Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

18 de noviembre de 2025

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. *Un Grupo*[1] *es un conjunto* A *junto con una operación* $+\colon A \times A \to A$ *que satisface que para cualesquiera* $a, b, c \in A$ *se cumple*

1. $a + (b + c) \ = \ (a + b) + c$.
2. $a + b \ = \ b + a$.
3. *Existe* $0_A \in A$ *que satisface que para toda* $z \in A$ *se cumple que* $z + 0_A \ = \ a$.
4. *Existe* $x \in A$ *tal que* $a + x \ = \ 0_A$.

Cuando no exista ambiguedad usaremos el símbolo 0 *sin mencionar a que grupo pertenece.*

Definición 1.2. *Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos* x_i $(i \in I)$*, entonces el grupo libre será*

$$F \ = \ \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ *es una base de* F*. Los elementos de* F *son combinaciones lineales finitas de la forma*

$$g \ = \ n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F *si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de*

[1] Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Theorem 1.3 (Propiedad universal de los grupos libres)**.** *Sea X un conjunto libre de generadores del grupo libre F. Toda función*

$$f : X \longrightarrow A$$

con valores en un grupo abeliano A se extiende de manera única a un homomorfismo

$$\varphi : F \longrightarrow A.$$

Esta propiedad caracteriza a los conjuntos libres de generadores, y por lo tanto a los grupos libres.

Definición 1.4. *Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C \;=\; X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c, $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c); entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c \;=\; a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \qquad a \otimes (c_1 + c_2) \;=\; a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \to G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\overline{g} : A \otimes C \to G$ tal que $\overline{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.5. *El producto de torsión de dos grupos abelianos A y C, denotado por $\mathrm{Tor}(A, C)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las* *tercias* (a, m, c) *con* $a \in A$, $c \in C$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *tales que* $ma = 0 = mc$, *sujetos a las relaciones*

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\operatorname{Tor}(A, C)$ *es abeliano y satisface una simetría natural:*

$$\operatorname{Tor}(A, C) \cong \operatorname{Tor}(C, A).$$