Inferencia Estadística y Reconocimiento de Patrones

UNaB, Lic. Cs. de Datos, 2021 cuat. 2

Sebastián Pedersen (sebastian.pedersen (at) unab (punto) edu (punto) ar)

Clasificadores bayesianos, bayes ingenuo

(Clasificación supervisada)

Recordatorio del problema de clasificación supervisada

1. Tengo datos de entrenamiento: (X1,X2, …, Xp) → Y
    a. (X1, …, Xp) son las variables, características o predictores (lo que mido)
    b. Y es la clasificación, target, label o etiqueta.
    c. Tengo muchos de estos datos (o la cantidad que pueda).
2. Con los datos de entrenamiento construyo mi modelo predictor/clasificador.
3. Con el modelo predictor clasifico nuevos datos (X1,...,Xp)
    a. Ej.: (peso, altura,presión, cant. infartos) → SÍ/No riesgo cardíaco.
4. Queda en el tintero: ¿cómo evalúo mi modelo predictor?, ¿qué tan bien está clasificando?

Punto de vista Probabilidad/Estadística

- Intento predecir Y dados (X1,...,Xp)
  - (peso, altura, presión, cant. infartos) → SÍ/NO con prob. p.
  - (80, 170, 150, 2) → SÍ con prob. 0.6
  - (60, 155, 140, 1) → NO con prob. 0.3
  - Etc.
- Es decir intento estimar $P(Y=1 \mid X1,...Xp=x1,...,xp)$
- Una vez que tengo estimada esa probabilidad, pongo una regla para clasificar a los datos nuevos:

  Por ejemplo si la estima. de $P(Y=1 \mid X1,...Xp=x1,...,xp) > 0.4$ → SÍ ($y=1$)

Cómo funciona un clasificador bayesiano

Primero transforma la probabilidad que quiere estimar de la siguiente forma:

$$P(Y=1|X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p)=\frac{P(X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p|Y=1)P(Y=1)}{P(X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p)}$$

La anterior igualdad viene de aplicar esto:

$$P(Y|X)=\frac{P(Y\cap X)}{P(X)}=\frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}$$

$$P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)} \quad \rightarrow \quad P(X\cap Y)=P(X|Y)P(Y)$$

Cómo funciona un clasificador bayesiano

Ahora usando esa transformación:

$$P(Y=1|X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p)=\frac{P(X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p|Y=1)P(Y=1)}{P(X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p)}$$

Estima los valores del miembro derecho (para estimar el miembro izquierdo, que es el objetivo final). Es decir hay que estimar tres cosas:

- P(Y=1)
- P(X1,...,Xp=x1,...,xp)
- P(X1,...,Xp=x1,...,xp | Y=1)

$$P(Y=1|X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p)=\frac{P(X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p|Y=1)P(Y=1)}{P(X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p)}$$

Cómo funciona un clasificador bayesiano

1. P(Y=1) la estima por proporciones de los datos de entrenamiento:

$$\frac{\text{Cant. de datos de entrenamiento con } Y=1}{\text{Cant. total de datos de entrenamiento}} \simeq P(Y=1)$$

2. Por el teorema de la Probabilidad Total vale que:

$$P(X_1,...,X_p=x_1,...,x_p)=P(X_1,...,X_p=x_1,...,x_p|Y=1)P(Y=1)$$
$$+P(X_1,...,X_p=x_1,...,x_p|Y=0)P(Y=0)$$

Teo. Prob. Total: $P(X)=\sum_Y P(X|Y)P(Y)$

Y por lo tanto P(X1,...,Xp=x1,...,xp) se puede estimar usando la siguiente y última estimación.

3. Para estimar P(X1,...,Xp=x1,...,xp | Y=1) hay varias opciones:
   a. Bayes ingenuo (naive Bayes)
   b. Discriminante Lineal o Cuadrático
   c. Otras.

$$P(Y=1|X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p)=\frac{P(X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p|Y=1)P(Y=1)}{P(X_1,\ldots,X_p=x_1,\ldots,x_p)}$$

Clasificador bayes ingenuo (naive bayes)

Bayes ingenuo asume independencia:

$$P(X_1,...,X_p=x_1,...,x_p|Y=1)=P(X_1=x_1|Y=1).P(X_2=x_2|Y=1).\ldots.P(X_p=x_p|Y=1)$$

Y estima cada término de la siguiente manera:

- Si Xi cuantitativa discreta (ej. cant. de infartos) estima por proporción:

  $$P(X_i=0|Y=1)\simeq\frac{\text{Cant. de datos de entrenamiento con } X_i=0 \text{ y con } Y=1}{\text{Cant. total de datos de entrenamiento con } Y=1}$$

  $$P(X_i=1|Y=1)\simeq\frac{\text{Cant. de datos de entrenamiento con } X_i=1 \text{ y con } Y=1}{\text{Cant. total de datos de entrenamiento con } Y=1}$$

  Etc. para todos los valores de Xi.

- Si Xi cuantitativa continua (ej. altura) supone que $X_i|Y=1\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ (existen otras alternativas)
  - Estima μ por promedio, y estima σ por varianza (ambas de los valores de Xi de los datos de entrenamiento cuando Y=1)
  - Luego la estimación de P(Xi=xi | Y=1) es lo que da la normal esa.

Clasificador bayes ingenuo (naive bayes)

$$P(Y = 1|X_1, \ldots, X_p = x_1, \ldots, x_p) = \boxed{\frac{P(X_1, \ldots, X_p = x_1, \ldots, x_p|Y = 1)P(Y = 1)}{P(X_1, \ldots, X_p = x_1, \ldots, x_p)}}$$

Para estimar esta

Estima estas tres cosas.

Ahora dado un dato (X1,...,Xp) puedo estimar la probabilidad de pertenecer a una clase, es decir puedo hacer una predicción sobre su clasificación:

$$P(Y = 1|X_1, ..., X_p = x_1, ..., x_p) \simeq \text{Dado el dato } x_1, \ldots, x_p, \text{ la prob. que pertenezca a la clase } y = 1$$

Referencias

- Hastie, Tibshirani, Introduction to Statistical Learning, sección 4.4.4