

## Seminar 2

### Limbaje. Specificari. Gramatici independente de context simple

#### 1 Multimi si limbaje

Se cere sa se defineasca (folosind multimi si descrierea proprietatilor specifice ale elementelor) urmatoarele limbaje. Se poate folosi concatenare, operatia \* - inchiderea reflexiv tranzitiva.

- A. limbajul numerelor naturale in reprezentare binara
- B. limbajul numerelor intregi in reprezentare binara
- C. limbajul numerelor reale pozitive in reprezentare binara
- D. limbajul numerelor naturale in reprezentare zecimala
- E. limbajul numerelor intregi in reprezentare zecimala
- F. limbajul numerelor reale pozitive in reprezentare zecimala

Ex:  
 $A: L_A = \{1w \mid w \in \{0, 1\}^*\} \cup \{0\}$

#### 2 Gramatici independente de context simple

1. Descrieti limbajul generat de urmatoarele gramatici:

- a)  $G=(N, \Sigma, S, P)$   
 $N = \{A, B\}$   
 $\Sigma = \{a, b\}$   
 $S = A$   
 $P:$ 
  - A  $\rightarrow$  a B
  - A  $\rightarrow$  B
  - B  $\rightarrow$  b
- b)  $G=(N, \Sigma, S, P)$

#### 4. Descrieri de limbaje folosind mecanisme generative

- 1. Fie  $L$  un limbaj peste alfabetul  $\{a, b\}$  definit dupa cum urmeaza:
  - (i)  $ab \in L$
  - (ii) Daca  $x \in L$  atunci  $axb \in L$ .
  - (iii) Niciun alt cuvant nu apartine lui  $L$ .

- a) Descrieti limbajul definit mai sus folosind multimi si descrierea proprietatilor specifice ale elementelor.
- b) Descrieti limbajul definit mai sus folosind o gramatica independenta de context

#### 5. Gramatici independente de context si limbajul generat

- 1. Sa se construiasca o gramatica care genereaza limbajul:

$N = \{<\text{propozitie}>, <\text{subiect}>, <\text{predicat-nominal}>, <\text{verb-copulativ}>, <\text{nume-predicativ}>, <\text{substantiv}>, <\text{adjectiv}>, <\text{verb}>, <\text{determinant}>\}$   
 $\Sigma = \{\text{o, orice, functie, derivabila, continua, este}\}$   
 $S = <\text{propozitie}>$

$P:$ 

- <propozitie>  $\rightarrow$  <subiect> <predicat-nominal>
- <subiect>  $\rightarrow$  <determinant> <substantiv>
- <predicat-nominal>  $\rightarrow$  <verb-copulativ> <nume-predicativ>
- <verb-copulativ>  $\rightarrow$  este
- <nume-predicativ>  $\rightarrow$  <adjectiv>
- <adjectiv>  $\rightarrow$  derivabila | continua
- <substantiv>  $\rightarrow$  functie
- <determinant>  $\rightarrow$  o | orice

$$L = \{x^n y^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Pentru gramatica construita, demonstrati ca  $L(G) = L$ .

2. Analog pt.  $L = \{a^{2n}bc \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. Analog pt.  $L = \{a^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

# LFTC - SEMINAR 2

- ! \* - de o sau mai multe ori
- + - odată sau de mai multe ori

1 A. limbajul nr. nat. în repr. binară

$$L_A = \{1w \mid w \in \{0,1\}^*\} \cup \{0\}$$

B. limbajul nr. întregi în repr. binară

$$L_B = L_A \cup \{-1w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

C. limbajul nr. reale pozitive în repr. binară

$$L_C = L_A \cup \{0, w \mid w \in \{0,1\}^+\} \cup \{1a, b \mid a \in \{0,1\}^*, b \in \{0,1\}^+\}$$

D. limbajul nr. nat. în repr. decimală

$$L_D = \{ab \mid a \in \{1, \dots, 9\}, b \in \{0, 1, \dots, 9\}\}^* \cup \{0\}$$

E. limbajul nr. întregi în repr. decimală

$$L_E = L_D \cup \{-ab \mid a \in \{1, \dots, 9\}, b \in \{0, 1, \dots, 9\}\}^*$$

Sau

$$L_F = L_D \cup \{-x \mid x \in L_D \setminus \{0\}\}$$

F. limbajul nr. reale pozitive în repr. decimală

$$L_F = \{xy, z \mid x \in \{1, \dots, 9\}, y \in \{0, 1, \dots, 9\}^+, z \in \{0, \dots, 9\}^*\} \cup L_D \cup \{0, z \in \{0, \dots, 9\}^+\}$$

2 ① Descrieți limbajul generat de următoarele gramatici

a)  $G = (N, \Sigma, S, P)$  rezolvare:

$$N = \{A, B\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$S = A$$

$$P: \quad A \rightarrow aB$$

$$A \rightarrow B$$

$$B \rightarrow b$$

$$\begin{array}{l} A \xrightarrow{(1)} aB \xrightarrow{(2)} ab \\ A \xrightarrow{(2)} B \xrightarrow{(3)} b \end{array}$$

$$\Rightarrow L(G) = \{ab, b\}$$

N - meternimale  
(alte mari)

$\Sigma$  - termimale

S - simbol start

P - multime producții

b)  $G = (N, \Sigma, S, P)$

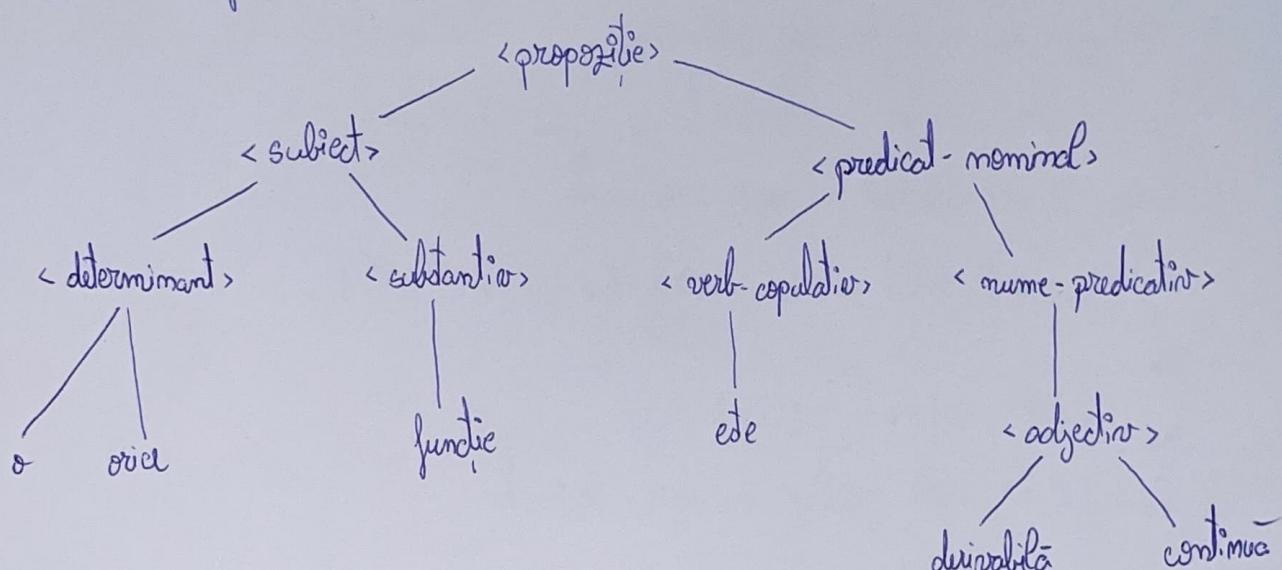
$N = \{ \langle \text{propozitie} \rangle, \langle \text{subiect} \rangle, \langle \text{predicat-nominal} \rangle, \langle \text{verb-copulativ} \rangle, \langle \text{nume-predicativ} \rangle,$   
 $\quad \langle \text{substantiv} \rangle, \langle \text{adjectiv} \rangle, \langle \text{verb} \rangle, \langle \text{determinant} \rangle \}$

$\Sigma = \{ \circ, \text{orice}, \text{functie}, \text{derivabilă}, \text{continuă}, \text{ete} \}$

$P :$

- $\langle \text{propozitie} \rangle \rightarrow \langle \text{subiect} \rangle \langle \text{predicat-nominal} \rangle$
- $\langle \text{subiect} \rangle \rightarrow \langle \text{determinant} \rangle \langle \text{substantiv} \rangle$
- $\langle \text{predicat-nominal} \rangle \rightarrow \langle \text{verb-copulativ} \rangle \langle \text{nume-predicativ} \rangle$
- $\langle \text{verb-copulativ} \rangle \rightarrow \text{ete}$
- $\langle \text{nume-predicativ} \rangle \rightarrow \langle \text{adjectiv} \rangle$
- $\langle \text{adjectiv} \rangle \rightarrow \text{derivabilă} \mid \text{continuă}$
- $\langle \text{substantiv} \rangle \rightarrow \text{functie}$
- $\langle \text{determinant} \rangle \rightarrow \circ \mid \text{orice}$

rezolvare: (facem arborele)



$L(G) = \{ \circ \text{ functie este derivabilă}, \circ \text{ functie este continuă}, \text{orice } \text{functie este derivabilă}, \text{orice } \text{functie este continuă} \}$

② Dati căte o gramatică care generează propozitive:

a) ab, ac

b) abc

$P: A \rightarrow aB$

$B \rightarrow b \mid c$

$P: A \rightarrow aB$

$B \rightarrow bc$

3 Dati o descriere echivalentă în BNF și EBNF pt. două dintre limbajele definite în secțiunile precedente.

BNF

$$2.2.a \quad \langle A \rangle ::= \alpha \langle B \rangle$$

$$\langle B \rangle ::= b | c$$

EBNF

$$A := "a" ("b" | "c")$$

1.d  $\langle \text{nr\_mat\_zecimal} \rangle ::= \langle \text{cif\_menula} \rangle \langle \text{sir\_cifre} \rangle | \langle \text{cifra} \rangle$  nr\_mat\_zecimal = cifă\_menula cifră 3 | 0  
 $\langle \text{sir\_cifre} \rangle ::= \langle \text{cifra} \rangle | \langle \text{cifra} \rangle \langle \text{sir\_cifre} \rangle$  cifră = 0 | cifră\_menula  
 $\langle \text{cifra} \rangle ::= 0 | \langle \text{cifra\_menula} \rangle$  cifră\_menula = 1 | ... | 9  
 $\langle \text{cifra\_menula} \rangle ::= 1 | 2 | \dots | 9$

4 Fie L un limbaj peste alfabetul  $\{a, b\}$  definit după cum urmează

- (i) abel
- (ii) Dacă  $x \in L$  atunci  $axb \in L$
- (iii) Niciun alt cuvânt nu aparține lui L

a) Descrieți limbajul definit mai sus folosind multimi și descrierea proprietăților specifice ale elementelor.

$$L = \{ab, aabb, \dots\} = \{a^m b^m \mid m \in \mathbb{N}^*\}$$

b) Descrieți limbajul definit mai sus folosind o gramatică independentă de context

$$G = \{N, \Sigma, S, P\}$$

$$N = \{S\}$$

$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$S = S$$

$$P: S \rightarrow ab$$

$$S \rightarrow aSb$$

**5** Să se construiască o gramatică care generează limbajul. Pt. gramatică construită, dem. că  $L(G) = L$ .

$$\text{① } L = \{x^m y^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$$

$$A \rightarrow \epsilon \quad (1)$$

$$A \rightarrow x A y \quad (2)$$

demonstratie: ( vom dem. că  $L = L(G)$ )

I.  $L \subseteq L(G)$ ?

$$\epsilon \in L$$

$$A \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \epsilon \Rightarrow \epsilon \in L(G) \quad (*)$$

$$\text{Ie } m \in \mathbb{N}^+, x^m y^m \in L$$

$$A \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x A y \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x^2 A y^2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \dots \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x^m A y^m \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x^m y^m \Rightarrow x^m y^m \in L(G), \forall m \in \mathbb{N}^+ \quad (**)$$

$$\text{din } (*) \text{ și } (**) \Rightarrow L \subseteq L(G)$$

II.  $L(G) \subseteq L$ ?

$P(k)$ : După exact  $k$  pași de derivare obținem  $x^k y^k$ .

demonstrăm că  $P(k)$  este true,  $\forall k \geq 1$

• verificare:  $k=1$

$$\left. \begin{array}{l} A \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \epsilon = x^1 y^1 = x^0 y^0 \\ A \stackrel{(2)}{\Rightarrow} x A y = x^1 A y^1 \end{array} \right\} P(1) \text{ este true}$$

• pp. că  $P(k)$  este true (demonstratia)  $\rightarrow P(k+1)$  true

$$\left. \begin{array}{c} A \xrightarrow{k \text{ pași de derivare}} x^k y^k \xrightarrow{(1)} x^k y^k \\ \text{pași de derivare} \quad \xrightarrow{(2)} x^{k+1} A y^{k+1} \end{array} \right\} P(k+1) \text{ este true}$$

$x^{k-1} y^{k-1}$  nu mai putem deriva

$\Rightarrow P(k)$  este true  $\forall k \geq 1 \Rightarrow L(G) \subseteq L$

DIN (I) și (II)  $\Rightarrow L = L(G)$  g.e.d. (demonstrat)

$$\textcircled{1} \quad L = \{a^{2m}bc \mid m \in \mathbb{N}\}$$

$$B \rightarrow a^2 B \quad (1)$$

$$B \rightarrow bc \quad (2)$$

demonstratie (vom demonstram că  $L = L(G)$ )

$$\text{I } L \subseteq L(G)$$

$$\begin{aligned} m=0 & \quad a^{2 \cdot 0} bc = bc \\ B & \xrightarrow{(2)} bc \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \{ \\ \Rightarrow bc \in L(G) \end{array} \right\} \Rightarrow L \subseteq L(G) \quad (*)$$

dacă  $m > 0$ :

$$B \xrightarrow{(1)} a^2 B \xrightarrow{(1)} \dots \xrightarrow{(1)} a^{2m} B \xrightarrow{(2)} a^{2m} bc \Rightarrow a^{2m} bc \in L(G) + m > 0$$

$$\text{II } L(G) \subseteq L$$

$P(k)$ : După exact  $k$  pași de derivare obținem  $a^{2k}B$  sau  $a^{2k-2}bc$ . Dem. că  $P(k)$  este adevarat  $\forall k \geq 1$

• o derivare

$$\begin{array}{c} B \xrightarrow{(1)} a^2 B = a^{2+1} B \\ \searrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \searrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ B \xrightarrow{(2)} bc = a^{2+1-2} bc \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \{ \\ \Rightarrow P(1) \text{ adevarat} \end{array} \right\} \Rightarrow P(k) \text{ adevarat } \forall k \geq 1$$

• pp  $P(k)$  adevarat, verificăm  $P(k+1)$

$$\begin{array}{c} B \xrightarrow{k \text{ deriva}} a^{2k} B \xrightarrow{(1)} a^{2k+2} B \\ \searrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \searrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ B \xrightarrow{(2)} a^{2k-2} bc \text{ nu mai putem deriva} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \{ \\ \Rightarrow P(k+1) \text{ adevarat} \end{array} \right\} \Rightarrow L(G) \subseteq L \quad (***)$$

din  $* \wedge ** \Rightarrow L = L(G)$  g.e.d.

$$\textcircled{3} \quad L = \{a^{2m+1} \mid m \in \mathbb{N}\}$$

$$C \rightarrow a^2 C$$

$$C \rightarrow a$$

Dem. e la fel, se modifică doar pe alturi (la puter).