Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

20 de noviembre de 2025

Índice general

Capítulo I

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. *Un **grupo**[1] es un conjunto A junto con una operación $+\colon A \times A \to A$ que satisface que para cualesquiera $a, b, c \in A$ se cumple*

1. $a + (b + c) \ = \ (a + b) + c$.
2. $a + b \ = \ b + a$.
3. *Existe* $0_A \in A$ *que satisface que para toda* $z \in A$ *se cumple que* $z + 0_A \ = \ a$.
4. *Existe* $x \in A$ *tal que* $a + x \ = \ 0_A$.

Cuando no exista ambiguedad usaremos el símbolo 0 *sin mencionar a que grupo pertenece.*

Definición 1.2. *Sea* $\{B_i\}_{i \in I}$ *una familia de grupos. Un* vector

$$(\ldots, b_i, \ldots)$$

es una familia que asigna a cada índice $i \in I$ *un elemento* $b_i \in B_i$*. También puede verse como una función*

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$$

[1]Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

tal que

$$f(i) = b_i \in B_i \quad \textit{para cada } i \in I.$$

La igualdad y la suma de vectores se definen coordenada a coordenada*:*

$$(b_i)_{i\in I} = (b'_i)_{i\in I} \iff b_i = b'_i \textit{ para todo } i \in I,$$

$$(b_i)_{i\in I} + (b'_i)_{i\in I} = (\, b_i + b'_i \,)_{i\in I}.$$

El conjunto de todos estos vectores, con la operación descrita, forma un grupo que se denota por

$$C = \prod_{i\in I} B_i,$$

y se llama el producto directo *o* producto cartesiano *de los grupos B_i.*

Definición 1.3. *Sean $\{B_i\}_{i\in I}$ grupos abelianos. Se llama* suma directa *de los grupos B_i al subgrupo del producto directo*

$$\bigoplus_{i\in I} B_i = \left\{ (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; b_i = 0 \textit{ salvo para un número finito de índices } i \right\},$$

donde la operación de grupo está dada componente a componente.

A los homomorfismos de inclusión

$$\rho_i : B_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i, \qquad b_i \longmapsto (\ldots, 0, b_i, 0, \ldots),$$

se les llama inyecciones coordenadas.

El grupo $\bigoplus_{i\in I} B_i$ se denomina también suma directa externa *de los B_i y puede verse como el subgrupo del producto directo formado por los elementos con soporte finito.*

Definición 1.4. *Un* ***grupo abeliano libre*** *es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos x_i $(i \in I)$, entonces el grupo libre será*

$$F \;=\; \bigoplus_{i\in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ es una base de F. Los elementos de F son combinaciones lineales finitas de la forma

$$g \;=\; n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}, \quad \textit{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Theorem 1.5 (Propiedad universal de los grupos libres)**.** *Sea X un conjunto libre de generadores del grupo libre F. Toda función*

$$f : X \longrightarrow A$$

con valores en un grupo abeliano A se extiende de manera única a un homomorfismo

$$\varphi : F \longrightarrow A.$$

Esta propiedad caracteriza a los conjuntos libres de generadores, y por lo tanto a los grupos libres.

Definición 1.6. *Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C \;=\; X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c, $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c); entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c \;=\; a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \qquad a \otimes (c_1 + c_2) \;=\; a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \to G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\overline{g} : A \otimes C \to G$ tal que $\overline{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.7. *La parte de torsión de un grupo A es*

$$t(A) := \{\, x \in A \mid nx = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Si $t(A) = A$, decimos que A es de torsión. En este caso,

$$A = \bigoplus_p A_p.$$

Theorem 1.8 (Teorema fundamental de los grupos finitamente generados)**.** *Todo grupo G tal que existe $X \in [G]^{<\omega 2}$ con $\langle X \rangle = G$ es isomorfo a la suma directa de un grupo libre finitamente generado y un número finito de grupos cíclicos de orden p^k, con p primo y $k \geq 1$. Esta descomposición es única salvo isomorfismos. En particular,*

$$G = F(G) \oplus t(G),$$

donde $F(G)$ es la parte libre de G y $t(G)$ es su parte de torsión.

Definición 1.9. *El* ***producto de torsión*** *de dos grupos abelianos A y C, denotado por $\mathrm{Tor}(A, C)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias (a, m, c) con $a \in A$, $c \in C$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $ma = 0 = mc$, sujetos a las relaciones*

$$\begin{aligned}
(a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c),\\
(a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2),\\
(a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc).
\end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\mathrm{Tor}(A, C)$ es abeliano y satisface una simetría natural

$$\mathrm{Tor}(A, C) \cong \mathrm{Tor}(C, A).$$

Proposicion 1.10. *Sea $\mathcal{G}$ una familia de grupos abelianos. Entonces,*

$$\left(\bigoplus_{G \in \mathcal{G}} G\right) \otimes C \;\cong\; \bigoplus_{G \in \mathcal{G}} (G \otimes C).$$

Proposicion 1.11. *Si A y C son finitos, entonces*

$$A \otimes C \;\cong\; \mathrm{Tor}(A, C),$$

y ambos funtores son conmutativos; es decir,

$$A \otimes C \cong C \otimes A \quad y \quad \mathrm{Tor}(A, C) \cong \mathrm{Tor}(C, A).$$

[2] En general, si A es un conjunto, entonces $[A]^{<\omega}$ representa la colección de todos los subconjuntos finitos de A.

Capítulo II

Complejos

1. Complejos de Cadenas

Definición 1.1 (Complejo de Cadenas)**.** *Un* ***complejo de cadenas*** *es una familia* $\mathcal{K} := \{(K_n, \partial_n) \colon n \in \mathbb{Z}\}$ *tal que para toda* $n \in \mathbb{Z}$ *se satisfacen las siguientes condiciones*

1. K_n *es un grupo abeliano;*
2. $\partial_n \colon K_{n+1} \to K_n$ *es morfismo de grupos abelianos; y*
3. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Observación 1.2. *La ecuación última es equivalente a decir que para toda* $n \in \mathbb{Z}$ *se cumple que*

$$\operatorname{im}(\partial_{n+1}) \leq \ker(\partial_n).$$

Definición 1.3. *Dado un complejo de cadenas* $\mathcal{K}$ *definimos la* ***Homología*** *de* $\mathcal{K}$*, en símbolos* $H(\mathcal{K})$*, como la familia de grupos abelianos* $\{H_n(\mathcal{K}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$*, donde*

$$H_n(\mathcal{K}) \ := \ \ker(\partial_n) / \operatorname{im}(\partial_{n+1}).$$

Nos referimos a los elementos de K_n *como* n***-cadenas****, a los de* $\ker(\partial_n)$ *como* n***-cíclos*** *y a los de* $\operatorname{im}(\partial_n)$ *como* n***-fronteras****. Cuando no exista confusión escribiremos la clase lateral* $c + \operatorname{im}(\partial_{n+1}) \in H_n(\mathcal{K})$ *como* $[c]$*. Además, si* $c' \in [c]$*, diremos que* c' *y* c *son* ***homólogos****.*

Definición 1.4 (Morfismo de cadenas)**.** *Dados dos complejos de cadenas $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ un* ***morfismo de cadenas*** *f, denotado por $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ es una familia de morfismos $\{f_n\colon K_n \to K_n' \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de tal manera que $\partial_{n+1}' f_{n+1} = f_n \partial_n$.*

Proposicion 1.5. *1. El morfismo trivial de grupos*[1] *abelianos induce de manera natural un morfismo de cadenas.*

2. Existe $1_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, con $1_{\mathcal{K}_n} = Id_{K_n}$ la identidad.

3. S $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{L}$ son complejos de cadenas y $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{J}$ y $g\colon \mathcal{J} \to \mathcal{L}$ son morfismos de cadenas, entonces la familia de morfismos $\{g_n \circ f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es el morfismo de cadenas $g \circ f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$.

2 y 3 en suma nos dicen que existe la categoría de complejos de cadenas.

Proposicion 1.6. *Dados dos complejos de cadenas $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ y un morfismo de cadenas $f : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$, se tiene que la familia de morfismos A, $\{H_n(f) : n \in \mathbb{Z}\}$ donde el morfismo $H_n(f) : H_n(\mathcal{K}) \to H_n(\mathcal{L})$ está dado por*

$$H_n(f)(c + \operatorname{im} \partial_{n+1}) = f(c) + \operatorname{im} \partial_{n+1},$$

es un morfismo de grupos abelianos.

2. Complejos Simpliciales

Definición 2.1. *Sea C_0 un conjunto finito. Un* ***Complejo Simplicial*** *sobre C_0 es una familia $\mathcal{C} \subseteq P(C_0)$ cerrada bajo subconjuntos, es decir que si $\sigma \in \mathcal{C}$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonoces $\tau \in \mathcal{C}$.*

Definición 2.2. *Un complejo simplicial $C = P(C_0)$ se llama* ***Simplejo****. En este caso C_0 es la única faceta de $P(C_0)$. En este caso escribimos $\overline{C_0}$ en lugar de C.*

Observación 2.3. *El complejo simplicial generado por $F \subseteq P(V_0)$ es el mínimo complejo simplicial K de manera que $F \subseteq K$. Una manera de hacer esto es $\bigcup F = \bigcup_{\sigma \in F} \overline{\sigma}$.*

Notación 2.4. *Si $a \in C_0$ y C es un complejo simplicial sobre C_0, con $\{a\} \in C$, identificamos el símbolo a con $\{a\}$. En general, pero no siempre, identificaremos la cadena de símbolos $a_1 a_2 \cdots a_n$ con el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.*

[1] Aquí nos referimos al morfismo que manda todo elemento de un grupo al 0 de otro.

Definición 2.5 (n-esfera)**.** *Sea* $\{a_n \mid n < \omega\}$ *un conjunto de símbolos distintos por pares; definimos la* 0***-esfera*** *como* $S^0_\Delta(a_0) := \{\emptyset, (a_0, 0), (a_0, 1)\}$ *y para toda* $n < \omega$ *definimos la* $(n+1)$***-esfera*** *como*

$$S^{n+1}_\Delta(a_0, \ \dots, \ a_{n+1}) := S^{n+1}_\Delta(a_0, \ \dots, \ a_n) * S^0_\Delta(a_{n+1});$$

donde $*$ *es el ensamble de complejos simpliciales definido como sigue: Si* C *y* D *son complejos sin vértices en común, entonces el esnamble de* C *con* D *es el complejo*

$$C * D := \{\sigma \cup \tau \mid (\sigma, \tau) \in C \times D\}.$$

Funciones Simpliciales

Para todo complejo simplicial C denotamos con C_0 al conjunto de vértices de C. Sean D y C dos complejos simpliciales. Una función $f\colon C_0 \to D_0$ es una ***función simplicial*** si para todo $\sigma \in C$ se cumple que $f[\sigma] \in D$.

Observación 2.6. *Dada una función simplicial* $f\colon C_0 \to D_0$*, y recordando la convención hecha en 2.4 podemos pensar que* f *está definida en todo* C*, de manera que siempre asumiremos que* $f\colon C \to D$ *para una función simplicial. En este caso* $f(\sigma) := f[\sigma]$*.*

Realización Geométrica

Definición 2.7. *Un conjunto finito* $\{x_i \mid i \leq m\}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *es* ***afinmente independiente*** *si siempre que*

$$\sum_{i \in J} t_i x_i = \sum_{i \in J} s_i x_i$$

con $J \subseteq \{0, \ \dots, \ m\}$ *y* $\sum_{i \in J} t_i = \sum_{i \in J} s_i = 1$ *y* $t_i, s_i \geq 0$ *para toda* $i \in J$*, entonces* $t_i = s_i$ *para toda* $i \in J$*.*
Dado un conjunto afinmente independiente A*, una combinación afin de* A *es un vector de la forma* $\sum_{a \in A} S_A a$*, con* $\sum_{a \in A} S_A = 1$ *y* $S_a \geq 0$*.*

Observación 2.8. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *es afinmente independiente si y sólo si* $A \setminus \{a\} - a$ *es linealmenete independiente para algun* $a \in A$*.*

Definición 2.9. *Sea* A *un conjunto afinmente independiente. La* ***cápsula convexa*** *de* A *es el conjunto de todas las combinaciones afines de* A*.*

Definición 2.10. *Sea V un conjunto finito, el V* ***-simplejo estandar*** *es la cápsula convexa de V en $\mathbb{R}^n$.*

Definición 2.11. *Sea C un complejo simplicial con vértices C_0. La* ***realización geométrica estandar*** *de C es la unión de los σ-simplejos estandar en $\mathbb{R}^{C_0}$, con $\sigma \in C$, con la topología de subespacio.*
Todo espacio topológico isomorfo a la realización geométrica estandar de C será llamado realización geométrica de C y sin miramientos nos referiremos a cualquiera de ellos como $|C|$.

Complejos Simpliciales Geométricos

Un n-simplejo geométrico es la cápsula convexa de un conjunto afinmente independiente de cardinalidad $n+1$. Una cara de un simplejo geométrico σ generado por A es un simplejo generado por un subconjunto de A.
A cada n-simplejo geométrico generado por A le asociamos el n-simplejo(abstracto) $P(A)$. Por otro lado, todo n-simplejo σ tiene asociado un n-simplejo geométrico $|\sigma|$.
Un complejo simplicial geométrico es un conjunto de simplejos geométricos, cerrado bajo curvas, tal que la intersección de cualesquiera dos de ellos tiene que ser una cara de ambos.

Sean C y D dos complejos simpliciales y $f\colon C \to D$ una función simplicial. Consideremos las respectivas realizaciones geométricas $|C| \subseteq \mathbb{R}^{C_0}$ y $|D| \subseteq \mathbb{R}^{D_0}$. De este modo, todo elemento de $|C|$ es de la forma $\sum_{a\in\sigma} t_a a$ con $\sigma \in C$. De esta manera, podemos definir a la función $|f|\colon |C| \to |D|$ como

$$|f|(\sum_{a\in\sigma} t_a a) := \sum_{a\in\sigma} t_a f(a)$$

para toda σ y toda combinación lineal afin.

Observación 2.12. $a \in \mathbb{R}^{C_0}$ *es la función definida como*

$$a(x) := \begin{cases} 0 & a \neq x, \\ a & a = x. \end{cases}$$