

# Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

17 de noviembre de 2025



# Preludio de Álgebra

## 1. Grupos

**Definición 1.1.** Un Grupo<sup>1</sup> es un conjunto  $A$  junto con una operación  $+ : A \times A \rightarrow A$  que satisface que para cualesquiera  $a, b, c \in A$  se cumple

1.  $a + (b + c) = (a + b) + c.$
2.  $a + b = b + a.$
3. Existe  $0_A \in A$  que satisface que para toda  $z \in A$  se cumple que  $z + 0_A = a.$
4. Existe  $x \in A$  tal que  $a + x = 0_A.$

Cuando no exista ambigüedad usaremos el símbolo 0 sin mencionar a qué grupo pertenece.

**Definición 1.2.** Sea  $\{B_i\}_{i \in I}$  una familia de grupos. Un vector

$$(\dots, b_i, \dots)$$

es una familia que asigna a cada índice  $i \in I$  un elemento  $b_i \in B_i$ . También puede verse como una función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$$

tal que

$$f(i) = b_i \in B_i \quad \text{para cada } i \in I.$$

---

<sup>1</sup>Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

*La igualdad y la suma de vectores se definen coordenada a coordenada:*

$$(b_i)_{i \in I} = (b'_i)_{i \in I} \iff b_i = b'_i \text{ para todo } i \in I,$$

$$(b_i)_{i \in I} + (b'_i)_{i \in I} = (b_i + b'_i)_{i \in I}.$$

*El conjunto de todos estos vectores, con la operación descrita, forma un grupo que se denota por*

$$C = \prod_{i \in I} B_i,$$

*y se llama el producto directo o producto cartesiano de los grupos  $B_i$ .*

**Definición 1.3.** *Sean  $\{B_i\}_{i \in I}$  grupos abelianos. Se llama suma directa de los grupos  $B_i$  al subgrupo del producto directo*

$$\bigoplus_{i \in I} B_i = \left\{ (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_i \mid b_i = 0 \text{ salvo para un número finito de índices } i \right\},$$

*donde la operación de grupo está dada componente a componente.*

*A los homomorfismos de inclusión*

$$\rho_i : B_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i, \quad b_i \longmapsto (\dots, 0, b_i, 0, \dots),$$

*se les llama inyecciones coordinadas.*

*El grupo  $\bigoplus_{i \in I} B_i$  se denomina también suma directa externa de los  $B_i$  y puede verse como el subgrupo del producto directo formado por los elementos con soporte finito.*

**Definición 1.4.** *Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos  $x_i$  ( $i \in I$ ), entonces el grupo libre será*

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

*El conjunto  $\{x_i\}_{i \in I}$  es una base de  $F$ . Los elementos de  $F$  son combinaciones lineales finitas de la forma*

$$g = n_1 x_{i_1} + \dots + n_k x_{i_k}, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

*Dos combinaciones representan el mismo elemento de  $F$  si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular,  $F$  está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.*

**Definición 1.5.** Sean  $A$  y  $C$  grupos abelianos. Sea  $X$  el grupo libre sobre el conjunto  $A \times C$ , cuyos generadores son  $(a, c)$  con  $a \in A$  y  $c \in C$ . Sea  $Y$  el subgrupo de  $X$  generado por todos los elementos de la forma

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo  $a, a_1, a_2 \in A$  y  $c, c_1, c_2 \in C$ . El producto tensorial de  $A$  y  $C$  se define como el cociente

$$A \otimes C = X/Y.$$

Dado  $(a, c) \in A \times C$  definimos el tensor de  $a$  con  $c$ ,  $a \otimes c$ , como la clase del generador  $(a, c)$ ; entonces los elementos de  $A \otimes C$  son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \quad a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo  $A \otimes C$  cumple la propiedad universal: para toda función bilineal  $g : A \times C \rightarrow G$ , con  $G$  un grupo abeliano, existe un único morfismo  $\bar{g} : A \otimes C \rightarrow G$  tal que  $\bar{g}(a \otimes c) = g(a, c)$ . Esta propiedad caracteriza a  $A \otimes C$  de manera única, salvo isomorfismos.

**Definición 1.6.** El producto de torsión de dos grupos abelianos  $A$  y  $C$ , denotado por  $\text{Tor}(A, C)$ , se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias  $(a, m, c)$  con  $a \in A$ ,  $c \in C$  y  $m \in \mathbb{N}$  tales que  $ma = 0 = mc$ , sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo  $\text{Tor}(A, C)$  es abeliano y satisface una simetría natural:

$$\text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$