

Programación Funcional en Haskell

Demostraciones

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Buenos Aires

8 de abril de 2025

- Tipos algebraicos en Haskell
- Esquemas de recursión
- Currificación
- Aplicación parcial
- Alto orden
- Generación infinita
- ...

- Razonamiento ecuacional
- Extensionalidad y lemas de generación
- Inducción estructural
- Ejercicios más difíciles
- ...

Básicamente, vamos a ver cómo demostrar propiedades sobre nuestros programas.

Demostrando propiedades

Sean las siguiente definiciones:

```
doble :: Integer -> Integer
```

```
doble x = 2 * x
```

```
cuadrado :: Integer -> Integer
```

```
cuadrado x = x * x
```

¿Cómo probamos que `doble 2 = cuadrado 2`?

Demostrando propiedades

Sean las siguiente definiciones:

```
doble :: Integer -> Integer
```

```
doble x = 2 * x
```

```
cuadrado :: Integer -> Integer
```

```
cuadrado x = x * x
```

¿Cómo probamos que `doble 2 = cuadrado 2`?

Solución:

```
doble 2 =doble 2 * 2
```

Sean las siguiente definiciones:

```
doble :: Integer -> Integer
```

```
doble x = 2 * x
```

```
cuadrado :: Integer -> Integer
```

```
cuadrado x = x * x
```

¿Cómo probamos que `doble 2 = cuadrado 2`?

Solución:

```
doble 2 =doble 2 * 2 =cuadrado cuadrado 2  $\square$ 
```

Igualdad de funciones

Queremos ver que:

$$\text{curry} \ . \ \text{uncurry} = \text{id}$$

Tenemos:

```
curry :: ((a, b) -> c) -> (a -> b -> c)
```

```
curry f = (\x y -> f (x, y))
```

```
uncurry :: (a -> b -> c) -> ((a, b) -> c)
```

```
uncurry f = (\(x, y) -> f x y)
```

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> (a -> c)
```

```
(f . g) x = f (g x)
```

```
id :: a -> a
```

```
id x = x
```

¿Cómo hacemos?

Dadas $f, g :: a \rightarrow b$, probar $f = g$ se reduce a probar:

$$\forall x :: a . f\ x = g\ x$$

Algunas propiedades útiles

Estas son algunas propiedades que podemos usar en nuestras demostraciones:

$$\begin{aligned} & \forall F :: a \rightarrow b . \forall G :: a \rightarrow b . \forall Y :: b . \forall Z :: a . \\ F = G & \iff \forall x :: a . F\ x = G\ x \end{aligned}$$

F, G, Y y Z pueden ser expresiones complejas, siempre que la variable x no aparezca libre en F, G, ni Z (más detalles cuando veamos Cálculo Lambda).

Algunas propiedades útiles

Estas son algunas propiedades que podemos usar en nuestras demostraciones:

$$\forall F :: a \rightarrow b \ . \ \forall G :: a \rightarrow b \ . \ \forall Y :: b \ . \ \forall Z :: a \ .$$

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad \forall x :: a . F \ x = G \ x$$

$$F = \lambda x . Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall x :: a . F \ x = Y$$

F, G, Y y Z pueden ser expresiones complejas, siempre que la variable x no aparezca libre en F, G, ni Z (más detalles cuando veamos Cálculo Lambda).

Algunas propiedades útiles

Estas son algunas propiedades que podemos usar en nuestras demostraciones:

$$\forall F :: a \rightarrow b . \forall G :: a \rightarrow b . \forall Y :: b . \forall Z :: a .$$

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad \forall x :: a . F \ x = G \ x$$

$$F = \backslash x \rightarrow Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall x :: a . F \ x = Y$$

$$(\backslash x \rightarrow Y) \ Z \quad =_{\beta} \quad Y \text{ reemplazando } x \text{ por } Z$$

F, G, Y y Z pueden ser expresiones complejas, siempre que la variable x no aparezca libre en F, G, ni Z (más detalles cuando veamos Cálculo Lambda).

Algunas propiedades útiles

Estas son algunas propiedades que podemos usar en nuestras demostraciones:

$$\forall F :: a \rightarrow b . \forall G :: a \rightarrow b . \forall Y :: b . \forall Z :: a .$$

$$F = G \quad \Leftrightarrow \quad \forall x :: a . F \ x = G \ x$$

$$F = \backslash x \rightarrow Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall x :: a . F \ x = Y$$

$$(\backslash x \rightarrow Y) \ Z \quad =_{\beta} \quad Y \text{ reemplazando } x \text{ por } Z$$

$$\backslash x \rightarrow F \ x \quad =_{\eta} \quad F$$

F, G, Y y Z pueden ser expresiones complejas, siempre que la variable x no aparezca libre en F, G, ni Z (más detalles cuando veamos Cálculo Lambda).

Volviendo al ejercicio...

Ahora probemos:

$$\text{curry} \ . \ \text{uncurry} = \text{id}$$

Tenemos:

$\text{curry} :: ((a, b) \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \rightarrow c)$

$\{C\} \text{ curry } f = (\backslash x \ y \rightarrow f \ (x, y))$

$\text{uncurry} :: (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow ((a, b) \rightarrow c)$

$\{U\} \text{ uncurry } f = (\backslash (x, y) \rightarrow f \ x \ y)$

$(.) :: (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c)$

$\{COMP\} (f \ . \ g) \ x = f \ (g \ x)$

$\text{id} :: a \rightarrow a$

$\{I\} \text{ id } x = x$

Pares y unión disjunta/tipo suma

Se define la siguiente función, que permite multiplicar pares y enteros entre sí (usando producto escalar entre pares).

```
prod :: Either Int (Int, Int) -> Either Int (Int, Int) -> Either Int (Int, Int)
{P0} prod (Left x) (Left y) = Left (x * y)
{P1} prod (Left x) (Right (y, z)) = Right (x * y, x * z)
{P2} prod (Right (y, z)) (Left x) = Right (y * x, z * x)
{P3} prod (Right (w, x)) (Right (y, z)) = Left (w * y + x * z)
```

¿Podemos probar esto?

$$\forall p :: \text{Either Int (Int, Int)} . \forall q :: \text{Either Int (Int, Int)} . \text{prod } p \text{ } q = \text{prod } q \text{ } p$$

Recordemos los lemas de generación para pares y sumas.

Dado $p :: (a, b)$, siempre podemos usar el hecho de que existen $x :: a$, $y :: b$ tales que $p = (x, y)$.

De la misma manera, dado $e :: \text{Either } a \ b$, siempre podemos usar el hecho de que:

- $e = \text{Left } x$ con $x :: a$, o
- $e = \text{Right } y$ con $y :: b$.

Pares y unión disjunta/tipo suma

Probemos enconces...

$$\forall p :: \text{Either Int (Int, Int)} . \forall q :: \text{Either Int (Int, Int)} . \text{prod } p \text{ } q = \text{prod } q \text{ } p$$

Tenemos:

```
prod :: Either Int (Int, Int) -> Either Int (Int, Int) -> Either Int (Int, Int)
{P0} prod (Left x) (Left y) = Left (x * y)
{P1} prod (Left x) (Right (y, z)) = Right (x * y, x * z)
{P2} prod (Right (y, z)) (Left x) = Right (y * x, z * x)
{P3} prod (Right (w, x)) (Right (y, z)) = Left (w * y + x * z)
```


Se cuenta con la siguiente representación de conjuntos:

`type Conj a = (a->Bool)` caracterizados por su función de pertenencia. De este modo, si `c` es un conjunto y `e` un elemento, la expresión `c e` devuelve `True` si `e` pertenece a `c` y `False` en caso contrario.

Funciones como estructuras de datos

Se cuenta con la siguiente representación de conjuntos:

`type Conj a = (a->Bool)` caracterizados por su función de pertenencia. De este modo, si `c` es un conjunto y `e` un elemento, la expresión `c e` devuelve `True` si `e` pertenece a `c` y `False` en caso contrario.

Contamos con las siguientes definiciones:

```
vacío :: Conj a
{V} vacío = \_ -> False
intersección :: Conj a -> Conj a -> Conj a
{I} intersección c d = \e -> c e && d e
```

```
agregar :: Eq a => a -> Conj a -> Conj a
{A} agregar e c = \e -> e == x || c e
diferencia :: Conj a -> Conj a -> Conj a
{D} diferencia c d = \e -> c e && not (d e)
```

Demostrar la siguiente propiedad:

$$\forall c :: \text{Conj } a. \forall d :: \text{Conj } a. \text{intersección } d (\text{diferencia } c \text{ } d) = \text{vacío}$$

- Pruebo $P(0)$

- Pruebo $P(0)$
- Pruebo que **si** vale $P(n)$ **entonces** vale $P(n + 1)$.

- Pruebo $P([])$

- Pruebo $P([])$
- Pruebo que **si** vale $P(xs)$ **entonces** para todo elemento x vale $P(x:xs)$.

En el caso general (inducción estructural)

- Pruebo P para el o los caso(s) base (para los constructores no recursivos).

En el caso general (inducción estructural)

- Pruebo P para el o los caso(s) base (para los constructores no recursivos).
- Pruebo que **si** vale $P(Arg_1), \dots, P(Arg_k)$ **entonces** vale $P(C\ Arg_1\ \dots\ Arg_k)$ para cada constructor C y sus argumentos recursivos Arg_1, \dots, Arg_k .
(Los argumentos no recursivos quedan cuantificados universalmente).

- Leer la propiedad, entenderla y convencerse de que es verdadera.

Pasos a seguir

- Leer la propiedad, entenderla y convencerse de que es verdadera.
- Plantear la propiedad como predicado unario.

Pasos a seguir

- Leer la propiedad, entenderla y convencerse de que es verdadera.
- Plantear la propiedad como predicado unario.
- Plantear el esquema de inducción.

Pasos a seguir

- Leer la propiedad, entenderla y convencerse de que es verdadera.
- Plantear la propiedad como predicado unario.
- Plantear el esquema de inducción.
- Plantear y resolver el o los caso(s) base.

Pasos a seguir

- Leer la propiedad, entenderla y convencerse de que es verdadera.
- Plantear la propiedad como predicado unario.
- Plantear el esquema de inducción.
- Plantear y resolver el o los caso(s) base.
- Plantear y resolver el o los caso(s) inductivo(s).

Veamos que estas dos definiciones de length son equivalentes:

```
length1 :: [a] -> Int
```

```
{L10} length1 [] = 0
```

```
{L11} length1 (_:xs) = 1 + length1 xs
```

```
length2 :: [a] -> Int
```

```
{L2} length2 = foldr (\_ res -> 1 + res) 0
```

Recordemos:

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

```
{F0} foldr f z [] = z
```

```
{F1} foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

Demostrando implicaciones

Queremos probar que:

$$\text{Ord } a \Rightarrow \forall e :: a . \forall ys :: [a] . (\text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys)$$

Demostrando implicaciones

Queremos probar que:

$$\text{Ord } a \Rightarrow \forall e :: a . \forall ys :: [a] . (\text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys)$$

Antes que nada, ¿quién es P ?

¿En qué estructura vamos a hacer inducción?

Demostrando implicaciones

Queremos probar que:

$$\text{Ord } a \Rightarrow \forall e :: a . \forall ys :: [a] . (\text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys)$$

Antes que nada, ¿quién es P ?

¿En qué estructura vamos a hacer inducción?

$$P(ys) = \text{Ord } a \Rightarrow \forall e :: a . (\text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys)$$

Demostrando implicaciones

Queremos probar que:

$$\text{Ord } a \Rightarrow \forall e :: a . \forall ys :: [a] . (\text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys)$$

Antes que nada, ¿quién es P ?

¿En qué estructura vamos a hacer inducción?

$$P(ys) = \text{Ord } a \Rightarrow \forall e :: a . (\text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys)$$

Ahora bien, si no vale $\text{Ord } a$, la implicación de afuera es trivialmente verdadera (recordar que las implicaciones asocian a derecha). Además, si vale $\text{Ord } a$, también vale $\text{Eq } a$ (por la jerarquía de clases de tipos en Haskell).

Suponemos que todo eso vale y vamos a probar lo que nos interesa.

Demostrando implicaciones (continúa)

Tenemos:

```
elem :: Eq a => a -> [a] -> Bool
```

```
{E0} elem e [] = False
```

```
{E1} elem e (x:xs) = (e == x) || elem e xs
```

```
maximum :: Ord a => [a] -> a
```

```
{M0} maximum [x] = x
```

```
{M1} maximum (x:y:ys) = if x < maximum (y:ys) then maximum (y:ys) else x
```

Sabemos que valen `Eq a` y `Ord a`. Queremos ver que, para toda lista `ys`, vale:

$$\forall e :: a. (\text{elem } e \text{ } ys \Rightarrow e \leq \text{maximum } ys)$$

Seguimos en el pizarrón.

Otra vuelta de tuerca

Dadas las siguientes definiciones:

```
length :: [a] -> Int
```

```
{L0} length [] = 0
```

```
{L1} length (x:xs) = 1 + (length xs)
```

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
```

```
{F0} foldl f ac [] = ac
```

```
{F1} foldl f ac (x:xs) = foldl f (f ac x) xs
```

```
reverse :: [a] -> [a]
```

```
{R} reverse = foldl (flip (:)) []
```

```
flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
```

```
{FL} flip f = (\x y -> f y x)
```

Queremos probar que: $\forall ys :: [a] . \text{length } ys = \text{length } (\text{reverse } ys)$

Otra vuelta de tuerca

Dadas las siguientes definiciones:

```
length :: [a] -> Int
```

```
{L0} length [] = 0
```

```
{L1} length (x:xs) = 1 + (length xs)
```

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
```

```
{F0} foldl f ac [] = ac
```

```
{F1} foldl f ac (x:xs) = foldl f (f ac x) xs
```

```
reverse :: [a] -> [a]
```

```
{R} reverse = foldl (flip (:)) []
```

```
flip :: (a -> b -> c) -> (b -> a -> c)
```

```
{FL} flip f x y = f y x
```

Queremos probar que: $\forall ys :: [a]. \text{length } ys = \text{length } (\text{reverse } ys)$

...que, por reverse, es lo mismo que:

$\forall ys :: [a]. \text{length } ys = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] ys)$

Avancemos hasta que nos trabemos.

$P(ys) = \text{length } ys = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] ys)$

$$P(ys) = \text{length } ys = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] ys)$$

En el caso inductivo ($ys = x:xs$) nuestra Hipótesis Inductiva es:

$$\text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] xs)$$

Pero lo que necesitamos es:

$$1 + \text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) (x:[]) xs)$$

$$P(ys) = \text{length } ys = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] ys)$$

En el caso inductivo ($ys = x:xs$) nuestra Hipótesis Inductiva es:

$$\text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] xs)$$

Pero lo que necesitamos es:

$$1 + \text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) (x:[]) xs)$$

¿Qué podemos hacer?

$$P(ys) = \text{length } ys = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] ys)$$

En el caso inductivo ($ys = x:xs$) nuestra Hipótesis Inductiva es:

$$\text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] xs)$$

Pero lo que necesitamos es:

$$1 + \text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) (x:[]) xs)$$

¿Qué podemos hacer?

Respuesta: demostrar una propiedad más general.

$$P(ys) = \text{length } ys = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] ys)$$

En el caso inductivo ($ys = x:xs$) nuestra Hipótesis Inductiva es:

$$\text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] xs)$$

Pero lo que necesitamos es:

$$1 + \text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) (x:[]) xs)$$

¿Qué podemos hacer?

Respuesta: demostrar una propiedad más general.

Probemos: $\forall ys :: [a]. \forall zs :: [a]. \text{length } zs + \text{length } ys =$
 $\text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) zs ys)$

$$P(ys) = \text{length } ys = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] ys)$$

En el caso inductivo ($ys = x:xs$) nuestra Hipótesis Inductiva es:

$$\text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) [] xs)$$

Pero lo que necesitamos es:

$$1 + \text{length } xs = \text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) (x:[]) xs)$$

¿Qué podemos hacer?

Respuesta: demostrar una propiedad más general.

Probemos: $\forall ys :: [a]. \forall zs :: [a]. \text{length } zs + \text{length } ys =$
 $\text{length } (\text{foldl } (\text{flip } (:)) zs ys)$

Luego, tomando $zs = []$ y sabiendo que $\text{length } [] = 0$, obtenemos lo que buscábamos.

¿Recuerdan esta función?

```
flipTake :: [a] -> Int -> [a]
{FT} flipTake = foldr
    (\x rec n -> if n==0 then [] else x:rec (n-1))
    (const [])
```

¿Recuerdan esta función?

```
flipTake :: [a] -> Int -> [a]
{FT} flipTake = foldr
    (\x rec n -> if n==0 then [] else x:rec (n-1))
    (const [])
```

Dada esta versión alternativa con recursión explícita:

```
take' :: [a] -> Int -> [a]
{T0} take' [] _ = []
{T1} take' (x:xs) n = if n==0 then [] else x:take' xs (n-1)
```

¿Podemos probar que `take' = flipTake`?

¿Está bien lo que hicimos?

Tenemos:

```
take' :: [a] -> Int -> [a]
```

```
{T0} take' [] _ = []
```

```
{T1} take' (x:xs) n = if n==0 then [] else x : take' xs (n-1)
```

```
flipTake :: [a] -> Int -> [a]
```

```
{FT} flipTake = foldr
```

```
  (\x rec n -> if n==0 then [] else x : rec (n-1))
```

```
  (const [])
```

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

```
{F0} foldr f z [] = z
```

```
{F1} foldr f z (x:xs) = f x (foldr f z xs)
```

```
const :: (a -> b -> a)
```

```
{C} const = (\x -> \_ -> x)
```

Probemos que `take' = flipTake`.

Demostrando propiedades sobre árboles

Dadas las siguientes funciones:

```
cantNodos :: AB a -> Int
```

```
{CN0} cantNodos Nil = 0
```

```
{CN1} cantNodos (Bin i r d) = 1 + (cantNodos i) + (cantNodos d)
```

```
inorder :: AB a -> [a]
```

```
{I0} inorder Nil = []
```

```
{I1} inorder (Bin i r d) = (inorder i) ++ (r:inorder d)
```

```
length :: [a] -> Int
```

```
{L0} length [] = 0
```

```
{L1} length (x:xs) = 1 + (length xs)
```

Queremos probar:

$$\forall t :: AB\ a. \text{cantNodos } t = \text{length } (\text{inorder } t)$$

¿Y ahora qué hacemos?

¡Necesitamos un lema!

¿Y ahora qué hacemos?

¡Necesitamos un lema!

$$\forall xs :: [a] . \forall ys :: [a] . \text{length } (xs ++ ys) = \text{length } xs + \text{length } ys$$

Una propiedad sobre árboles... y un lema sobre listas

Ahora sí:

```
cantNodos :: AB a -> Int
```

```
{CNO} cantNodos Nil = 0
```

```
{CN1} cantNodos (Bin i r d) = 1 + (cantNodos i) + (cantNodos d)
```

```
inorder :: AB a -> [a]
```

```
{I0} inorder Nil = []
```

```
{I1} inorder (Bin i r d) = (inorder i) ++ (r:inorder d)
```

```
length :: [a] -> Int
```

```
{L0} length [] = 0
```

```
{L1} length (x:xs) = 1 + (length xs)
```

Lema: $\forall xs :: [a] . \forall ys :: [a] . \text{length } (xs ++ ys) = \text{length } xs + \text{length } ys$

Queremos probar:

$$\forall t :: AB\ a . \text{cantNodos } t = \text{length } (\text{inorder } t)$$

Una propiedad sobre árboles... y un lema sobre listas

Ahora sí:

```
cantNodos :: AB a -> Int
```

```
{CNO} cantNodos Nil = 0
```

```
{CN1} cantNodos (Bin i r d) = 1 + (cantNodos i) + (cantNodos d)
```

```
inorder :: AB a -> [a]
```

```
{I0} inorder Nil = []
```

```
{I1} inorder (Bin i r d) = (inorder i) ++ (r:inorder d)
```

```
length :: [a] -> Int
```

```
{L0} length [] = 0
```

```
{L1} length (x:xs) = 1 + (length xs)
```

Lema: $\forall xs :: [a] . \forall ys :: [a] . \text{length } (xs ++ ys) = \text{length } xs + \text{length } ys$

Queremos probar:

$$\forall t :: AB\ a . \text{cantNodos } t = \text{length } (\text{inorder } t)$$

¡No nos olvidemos de probar el lema!

Demostremos el lema

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
```

```
{C0} [] ++ ys = ys
```

```
{C1} (x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

```
length :: [a] -> Int
```

```
{L0} length [] = 0
```

```
{L1} length (x:xs) = 1 + (length xs)
```

Lema: $\forall xs :: [a] . \forall ys :: [a] . \text{length } (xs ++ ys) = \text{length } xs + \text{length } ys$

Si quisiéramos demostrar una propiedad sobre el tipo `Árbol23 a b` mediante inducción estructural:

```
data Árbol23 a b =  
  Hoja a  
| Dos b (Árbol23 a b) (Árbol23 a b)  
| Tres b b (Árbol23 a b) (Árbol23 a b) (Árbol23 a b)
```

Para demostrar que vale $\forall q : \text{Árbol23 } a \ b . P(q)$:

¿Cuál es o cuáles son los casos base?

¿Cuál es o cuáles son los casos inductivos? ¿Y la(s) hipótesis inductiva(s)?

ι ι ι ι ι ι ι ι ι ι ? ? ? ? ? ? ? ?