Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

10 de noviembre de 2025

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. *Un Grupo*[1] *es un conjunto A junto con una operación $+\colon A \times A \to A$ que satisface que para cualesquiera $a, b, c \in A$ se cumple*

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. $a + b = b + a$.
3. *Existe* $0_A \in A$ *que satisface que para toda* $z \in A$ *se cumple que* $z + 0_A = a$.
4. *Existe* $x \in A$ *tal que* $a + x = 0_A$.

Cuando no exista ambiguedad usaremos el símbolo 0 *sin mencionar a que grupo pertenece.*

Definición 1.2. *Sean* $\{B_i\}_{i \in I}$ *grupos abelianos. Se llama* suma directa *de los grupos* B_i *al subgrupo del producto directo*

$$\bigoplus_{i \in I} B_i = \left\{ (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_i \;\middle|\; b_i = 0 \textit{ salvo para un número finito de índices } i \right\},$$

donde la operación de grupo está dada componente a componente.

A los homomorfismos de inclusión

$$\rho_i : B_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i, \qquad b_i \longmapsto (\ldots, 0, b_i, 0, \ldots),$$

se les llama inyecciones coordenadas.

[1] Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

El grupo $\bigoplus_{i\in I} B_i$ *se denomina también* suma directa externa *de los* B_i *y puede verse como el subgrupo del producto directo formado por los elementos con soporte finito.*

Definición 1.3. *Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos* x_i $(i \in I)$*, entonces el grupo libre será*

$$F = \bigoplus_{i\in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ *es una base de* F*. Los elementos de* F *son combinaciones lineales finitas de la forma*

$$g = n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F *si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular,* F *está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.*

Definición 1.4. *Sean* A *y* C *grupos abelianos. Sea* X *el grupo libre sobre el conjunto* $A \times C$*, cuyos generadores son* (a, c) *con* $a \in A$ *y* $c \in C$*. Sea* Y *el subgrupo de* X *generado por todos los elementos de la forma*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ *y* $c, c_1, c_2 \in C$*. El producto tensorial de* A *y* C *se define como el cociente*

$$A \otimes C = X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ *definimos el tensor de* a *con* c*,* $a \otimes c$*, como la clase del generador* (a, c)*; entonces los elementos de* $A \otimes C$ *son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones*

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \qquad a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ *cumple la propiedad universal: para toda función bilineal* $g : A \times C \to G$*, con* G *un grupo abeliano, existe un único morfismo* $\overline{g} : A \otimes C \to G$ *tal que* $\overline{g}(a \otimes c) = g(a, c)$*. Esta propiedad caracteriza a* $A \otimes C$ *de manera única, salvo isomorfismos.*

Definición 1.5. *El producto de torsión de dos grupos abelianos A y C, denotado por* $\operatorname{Tor}(A, C)$*, se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias* (a, m, c) *con* $a \in A$*,* $c \in C$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *tales que* $ma = 0 = mc$*, sujetos a las relaciones*

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\
(a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\
(a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc).
\end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\operatorname{Tor}(A, C)$ *es abeliano y satisface una simetría natural:*

$$\operatorname{Tor}(A, C) \cong \operatorname{Tor}(C, A).$$