

Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

18 de noviembre de 2025

Preludio de Álgebra

1. Grupos

Definición 1.1. Un Grupo¹ es un conjunto A junto con una operación $+ : A \times A \rightarrow A$ que satisface que para cualesquiera $a, b, c \in A$ se cumple

1. $a + (b + c) = (a + b) + c.$
2. $a + b = b + a.$
3. Existe $0_A \in A$ que satisface que para toda $z \in A$ se cumple que $z + 0_A = a.$
4. Existe $x \in A$ tal que $a + x = 0_A.$

Cuando no exista ambigüedad usaremos el símbolo 0 sin mencionar a qué grupo pertenece.

Definición 1.2. Sea $\{B_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos. Un vector

$$(\dots, b_i, \dots)$$

es una familia que asigna a cada índice $i \in I$ un elemento $b_i \in B_i$. También puede verse como una función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$$

tal que

$$f(i) = b_i \in B_i \quad \text{para cada } i \in I.$$

¹Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

La igualdad y la suma de vectores se definen coordenada a coordenada:

$$(b_i)_{i \in I} = (b'_i)_{i \in I} \iff b_i = b'_i \text{ para todo } i \in I,$$

$$(b_i)_{i \in I} + (b'_i)_{i \in I} = (b_i + b'_i)_{i \in I}.$$

El conjunto de todos estos vectores, con la operación descrita, forma un grupo que se denota por

$$C = \prod_{i \in I} B_i,$$

y se llama el producto directo o producto cartesiano de los grupos B_i .

Definición 1.3. *Sean $\{B_i\}_{i \in I}$ grupos abelianos. Se llama suma directa de los grupos B_i al subgrupo del producto directo*

$$\bigoplus_{i \in I} B_i = \left\{ (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_i \mid b_i = 0 \text{ salvo para un número finito de índices } i \right\},$$

donde la operación de grupo está dada componente a componente.

A los homomorfismos de inclusión

$$\rho_i : B_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i, \quad b_i \longmapsto (\dots, 0, b_i, 0, \dots),$$

se les llama inyecciones coordinadas.

El grupo $\bigoplus_{i \in I} B_i$ se denomina también suma directa externa de los B_i y puede verse como el subgrupo del producto directo formado por los elementos con soporte finito.

Definición 1.4. *Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos x_i ($i \in I$), entonces el grupo libre será*

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ es una base de F . Los elementos de F son combinaciones lineales finitas de la forma

$$g = n_1 x_{i_1} + \dots + n_k x_{i_k}, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Definición 1.5. Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C = X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c , $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c) ; entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \quad a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \rightarrow G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\bar{g} : A \otimes C \rightarrow G$ tal que $\bar{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.6. La parte de torsión de un grupo A es

$$t(A) := \{x \in A \mid nx = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $t(A) = A$, decimos que A es de torsión. En este caso,

$$A = \bigoplus_p A_p.$$

Theorem 1.7 (Teorema fundamental de los grupos finitamente generados). Todo grupo G tal que existe $X \in [G]^{<\omega^2}$ con $\langle X \rangle = G$ es isomorfo a la suma directa de un grupo libre finitamente generado y un número finito de grupos

²En general, si A es un conjunto, entonces $[A]^{<\omega}$ representa la colección de todos los subconjuntos finitos de A .

cíclicos de orden p^k , con p primo y $k \geq 1$. Esta descomposición es única salvo isomorfismos. En particular,

$$G = F(G) \oplus t(G),$$

donde $F(G)$ es la parte libre de G y $t(G)$ es su parte de torsión.

Definición 1.8. El producto de torsión de dos grupos abelianos A y C , denotado por $\text{Tor}(A, C)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias (a, m, c) con $a \in A$, $c \in C$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $ma = 0 = mc$, sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\text{Tor}(A, C)$ es abeliano y satisface una simetría natural

$$\text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$

Proposition 1.9. Sea \mathcal{G} una familia de grupos abelianos. Entonces,

$$\left(\bigoplus_{G \in \mathcal{G}} G \right) \otimes C \cong \bigoplus_{G \in \mathcal{G}} (G \otimes C).$$

Proposition 1.10. Si A y C son finitos, entonces

$$A \otimes C \cong \text{Tor}(A, C),$$

y ambos funtores son conmutativos; es decir,

$$A \otimes C \cong C \otimes A \quad y \quad \text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$