

Análisis Topológico de Datos

Sebastián Rodríguez Labastida, Álvaro Matanzo Hermoso

18 de noviembre de 2025

Preludio de Algebra

1. Grupos

Definición 1.1. Un Grupo¹ es un conjunto A junto con una operación $+$: $A \times A \rightarrow A$ que satisface que para cualesquiera $a, b, c \in A$ se cumple

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
2. $a + b = b + a$.
3. Existe $0_A \in A$ que satisface que para toda $z \in A$ se cumple que $z + 0_A = a$.
4. Existe $x \in A$ tal que $a + x = 0_A$.

Cuando no exista ambigüedad usaremos el símbolo 0 sin mencionar a que grupo pertenece.

Definición 1.2. Sea $\{B_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos. Un vector

$$(\dots, b_i, \dots)$$

es una familia que asigna a cada índice $i \in I$ un elemento $b_i \in B_i$. También puede verse como una función

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} B_i$$

tal que

$$f(i) = b_i \in B_i \quad \text{para cada } i \in I.$$

¹Por convención, en este texto todos los grupos serán abelianos.

La igualdad y la suma de vectores se definen coordenada a coordenada:

$$(b_i)_{i \in I} = (b'_i)_{i \in I} \iff b_i = b'_i \text{ para todo } i \in I,$$

$$(b_i)_{i \in I} + (b'_i)_{i \in I} = (b_i + b'_i)_{i \in I}.$$

El conjunto de todos estos vectores, con la operación descrita, forma un grupo que se denota por

$$C = \prod_{i \in I} B_i,$$

y se llama el producto directo o producto cartesiano de los grupos B_i .

Definición 1.3. Sean $\{B_i\}_{i \in I}$ grupos abelianos. Se llama suma directa de los grupos B_i al subgrupo del producto directo

$$\bigoplus_{i \in I} B_i = \left\{ (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} B_i \mid b_i = 0 \text{ salvo para un número finito de índices } i \right\},$$

donde la operación de grupo está dada componente a componente.

A los homomorfismos de inclusión

$$\rho_i : B_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i, \quad b_i \longmapsto (\dots, 0, b_i, 0, \dots),$$

se les llama inyecciones coordenadas.

El grupo $\bigoplus_{i \in I} B_i$ se denomina también suma directa externa de los B_i y puede verse como el subgrupo del producto directo formado por los elementos con soporte finito.

Definición 1.4. Un grupo abeliano libre es una suma directa de grupos cíclicos infinitos. Si estos grupos cíclicos son generados por elementos x_i ($i \in I$), entonces el grupo libre será

$$F = \bigoplus_{i \in I} \langle x_i \rangle.$$

El conjunto $\{x_i\}_{i \in I}$ es una base de F . Los elementos de F son combinaciones lineales finitas de la forma

$$g = n_1 x_{i_1} + \dots + n_k x_{i_k}, \quad \text{con } n_j \in \mathbb{Z},$$

Dos combinaciones representan el mismo elemento de F si y solo si difieren en el orden de los términos. La suma se define añadiendo los coeficientes de los mismos generadores. En particular, F está determinado, salvo isomorfismos, por la cardinalidad de sus generadores, al cual se llama el rango del grupo libre.

Definición 1.5. Sean A y C grupos abelianos. Sea X el grupo libre sobre el conjunto $A \times C$, cuyos generadores son (a, c) con $a \in A$ y $c \in C$. Sea Y el subgrupo de X generado por todos los elementos de la forma

$$(a_1 + a_2, c) - (a_1, c) - (a_2, c), \quad (a, c_1 + c_2) - (a, c_1) - (a, c_2),$$

para todo $a, a_1, a_2 \in A$ y $c, c_1, c_2 \in C$. El producto tensorial de A y C se define como el cociente

$$A \otimes C = X/Y.$$

Dado $(a, c) \in A \times C$ definimos el tensor de a con c , $a \otimes c$, como la clase del generador (a, c) ; entonces los elementos de $A \otimes C$ son combinaciones lineales finitas de tales tensores, sujetas a las relaciones

$$(a_1 + a_2) \otimes c = a_1 \otimes c + a_2 \otimes c, \quad a \otimes (c_1 + c_2) = a \otimes c_1 + a \otimes c_2.$$

El grupo $A \otimes C$ cumple la propiedad universal: para toda función bilineal $g : A \times C \rightarrow G$, con G un grupo abeliano, existe un único morfismo $\bar{g} : A \otimes C \rightarrow G$ tal que $\bar{g}(a \otimes c) = g(a, c)$. Esta propiedad caracteriza a $A \otimes C$ de manera única, salvo isomorfismos.

Definición 1.6. La parte de torsión de un grupo A es

$$t(A) := \{x \in A \mid nx = 0 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $t(A) = A$, decimos que A es de torsión. En este caso,

$$A = \bigoplus_p A_p.$$

Theorem 1.7 (Teorema fundamental de los grupos finitamente generados). Todo grupo G tal que existe $X \in [G]^{<\omega^2}$ con $\langle X \rangle = G$ es isomorfo a la suma directa de un grupo libre finitamente generado y un número finito de grupos

²En general, si A es un conjunto, entonces $[A]^{<\omega}$ representa la colección de todos los subconjuntos finitos de A .

cíclicos de orden p^k , con p primo y $k \geq 1$. Esta descomposición es única salvo isomorfismos. En particular,

$$G = F(G) \oplus t(G),$$

donde $F(G)$ es la parte libre de G y $t(G)$ es su parte de torsión.

Definición 1.8. El producto de torsión de dos grupos abelianos A y C , denotado por $\text{Tor}(A, C)$, se define como el grupo abeliano libre generado por las tercias (a, m, c) con $a \in A$, $c \in C$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $ma = 0 = mc$, sujetos a las relaciones

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2, m, c) &= (a_1, m, c) + (a_2, m, c), \\ (a, m, c_1 + c_2) &= (a, m, c_1) + (a, m, c_2), \\ (a, mn, c) &= (na, m, c) = (a, m, nc). \end{aligned}$$

Con estas relaciones, el grupo $\text{Tor}(A, C)$ es abeliano y satisface una simetría natural

$$\text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$

Proposition 1.9. Sea \mathcal{G} una familia de grupos abelianos. Entonces,

$$\left(\bigoplus_{G \in \mathcal{G}} G \right) \otimes C \cong \bigoplus_{G \in \mathcal{G}} (G \otimes C).$$

Proposition 1.10. Si A y C son finitos, entonces

$$A \otimes C \cong \text{Tor}(A, C),$$

y ambos funtores son conmutativos; es decir,

$$A \otimes C \cong C \otimes A \quad \text{y} \quad \text{Tor}(A, C) \cong \text{Tor}(C, A).$$