

# Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

16 de noviembre de 2025



# Índice general

<b>I. Preludio de Algebra</b>	<b>1</b>
I.1. Grupos . . . . .	1
<b>II. Complejos</b>	<b>3</b>
II.1. Complejos de Cadenas . . . . .	3



# Capítulo I

## Preludio de Algebra

### 1. Grupos

**Definición 1.1.** Un **grupo**<sup>1</sup> es un conjunto  $A$  junto con una operación  $+: A \times A \rightarrow A$  que satisface que para cualesquiera  $a, b, c \in A$  se cumple

1.  $a + (b + c) = (a + b) + c$ .
2.  $a + b = b + a$ .
3. Existe  $0_A \in A$  que satisface que para toda  $z \in A$  se cumple que  $z + 0_A = z$ .
4. Existe  $x \in A$  tal que  $a + x = 0_A$ .

Cuando no exista ambigüedad usaremos el símbolo  $0$  sin mencionar a que grupo pertenece.

**Definición 1.2.** Un **grupo abeliano libre** es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos  $x_i$  ( $i \in I$ ), entonces el grupo libre será

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto  $\{x_i\}_{i \in I}$  es una base de  $F$ . Los elementos de  $F$  son combinaciones lineales finitas de la forma

$$g = n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

---

<sup>1</sup>Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

*Dos combinaciones representan el mismo elemento de  $F$  si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular,  $F$  está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.*

**Definición 1.3.** Sean  $A$  y  $C$  grupos abelianos. Sea  $X$  el grupo libre sobre el conjunto  $A \times C$ , cuyos generadores son  $(a, c)$  con  $a \in A$  y  $c \in C$ . Sea  $Y$  el subgrupo de  $X$  generado por todos los elementos de la forma

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo  $a, a_1, a_2 \in A$  y  $c, c_1, c_2 \in C$ . El producto tensorial de  $A$  y  $C$  se define como el cociente

$$A \otimes C = X/Y.$$

Dado  $(a, c) \in A \times C$  definimos el tensor de  $a$  con  $c$ ,  $a \otimes c$ , como la clase del generador  $(a, c)$ ; entonces los elementos de  $A \otimes C$  son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \quad a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo  $A \otimes C$  cumple la propiedad universal: para toda función bilineal  $g : A \times C \rightarrow G$ , con  $G$  un grupo abeliano, existe un único morfismo  $\bar{g} : A \otimes C \rightarrow G$  tal que  $\bar{g}(a \otimes c) = g(a, c)$ . Esta propiedad caracteriza a  $A \otimes C$  de manera única, salvo isomorfismos.

**Definición 1.4.** El **producto de torsión** de dos grupos abelianos  $A$  y  $C$ , denotado por  $\text{Tor}(A, C)$ , se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias  $(a, m, c)$  con  $a \in A$ ,  $c \in C$  y  $m \in \mathbb{N}$  tales que  $ma = 0 = mc$ , sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo  $\text{Tor}(A, C)$  es abeliano y satisface una simetría natural:

$$\text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$

# Capítulo II

## Complejos

### 1. Complejos de Cadenas

**Definición 1.1** (Complejo de Cadenas). Un **complejo de cadenas** es una familia  $\mathcal{K} := \{(K_n, \partial_n) : n \in \mathbb{Z}\}$  tal que para toda  $n \in \mathbb{Z}$  se satisfacen las siguientes condiciones

1.  $K_n$  es un grupo abeliano;
2.  $\partial_n : K_{n+1} \rightarrow K_n$  es morfismo de grupos abelianos; y
3.  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ .

**Observación 1.2.** La ecuación última ecuación es equivalente a decir que para toda  $n \in \mathbb{Z}$  se cumple que

$$\text{im}(\partial_{n+1}) \leq \ker(\partial_n).$$

**Definición 1.3.** Dado un complejo de cadenas  $\mathcal{K}$  definimos la **Homología** de  $\mathcal{K}$ , en símbolos  $H(\mathcal{K})$ , como la familia de grupos abelianos  $\{H_n(\mathcal{K}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , donde

$$H_n(\mathcal{K}) := \ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1}).$$

Nos referimos a los elementos de  $K_n$  como  **$n$ -cadenas**, a los de  $\ker(\partial_n)$  como  **$n$ -cíclos** y a los de  $\text{im}(\partial_n)$  como  **$n$ -fronteras**. Cuando no exista confusión escribiremos la clase lateral  $c + \text{im}(\partial_{n+1}) \in H_n(\mathcal{K})$  como  $[c]$ . Además, si  $c' \in [c]$ , diremos que  $c'$  y  $c$  son **homólogos**.

**Definición 1.4** (Morfismo de cadenas). *Dados dos complejos de cadenas  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}'$  un **morfismo de cadenas**  $f$ , denotado por  $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  es una familia de morfismos  $\{f_n: K_n \rightarrow K'_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  de tal manera que  $\partial'_{n+1}f_{n+1} = f_n\partial_n$ .*

**Proposición 1.5.** 1. *El morfismo trivial de grupos<sup>1</sup> abelianos induce de manera natural un morfismo de cadenas.*

2. *Existe  $1_{\mathcal{K}}: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ , con  $1_{\mathcal{K}_n} = \text{Id}_{\mathcal{K}_n}$  la identidad.*

3. *Si  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{L}$  son complejos de cadenas y  $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  y  $g: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{L}$  son morfismos de cadenas, entonces la familia de morfismos  $\{g_n \circ f_n: n \in \mathbb{Z}\}$  es el morfismo de cadenas  $g \circ f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ .*

2 y 3 en suma nos dicen que existe la categoría de complejos de cadenas.

**Proposición 1.6.** *Dados dos complejos de cadenas  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  y un morfismo de cadenas  $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ , se tiene que la familia de morfismos  $A$ ,  $\{H_n(f): n \in \mathbb{Z}\}$  donde el morfismo  $H_n(f): H_n(\mathcal{K}) \rightarrow H_n(\mathcal{L})$  está dado por*

$$H_n(f)(c + \text{im } \partial_{n+1}) = f(c) + \text{im } \partial_{n+1},$$

*es un morfismo de grupos abelianos.*

---

<sup>1</sup>Aquí nos referimos al morfismo que manda todo elemento de un grupo al 0 de otro.