Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

17 de noviembre de 2025

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. *Un Grupo*[1] *es un conjunto* A *junto con una operación* $+ \colon A \times A \to A$ *que satisface que para cualesquiera* $a, b, c \in A$ *se cumple*

1. $a + (b + c) \; = \; (a + b) + c.$
2. $a + b \; = \; b + a.$
3. *Existe* $0_A \in A$ *que satisface que para toda* $z \in A$ *se cumple que* $z + 0_A \; = \; a.$
4. *Existe* $x \in A$ *tal que* $a + x \; = \; 0_A.$

Cuando no exista ambiguedad usaremos el símbolo 0 *sin mencionar a que grupo pertenece.*

Definición 1.2. *Sea* $\{B_i\}_{i \in I}$ *una familia de grupos. Un* vector

$$(\dots, b_i, \dots)$$

es una familia que asigna a cada índice $i \in I$ *un elemento* $b_i \in B_i$*. También puede verse como una función*

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$$

tal que

$$f(i) = b_i \in B_i \quad \text{para cada } i \in I.$$

[1] Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

La igualdad y la suma de vectores se definen coordenada a coordenada*:*

$$(b_i)_{i\in I} = (b'_i)_{i\in I} \quad \Longleftrightarrow \quad b_i = b'_i \textit{ para todo } i \in I,$$

$$(b_i)_{i\in I} + (b'_i)_{i\in I} = (\, b_i + b'_i \,)_{i\in I}.$$

El conjunto de todos estos vectores, con la operación descrita, forma un grupo que se denota por

$$C = \prod_{i\in I} B_i,$$

y se llama el producto directo *o* producto cartesiano *de los grupos B_i.*

Definición 1.3. *Sean $\{B_i\}_{i\in I}$ grupos abelianos. Se llama* suma directa *de los grupos B_i al subgrupo del producto directo*

$$\bigoplus_{i\in I} B_i = \left\{ (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; b_i = 0 \textit{ salvo para un número finito de índices } i \right\},$$

donde la operación de grupo está dada componente a componente.

A los homomorfismos de inclusión

$$\rho_i : B_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i, \qquad b_i \longmapsto (\ldots, 0, b_i, 0, \ldots),$$

se les llama inyecciones coordenadas.

El grupo $\bigoplus_{i\in I} B_i$ se denomina también suma directa externa *de los B_i y puede verse como el subgrupo del producto directo formado por los elementos con soporte finito.*

Definición 1.4. *Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos x_i $(i \in I)$, entonces el grupo libre será*

$$F \;=\; \bigoplus_{i\in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ es una base de F. Los elementos de F son combinaciones lineales finitas de la forma

$$g \;=\; n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}, \quad \textit{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Definición 1.5. *Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C \;=\; X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c, $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c); entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c \;=\; a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \qquad a \otimes (c_1 + c_2) \;=\; a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \to G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\overline{g} : A \otimes C \to G$ tal que $\overline{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.6. *La parte de torsión de un grupo A es*

$$t(A) := \{\, x \in A \mid nx = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Si $t(A) = A$, decimos que A es de torsión. En este caso,

$$A = \bigoplus_p A_p.$$

Theorem 1.7 (Teorema fundamental de los grupos finitamente generados)**.** *Todo grupo G tal que existe $X \in [G]^{<\omega}$ con $\langle X \rangle = G$ es isomorfo a la suma directa de un grupo libre finitamente generado y un número finito de grupos cíclicos de orden p^k, con p primo y $k \geq 1$. Esta descomposición es única salvo isomorfismos. En particular,*

$$G = F(G) \oplus t(G),$$

donde $F(G)$ es la parte libre de G y $t(G)$ es su parte de torsión.

Definición 1.8. *El producto de torsión de dos grupos abelianos A y C, denotado por* $\mathrm{Tor}(A, C)$*, se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias* (a, m, c) *con* $a \in A$*,* $c \in C$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *tales que* $ma = 0 = mc$*, sujetos a las relaciones*

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c),\\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2),\\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc).\end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\mathrm{Tor}(A, C)$ *es abeliano y satisface una simetría natural:*

$$\mathrm{Tor}(A, C) \cong \mathrm{Tor}(C, A).$$

Proposition 1.9. *Sea* $\mathcal{G}$ *una familia de grupos abelianos. Entonces,*

$$\mathrm{Tor}\left(\bigoplus_{G \in \mathcal{G}} G,\ C\right) \ \cong\ \bigoplus_{G \in \mathcal{G}} \mathrm{Tor}(G, C).$$

Proposition 1.10. *Si A y C son finitos, entonces*

$$A \otimes C \ \cong\ \mathrm{Tor}(A, C).$$