Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

20 de noviembre de 2025

Índice general

Capítulo I

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. *Un* ***grupo***[1] *es un conjunto* A *junto con una operación* $+\colon A \times A \to A$ *que satisface que para cualesquiera* $a, b, c \in A$ *se cumple*

1. $a + (b + c) \ = \ (a + b) + c$.
2. $a + b \ = \ b + a$.
3. *Existe* $0_A \in A$ *que satisface que para toda* $z \in A$ *se cumple que* $z + 0_A \ = \ a$.
4. *Existe* $x \in A$ *tal que* $a + x \ = \ 0_A$.

Cuando no exista ambiguedad usaremos el símbolo 0 *sin mencionar a que grupo pertenece.*

Definición 1.2. *Sea* $\{B_i\}_{i\in I}$ *una familia de grupos. Un* vector

$$(\ldots, b_i, \ldots)$$

es una familia que asigna a cada índice $i \in I$ *un elemento* $b_i \in B_i$*. También puede verse como una función*

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} B_i$$

[1]Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

tal que

$$f(i) = b_i \in B_i \quad \textit{para cada } i \in I.$$

La igualdad y la suma de vectores se definen coordenada a coordenada*:*

$$(b_i)_{i\in I} = (b'_i)_{i\in I} \quad \Longleftrightarrow \quad b_i = b'_i \textit{ para todo } i \in I,$$

$$(b_i)_{i\in I} + (b'_i)_{i\in I} = (\, b_i + b'_i \,)_{i\in I}.$$

El conjunto de todos estos vectores, con la operación descrita, forma un grupo que se denota por

$$C = \prod_{i\in I} B_i,$$

y se llama el producto directo *o* producto cartesiano *de los grupos* B_i*.*

Definición 1.3. *Sean* $\{B_i\}_{i\in I}$ *grupos abelianos. Se llama* suma directa *de los grupos* B_i *al subgrupo del producto directo*

$$\bigoplus_{i\in I} B_i = \left\{ (b_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} B_i \;\middle|\; b_i = 0 \textit{ salvo para un número finito de índices } i \right\},$$

donde la operación de grupo está dada componente a componente.

A los homomorfismos de inclusión

$$\rho_i : B_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} B_i, \qquad b_i \longmapsto (\ldots, 0, b_i, 0, \ldots),$$

se les llama inyecciones coordenadas.

El grupo $\bigoplus_{i\in I} B_i$ *se denomina también* suma directa externa *de los* B_i *y puede verse como el subgrupo del producto directo formado por los elementos con soporte finito.*

Definición 1.4. *Un* ***grupo abeliano libre*** *es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos* x_i $(i \in I)$*, entonces el grupo libre será*

$$F \;=\; \bigoplus_{i\in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ *es una base de* F*. Los elementos de* F *son combinaciones lineales finitas de la forma*

$$g \;=\; n_1 x_{i_1} + \cdots + n_k x_{i_k}, \quad \textit{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Theorem 1.5 (Propiedad universal de los grupos libres)**.** *Sea X un conjunto libre de generadores del grupo libre F. Toda función*

$$f : X \longrightarrow A$$

con valores en un grupo abeliano A se extiende de manera única a un homomorfismo

$$\varphi : F \longrightarrow A.$$

Esta propiedad caracteriza a los conjuntos libres de generadores, y por lo tanto a los grupos libres.

Definición 1.6. *Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma*

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C \; = \; X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c, $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c); entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c \; = \; a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \qquad a \otimes (c_1 + c_2) \; = \; a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \to G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\overline{g} : A \otimes C \to G$ tal que $\overline{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.7. *La parte de torsión de un grupo A es*

$$t(A) := \{\, x \in A \mid nx = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Si $t(A) = A$, decimos que A es de torsión. En este caso,

$$A = \bigoplus_p A_p.$$

Theorem 1.8 (Teorema fundamental de los grupos finitamente generados)**.** *Todo grupo G tal que existe $X \in [G]^{<\omega}$[2] con $\langle X \rangle = G$ es isomorfo a la suma directa de un grupo libre finitamente generado y un número finito de grupos cíclicos de orden p^k, con p primo y $k \geq 1$. Esta descomposición es única salvo isomorfismos. En particular,*

$$G = F(G) \oplus t(G),$$

donde $F(G)$ es la parte libre de G y $t(G)$ es su parte de torsión.

Definición 1.9. *El **producto de torsión** de dos grupos abelianos A y C, denotado por $\mathrm{Tor}(A, C)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias (a, m, c) con $a \in A$, $c \in C$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $ma = 0 = mc$, sujetos a las relaciones*

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\mathrm{Tor}(A, C)$ es abeliano y satisface una simetría natural

$$\mathrm{Tor}(A, C) \cong \mathrm{Tor}(C, A).$$

Proposicion 1.10. *Sea $\mathcal{G}$ una familia de grupos abelianos. Entonces,*

$$\left(\bigoplus_{G \in \mathcal{G}} G \right) \otimes C \;\cong\; \bigoplus_{G \in \mathcal{G}} (G \otimes C).$$

Proposicion 1.11. *Si A y C son finitos, entonces*

$$A \otimes C \;\cong\; \mathrm{Tor}(A, C),$$

y ambos funtores son conmutativos; es decir,

$$A \otimes C \cong C \otimes A \quad y \quad \mathrm{Tor}(A, C) \cong \mathrm{Tor}(C, A).$$

[2] En general, si A es un conjunto, entonces $[A]^{<\omega}$ representa la colección de todos los subconjuntos finitos de A.

Capítulo II

Complejos

1. Complejos de Cadenas

Definición 1.1 (Complejo de Cadenas)**.** *Un **complejo de cadenas** es una familia* $\mathcal{K} := \{(K_n, \partial_n) \colon n \in \mathbb{Z}\}$ *tal que para toda* $n \in \mathbb{Z}$ *se satisfacen las siguientes condiciones*

1. K_n *es un grupo abeliano;*

2. $\partial_n \colon K_{n+1} \to K_n$ *es morfismo de grupos abelianos; y*

3. $\partial_n \partial_{n+1} = 0$.

Observación 1.2. *La ecuación última es equivalente a decir que para toda* $n \in \mathbb{Z}$ *se cumple que*

$$\operatorname{im}(\partial_{n+1}) \leq \ker(\partial_n).$$

Definición 1.3. *Dado un complejo de cadenas* $\mathcal{K}$ *definimos la **Homología** de* $\mathcal{K}$*, en símbolos* $H(\mathcal{K})$*, como la familia de grupos abelianos* $\{H_n(\mathcal{K}) \mid n \in \mathbb{Z}\}$*, donde*

$$H_n(\mathcal{K}) \ := \ \ker(\partial_n) / \operatorname{im}(\partial_{n+1}).$$

Nos referimos a los elementos de K_n *como* n***-cadenas****, a los de* $\ker(\partial_n)$ *como* n***-cíclos*** *y a los de* $\operatorname{im}(\partial_n)$ *como* n***-fronteras****. Cuando no exista confusión escribiremos la clase lateral* $c + \operatorname{im}(\partial_{n+1}) \in H_n(\mathcal{K})$ *como* $[c]$*. Además, si* $c' \in [c]$*, diremos que* c' *y* c *son **homólogos**.*

Definición 1.4 (Morfismo de cadenas)**.** *Dados dos complejos de cadenas $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ un* ***morfismo de cadenas*** *f, denotado por $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ es una familia de morfismos $\{f_n\colon K_n \to K'_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ de tal manera que $\partial'_{n+1} f_{n+1} = f_n \partial_n$.*

Proposicion 1.5.

1. *El morfismo trivial de grupos[1] abelianos induce de manera natural un morfismo de cadenas.*
2. *Existe $1_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$, con $1_{\mathcal{K}_n} = Id_{K_n}$ la identidad.*
3. *S $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}$ y $\mathcal{L}$ son complejos de cadenas y $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{J}$ y $g\colon \mathcal{J} \to \mathcal{L}$ son morfismos de cadenas, entonces la familia de morfismos $\{g_n \circ f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es el morfismo de cadenas $g \circ f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{L}$.*

2 y 3 en suma nos dicen que existe la categoría de complejos de cadenas.

Proposicion 1.6. *Dados dos complejos de cadenas $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ y un morfismo de cadenas $f : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$, se tiene que la familia de morfismos A, $\{H_n(f) : n \in \mathbb{Z}\}$ donde el morfismo $H_n(f) : H_n(\mathcal{K}) \to H_n(\mathcal{L})$ está dado por*

$$H_n(f)(c + \operatorname{im} \partial_{n+1}) = f(c) + \operatorname{im} \partial_{n+1},$$

es un morfismo de grupos abelianos.

[1] Aquí nos referimos al morfismo que manda todo elemento de un grupo al 0 de otro.

Capítulo III

Ejercicios

Ejercicio 1

Calcular la homología de cualquier árbol, es decir, de cualquier gráfica simple conexa sin ciclos.

Ejercicio 2

Calcula la homología del plano proyectivo.

Tomamos la triangulación del plano proyectivo descrita por el complejo simplicial

$$\begin{aligned} D = \{\, &\emptyset,\ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, \\ &v_1v_2,\ v_1v_3,\ v_1v_4,\ v_1v_5,\ v_1v_6,\ v_2v_3,\ v_2v_4,\ v_2v_5,\ v_2v_6,\ v_3v_4,\ v_3v_5,\ v_3v_6,\ v_4v_5,\ v_4v_6,\ v_5v_6, \\ &v_1v_2v_4,\ v_1v_2v_6,\ v_1v_4v_5,\ v_1v_5v_6,\ v_1v_6v_2,\ v_2v_3v_5,\ v_2v_5v_6,\ v_3v_4v_6,\ v_3v_6v_5,\ v_4v_5v_6\,\}. \end{aligned}$$

Tomamos ahora las ∂_n y los grupos de cadenas $C_n(D)$ como las definimos anteriormente. Para obtener el rango y los generadores de los grupos de homología del complejo simplicial D seguiremos el método matricial visto en clase. Primero representamos matricialmente los morfismos frontera.

∂_0

Como $\partial_0 : C_0(D) \to C_{-1}(D)$ está dada por $\partial_0(v) = \emptyset$, para $v \in C_0(D)$,

$$\partial_0(v_1) = \partial_0(v_2) = \partial_0(v_3) = \partial_0(v_4) = \partial_0(v_5) = \partial_0(v_6) = \emptyset.$$

Así, obtenemos la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

∂_1

$\partial_1 : C_1(D) \to C_0(D)$ está dada por $\partial_1(vw) = w - v$, para $vw \in C_1(D)$.

$$\begin{aligned}
&\partial_1(v_1v_2) = v_2 - v_1, \quad \partial_1(v_1v_3) = v_3 - v_1, \quad \partial_1(v_1v_4) = v_4 - v_1,\\
&\partial_1(v_1v_5) = v_5 - v_1, \quad \partial_1(v_1v_6) = v_6 - v_1, \quad \partial_1(v_2v_3) = v_3 - v_2,\\
&\partial_1(v_2v_5) = v_5 - v_2, \quad \partial_1(v_2v_6) = v_6 - v_2, \quad \partial_1(v_3v_4) = v_4 - v_3,\\
&\partial_1(v_3v_5) = v_5 - v_3, \quad \partial_1(v_3v_6) = v_6 - v_3, \quad \partial_1(v_4v_5) = v_5 - v_4,\\
&\partial_1(v_4v_6) = v_6 - v_4, \quad \partial_1(v_5v_6) = v_6 - v_5.
\end{aligned}$$

Obteniendo así la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix}
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & &
\end{pmatrix}.$$

∂_2

$\partial_2 : C_2(D) \to C_1(D)$ está dada por

$$\partial_2(vwz) = wz - vz + vw.$$

Escribimos explícitamente:

$$\begin{aligned}
\partial_2(v_1v_2v_4) &= v_2v_4 - v_1v_4 + v_1v_2,\\
\partial_2(v_1v_2v_6) &= v_2v_6 - v_1v_6 + v_1v_2,\\
\partial_2(v_1v_3v_4) &= v_3v_4 - v_1v_4 + v_1v_3,\\
\partial_2(v_1v_3v_5) &= v_3v_5 - v_1v_5 + v_1v_3,\\
\partial_2(v_1v_5v_6) &= v_5v_6 - v_1v_6 + v_1v_5,\\
\partial_2(v_2v_3v_5) &= v_3v_5 - v_2v_5 + v_2v_3,\\
\partial_2(v_2v_3v_6) &= v_3v_6 - v_2v_6 + v_2v_3,\\
\partial_2(v_2v_4v_5) &= v_4v_5 - v_2v_5 + v_2v_4,\\
\partial_2(v_3v_4v_6) &= v_4v_6 - v_3v_6 + v_3v_4,\\
\partial_2(v_3v_5v_6) &= v_5v_6 - v_3v_6 + v_3v_5,\\
\partial_2(v_4v_5v_6) &= v_5v_6 - v_4v_6 + v_4v_5.
\end{aligned}$$

Obteniendo así la matriz C:

$$C = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

$\partial_n,\ n > 2$

Por cómo están definidas las ∂_n, no es necesario realizar las representaciones matriciales para saber quiénes son $\ker(\partial_n)$ y $\operatorname{im}(\partial_n)$.

Formas normales de Smith

Dada una matriz M' en forma normal de Smith, las columnas cuyo pivote es 0 corresponden a una base del núcleo, y las columnas con pivote generan la imagen.

A continuación presentamos explícitamente las matrices A', Q_A, B', Q_B, C' y Q_C.

1. Matriz A' y matriz de cambio de base Q_A

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Matriz B' y matriz Q_B

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$
Q_B = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & &
\end{pmatrix}.
$$

3. Matriz C' y matriz Q_C

$$C' = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$Q_C = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.$$

Interpretación

Dada una matriz M' en su forma normal de Smith, las columnas con pivote 0 corresponden a generadores del kernel, y las columnas con pivote distinto de 0 corresponden a generadores de la imagen.

∂_0

La base ordenada original es $(v_1, \ldots, v_6)$. Al multiplicar por Q_A obtenemos:

$$(v_1, \ldots, v_6)\, Q_A = (v_1,\, v_6 - v_1,\, v_5 - v_1,\, v_4 - v_1,\, v_3 - v_1,\, v_2 - v_1).$$

Así obtenemos:

- $\mathrm{im}(\partial_0) = \langle \varphi \rangle$, de rango 1;
- $\ker(\partial_0) = \langle v_6 - v_1,\ v_5 - v_1,\ v_4 - v_1,\ v_3 - v_1,\ v_2 - v_1 \rangle$, de rango 5.

∂_1

$$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6,\ v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_1v_6, v_1v_3, v_1v_5, v_1v_2, v_3v_6, v_4v_5, v_1v_6, v_5v_6)\, Q_B$$

$$\begin{aligned} &= (v_1v_2,\ v_2v_3,\ v_1v_4,\ v_1v_5,\ v_1v_5v_6,\ v_1v_5,\ v_1v_4,\ v_1v_5, \\ &\quad v_1v_4 - v_1v_5 + v_1v_5,\ v_1v_5 - v_1v_5 + v_1v_3,\ v_1v_2 - v_1v_2 + v_2v_3). \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$\mathrm{im}(\partial_1) = \langle v_2 - v_1,\ v_3 - v_1,\ v_4 - v_1,\ v_5 - v_1,\ v_6 - v_1 \rangle, \quad \text{de rango 5.}$$

$$\ker(\partial_1) = \langle v_1v_5 - v_1v_6 + v_5v_6,\ v_1v_4 - v_1v_5 + v_4v_5,\ v_1v_3 - v_1v_5 + v_3v_5,\ v_1v_2 - v_1v_4 + v_2v_4,$$

$$v_1v_2 - v_1v_5 + v_2v_5,\ v_1v_2 - v_1v_3 + v_2v_3,\ v_1v_3 - v_1v_6 + v_3v_6,\ v_1v_2 - v_1v_6 + v_2v_6,\ v_1v_2 - v_1v_3 + v_2v_3,$$

$$v_1v_2 - v_1v_4 + v_2v_4,\ v_1v_2 - v_1v_3 + v_2v_3 \rangle, \qquad \text{de rango 10.}$$

∂_2

La nueva base ordenada es

$$\begin{aligned}
&(v_1v_2v_4,\ v_1v_2v_6,\ v_1v_3v_4,\ v_1v_3v_5,\ v_1v_5v_6,\ v_2v_3v_5,\ v_2v_3v_6,\ v_2v_4v_5,\ v_3v_4v_6,\ v_3v_5v_6)\, Q_C \\
&= (v_1v_2v_4,\ v_1v_2v_6,\ v_1v_3v_4,\ v_1v_3v_5,\ v_1v_5v_6,\ v_2v_3v_5,\ v_2v_3v_6,\ v_2v_4v_5,\ v_3v_4v_6,\ v_3v_5v_6) \\
&\quad - (v_2v_4v_5,\ v_2v_5v_6,\ v_3v_4v_5,\ v_3v_5v_6,\ v_5v_6v_4,\ v_3v_6v_5,\ v_3v_6v_5,\ v_4v_6v_5,\ v_4v_6v_5,\ v_4v_5v_6) \\
&\quad - (v_1v_3v_5,\ v_1v_3v_5,\ v_1v_3v_5,\ v_1v_5v_6,\ v_1v_5v_6,\ v_2v_5v_6,\ v_2v_5v_6,\ v_2v_4v_6,\ v_3v_6v_5,\ v_3v_6v_5) \\
&\quad + (v_1v_2v_4,\ v_1v_2v_4,\ v_1v_3v_4,\ v_1v_4v_5,\ v_1v_4v_5,\ v_2v_3v_4,\ v_2v_3v_4,\ v_2v_4v_5,\ v_4v_5v_6,\ v_4v_5v_6).
\end{aligned} \tag{1}$$

De donde obtenemos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{im}(\partial_2) = \Big\langle\, & v_1v_2 - v_1v_4 + v_2v_4,\ v_1v_2 - v_1v_6 + v_2v_6,\ v_1v_3 - v_1v_4 + v_3v_4,\ v_1v_3 - v_1v_5 + v_3v_5, \\
& v_1v_5 - v_1v_6 + v_5v_6,\ v_2v_3 - v_2v_5 + v_3v_5,\ v_2v_3 - v_2v_6 + v_3v_6,\ v_2v_4 - v_2v_5 + v_4v_5, \\
& v_3v_4 - v_3v_6 + v_4v_6,\ v_3v_5 - v_3v_6 + v_5v_6,\ 2(-v_1v_2 - v_1v_3 + v_1v_4 + v_1v_6 \\
& \quad - v_2v_3 + v_2v_4 + v_2v_6 - v_3v_4 - v_3v_5 + v_4v_5 + v_4v_6 + v_5v_6)\Big\rangle.
\end{aligned} \tag{2}$$

También,

$$\ker(\partial_2) = 0.$$

Además, por cómo están definidas las ∂_n, sabemos que

- $\ker(\partial_0) = \langle \emptyset \rangle$,
- $\ker(\partial_n) = 0$, para $n > 2$,
- $\operatorname{im}(\partial_n) = 0$, para $n > 2$.

Por lo tanto, los grupos de homología son los siguientes:

- $H_{-1}(D) = \langle \varphi \rangle / \langle \varphi \rangle = 0$,
- $H_0(D) = \dfrac{\langle v_2 - v_1,\ v_3 - v_1,\ v_4 - v_1,\ v_5 - v_1,\ v_6 - v_1 \rangle}{\langle v_2 - v_1,\ v_3 - v_1,\ v_4 - v_1,\ v_5 - v_1,\ v_6 - v_1 \rangle} = 0$,
- $H_n(D) = 0$, para $n \geq 2$.

Sin embargo, cuando $n = 1$ no es tan trivial.
Por definición,

$$H_1(D) = \ker(\partial_1) / \operatorname{im}(\partial_2).$$

Para simplificar notación, definamos:

- $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10})$ como el vector de los generadores de $\ker(\partial_1)$, en el orden en el que están escritos en la igualdad **(1)**;
- $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10})$ como el vector de los generadores de $\operatorname{im}(\partial_2)$, en el orden en el que están escritos en la igualdad **(2)**.

De las definiciones anteriores podemos obtener las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_9,\\
b_2 &= a_4,\\
b_3 &= a_8,\\
b_4 &= a_6,\\
b_5 &= a_1,\\
b_6 &= a_6 - a_7 + a_{10},\\
b_7 &= a_5 - a_4 + a_9,\\
b_8 &= a_5 - a_7 + a_9,\\
b_9 &= -a_1 - a_3 + a_8,\\
2(-a_1 - a_3 + a_7 - a_8 - a_9 - a_{10}) &= b_{10}.
\end{aligned}$$

Ahora, sabemos que $\operatorname{im}(\partial_2)$ es subgrupo de $\ker(\partial_1)$, y que ambos son de rango 10. Por lo tanto, $H_1(D)$ es finito.

Ahora, ¿qué pasa si modificamos el generador de $\operatorname{im}(\partial_2)$?

Afirmación:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{10}\rangle = \left\langle b_1, b_2, \ldots, b_9, \ \frac{b_{10}}{2}\right\rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_9, \tfrac{1}{2}b_{10}\rangle.$$

Esto sucede porque eliminamos el factor 2, y ya vimos que todos los b_i se pueden expresar como combinaciones de los a_i.

Por lo tanto,

$$\frac{\langle a_1, \ldots, a_{10}\rangle}{\langle b_1, \ldots, b_{10}\rangle} \ \cong \ \frac{\langle b_1, \ldots, b_9, \frac{1}{2}b_{10}\rangle}{\langle b_1, \ldots, b_{10}\rangle} \ \cong \ \frac{\left\langle \frac{1}{2}b_{10}\right\rangle}{\langle b_{10}\rangle} \ \cong \ \mathbb{Z}/2.$$

Ejercicio 3

Calcular la homología de la 2-esfera simplicial vista en clase.