

# Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

1 de noviembre de 2025



# Preludio de Álgebra

## 1. Grupos

**Definición 1.1.** Un Grupo<sup>1</sup> es un conjunto  $A$  junto con una operación  $+: A \times A \rightarrow A$  que satisface que para cualesquiera  $a, b, c \in A$  se cumple

1.  $a + (b + c) = (a + b) + c.$
2.  $a + b = b + a.$
3. Existe  $0_A \in A$  que satisface que para toda  $z \in A$  se cumple que  $z + 0_A = a.$
4. Existe  $x \in A$  tal que  $a + x = 0_A.$

Cuando no exista ambigüedad usaremos el símbolo 0 sin mencionar a que grupo pertenece.

---

<sup>1</sup>Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.



# Complejos de Cadenas

**Definición 1.2** (Complejo de Cadenas). *Un **complejo de cadenas** es una familia  $\mathcal{K} := \{(K_n, \partial_n) : n \in \mathbb{Z}\}$  tal que para toda  $n \in \mathbb{Z}$  se satisfacen las siguientes condiciones*

1.  $K_n$  es un grupo abeliano;
2.  $\partial_n : K_{n+1} \rightarrow K_n$  es morfismo de grupos abelianos; y
3.  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ .

**Observación 1.3.** La ecuación última ecuación es equivalente a decir que para toda  $n \in \mathbb{Z}$  se cumple que

$$im(\partial_{n+1}) \leq Ker(\partial_n).$$

**Definición 1.4.** Dado un complejo de cadenas  $\mathcal{K}$  definimos la **Homología** de  $\mathcal{K}$ , en símbolos  $H(\mathcal{K})$ , como la familia de grupos abelianos  $\{H_n(\mathcal{K}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ , donde

$$H_n(\mathcal{K}) := Ker(\partial_n)/im(\partial_{n+1}).$$

Nos referimos a los elementos de  $K_n$  como  $n$ -cadenas, a los de  $Ker(\partial_n)$  como  $n$ -ciclos y a los de  $im(\partial_n)$  como  $n$ -fronteras. Cuando no exista confusión escribiremos la clase lateral  $c + im(\partial_{n+1}) \in H_n(\mathcal{K})$  como  $[c]$ . Además, si  $c' \in [c]$ , diremos que  $c'$  y  $c$  son homólogos.

**Definición 1.5** (Morfismo de cadenas). *Dados dos complejos de cadenas  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{K}'$  un morfismo de cadenas  $f$ , denotado por  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  es una familia de morfismos  $\{f_n : K_n \rightarrow K'_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  de tal manera que  $\partial'_{n+1} f_{n+1} = f_n \partial_n$ ; equivalentemente el siguiente diagrama conmuta para toda  $n \in \mathbb{Z}$*

**Proposition 1.6.** 1. El morfismo trivial de grupos<sup>2</sup> abelianos induce de manera natural un morfismo de cadenas.

2. Existe  $1_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ , con  $1_{\mathcal{K}_n} = Id_{K_n}$  la identidad.

3. Si  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{J}$  y  $\mathcal{L}$  son complejos de cadenas y  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{J}$  y  $g : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{L}$  son morfismos de cadenas, entonces la familia de morfismos  $\{g_n \circ f_n : n \in \mathbb{Z}\}$  es el morfismo de cadenas  $g \circ f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ .

En suma, existe la categoría de complejos de cadenas.

**Proposition 1.7.** Dados dos complejos de cadenas  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{L}$  y un morfismo de cadenas  $f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ , se tiene que la familia de morfismos  $\{H_n(f) : n \in \mathbb{Z}\}$  donde el morfismo  $H_n(f) : H_n(\mathcal{K}) \rightarrow H_n(\mathcal{L})$  está dado por

$$H_n(f)(c + im\partial_{n+1}) = f(c) + im\partial_{n+1}$$

es un morfismo de grupos abelianos.

---

<sup>2</sup>Aquí nos referimos al morfismo que manda todo elemento de un grupo al 0 de otro.