

Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

20 de noviembre de 2025

Índice general

Capítulo I

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. Un **grupo**¹ es un conjunto A junto con una operación $+: A \times A \rightarrow A$ que satisface que para cualesquiera $a, b, c \in A$ se cumple

1. $a + (b + c) = (a + b) + c.$
2. $a + b = b + a.$
3. Existe $0_A \in A$ que satisface que para toda $z \in A$ se cumple que $z + 0_A = a.$
4. Existe $x \in A$ tal que $a + x = 0_A.$

Cuando no exista ambigüedad usaremos el símbolo 0 sin mencionar a que grupo pertenece.

Definición 1.2. Sea $\{B_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos. Un vector

$$(\dots, b_i, \dots)$$

es una familia que asigna a cada índice $i \in I$ un elemento $b_i \in B_i$. También puede verse como una función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$$

¹Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

tal que

$$f(i) = b_i \in B_i \quad \text{para cada } i \in I.$$

La igualdad y la suma de vectores se definen coordenada a coordenada:

$$(b_i)_{i \in I} = (b'_i)_{i \in I} \iff b_i = b'_i \text{ para todo } i \in I,$$

$$(b_i)_{i \in I} + (b'_i)_{i \in I} = (b_i + b'_i)_{i \in I}.$$

El conjunto de todos estos vectores, con la operación descrita, forma un grupo que se denota por

$$C = \prod_{i \in I} B_i,$$

y se llama el producto directo o producto cartesiano de los grupos B_i .

Definición 1.3. Sean $\{B_i\}_{i \in I}$ grupos abelianos. Se llama suma directa de los grupos B_i al subgrupo del producto directo

$$\bigoplus_{i \in I} B_i = \left\{ (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_i \mid b_i = 0 \text{ salvo para un número finito de índices } i \right\},$$

donde la operación de grupo está dada componente a componente.

A los homomorfismos de inclusión

$$\rho_i : B_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i, \quad b_i \longmapsto (\dots, 0, b_i, 0, \dots),$$

se les llama inyecciones coordenadas.

El grupo $\bigoplus_{i \in I} B_i$ se denomina también suma directa externa de los B_i y puede verse como el subgrupo del producto directo formado por los elementos con soporte finito.

Definición 1.4. Un **grupo abeliano libre** es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos x_i ($i \in I$), entonces el grupo libre será

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ es una base de F . Los elementos de F son combinaciones lineales finitas de la forma

$$g = n_1 x_{i_1} + \dots + n_k x_{i_k}, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Theorem 1.5 (Propiedad universal de los grupos libres). *Sea X un conjunto libre de generadores del grupo libre F . Toda función*

$$f : X \longrightarrow A$$

con valores en un grupo abeliano A se extiende de manera única a un homomorfismo

$$\varphi : F \longrightarrow A.$$

Esta propiedad caracteriza a los conjuntos libres de generadores, y por lo tanto a los grupos libres.

Definición 1.6. *Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C = X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c , $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c) ; entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \quad a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \rightarrow G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\bar{g} : A \otimes C \rightarrow G$ tal que $\bar{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.7. *La parte de torsión de un grupo A es*

$$t(A) := \{x \in A \mid nx = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $t(A) = A$, decimos que A es de torsión. En este caso,

$$A = \bigoplus_p A_p.$$

Theorem 1.8 (Teorema fundamental de los grupos finitamente generados). *Todo grupo G tal que existe $X \in [G]^{<\omega^2}$ con $\langle X \rangle = G$ es isomorfo a la suma directa de un grupo libre finitamente generado y un número finito de grupos cíclicos de orden p^k , con p primo y $k \geq 1$. Esta descomposición es única salvo isomorfismos. En particular,*

$$G = F(G) \oplus t(G),$$

donde $F(G)$ es la parte libre de G y $t(G)$ es su parte de torsión.

Definición 1.9. El **producto de torsión** de dos grupos abelianos A y C , denotado por $\text{Tor}(A, C)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias (a, m, c) con $a \in A$, $c \in C$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $ma = 0 = mc$, sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\text{Tor}(A, C)$ es abeliano y satisface una simetría natural

$$\text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$

Proposición 1.10. Sea \mathcal{G} una familia de grupos abelianos. Entonces,

$$\left(\bigoplus_{G \in \mathcal{G}} G \right) \otimes C \cong \bigoplus_{G \in \mathcal{G}} (G \otimes C).$$

Proposición 1.11. Si A y C son finitos, entonces

$$A \otimes C \cong \text{Tor}(A, C),$$

y ambos funtores son conmutativos; es decir,

$$A \otimes C \cong C \otimes A \quad y \quad \text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$

²En general, si A es un conjunto, entonces $[A]^{<\omega}$ representa la colección de todos los subconjuntos finitos de A .

Capítulo II

Complejos

1. Complejos de Cadenas

Definición 1.1 (Complejo de Cadenas). Un **complejo de cadenas** es una familia $\mathcal{K} := \{(K_n, \partial_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ tal que para toda $n \in \mathbb{Z}$ se satisfacen las siguientes condiciones

1. K_n es un grupo abeliano;
2. $\partial_n : K_{n+1} \rightarrow K_n$ es morfismo de grupos abelianos; y
3. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Observación 1.2. La ecuación última es equivalente a decir que para toda $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$\text{im}(\partial_{n+1}) \leq \ker(\partial_n).$$

Definición 1.3. Dado un complejo de cadenas \mathcal{K} definimos la **Homología** de \mathcal{K} , en símbolos $H(\mathcal{K})$, como la familia de grupos abelianos $\{H_n(\mathcal{K}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, donde

$$H_n(\mathcal{K}) := \ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1}).$$

Nos referimos a los elementos de K_n como **n -cadenas**, a los de $\ker(\partial_n)$ como **n -cíclos** y a los de $\text{im}(\partial_n)$ como **n -fronteras**. Cuando no exista confusión escribiremos la clase lateral $c + \text{im}(\partial_{n+1}) \in H_n(\mathcal{K})$ como $[c]$. Además, si $c' \in [c]$, diremos que c' y c son **homólogos**.

Definición 1.4 (Morfismo de cadenas). *Dados dos complejos de cadenas \mathcal{K} y \mathcal{K}' un **morfismo de cadenas** f , denotado por $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ es una familia de morfismos $\{f_n: K_n \rightarrow K'_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de tal manera que $\partial'_{n+1}f_{n+1} = f_n\partial_n$.*

Proposición 1.5. 1. *El morfismo trivial de grupos¹ abelianos induce de manera natural un morfismo de cadenas.*

2. *Existe $1_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, con $1_{\mathcal{K}_n} = \text{Id}_{\mathcal{K}_n}$ la identidad.*

3. *Si \mathcal{K} , \mathcal{J} y \mathcal{L} son complejos de cadenas y $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$ y $g: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{L}$ son morfismos de cadenas, entonces la familia de morfismos $\{g_n \circ f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es el morfismo de cadenas $g \circ f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$.*

2 y 3 en suma nos dicen que existe la categoría de complejos de cadenas.

Proposición 1.6. *Dados dos complejos de cadenas \mathcal{K} y \mathcal{L} y un morfismo de cadenas $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, se tiene que la familia de morfismos A , $\{H_n(f): n \in \mathbb{Z}\}$ donde el morfismo $H_n(f): H_n(\mathcal{K}) \rightarrow H_n(\mathcal{L})$ está dado por*

$$H_n(f)(c + \text{im } \partial_{n+1}) = f(c) + \text{im } \partial_{n+1},$$

es un morfismo de grupos abelianos.

¹Aquí nos referimos al morfismo que manda todo elemento de un grupo al 0 de otro.