quiere conocer el tiempo que le toma. Si se equivoca al despejar puede dudar de qué ecuación utilizar para calcular el intervalo de tiempo:

$$\Delta t = \frac{v}{\Delta x} \qquad \text{o} \qquad \Delta t = \frac{\Delta x}{v}.$$

Para resolver este problema basta con realizar un análisis de unidades a cada una de las expresiones. **La relación correcta tiene que dar la misma unidad de ambos lados de la igualdad**. Se sabe que el resultado debe dar en h, la unidad de tiempo involucrada en el problema. Primera relación:

$$
\begin{aligned}
[\Delta t] &= \left[\frac{v}{\Delta x}\right] \\
h &= \frac{[v]}{[\Delta x]} \\
h &= \frac{\text{km/h}}{\text{km}} = \text{km/h} : \text{km} \\
h &= \frac{\cancel{\text{km}}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{\cancel{\text{km}}} \\
\text{¿}\mathbf{h} &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{h}}\mathbf{?} \qquad \longleftarrow \qquad \text{¡No tiene sentido!}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la primera relación no es válida. Segunda relación:

$$
\begin{aligned}
[\Delta t] &= \left[\frac{\Delta x}{v}\right] \\
h &= \frac{[\Delta x]}{[v]} \\
h &= \frac{\text{km}}{\text{km/h}} = \text{km} : \text{km/h} \\
h &= \frac{\cancel{\text{km}}}{1} \cdot \frac{h}{\cancel{\text{km}}} \\
\text{¡}\mathbf{h} &= \mathbf{h}\text{!}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto ésta última expresión es la correcta para el cálculo del tiempo:

$$
\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{180\,\text{km}}{60\,\text{km/h}} = \frac{180}{60}\frac{\text{km}}{\text{km/h}} = 3\,\text{h}
$$

Respuesta: el auto demoró 3 h en recorrer los 180 km viajando a una velocidad de 60 km/h. ♦

Recordar siempre operar sobre las unidades al igual que con los valores numéricos.

Actividades (sistemas de referencia y unidades)

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Expresar el horario indicado según el sistema de referencia indicado, cuyo sistema de referencia tiene origen a las 12h del día 29 de febrero (12h – 29/02).

   a) 13h – 29/02. b) 13h – 28/02. c) 13h – 01/03. d) 24h – 02/03. e) 7h – 29/02.

2. Expresar en el horario utilizado habitualmente los siguientes eventos temporales sabiendo que el sistema de referencia utilizado posee su origen 23h – 29/03.

a) $-23\,\text{h}$. b) $-50\,\text{h}$. c) 13h. d) 24h. e) 45h.

3. Calcular los intervalos de tiempo considerando como instante inicial el origen del sistema indicado en el ejercicio 1. ¿Cómo se relacionan estos intervalos con los resultados del ejercicio 1.?

4. Realizar una gráfico (recta) donde ubique todos los puntos del ejercicio 2. e indique gráficamente los intervalos de tiempo respecto al origen utilizado en este ejercicio. ¿Qué conclusión puede obtener?

5. Dada la información de la siguiente figura, analizar y responder:

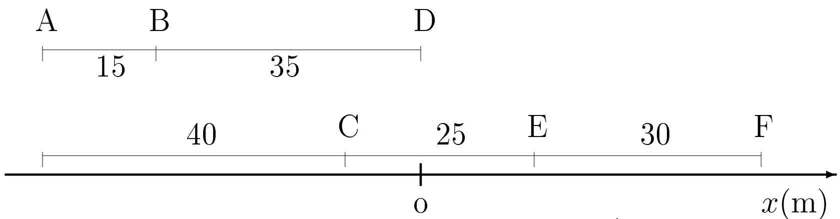

Figura 1.1: Esquema que indica distancias entre los puntos. Además se presenta un sistema de coordenadas (sistema de referencia).

   a) Determinar las coordenadas de cada punto en el sistema de referencia indicado en la figura.

   b) Calcular el desplazamiento entre cada par consecutivo de puntos iniciando de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda. ¿Qué relación presentan entre ellos al calcularlos en ambos sentidos?

   c) Tomar como origen de un nuevo sistema de referencia al punto B y realizar lo mismo que en el punto anterior. Comparar los resultados de ambos ejercicios.

6. Incluir MRU con el gráfico planteando un recorridoz luego cambiando el origen de la descripción!!!

7. Realizar el análisis de unidades para las siguientes relaciones y verificar si son correctas.[2] En caso negativo proponer una modificación para que sea correcta:

a) $d = v^2 \cdot t^2$ b) $v = \dfrac{(\Delta x)^2}{t}$ c) $t = \dfrac{x}{v} + t_i$

d) $x_f = v \cdot (t_f - t_i) + x_i$ e) $x = \dfrac{v}{\Delta t} + v$ f) $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \Delta t$

[2]No en el sentido de la física, sino en el sentido que las unidades lo sean.

8. Realizar nuevamente los siguientes ejercicios del libro, pero ahora indicando el sistema de referencia utilizado, especificar el origen de cada uno y utilizar las Ecuaciones (1.6–1.8):

   - Problemas 6, 7, 10 y 12, recordar realizar el cambio al conjunto nuevo de variables ($d \rightarrow \Delta x$ y $t \rightarrow \Delta t$).
   - Realizar el gráfico conjunto de los problemas 8 y 9.
   - Realizar el análisis del ejercicio 11 con las nuevas ecuaciones.

1.2.4. Gráficos y Ecuaciones de movimiento

Gráfico de la velocidad como función del tiempo

Una de las condiciones para que un cuerpo se mueva en M.R.U., es que su velocidad se mantengan constante *durante todo su movimiento*. Entonces, al realizar el gráfico de la velocidad como función del tiempo ($v \times t$, v vs t o $v - t$), este se corresponde matemáticamente al gráfico de una función constante (Figura 1.2).

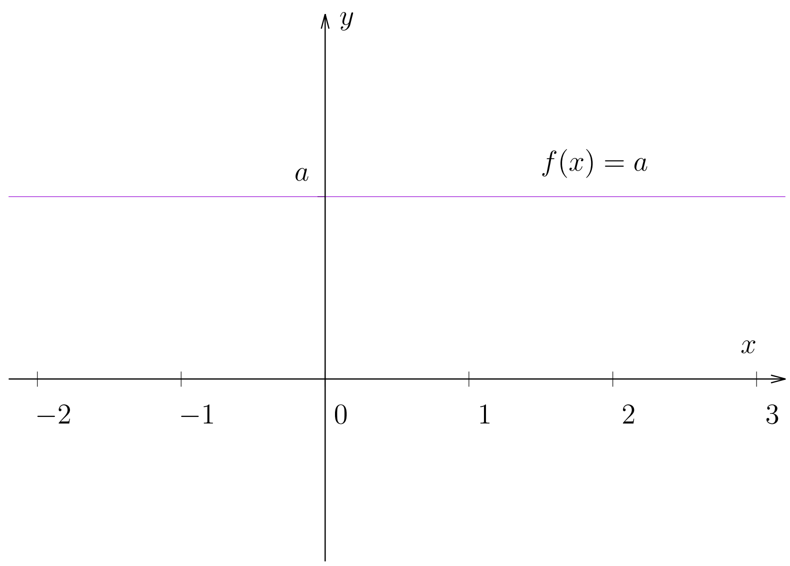

Figura 1.2: Representación gráfica de una función matemática constante, a corresponde a cualquier valor.

La principal diferencia entre un gráfico matemático y uno físico, es que normalmente los físicos están acotados a un intervalo temporal y representa un hecho real. Por ejemplo un auto se desplaza a 60 km/h durante 3 h. La Figura (1.3) represente la velocidad de este auto y solo está definida para el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0\,\text{h}$ y $t = 3\,\text{h}$.[3] Observar que el gráfico se corresponde con las características establecidas en el Apéndice (A.1) y no presenta errores como en las Figuras 3-5 y 3-6, con líneas continuas verticales que son incorrectas.

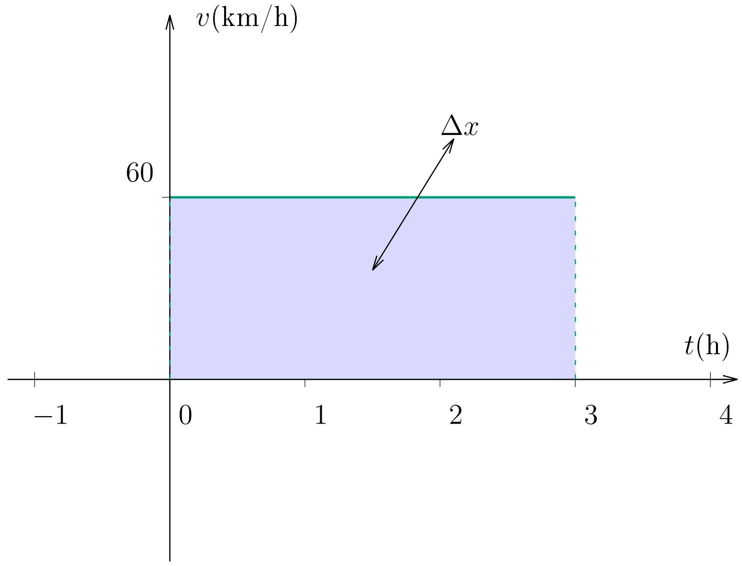

Figura 1.3: Representación gráfica de un auto que se mueve a una velocidad constante de 60 km/h durante 3 h. Además se indica el desplazamiento realizado por el auto, correspondiente al área debajo de la curva.

Del análisis de este gráfico, no se puede decir nada sobre cómo se comportaba el auto antes de las 0 h y después de las 3 h, no hay información. Solo sabemos que el auto se desplazó durante 3 h a 60 km/h y recorrió 180 km. Este desplazamiento que realiza el auto se corresponde al área encerrada debajo de la función, en este caso constante. Los cálculos de la misma, al ser un rectángulo resultan:

$$A = \text{base} \times \text{altura} = \Delta t \times v = (t_f - t_i) \times v = 3h \times 60\,\text{km/h} = 180\,\text{km}.$$

Ecuación de movimiento para la velocidad como función del tiempo

Es posible expresar la información suministrada en la Figura (1.3) a través de una expresión matemática, una función. La Figura (1.2) corresponde a la representación gráfica y

[3] Se evidencia la elección del origen del sistema de coordenadas temporal. El gráfico podría haber estado comprendido, por ejemplo, para el dominio temporal entre $t = -1\,\text{h}$ y $t = 2\,\text{h}$, pero siempre y cuando se cumpla que $\Delta t = 3\,\text{h}$.

matemática para una función constante:

$$f(x) = a,$$

donde a puede tomar cualquier valor real. La diferencia con física es que la función $f(x)$ es válida para todo el dominio, mientras que nuestro problema está acotado a comenzar entre las $0\,\mathrm{h}$ y $3\,\mathrm{h}$. Por lo tanto es necesario suministrar esta información en la ecuación. La forma correcta de realizar esto es a través del uso de los intervalos para acotar el dominio (ver Apéndice A.2). La variable que se quiere acotar es la variable independiente, el tiempo t. Además, en física se toma como intervalo cerrado todo el proceso, ya que se cuenta con información del comienzo y del final, por lo tanto resulta:

$$t \in [0\,\mathrm{h}, 3\,\mathrm{h}].$$

Juntando la información del valor de la velocidad, la ecuación resultante es:

$$v(t) = 60\,\mathrm{km/h}, \quad t \in [0\,\mathrm{h}, 3\,\mathrm{h}].$$

Esta ecuación se la conoce como la **ecuación de movimiento para la velocidad como función del tiempo**. La misma indica la velocidad del cuerpo y el intervalo durante el cuál tuvo esa velocidad.

Por lo tanto se concluye que la información suministrada por la ecuación de movimiento para la velocidad como función del tiempo es equivalente a la presentada en el gráfico de velocidad como función del tiempo.

Ejemplo. Realizar una descripción de lo observado, dar el desplazamiento total y la ecuación de movimiento para la velocidad como función del tiempo para el siguiente gráfico correspondiente a un auto:

Interpretación de la información observada: el auto avanza durante $3\,\mathrm{h}$ a una velocidad de $v = 60\,\mathrm{km/h}$, luego emprende la vuelta viajando durante $2\,\mathrm{h}$ y a una velocidad $v = -30\,\mathrm{km/h}$. En base a esta información es posible calcular los desplazamientos parciales en cada intervalo. Se utiliza la Ecuación (1.6), donde para el primer intervalo se tiene:

$$t_i = 0\,\mathrm{h}, \quad t_f = 3\,\mathrm{h}, \quad v = 60\,\mathrm{km/h},$$

con lo que resulta:

$$\Delta x_1 = 60\,\mathrm{km/h} \cdot (3\,\mathrm{h} - 0\,\mathrm{h}) = 180\,\mathrm{km}.$$

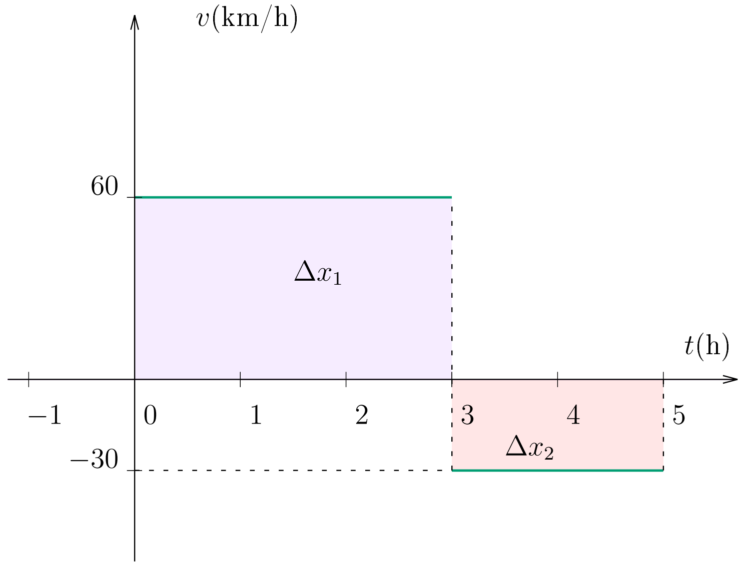

Figura 1.4: Representación gráfica de un auto que se mueve con varias velocidades constante.

Para el segundo intervalo se tiene:

$$t_i = 3\,\text{h}, \quad t_f = 5\,\text{h}, \quad v = -30\,\text{km/h},$$

entonces:

$$\Delta x_2 = -30\,\text{km/h} \cdot (5\,\text{h} - 3\,\text{h}) = -60\,\text{km}.$$

Por lo tanto, podemos expresar el desplazamiento total como la suma de los desplazamientos parciales, es decir:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 180\,\text{km} + (-60\,\text{km}) = 120\,\text{km}.$$

Para la ecuación de movimiento, es necesario conocer la velocidad y el intervalo de validez de la misma, entonces para cada tramo se tiene:

$$v(t) = 60\,\text{km/h}, \quad t \in [0\,\text{h}, 3\,\text{h}]$$
$$v(t) = -30\,\text{km/h}, \quad t \in [3\,\text{h}, 5\,\text{h}].$$

Que se reescribir de la siguiente forma como una única ecuación:

$$v(t) = \begin{cases} 60\,\text{km/h}, & t \in [0\,\text{h}, 3\,\text{h}] \\ -30\,\text{km/h}, & t \in [3\,\text{h}, 5\,\text{h}] \end{cases}$$

Con la ecuación de movimiento para la velocidad, se puede saber información de la velocidad que posee el auto en cierto instante. Por ejemplo, se puede responder: ¿qué velocidad posee a las 3 horas, 41 minutos y 18 segundos. Lo primero es ver a qué intervalo pertenece el tiempo deseado y vincular con la velocidad correspondiente. Ésta es la velocidad que posee el auto en ese instante. Para nuestra pregunta, vemos que:

$$\text{3 horas, 41 minutos y 18 segundos} \in [3\,\mathrm{h}, 5\,\mathrm{h}],$$

por lo tanto la velocidad en ese instante es $v = -30\,\mathrm{km/h}$.

Pero todavía hay problemas, ya que no es posible responder con certeza ¿cuál es la velocidad que posee a las $3\,\mathrm{h}$? Este instante en particular, según lo expresado en la ecuación de movimiento, pertenece a ambos intervalos.[4] Es necesario notar que este problema surge por la suposición que el auto solo puede tomar valores constantes de velocidad y no variar de manera continua la velocidad. Entonces al cambiar la velocidad lo realiza de manera instantánea "saltando" de un valor a otro, es decir produciendo una discontinuidad en la función. Para solucionar este problema se utiliza la convención que el valor de la función, en nuestro caso velocidad, toma el valor del que viene en los tiempos previos. Por lo tanto, la velocidad es $v(3\,\mathrm{h}) = 60\,\mathrm{km/h}$ y se lee: la velocidad del auto es de $60\,\mathrm{km/h}$ a las $3\,\mathrm{h}$. $v = 60\,\mathrm{km/h}$. Por último, esta información también tiene que ser presentada en la ecuación de movimiento y en el gráfico. Según la convención, el punto de cambio de velocidad pertenece al intervalo de la izquierda, por lo tanto el intervalo de la derecha es abierto. Con este cambio la ecuación de movimiento para la velocidad como función de tiempo resulta:

$$v(t) = \begin{cases} 60\,\mathrm{km/h}, & t \in [0\,\mathrm{h}, 3\,\mathrm{h}] \\ -30\,\mathrm{km/h}, & t \in (3\,\mathrm{h}, 5\,\mathrm{h}] \end{cases}$$

Y para el gráfico se indica con punto cerrado la pertenencia y punto abierto que no pertenece:

♦

Tomar como regla para los intervalos que los mismos comienzan abiertos a izquierda y son cerrados a derecha, a excepción del primero que es cerrado a izquierda (los extremos pertenecen por ser el comienzo y fin del evento físico).

[4] Ambos intervalos son cerrados sus extremos, por lo tanto, $t = 3\,\mathrm{h}$ pertenece a ambos intervalos según lo indicado en el Apéndice (A.2).

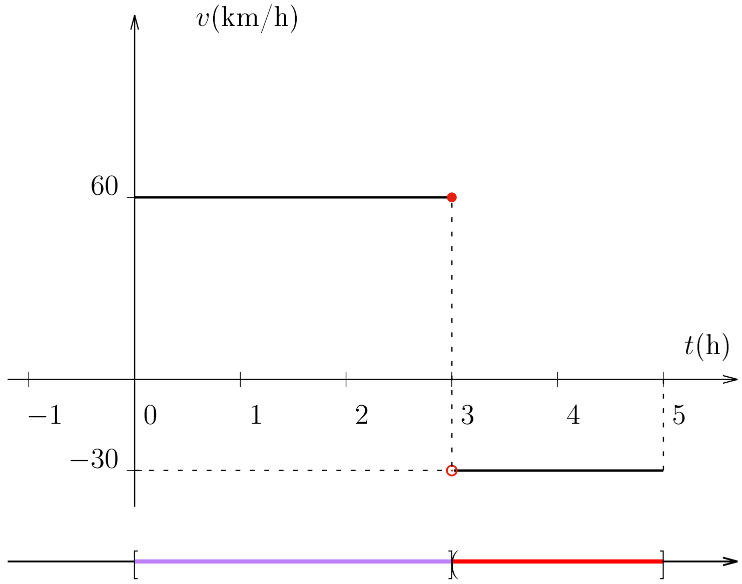

Figura 1.5: Representación gráfica de un auto que se mueve con varias velocidades constante. Se tiene en cuenta la condición que a las 3 h el punto pertenece al intervalo de la izquierda y no de la derecha. Se indica esto con punto cerrado/punto abierto respectivamente en color rojo. También se indican los intervalos sobre un segundo eje de coordenadas temporal.

Gráfico de la posición como función del tiempo

Ver próxima sección.

Ecuación de movimiento para la posición como función del tiempo

En los siguientes links van a poder acceder a los vídeos de las clases preparadas para los temas desarrollados en las secciones (1.2.4) y (1.2.4):

- Parte 1: https://youtu.be/Hz0zQMLYsaM
- Parte 2: https://youtu.be/ADKcXhJsD-w

Ejemplo. Para analizar un caso práctico, vamos a considerar que se conoce la ecuación de movimiento para la velocidad como función del tiempo:

$$v(t) = \begin{cases} 70\,\mathrm{km/h}, & t \in [-1\,\mathrm{h}, 2\,\mathrm{h}] \\ -80\,\mathrm{km/h}, & t \in (2\,\mathrm{h}, 3\,\mathrm{h}] \\ 50\,\mathrm{km/h}, & t \in (3\,\mathrm{h}, 5\,\mathrm{h}] \end{cases}$$

y el dato que se conoce sobre su posición es que el cuerpo se ubica en 50 km cuando $t = 0{,}5\,\mathrm{h}$. Se quiere su ecuación de movimiento para la posición como función del tiempo y su gráfico correspondiente.

Se desea construir su ecuación de movimiento para la posición como función del tiempo $x(t)$. Al igual que para la velocidad, $x(t)$ debe poseer tres términos correspondientes a los tres intervalos. Notar que el dato no se corresponde con el tiempo inicial ni el final del movimiento ni de ninguno de los tiempos en los cuales cambia la velocidad, sino que es un dato dentro del intervalo de tiempo en el cual el cuerpo desarrolla su movimiento. De manera genérica es posible escribir su ecuación de movimiento para la posición:

$$x(t) = \begin{cases} v_1(t - t_{01}) + x_{01} \\ v_2(t - t_{02}) + x_{02} \\ v_3(t - t_{03}) + x_{03} \end{cases}$$

donde los subíndices 1, 2 ó 3 hacen referencia a cada intervalo. De la ecuación de la velocidad se tienen datos de las mismas y cómo el dato se corresponde con un dato en el primer intervalo, es posible reescribir la ecuación anterior:

$$x(t) = \begin{cases} 70\,\mathrm{km/h}(t - 0{,}5\,\mathrm{h}) + 50\,\mathrm{km}, & t \in [-1\,\mathrm{h}, 2\,\mathrm{h}] \\ -80\,\mathrm{km/h}(t - t_{02}) + x_{02}, & t \in (2\,\mathrm{h}, 3\,\mathrm{h}] \\ 50\,\mathrm{km/h}(t - t_{03}) + x_{03}, & t \in (3\,\mathrm{h}, 5\,\mathrm{h}] \end{cases}$$

Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar los pares de puntos (t_0, x_0) correspondientes a cada intervalo.

Para el caso de los instantes de tiempo, se recomienda tomar el instante inicial de cada intervalo, que además se corresponde con los cambios de velocidad que posee el cuerpo. Esto da como resultado:

$$t_{02} = 2\,\mathrm{h} \qquad \text{y} \qquad t_{03} = 3\,\mathrm{h}.$$

Para obtener las posiciones correspondientes a los instantes recién obtenidos, es importante recordar que **la posición de un cuerpo siempre es continua**. Esto quiere decir que en los instantes en los cuales cambia de velocidad, la posición a la que llega el cuerpo con una velocidad es la misma posición de la que sale pero con otra velocidad. Físicamente, se plantea las siguientes ecuaciones, una por cada tiempo en el cual se da un cambio de la velocidad (dos en el problema):

$$x_1(2\,\mathrm{h}) = x_2(2\,\mathrm{h}) \qquad \text{y} \qquad x_2(3\,\mathrm{h}) = x_3(3\,\mathrm{h}),$$

donde nuevamente el subíndice hace referencia a la ecuación en su correspondiente intervalo. Por lo tanto para el primer y segundo intervalo, que es para $t = 2\,\mathrm{h}$, se tiene:

$$70\,\mathrm{km/h}(\mathbf{2}\,\mathrm{h} - 0{,}5\,\mathrm{h}) + 50\,\mathrm{km} = -80\,\mathrm{km/h}(\mathbf{2}\,\mathrm{h} - 2\,\mathrm{h}) + x_{02},$$

Donde en negrita se remarcó la evaluación de la función de posición en el instante en que cambia la velocidad. De esta ecuación es posible despejar la posición x_{02} correspondiente a $t = 2\,\mathrm{h}$:

$$x_{02} = 155\,\mathrm{km}.$$

De manera equivalente se plantea para la intersección del segundo y tercer intervalo:

$$-80\,\mathrm{km/h}(\mathbf{3}\,\mathrm{h} - 2\,\mathrm{h}) + 155\,\mathrm{km} = 50\,\mathrm{km/h}(\mathbf{3}\,\mathrm{h} - 3\,\mathrm{h}) + x_{03},$$

cuyo resultado da:

$$x_{03} = 75\,\mathrm{km}.$$

Con todos los datos obtenidos, es posible escribir la ecuación para la posición como función del tiempo y su gráfico:

$$x(t) = \begin{cases} 70\,\mathrm{km/h}(t - 0{,}5\,\mathrm{h}) + 50\,\mathrm{km}, & t \in [-1\,\mathrm{h}, 2\,\mathrm{h}] \\ -80\,\mathrm{km/h}(t - 2\,\mathrm{h}) + 155\,\mathrm{km}, & t \in (2\,\mathrm{h}, 3\,\mathrm{h}] \\ 50\,\mathrm{km/h}(t - 3\,\mathrm{h}) + 75\,\mathrm{km}, & t \in (3\,\mathrm{h}, 5\,\mathrm{h}] \end{cases}$$

Observar que la posición como función del tiempo se corresponde con el gráfico de una función que se puede realizar sin levantar la mano, es decir que es una función continua. ♦

Actividades (gráficos y ecuaciones de movimiento)

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Realizar el gráfico de $v - t$ correcto y luego escribir la ecuación de movimiento de la velocidad para las Figuras 3-5 y 3-6 (Máximo & Alvarenga, 2008, p. 65).

2. Para la Figura 3-8 y la Figura del Ejercicio 12 (Máximo & Alvarenga, 2008, p. 68) realizar el cálculo de la velocidad, construir el gráfico y escribir la ecuación de movimiento para la velocidad como función del tiempo.

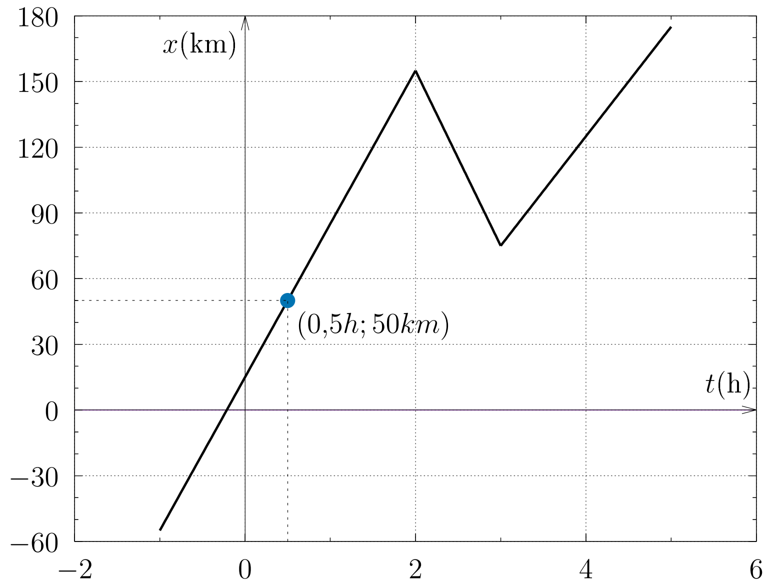

Figura 1.6: Ecuación de movimiento del ejemplo. Se indica el dato dado en el problema.

3. Realizar el gráfico para la siguiente ecuación de movimiento de la velocidad como función del tiempo:

$$v(t) = \begin{cases} -30\,\mathrm{km/h}, & t \in [-2\,\mathrm{h}, 1\,\mathrm{h}] \\ 80\,\mathrm{km/h}, & t \in (1\,\mathrm{h}, 4\,\mathrm{h}] \\ 50\,\mathrm{km/h}, & t \in (4\,\mathrm{h}, 6{,}5\,\mathrm{h}] \\ -20\,\mathrm{km/h}, & t \in (6{,}5\,\mathrm{h}, 6{,}75\,\mathrm{h}] \\ 70\,\mathrm{km/h}, & t \in (6{,}75\,\mathrm{h}, 9\,\mathrm{h}] \end{cases}$$

   Calcular el desplazamiento total que realiza.

4. Construir el gráfico y la ecuación de movimiento de la posición como función del tiempo correspondiente al punto 1. considerando como dato para cada uno:

   a) la posición del cuerpo es 0 km cuando el tiempo es 0 h;

   b) posición de 15 km en 0,5 h.

5. Escribir la ecuación de movimiento $x(t)$ para los puntos del ejercicio 2.

6. Construir la ecuación de movimiento $x(t)$ y el gráfico correspondiente para el problema de la actividad 3., considerar los siguientes datos:

   a) $(t_0; x_0) = (-2\,\mathrm{h}; -40\,\mathrm{km})$;

   b) $(t_0; x_0) = (0\,\mathrm{h}; 40\,\mathrm{km})$;

   c) $(t_0; x_0) = (0\,\mathrm{h}; -40\,\mathrm{km})$;

7. Tomar $x(t)$ construida para el caso c) y responder:

   a) Determinar la posición del cuerpo para los siguientes instantes: $t = 0\,\mathrm{h}$, $t = -1{,}25\,\mathrm{h}$, $t = 5{,}5\,\mathrm{h}$ y $t = 8{,}\overline{3}\,\mathrm{h}$.

   b) Determinar en qué instante de tiempo el cuerpo se encuentra en $x = 20\,\mathrm{km}$, $x = -70\,\mathrm{km}$ y en $x = 450\,\mathrm{km}$. ¿Qué conclusiones puede obtener de éste ejercicio?

   c) Calcular el desplazamiento para el intervalo: $[2\,\mathrm{h}, 7\,\mathrm{h}]$.

   d) Determinar la velocidad que el cuerpo desarrolla durante el intervalo especificado en el punto anterior.

En el Anexo (A.3) van a encontrar la metodología para realizar gráficos de funciones de a tramos en GeoGebra y puedan verificar si los gráficos que realizaron están correctos.

1.2.5. Velocidad media, rapidez y velocidad instantánea

En los siguientes links van a poder acceder a los vídeos de las clases preparadas para los temas desarrollados en la sección (1.2.5):

- Parte 1: Velocidad media, rapidez y velocidad instantánea (método gráfico)
  https://youtu.be/z2VE5GNGZqQ
- Parte 2: Velocidad instantánea (método analítico)
  https://youtu.be/ae_HijqGzMA

MENCIONAR QUE LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA ES LA VELOCIDAD MEDIA CUANDO Dt=0, ESTO ES LO QUE SE CALCULA.

Ejemplo práctico. Una forma práctica de entender la diferencia entre la velocidad instantánea y la media y el proceso por el cual es posible calcular la velocidad instantánea a través de la velocidad media es al utilizar el poder de cómputo de las computadoras.

Suponga que se quiere calcular la velocidad instantánea de un cuerpo con la siguiente ecuación de movimiento:

$$x(t) = 5t^3 - 2t^2 + 7t - 19,$$

en el instante $t = 2{,}5\,\mathrm{h}$ ($[x] = \mathrm{km}$).

Se construye una tabla y con la ayuda de una planilla de cálculo, se computa el valor de la velocidad media para distintos valores del intervalos de tiempos, cada vez más chicos. Cuando el intervalo de tiempo tienda a cero, $\Delta t \to 0$, se obtiene la velocidad instantánea.

En la siguiente tabla se presentan algunos casos:

			1º paso	2º paso	3º paso	4º paso	
t_i	Δt	t_f	x_i	x_f	Δx	$\overline{v} = {}^{\Delta x}/_{\Delta t}$	$\lvert v(2{,}5\,\mathrm{h}) - \overline{v}\rvert$
2,5	1	3,5	64,125	195,375	131,25	131,25	40,5
2,5	0,5	3	64,125	119	54,875	109,75	19
2,5	0,125	2,625	64,125	76,03320313	11,90820313	95,265625	4,515625
2,5	0,003960625	2,50390625	64,125	64,48003417	0,3550341725	90,88874817	0,1387481689
2,5	0,000244140625	2,500244141	64,125	64,14715788	0,02215787776	90,75866729	0,008667290211

Tabla 1.1: Ejemplo práctico del cómputo de la velocidad instantánea a través de la velocidad media; $[t] =$ h y $[x] =$ km. Se indican los primeros 4 pasos para el cómputo de la velocidad instantánea y la diferencia con la velocidad instantánea ($v(2{,}5\,\mathrm{h}) = 90{,}75\,\mathrm{km/h}$).

Se observa en la Tabla (1.1) como la velocidad media se aproxima a la velocidad instantánea a medida que el intervalo de tiempo se reduce, esto se evidencia en el valor absoluto entre las diferencias de velocidades expuesto en la última columna. Se especifican los cuatro primeros pasos del cálculo de la velocidad instantánea para cada intervalo de tiempo. La posición inicial x_i no cambia su valor debido a que el instante inicial t_i es siempre el mismo.

La Figura (1.7) presenta los resultados de la Tabla (1.1) de manera gráfica. En negro corresponde a la función de posición $x(t)$, en verde, violeta y azul se presentan las rectas correspondientes a cuerpos con velocidades medias de 131,25 km/h, 109,75 km/h y 95,27 km/h respectivamente. Por último, la recta tangente en el punto es roja.

En el siguiente archivo acceden a una planilla de cálculo para verificar lo establecido en la Tabla (1.1) y probar con otros valores de tiempo para calcular la velocidad instantánea (otro valor del instante inicial t_i), distintos intervalos de tiempos y formas de disminuir el mismo.

Actividades (velocidades)

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Para los siguientes gráficos $x(t)$ calcular la velocidad según se indique. En el caso de velocidades medias representarlas en el gráfico y explicar que representan físicamente; para rapidez

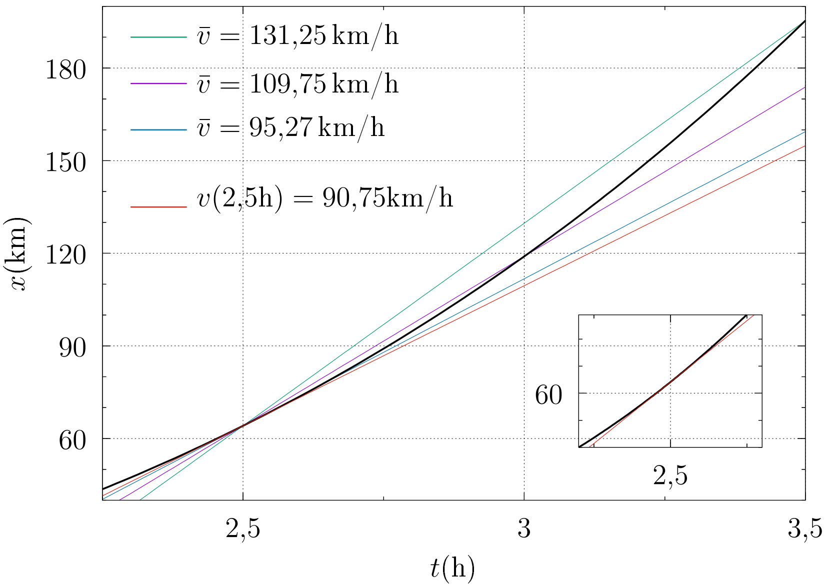

Figura 1.7: Función posición $x(t)$ en el intervalo de interés. Se presentan las distintas velocidades medias calculadas en la Tabla (1.1) en color verde, violeta y azul, junto con la velocidad instantánea en color rojo. En el recuadro inferior presenta en detalla la función de posición junto con la recta tangente.

explicar que representa:

a) Velocidad media en $t \in [-6\,\mathrm{h}, 6\,\mathrm{h}]$ y $t \in [-2\,\mathrm{h}, 5\,\mathrm{h}]$; y velocidad instantánea en: $-6\,\mathrm{h}$, $0\,\mathrm{h}$, $3\,\mathrm{h}$ y $5\,\mathrm{h}$.

b) Rapidez en $t \in [-6\,\mathrm{h}, 2\,\mathrm{h}]$ y $t \in [4\,\mathrm{h}, 8\,\mathrm{h}]$; y velocidad instantánea en: $-4\,\mathrm{h}$, $0\,\mathrm{h}$ y $4\,\mathrm{h}$.

c) Velocidad media en $t \in [-4\,\mathrm{h}, 5\,\mathrm{h}]$; rapidez en $t \in [-4\,\mathrm{h}, 5\,\mathrm{h}]$; y velocidad instantánea en: $-6\,\mathrm{h}$, $-1\,\mathrm{h}$, $5\,\mathrm{h}$ y $7\,\mathrm{h}$.

2. Calcular la velocidad instantánea en $-2\,\mathrm{h}$, $-1\,\mathrm{h}$, $0\,\mathrm{h}$ y $3\,\mathrm{h}$ para las siguientes ecuaciones de movimiento (donde $[x] = km$ y $[t] = h$):

   a) $x(t) = 30t + 15$.

   b) $x(t) = 30t^2 + 15$.

   c) $x(t) = -5t^2 + 10t - 5$.

3. Para las ecuaciones de movimiento del ítem anterior calcular la velocidad media para los siguientes intervalos de tiempo: $[-2\,\mathrm{h}, -1\,\mathrm{h}]$, $[-2\,\mathrm{h}, 3\,\mathrm{h}]$ y $[-2\,\mathrm{h}, 2\,\mathrm{h}]$. ¿Cuál de las tres velocidades medias se aproxima más al valor de la velocidad instantánea en $t = -2\,\mathrm{h}$? Justificar.

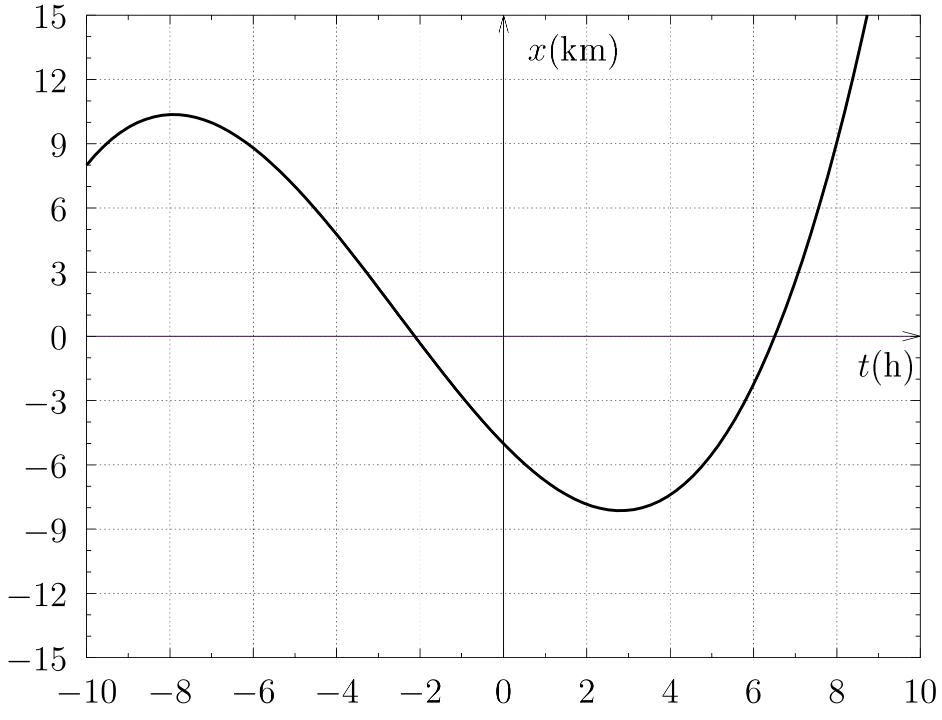

Figura 1.8: Actividad 1.a

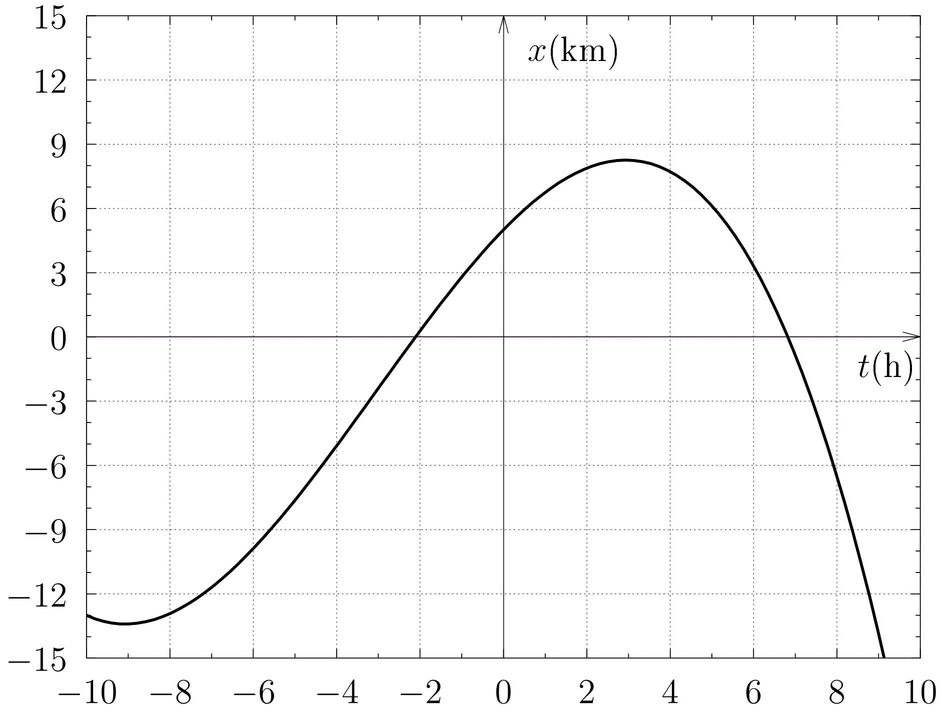

Figura 1.9: Actividad 1.b

4. Un auto se desplaza durante 3 h a 75 km/h, luego se deteniene y al cabo de media hora sigue su viaje. Cómo va demorado y tiene que llegar en 2, 5 h a su destino, decide ir más rápido

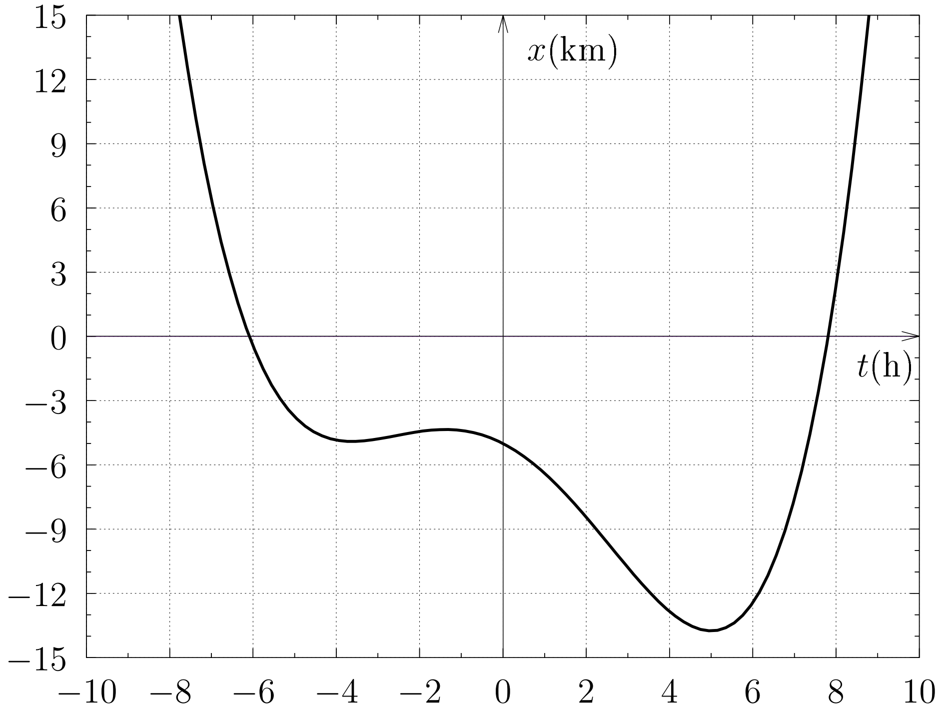

Figura 1.10: Actividad 1.c

para poder recorrer los 220 km restantes. Responder:

a) Construir el gráfico $v - t$.

b) Escribir la ecuación de movimiento para $v(t)$.

c) Realizar el gráfico $x - t$ al suponer que parte a las $7:30h$.

d) A continuación construir la ecuación de movimiento $x(t)$.

e) Calcular la velocidad media de todo el viaje. ¿Cómo interpreta este resultado?

f) Realice nuevamente la resolución del problema suponiendo que la ubicación de la cual parte es $x_0 = 153\,\text{km}$ en un sistema de referencia que cuenta en sentido contrario a donde se dirige.

5. Calcular la velocidad instantánea en $-1\,\text{s}$, $-2\,\text{s}$ y $1\,\text{s}$ para las siguientes ecuaciones de movimiento (donde $[x] = m$ y $[t] = s$):

a) $x(t) = 3t^3 - 5t^2$

b) $x(t) = \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{3}{2}t^2 + 10t$

c) $x(t) = \dfrac{2}{t+3}$

d) $x(t) = \dfrac{5}{t^2} + 4t$

1.3. Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

1.3.1. Caída Libre y Tiro Vertical

En el siguiente link van a poder acceder al vídeo de la clase preparadas para el tema desarrollado en la sección (1.3.1). Primero se recomienda estudiar el capítulo 3.5 (Máximo y Alvarenga). Tengan presente que el tratamiento del Tiro Vertical no se presenta de manera detalla en el libro:

- Aplicación de MRUV: Caída Libre y Tiro Vertical.
  https://youtu.be/8vFQ6gut3Do

1.4. Movimientos en más de una dimensión

En el estudio del movimiento de los cuerpos, el paso siguiente es considerar que el movimiento es en más de una dimensión. Por ejemplo puede ser cuando se arroja una piedra o una jabalina, dar un pase en cualquier deporte, etc. En todos los casos es nuestro cerebro el encargado de resolver el problema y conseguir el objetivo deseado, hacer llegar el cuerpo a un punto específico, sin siquiera darnos cuenta. Para esto es necesario estimar la dirección, sentido y la magnitud de la velocidad, fuerza o aceleración que se le otorgue al cuerpo. Por lo tanto, ahora es necesario dar más información de las magnitudes físicas y representarlas por vectores. Por tal motivo primero se estudia la adición de vectores.

AGREGAR EL TRATAMIENTO COMO COORDENADAS DE LOS VECTORES (AVERIGUAR NOMBRE)!!!

1.4.1. Adición de vectores

En el siguiente link van a poder acceder al vídeo de la clase preparadas para el tema desarrollado en la sección (1.4.1). Primero se recomienda estudiar los capítulos 4.1 y 4.2 (Máximo y Alvarenga):

- Adición de vectores que no son ni paralelos ni perpendiculares entre sí (métdos gráfico y analítico)
  https://youtu.be/FMqEXO3b8E4

Actividades (vectores)

1. Dados los siguientes vectores:[5] $\vec{A} = 5\,\text{m}$ con $\alpha = 0°$, $\vec{B} = 13\,\text{m}$ con $\beta = 90°$, $\vec{C} = 3\,\text{m}$ con $\gamma = 180°$, $\vec{D} = 5\,\text{m}$ con $\delta = 60°$ y $\vec{E} = 7\,\text{m}$ con $\epsilon = 200°$, realizar las siguientes adiciones con el método gráfico:

   a) $\vec{A} + \vec{C}$

   b) $\vec{D} + \vec{B}$

   c) $\vec{A} + \vec{C} + \vec{E}$

   d) $\vec{A} + \vec{C} + \vec{E} + \vec{B} + \vec{D}$

   e) $3\vec{D}$

   f) $\vec{A} + 2\vec{C}$

   g) $\vec{A} - \vec{C}$

2. A continuación realizar la adición analítica con los mismos vectores del ejercicio anterior:

   a) $\vec{C} + \vec{A}$

   b) $\vec{D} + \vec{C}$

   c) $\vec{D} + \vec{C} + \vec{B}$

   d) $\vec{B} + \vec{E} + \vec{D}$

   e) $\vec{C} - \frac{1}{2}\vec{A}$

1.4.2. Composición de movimientos

A continuación está el link para acceder al vídeo de la clase preparadas para el tema desarrollado en la sección (1.4.2):

- Composición de movimientos, aplicación a dos casos prácticos
  https://youtu.be/R1N_fhKb4pY

Actividades (composición de movimientos)

1. Calcular el tiempo de vuelo y el alcance que realiza un cuerpo que es arrojado con $\vec{v} = 72\,\text{km/h}$, con una inclinación **respecto de la vertical** de:

[5] El ángulo especifica la dirección y sentido del vector.

a) $\alpha = 30°$

b) $\alpha = 40°$

c) $\alpha = 50°$

d) $\alpha = 60°$

e) $\alpha = 45°$

2. Realizar un análisis de los datos obtenidos en el punto anterior y determinar bajo qué condiciones se alcanza (justificar sus respuestas):

    a) máxima distancia horizontal;

    b) máxima altura vertical;

    c) máximo tiempo de vuelo;

    d) máximo tiempo de vuelo y altura vertical;

    e) máximo tiempo de vuelo y distancia horizontal;

    f) ¿Será posible cumplir que el cuerpo posea simultaneamente máxima altura vertical y distancia horizontal?

    g) Si se aplica este análisis a los deportes, por ejemplo lanzamiento de bala o jabalina, ¿cuáles son las condiciones óptimas que se tienen que cumplir para ganar la competencia?

3. En el lanzamiento de disco un competidor obtiene los siguientes datos de su lanzamiento:

    - Alcance 76,80 m (record mundial femenino).
    - Tiempo de vuelo 3,78 s.

    Responder:

    a) Determinar el vector velocidad que el deportista le otorga al disco.

    b) ¿Puede alcanzar los mismos resultados con otro vector velocidad? Justificar.

    c) Si el tiempo de vuelo no es un dato exacto, sino que es un intervalo de tiempo centrado en el valor expuesto, ¿qué sucede en este caso con el vector velocidad? Realizar el análisis.

Capítulo 2

Dinámica

En esta capítulo estudiaremos las causas que afectan y/o modifican los movimientos de un cuerpo como la influencia externa de todos los otros cuerpos o el sistema donde se encuentra. Estas interacciones externas son lo que se conocen como *fuerzas* y dan origen a distintos tipos de movimientos.

2.1. Leyes de Newton

2.1.1. 1º Ley de Newton o Ley de Inercia

La 1º Ley de Newton establece que un cuerpo mantiene su estado de movimiento a menos que experimente una interacción externa.

Con estado de movimiento se refiere a que mantiene la velocidad que éste posee, ya sea que esté en reposo ($\vec{v} = 0$) o en M.R.U. ($|\vec{v}|$ =cte.). Cuando cambia su estado de movimiento, ya sea por cambio en la magnitud de la velocidad ($|\vec{v}| \neq$cte.) o en su dirección es por una fuerza que produce la interacción.

También se conoce como Ley de Inercia, donde la inercia es la capacidad de un cuerpo de mantener (de no querer cambiar) su estado de movimiento, es decir de oponerse a cambiar su estado de movimiento.

Dentro del estudio de las Leyes de Newton, es muy importante realizar el análisis previo del problema y prever una posible solución o idea por donde buscar la solución. Para ellos es necesario realizar el análisis de las fuerzas que afectan al cuerpo en estudio. Éste tipo de análisis se denomina *Diagrama de cuerpo aislado.*

Diagrama de cuerpo aislado

A continuación está el link para acceder al vídeo de la clase preparadas para el tema desarrollado en la sección (2.1.1):

- Diagrama de cuerpo aislado. Aplicación a un sistema en equilibrio
  https://youtu.be/O173vt6zEno

2.1.2. 2º Ley de Newton

La 2º Ley de Newton establece que la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que éste adquiere:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

2.1.3. 3º Ley de Newton o Ley de Acción y Reacción

La 3º Ley de Newton establece que ante la acción ($\vec{A}$) que un cuerpo realice a otro, éste le realiza una reacción ($\vec{Re}$) que es igual en magnitud y dirección, pero de sentido contrario:

$$\vec{A} = -\vec{Re}$$

2.2. Aplicaciones de las Leyes de Newton

2.2.1. Balanza – báscula

A continuación está el link para acceder al vídeo de la clase preparadas para el tema desarrollado en la sección (2.2.1):

- Aplicación de las Leyes de Newton: balanza – báscula
  https://youtu.be/vFnwwjrbMFc

Actividades (balanza)

1. Realizar el análisis físico, en base a las Leyes de Newton, de una persona parada sobre una superficie plana cuando desea saltar. ¿Cómo se modifica su peso y la fuerza normal? ¿Es

necesaria una fuerza extra para que la persona logre saltar? En caso afirmativo, ¿quién realiza esta fuerza?

2. ¿Qué sucede si la superficie está inclinada?

3. Realizar el desarrollo analítico para el caso de una persona ubicada sobre una balanza dentro del ascensor que desciende acelerado.

4. Realizar el análisis de las siguiente situaciones y expresar en porcentaje el cambio ficticio de la masa ($m = 55\,\mathrm{kg}$) que sufriría la persona por encontrarse en:[1]

    a) $\vec{a} = 4{,}9\,\mathrm{m/s^2}$.

    b) $\vec{a} = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

    c) $\vec{a} = 19{,}6\,\mathrm{m/s^2}$.

    d) $\vec{a} = -4{,}9\,\mathrm{m/s^2}$.

    e) Se corta el cable del ascensor.

    f) ¿Qué vector aceleración se necesita para que la balanza indique un 10 % de aumento del peso?

    ¿Qué conclusión puede obtener sobre los porcentajes de variación de "la masa" respecto de las aceleraciones que experimenta la persona dentro del ascensor?

2.2.2. Plano inclinado

Dado el siguiente problema que se muestra en la Figura (2.1): un cuerpo sobre un plano inclinado ($\alpha = 30°$), cuya masa es $m = 10\,\mathrm{kg}$, es tirado hacia arriba por una soga en la dirección del plano por una fuerza $\vec{F} = 30\,\mathrm{N}$. Entre el cuerpo y el plano existe fricción, siendo sus coeficientes: $\mu_{e_{max}} = 0{,}8$ para la fricción estática máxima y $\mu_c = 0{,}4$ para la cinética. Pregunta a responder: *¿En qué condición se encuentra el cuerpo?*

Al analizar el problema, existen 5 posibles condiciones en las que se puede encontrar el cuerpo: subiendo por el plano (con equilibrio -MRU- o sin equilibrio -MRUV-), quieto (estático) o bajando por el plano (con y sin equilibrio), cada situación con su correspondiente coeficiente de fricción (Tabla 2.1).

Para poder responder la pregunta, se siguen estos pasos:

[1] Se considera que el sistema de referencia es positivo en la dirección vertical ascendente.

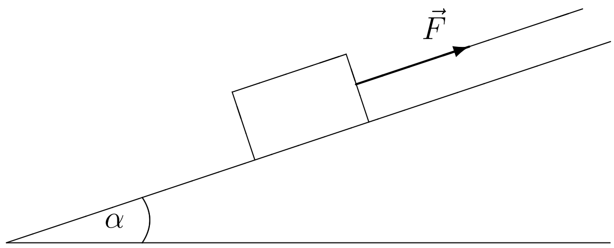

Figura 2.1: Esquema de la situación problemática sobre el plano inclinado.

Estado del cuerpo	Características del		Tipo de Fricción
	Estado	Movimiento	
Subiendo	En equilibrio	MRU ($v \neq 0$)	cinética
	Sin equilibrio	MRUV	
Quieto	En equilibrio	MRU ($v = 0$)	estática
Bajando	En equilibrio	MRU ($v \neq 0$)	cinética
	Sin equilibrio	MRUV	

Tabla 2.1: Posibles condiciones en las que se encuentra el cuerpo. Además se identifican los coeficientes de fricción según la situación.

1. Identificar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, utilizar la 1º y 3º Leyes de Newton;
2. Realizar el diagrama de cuerpos aislado de las fuerzas que interactúan con el cuerpo;
3. Escoger el sistema de referencia a utilizar;
4. Ubicar las fuerzas en el sistema de referencia sin considerar al cuerpo;
5. Descomponer las fuerzas que no coincidan con los ejes coordenados del sistema escogido.
6. Plantear la 2º Ley de Newton y analizar el problema.

Identificación de fuerzas según las leyes de Newton

Las fuerzas que se identifican son la originada por la atracción gravitatorio de la Tierra: el peso ($\vec{P}$), con dirección y sentido al centro de la Tierra. La misma se aplica desde el centro de masa del cuerpo, normalmente es el centro geométrico si el cuerpo es homogéneo.

La reacción producida por la acción que produce el peso sobre la superficie: fuerza normal N, con dirección perpendicular a la superficie y sentido saliente de la superficie. Aplicada desde la superficie de contacto (cuña) sobre el cuerpo.

También la fuerza de fricción f_r, que es opuesta al movimiento o intento de movimiento del cuerpo; para esta fuerza vamos a suponer que el cuerpo se encuentra ascendiendo o intentando ascender sobre la cuña. La misma se aplica sobre la superficie de contacto entre las dos superficies, la del cuerpo en estudio y la de la cuña.

Notar que la fuerza normal y de fricción son consecuencia directa de la 3º Ley de Newton.

Diagrama de cuerpo aislado y sistema de referencia

En la Figura (2.2) se representan las fuerzas identificadas anteriormente sobre el cuerpo en estudio. Se especifican los puntos de aplicación de las fuerzas. Notar que para la fuerza de roce o fricción, también se especifica un punto, pero en realidad corresponde a todos los puntos de contacto de ambas superficies. Las magnitudes de $\vec{P}$, $\vec{N}$ y $\vec{F}$ están representadas a escala en la figura, para $\vec{f_r}$ es aproximada ya que no se sabe que tipo fricción está actuando y además, si fuera estática, la misma varía entre 0 y el máximo valor.

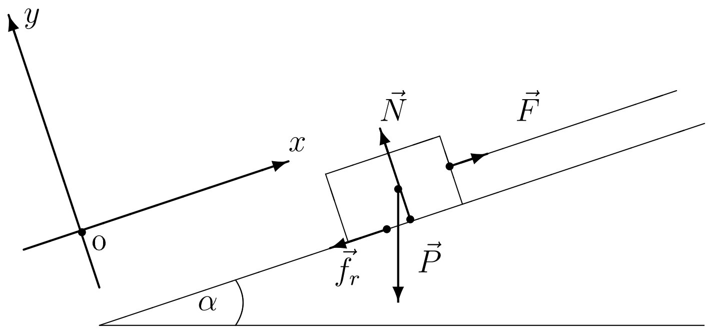

Figura 2.2: Diagrama de cuerpo aislado y sistema de referencia a utilizar. Se especifican las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en estudio. Con un círculo se ubica al punto de aplicación de cada fuerza.

También está especificado el sistema de referencia a utilizar para describir el problema. Se utiliza un sistema de referencia donde el sistema de coordenadas ortogonales está rotado la misma inclinación del plano. De esta forma los vectores $\vec{f_r}$, $\vec{N}$ y $\vec{F}$ coinciden con la dirección de alguno de los ejes de coordenadas, simplificando su tratamiento posterior.

Fuerzas y sistema de referencia

A continuación se representa solamente las fuerzas ubicadas en el sistema de coordenadas utilizado para describir el problema (Figura 2.3). El cuerpo en estudio queda representado como partícula puntual en el origen de coordenadas.

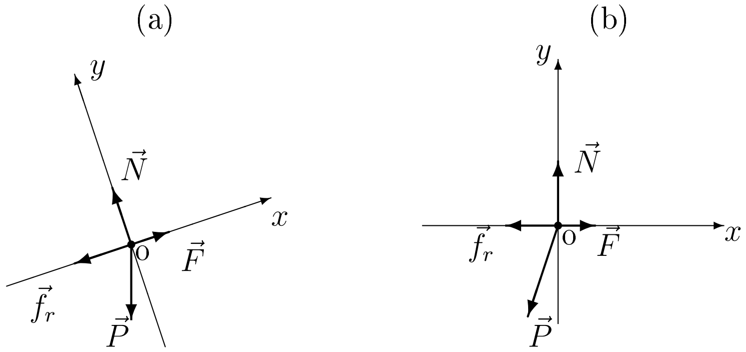

Figura 2.3: Diagrama de fuerzas sobre el sistema de coordenadas: (a) orientado según el plano inclinado; (b) sin rotación. El punto representa al cuerpo.

Descomposición de fuerzas

Según la elección del sistema de referencia, la única fuerza que no coincide con los ejes de coordenadas es la fuerza del peso $\vec{P}$. Por lo tanto es necesario descomponer ésta fuerza en sus componentes en la dirección en x ($\vec{P_x}$) y en y ($\vec{P_y}$). Esto se realiza debido a que en este momento solo sabemos sumar vectores que sean paralelos o perpendiculares, no sabemos sumar vectores *oblicuos*. Al descomponer la fuerza peso, es como si la fuerza peso ya no exista más y en cambio se generan dos vectores nuevos pero que son perpendiculares entre sí.

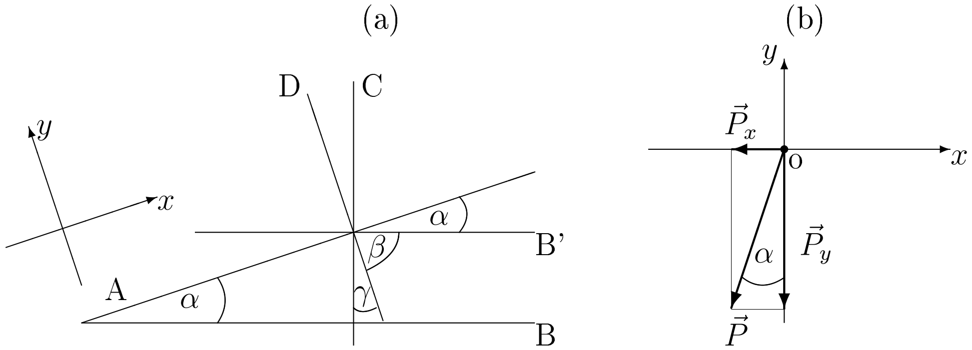

Figura 2.4: (a) Diagrama geométrico para identificar el ángulo en el sistema de fuerzas. (b) El vector peso, sus componentes y el ángulo utilizado.

Para la deducción del ángulo utilizado para obtener las componentes del peso (P_x y P_y), se utiliza la Figura (2.4-a). Se presentan 5 rectas: A, B, B', C y D. Las rectas B y B' son paralelas; C es perpendicular a B' y B; D es perpendicular a A. El ángulo indicado como α y formado por las rectas A y B es el mismo ángulo que el formado por A y B'. Como A y D son perpendiculares, se deduce que β es el complemento de α:

$$\beta = 90^\circ - \alpha.$$

Luego, como B' y C son perpendiculares, γ resulta el complemento de β:

$$\gamma = 90^\circ - \beta.$$

Por lo tanto, reemplazando se obtiene:

$$\begin{aligned}\gamma &= 90^\circ - \beta \\ &= 90^\circ - (90^\circ - \alpha) \\ \boxed{\gamma = \alpha}\end{aligned} \tag{2.1}$$

El ángulo γ se forma entre las rectas D y C, correspondientes a la dirección de la normal o eje y y la dirección del peso, respectivamente. Por lo tanto, el ángulo γ, que es igual al ángulo de inclinación del plano α (Ecuación 2.1), esta ubicado entre la dirección del peso y el eje y como se observa en la Figura (2.4-b).

Para calcular las componentes del peso, se utiliza el triángulo rectángulo que contiene al ángulo α. Utilizando las relaciones trigonométricas $\mathrm{sen}(\alpha) = \dfrac{CO}{H}$ y $\cos(\alpha) = \dfrac{CA}{H}$, e identificando a $H \equiv |\vec{P}|$, $CO \equiv |\vec{P}_x|$ y $CA \equiv |\vec{P}_y|$, podemos despejar y obtener las componentes:

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{P_x}{P} &\Longrightarrow \boxed{P_x = P\,\mathrm{sen}(\alpha)} \\ \cos(\alpha) = \frac{P_y}{P} &\Longrightarrow \boxed{P_y = P\cos(\alpha)}\end{aligned} \tag{2.2}$$

Para nuestro caso en particular, como $m = 10\,\mathrm{kg}$ ($P = m \times g = 98\,\mathrm{N}$) y $\alpha = 30^\circ$, utilizando las Ecuaciones (2.2) obtenemos:

$$\begin{aligned}P_x &= 98\,\mathrm{N} \times \mathrm{sen}(30^\circ) = 49\,\mathrm{N} \\ P_y &= 98\,\mathrm{N} \times \cos(30^\circ) = 84{,}9\,\mathrm{N}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Planteo de la 2º Ley de Newton y análisis del problema

Debido a la imposibilidad de sumar vectores que no sean paralelos o perpendiculares, vamos a utilizar las componentes del peso y resolver a través del planteo de la 2º Ley de Newton en componentes x e y.

Dirección y – perpendicular al plano inclinado

El cuerpo por sí solo no va a despegarse ni entrar en la superficie de la cuña, por lo tanto es válido plantear que en esta dirección hay equilibrio ($a_y = 0$):

$$N - P_y = ma_y = 0 \tag{2.4}$$

Al despejar obtenemos el valor de la fuerza normal:

$$N = P_y = 84{,}9\,\mathrm{N} \tag{2.5}$$

Dirección x – paralelo al plano inclinado

En esta dirección es donde se debe realizar el análisis del estado de movimiento del cuerpo, por lo tanto se va a generalizar el planteo sin suponer equilibrio:

$$F - f_r - P_x = ma_x,$$

o escrita en términos de las fuerzas que contribuya a que suba F y las que no f_r y P_x:

$$F - (f_r + P_x) = ma_x. \tag{2.6}$$

Para realizar el análisis nos vamos a basar en la Tabla (2.1).

Como no sabemos cuál es el régimen de fricción que se va a encontrar el cuerpo, calculamos ambos casos. Para calcular la fuerza de fricción, recordamos que

$$f_{re_{max}} = \mu_{e_{max}} N \quad \text{y} \quad f_{rc} = \mu_c N, \tag{2.7}$$

y que la misma se orienta según la dirección opuesta al movimiento o intento de movimiento en la superficie de contacto del cuerpo en estudio (Figura 2.2). Conociendo el valor de N (Ecuación 2.5) y los valores de los coeficientes dados al comienzo, calculamos las fuerzas de roce:

$$\begin{aligned} f_{re_{max}} &= 67{,}9\,\mathrm{N} \\ f_{rc} &= 33{,}9\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{2.8}$$

A continuación vamos a analizar cada una de las posibles situaciones que se pueda encontrar el cuerpo.

Sin equilibrio y ascendiendo. Suponemos que el cuerpo se encuentra fuera de equilibrio y ascendiendo sobre la cuña. En esta condición, la fuerza de fricción corresponde al roce cinético y la aceleración debería ser positiva. Entonces, utilizando los datos de las Ecuaciones (2.8), (2.3) y la Ecuación (2.6), obtenemos:

$$\begin{aligned} 30\,\mathrm{N} - (33{,}9\,\mathrm{N} + 49\,\mathrm{N}) &= m a_x \\ 30\,\mathrm{N} - (82{,}9\,\mathrm{N}) &= 10\,\mathrm{kg}\ a_x \\ -5{,}29\,\mathrm{m/s^2} &= a_x < 0 \end{aligned}$$

Este resultado está en contradicción con nuestra suposición ya que la aceleración debía ser positiva. **Por lo tanto el cuerpo no se puede encontrar en éste estado.**

En equilibrio y ascendiendo. Suponemos que el cuerpo se encuentra en equilibrio y ascendiendo sobre la rampa. En este estado corresponde utilizar la fuerza de fricción cinética y la aceleración debería ser nula. Entonces utilizando las mismas ecuaciones que antes se obtiene:

$$\begin{aligned} 30\,\mathrm{N} - (33{,}9\,\mathrm{N} + 49\,\mathrm{N}) &= 0 \\ 30\,\mathrm{N} - (82{,}9\,\mathrm{N}) &= 0 \\ -52{,}9\,\mathrm{N} &\neq 0 \end{aligned}$$

Lo cual es incoherente con la suposición. **Por lo tanto el cuerpo no puede encontrarse en equilibrio y ascendiendo.**

Estático. MEJORAR LA DESCRIPCIÓN E INCLUIR TODAS LAS POSIBILIDADES: ASCIEDE, DESCIENDE O ESTÁ QUIETO!!!

Suponemos que el cuerpo se encuentra estático, por lo tanto en equilibrio. La aceleración debe ser nula y se utiliza la fricción estática f_{re}. Tener presente que la fuerza de roce estática puede tomar cualquier valor entre $0\,\mathrm{N}$ y $f_{re_{max}}$ calculado anteriormente. Nuevamente, con las mismas ecuaciones y resolviendo para f_{re} se obtiene:

$$\begin{aligned} 30\,\mathrm{N} - (f_{re} + 49\,\mathrm{N}) &= 0 \\ 30\,\mathrm{N} - 49\,\mathrm{N} &= f_{re} \\ -19\,\mathrm{N} &= f_{re} \end{aligned}$$

Este resultado no esta mal, sino que nuestra suposición inicial que el cuerpo se encuentra en movimiento ascendente o intentando ascender estaba equivocada. Esto significa que el cuerpo sí se puede encontrar en equilibrio estático y que la fuerza de fricción estática debe tomar éste valor encontrado y ser dirigida hacia arriba de la cuña. Es decir que el cuerpo está intentando *caer* por el plano inclinado. **Por lo tanto el cuerpo se puede encontrar estático si la fuerza de fricción estática vale $\mathbf{f_{re}} = -\mathbf{19}\,\mathrm{N}$ dirigida en sentido ascendente sobre la cuña.**

Sin equilibrio y descendiendo. Suponemos que se encuentra fuera de equilibrio y descendiendo, la fuerza de roce es cinética y debe ser negativa (por nuestra elección original, ya que el cuerpo se mueve ahora hacia abajo en la cuña), y la aceleración debe ser negativa. Utilizando las mismas ecuaciones y teniendo en cuenta lo anterior resulta:

$$\begin{aligned} 30\,\mathrm{N} - (-33{,}9\,\mathrm{N} + 49\,\mathrm{N}) &= ma_x \\ 30\,\mathrm{N} - (15{,}1\,\mathrm{N}) &= 10\,\mathrm{kg}\; a_x \\ 1{,}49\,\mathrm{m/s}^2 &= a_x > 0 \end{aligned}$$

Nuevamente se contradice la suposición, ya que la aceleración debía ser negativa. **Por lo tanto el cuerpo no se puede encontrar fuera de equilibrio y descendiendo por la rampa.**

En equilibrio y descendiendo. Suponemos que el cuerpo está en equilibrio pero desciende por el plano inclinado a velocidad constante. Corresponde utilizar la fricción cinética y la aceleración debe ser nula. Utilizando las ecuaciones con las condiciones presentes obtenemos:

$$\begin{aligned} 30\,\mathrm{N} - (-33{,}9\,\mathrm{N} + 49\,\mathrm{N}) &= 0 \\ 30\,\mathrm{N} - (15{,}1\,\mathrm{N}) &= 0 \\ 14{,}9\,\mathrm{N} &\neq 0 \end{aligned}$$

Lo cual contradice la suposición que el cuerpo se encuentra en MRU. **Por lo tanto el cuerpo no se puede encontrar en equilibrio y descendiendo por la cuña.**

Conclusiones finales

Según los análisis realizados, sólo un estado es posible para el cuerpo. Tener presente que en los casos que se supone que el cuerpo se encuentra fuera de equilibrio, por ejemplo si el cuerpo asciende, puede darse el caso que el cuerpo se encuentre con velocidad ascendente por la rampa pero con aceleración negativa. Esto quiere decir que el cuerpo va a terminar descendiendo luego de cierto tiempo. Contradictorio a lo supuesto que no debería dejar de ascender. Por tal motivo no es posible para obtener resultados favorables en caso de querer subir al cuerpo por el plano inclinado, además de depender de la velocidad original que tenga el cuerpo. Se puede realizar el mismo análisis para el caso que se encuentre descendiendo y descartar por el mismo motivo.

Por lo tanto, respondiendo a la pregunta original: *¿En qué condición se encuentra el cuerpo?*, podemos afirmar que el cuerpo se encuentra en equilibrio estático, intentando descender sobre el plano inclinado. En referencia al régimen de fricción, se encuentra en el estado de roce estático sin haber alcanzado su máximo valor posible.

En la siguiente Tabla (2.2) se resumen todos los resultado alcanzados durante el análisis:

Estado del cuerpo	Características del		Tipo de Fricción	Posibilidad
	Estado	Movimiento		
Subiendo	En equilibrio	MRU ($v \neq 0$)	cinética	$\nexists$
	Sin equilibrio	MRUV		$\nexists$
Quieto	En equilibrio	MRU ($v = 0$)	estática	$\exists$ con $f_{re} < 0$ (ascendente)
Bajando	En equilibrio	MRU ($v \neq 0$)	cinética	$\nexists$
	Sin equilibrio	MRUV		$\nexists$

Tabla 2.2: Resultados de los análisis en que se encuentra el cuerpo.

Actividades (plano inclinado)

Realizar el análisis cuando la fuerza con la cual el cuerpo es tirado ascendentemente sobre el plano inclinado toma los siguiente valores:

1. $\vec{F} = 40\,\mathrm{N}$.
2. $\vec{F} = 49\,\mathrm{N}$.
3. $\vec{F} = 60\,\mathrm{N}$.

4. Considerar $\alpha = 45°$.

   a) Encontrar el valor de la fuerza $\vec{F}$ tal que el cuerpo se encuentra en equilibrio y la fuerza de roce estática es nula ($f_{re} = 0\,\mathrm{N}$).

   b) ¿Es posible que el cuerpo se encuentre en equilibrio si $\vec{F} = 0\,\mathrm{N}$? Analizar y justificar.

5. Analizar la situación cuando la inclinación del plano es $\alpha = 90°$.

Apéndice A

Gráficos

A.1. Construcción de gráficos

La correcta construcción de un gráfico tiene varios puntos:

- ejes de coordenadas con nombre, unidad y flecha que indica dirección de valores crecientes;
- no se pueden presentar gráficos con líneas verticales continuas;
- líneas horizontales continuas solo para funciones;
- no se pueden presentar gráficos en donde no se cumpla la biyección, es posible relajar la condición y solicitar que sea inyectiva;
- las funciones deben ser continuas y sin saltos, es decir que uno las puede graficar sin levantar el lápiz.[1]

La Figura (A.1) muestra todos estos problemas. Todo lo indicado en rojo corresponden a errores en la representación gráfica, enumerados a continuación:

- Eje vertical sin flecha que indique dirección de valores crecientes, sin nombre y sin unidad.
- Eje horizontal con dos flechas, no queda definida la dirección de valores crecientes.

[1] Esta característica depende de la situación que será aclarada si no es necesario que se cumpla la condición, en particular para la velocidad.

- Nombre de eje horizontal sin unidad.
- Puntos a, c, f y g indicados con línea vertical continua. Los correctos son los puntos b, d y e con línea vertical de trazos.
- Puntos f y g indicados con línea continua horizontal y no corresponden a una función. La indicación correcta se observa en los puntos a, d y e con líneas horizontales de trazos.
- La función violeta que contiene a los puntos e y g está mal ubicada ya que la función deja de ser biyectiva como lo muestran los puntos $d - e$ y $f - g$.
- La función azul que comienza en el punto h y sería continuación del punto i no cumple que se pueda realizar sin levantar la mano. En este punto presenta una discontinuidad.

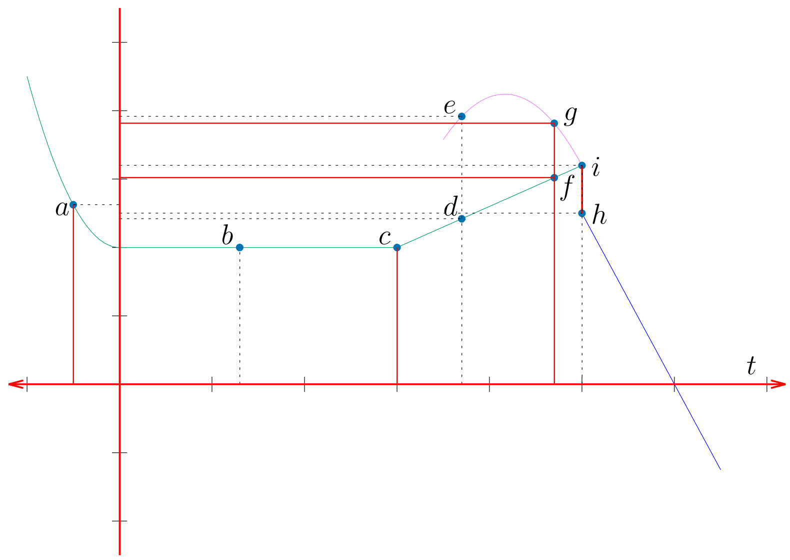

Figura A.1: Representación gráfica con errores comunes.

A continuación lo que está correcto en el gráfico:

- Toda la función de color verde es correcta.
- La indicación de los puntos b, d y e.

Desde el punto de vista de la física, que a un punto del dominio le corresponda más de un punto en la imagen (por ej. los puntos d y e, h e i o líneas verticales continuas) significa que la variable independiente, generalmente el tiempo, se relaciona con la posibilidad de dos o más velocidades/posiciones simultáneas, lo que es físicamente incorrecto. **Un cuerpo no puede tener dos o más velocidades/posiciones distintas en el mismo instante de tiempo.** Además de esto, un cuerpo no puede pasar de tener una velocidad/posición a otra distinta sin pasar por todos los valores de velocidades/posiciones intermedias, esto sería similar a la "teletransportación".[2]

Una posible opción correcta para la Figura (A.1) se presenta a continuación. Notar que el último tramo que comienza en el punto h es desplazado verticalmente hasta el punto i para que la función pueda ser realizada sin "levantar la mano".

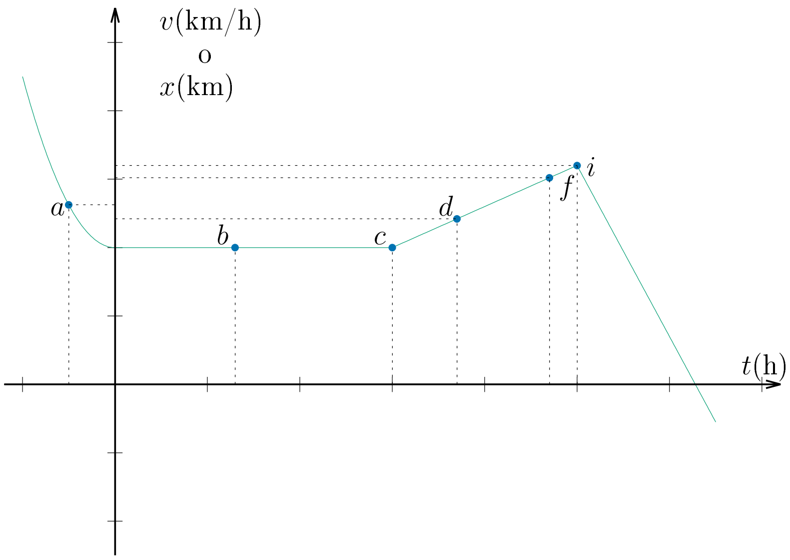

Figura A.2: Posible representación gráfica de la velocidad o posición en función del tiempo sin los errores presentes en la Figura (A.1). Se puede utilizar otra unidad según la necesidad.

A.2. Intervalos

Los intervalos pueden ser *abiertos*, *semi-abiertos o semi-cerrados* y *cerrados*, y se presentan con distintas expresiones matemáticas. La Figura (A.3) muestra cada caso y su representación gráfica.

A modo de ejemplo se considera el intervalo entre los puntos $x = -4$ y $x = 2$. También se indican los puntos a y b para el último intervalo cerrado (es equivalente para cualquier intervalo) para ejemplificar la pertenencia o no de los puntos.

[2]Para el caso de M.R.U. es posible tener gráficos de $v - t$ donde se presenten estos "saltos" en la función.

intervalo:

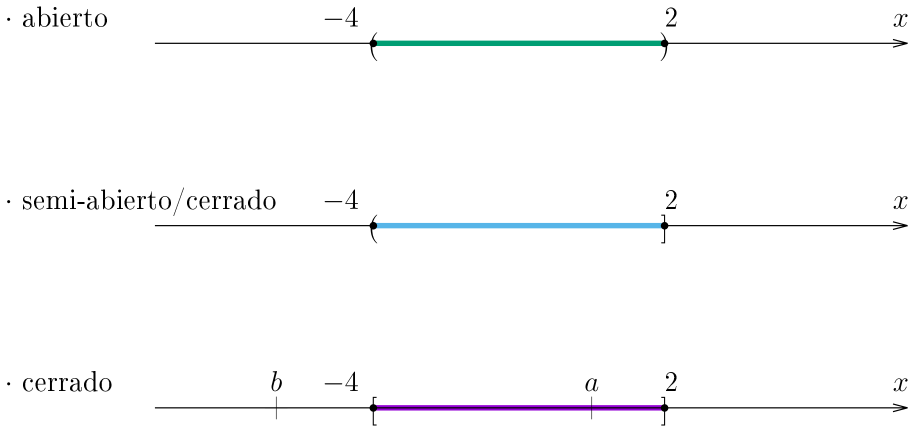

Figura A.3: Diagrama correspondiente a los distintos intervalos y su representación gráfica. En color se indica el intervalo en cada caso y con paréntesis/corchete como se representa.

Características de cada intervalo:

Abierto: los intervalos abiertos se indican con paréntesis en ambos extremos y con una coma la separación entre ambos valores: $(-4, 2)$. También se puede utilizar los símbolos mayor/menor "$< \quad >$" junto con la variable utilizada: $-4 < x < 2$. Ambas expresiones son equivalentes y significan que el intervalo está comprendido entre $x = -4$ y $x = 2$, pero sus puntos extremos no pertenecen al mismo. Esto se expresa del siguiente modo: $-4 \notin (-4, 2)$ y $2 \notin (-4, 2)$. El significado que el intervalo sea abierto hace referencia a que uno se puede acercar al valor 2 tanto como quiera pero sin llegar a ese valor.

Semi-abierto/cerrado: los intervalos semi-abiertos/cerrados se indican con paréntesis en un extremo y corchete en el otro: $(-4, 2]$. Para nuestro ejemplo es abierto en $x = 4$ (no pertenece al intervalo) y cerrado en $x = 2$. Al ser un intervalo cerrado en un extremo, significa que éste punto pertenece: $2 \in (-4, 2]$. También se utilizan los símbolos mayor/menor y mayor-igual/menor-igual "$\leq \quad \geq$", cuyo resultado se expresa: $-4 < x \leq 2$. El significado que el intervalo sea cerrado significa que uno se puede acercar tanto a al valor 2 y tomar éste valor.

Cerrado: los intervalos cerrados se indican con corchetes ambos extremos: $[-4, 2]$ o con los símbolos: $-4 \leq x \leq 2$. Ambos puntos pertenecen al intervalo.

Por lo tanto, en base a las características de los intervalos y la pertenencia de los puntos, se puede analizar $x = a$:

$$a \in [-4, 2],$$

mientras que para $x = b$:

$$b \notin [-4, 2].$$

A.3. Función de a tramos, gráficos con GeoGebra

GeoGebra tiene la opción de realizar gráficos de funciones por tramos. Para realizar esto se puede incorporar cada función por separado o introducir la función completa. Esto último es lo que se presenta a continuación. Recordar que GeoGebra es un software matemático y es el usuario quién debe realizar la interpretación física/matemática del problema. Por este motivo se van a trabajar con funciones matemáticas que se corresponderían a problemas físicos genéricos.

Se graficará la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-2, 1] \\ -3x + 6, & x \in (1, 3] \\ (x - 5)^2 - 1, & x \in (3, 8] \end{cases}$$

Para realizar la gráfica de la función $f(x)$ se debe utilizar el condicional **Si** (o **if** en inglés) que tiene GeoGebra. La sintaxis del comando que se introduce en la *ENTRADA* de GeoGebra es la siguiente:

Sintáxis A.1: Código a utilizar.

```
ENTRADA: Si(condición, acción si es verdad, [acción si es falso])

ENTRADA: if(condición, acción si es verdad, [acción si es falso])
```

Los dos primeros argumentos son obligatorios, no así el tercero que sería para el caso en el que la condición es falsa.

Entonces, para el problema se tienen que incorporar tres condicionales ya que se tiene tres intervalos:

Sintáxis A.2: Código que se ingresa en la *ENTRADA* de GeoGebra para graficar $f(x)$.

```
ENTRADA: Si( −2<=x<=1, x+1, Si( 1<x<=3, −3x+6, Si( 3<x<=8, (x−5)^2−1 ) ) )

ENTRADA: if( −2<=x<=1, x+1, if( 1<x<=3, −3x+6, if( 3<x<=8, (x−5)^2−1 ) ) )
```

Notar que los intervalos **no** se escriben con corchetes y paréntesis, sino con los signos mayor/menor y mayor/menor igual según sea el intervalo. La gráfica de la función se presenta en la Figura (A.4).

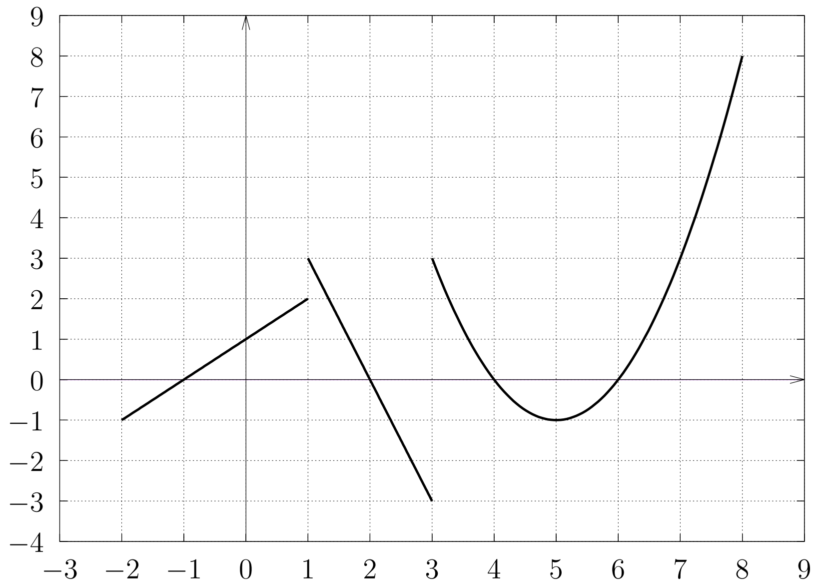

Figura A.4: Gráfico de la función $f(x)$.

Por último, para que aparezca la expresión matemática para $f(x)$ en conjunto con la gráfica, se introduce lo siguiente:

Sintáxis A.3: En caso que la función se llame f que corresponde al objeto dentro del paréntesis.

```
ENTRADA: FórmulaTexto(f)
```

y se observa la siguiente fórmula en el gráfico:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & : \ -2 \leq x \leq 1 \\ -3x+6 & : \ 1 < x \leq 3 \\ (x-5)^2 - 1 & : \ 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

Apéndice B

Nomenclatura

Descripción de los símbolos matemáticos utilizados:

Símbolo	Significado
$\in$	pertenece
$\notin$	no pertenece§
$\exists$	existencia
$\forall$	para todo
$\angle$	ángulo
(a, b)	intervalo abierto desde a hasta b
$(a, b]$	intervalo semiabierto, abierto en a y cerrado en b
$[a, b]$	intervalo cerrado desde a hasta b
$\Rightarrow$	entonces
$\equiv$	equivalente o definición
$\approx$ o $\simeq$	aproximado
$\therefore$	por lo tanto
$x(t)$	ecuación o función de movimiento para la posición como función de tiempo
$v(t)$	ecuación o función de movimiento para la velocidad como función de tiempo
a	magnitud escalar
$\vec{a}$	magnitud vectorial

§Cuando el símbolo se encuentre tachado, corresponde a su negación.

Bibliografía

Coca, S. (n.d.). Inicio [Canal de YouTube]. https://www.youtube.com/channel/UCb27bcKR0btbnLtrd9

Máximo, A., & Alvarenga, B. (2008). *Física General con experimentos sencillos* (IV). Oxford University Press.

Wikipedia. (2020). Sistema de referencia — Wikipedia, La enciclopedia libre [Internet; descargado 30-marzo-2020]. https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_referencia