

Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

17 de noviembre de 2025

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. Un Grupo¹ es un conjunto A junto con una operación $+$: $A \times A \rightarrow A$ que satisface que para cualesquiera $a, b, c \in A$ se cumple

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. $a + b = b + a$.
3. Existe $0_A \in A$ que satisface que para toda $z \in A$ se cumple que $z + 0_A = z$.
4. Existe $x \in A$ tal que $a + x = 0_A$.

Cuando no exista ambigüedad usaremos el símbolo 0 sin mencionar a que grupo pertenece.

Definición 1.2. Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos x_i ($i \in I$), entonces el grupo libre será

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ es una base de F . Los elementos de F son combinaciones lineales finitas de la forma

$$g = n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de

¹Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Theorem 1.3 (Propiedad universal de los grupos libres). *Sea X un conjunto libre de generadores del grupo libre F . Toda función*

$$f : X \longrightarrow A$$

con valores en un grupo abeliano A se extiende de manera única a un homomorfismo

$$\varphi : F \longrightarrow A.$$

Esta propiedad caracteriza a los conjuntos libres de generadores, y por lo tanto a los grupos libres.

Definición 1.4. *Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C = X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c , $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c) ; entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \quad a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \rightarrow G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\bar{g} : A \otimes C \rightarrow G$ tal que $\bar{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.5. *El producto de torsión de dos grupos abelianos A y C , denotado por $\text{Tor}(A, C)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las*

tercias (a, m, c) con $a \in A$, $c \in C$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $ma = 0 = mc$, sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc).\end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\text{Tor}(A, C)$ es abeliano y satisface una simetría natural:

$$\text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$