Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

11 de noviembre de 2025

Índice general

Capítulo I

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. *Un Grupo*[1] *es un conjunto* A *junto con una operación* $+\colon A \times A \to A$ *que satisface que para cualesquiera* $a, b, c \in A$ *se cumple*

1. $a + (b + c) \ = \ (a + b) + c.$
2. $a + b \ = \ b + a.$
3. *Existe* $0_A \in A$ *que satisface que para toda* $z \in A$ *se cumple que* $z + 0_A \ = \ a.$
4. *Existe* $x \in A$ *tal que* $a + x \ = \ 0_A.$

Cuando no exista ambiguedad usaremos el símbolo 0 *sin mencionar a que grupo pertenece.*

Definición 1.2. *Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos* x_i $(i \in I)$*, entonces el grupo libre será*

$$F \ = \ \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ *es una base de* F*. Los elementos de* F *son combinaciones lineales finitas de la forma*

$$g \ = \ n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}, \quad \textit{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

[1] Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Definición 1.3. *Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C \;=\; X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c, $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c); entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c \;=\; a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \qquad a \otimes (c_1 + c_2) \;=\; a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \to G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\overline{g} : A \otimes C \to G$ tal que $\overline{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.4. *El producto de torsión de dos grupos abelianos A y C, denotado por $\mathrm{Tor}(A, C)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias (a, m, c) con $a \in A$, $c \in C$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $ma = 0 = mc$, sujetos a las relaciones*

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\mathrm{Tor}(A, C)$ es abeliano y satisface una simetría natural:

$$\mathrm{Tor}(A, C) \cong \mathrm{Tor}(C, A).$$

Capítulo II

Complejos de Cadenas

Definición 0.1 (Complejo de Cadenas)**.** *Un **complejo de cadenas** es una familia* $\mathcal{K} := \{(K_n, \partial_n) : n \in \mathbb{Z}\}$ *tal que para toda* $n \in \mathbb{Z}$ *se satisfacen las siguientes condiciones*

1. K_n *es un grupo abeliano;*

2. $\partial_n \colon K_{n+1} \to K_n$ *es morfismo de grupos abelianos; y*

3. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Observación 0.2. *La ecuación última ecuación es equivalente a decir que para toda* $n \in \mathbb{Z}$ *se cumple que*

$$\operatorname{im}(\partial_{n+1}) \leq \ker(\partial_n).$$

Definición 0.3. *Dado un complejo de cadenas* $\mathcal{K}$ *definimos la **Homología** de* $\mathcal{K}$*, en símbolos* $H(\mathcal{K})$*, como la familia de grupos abelianos* $\{H_n(\mathcal{K}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$*, donde*

$$H_n(\mathcal{K}) \ := \ \ker(\partial_n)/\operatorname{im}(\partial_{n+1}).$$

Nos referimos a los elementos de K_n *como* n***-cadenas****, a los de* $\ker(\partial_n)$ *como* n***-cíclos*** *y a los de* $\operatorname{im}(\partial_n)$ *como* n***-fronteras****. Cuando no exista confusión escribiremos la clase lateral* $c + \operatorname{im}(\partial_{n+1}) \in H_n(\mathcal{K})$ *como* $[c]$*. Además, si* $c' \in [c]$*, diremos que* c' *y* c *son **homólogos**.*

Definición 0.4 (Morfismo de cadenas)**.** *Dados dos complejos de cadenas* $\mathcal{K}$ *y* $\mathcal{K}'$ *un **morfismo de cadenas*** f*, denotado por* $f \colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ *es una familia de morfismos* $\{f_n \colon K_n \to K'_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *de tal manera que* $\partial'_{n+1} f_{n+1} = f_n \partial_n$.

Proposicion 0.5. *1. El morfismo trivial de grupos*[1] *abelianos induce de manera natural un morfismo de cadenas.*

2. Existe $1_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, con $1_{\mathcal{K}_n} = Id_{K_n}$ la identidad.

3. S $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{L}$ son complejos de cadenas y $f \colon \mathcal{K} \to \mathcal{J}$ y $g \colon \mathcal{J} \to \mathcal{L}$ son morfismos de cadenas, entonces la familia de morfismos $\{g_n \circ f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es el morfismo de cadenas $g \circ f \colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$.

2 y 3 en suma nos dicen que existe la categoría de complejos de cadenas.

Proposicion 0.6. *Dados dos complejos de cadenas $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ y un morfismo de cadenas $f : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$, se tiene que la familia de morfismos A, $\{H_n(f) : n \in \mathbb{Z}\}$ donde el morfismo $H_n(f) : H_n(\mathcal{K}) \to H_n(\mathcal{L})$ está dado por*

$$H_n(f)(c + \operatorname{im} \partial_{n+1}) = f(c) + \operatorname{im} \partial_{n+1},$$

es un morfismo de grupos abelianos.

[1] Aquí nos referimos al morfismo que manda todo elemento de un grupo al 0 de otro.