Seminar 5

1.1 limbaje regulare – a fi sau anu fi

1. Sa se verifice daca urmatoarele limbaje sint regulare. Daca nu sint – demostrati! Daca sint, doar argumentati. (Puteti indica un AF care le accepta. Puteti argumenta si altfel? ☺)

a. $L = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbf{N}^*\}$
b. $L = \{a^k \mid k$ – nr.prim$\}$
c. $L = \{$a^n^2 $\mid n \in \mathbf{N}^*\}$
d. $L = \{$a^2^n $\mid n \in \mathbf{N}^*\}$
e. Fie k – un nr. natural fixat

$L = \{a^{kn} \mid n \in N \}$

f. $L = \{a^n b^m c^p \mid m, n, p \in \mathbf{N}\}$

2. Fie limbajul:

$L = \{a^k \mid k$ - neprim$\}$

a) Este regular?

(*Indicatie: folositi proprietatile de inchidere ale limbajelor regulare*)

b) Alegeti un nr. natural **p** astfel incat, alegand un cuvant din limbaj, de lungime mai mare decat **p**, sa puteti da o descompunere ***w=xyz*** astfel incat xy^iz sa fie tot un cuvant din limbaj, pentru orice **i** – numar natural nenul.

1.2 Limbaje de toate felurile

1. a) Dati un limbaj regular. Dati AF care il accepta. Dati o gram. regulara ce il genereaza. Dati o gramatica i.c. care nu e regulara ce il genereaza.
b) Dati un limbaj i.c. care nu este regular. Dati g.i.c. ce il genereaza.

1.3 Gramatici regulare echivalente cu o gramatica data (dar care genereaza un limbaj regular)

1. Dati o gramatica regulara echivalenta cu gram. data prin urmatoarele r.p.:

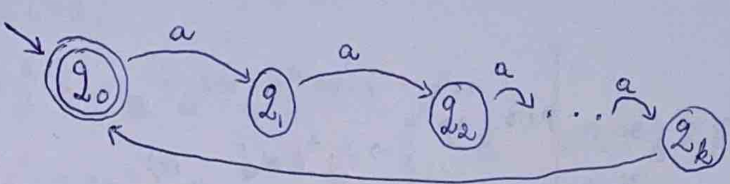
a) S->abS
   S->ab
b) S->Sa
   S->b

LFTC - SEMINAR 5

1 ① Să se verifice dacă urm. limbaje sunt regulare. Dacă nu sunt, demonstrați! Dacă sunt, argumentați (puteți indica un AF care le acceptă. Puteți argumenta și altfel?)

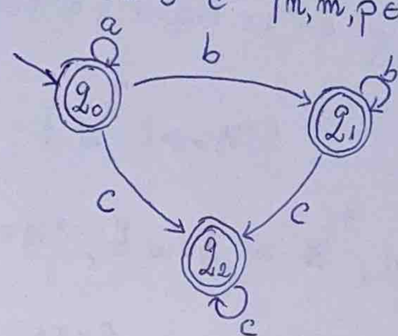
e) fie k un nr. natural fixat

$L = \{a^{kn} \mid n \in \mathbb{N}\}$



limbaj regular

f) $L = \{a^n b^m c^p \mid n, m, p \in \mathbb{N}\}$



limbaj regular

* pentru restul folosim Lema de pompare

L = lb. regular

$\exists\, p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\forall\, w \in L$ cu prop. că $|w| \geq p$, $\exists$ o descompunere $w = xyz$ unde $0 < |y| \leq p$ cu prop. că $xy^iz \in L\ \forall i \in \mathbb{N}$

L regular => are loc lema de pompare

b) $L = \{a^k \mid k\text{-nr. prim}\}$

asta e lema doar

$\forall p \in \mathbb{N}^*\ \exists\, w \in L, |w| \geq p, w = a^k$, k-prim, $k \geq p$ $\forall\, w = xyz$, unde $0 < |y| \leq p$

$x = a^m \qquad 0 \leq m < k - p$

$y = a^n \qquad 0 < n \leq p$

$z = a^{k-m-n}$

fie $i = k+1 \Rightarrow xy^iz = a^m \cdot a^{n \cdot i} \cdot a^{k-m-n} = a^{k+(i-1)n} = a^{k(n+1)}$

Cum k este prim $\Rightarrow k \geq 2$, $n+1 \geq 2 \Rightarrow a^{k(n+1)} \notin L$

Lema de pompare nu are loc => L nu este regular.

a) $L = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists w \in L, w = a^p b^{2p}, |w| = 3p > p$

$\forall w = xyz$

caz I: $x = a^m$

$y = a^n$ $\quad 0 \leq m \leq p-n$

$z = a^{p-m-n} b^{2p}$ $\quad 0 < n \leq p$

fie $i = 2$

$$\left.\begin{array}{l} xy^iz = xy^2z = a^m a^{2n} a^{p-m-n} b^{2p} = a^{p+n} b^{2p} \\ n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xy^2z \notin L \quad (1)$$

caz II: $x = a^{p-m}$ $\quad 0 < m < p$

$y = a^m b^n$ $\quad 0 < n \leq p$

$z = b^{2p-n}$ $\quad m + n \leq p$

fie $i = 2$

$$\left.\begin{array}{l} xy^iz = a^{p-m} a^{im} b^{in} b^{2pm} = a^{p+m} b^{2p+n} \\ m, n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xy^2z \notin L \quad (2)$$

caz III: $x = a^p b^m$ $\quad 0 \leq m < p-n$

$y = b^n$ $\quad 0 < n \leq p$

$z = b^{2p-m-n}$

fie $i = 2$

$$\left.\begin{array}{l} xy^iz = a^p b^m b^{in} b^{2p-m-n} = a^p b^{2p+n} \\ n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow xy^2z \notin L \quad (3)$$

din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ Lema de pompare nu are loc $\Rightarrow$ limbajul nu e regular

c) $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists\, w = a^{p^2} \in L, \ |w| = p^2 \geq p$

$\forall\, w = xyz \qquad x = a^m \qquad y = a^n \qquad z = a^{p^2-m-n}$

$0 < m < p^2 - n$

$0 < n \leq p$

fie $i = 2$

$xy^2z = a^m a^{2n} a^{p^2-m-n} = a^{p^2+n}$

$p^2+n > p^2, \ n > 0$

$(p+1)^2 = p^2 + 2p + 1 > p^2 + p \geq p^2 + n$

$\Rightarrow xy^2z \notin L$

$\Rightarrow$ Lema de pompare nu are loc

$\Rightarrow$ Limbajul nu e regular

d) $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists\, w \in L, \ w = a^{2^p}, \ |w| = 2p, \ 2^p > p$

$\forall\, w = xyz \qquad x = a^m \qquad y = a^n \qquad z = a^{2^p-m-n}$

$0 < m < 2^p - n$

$0 < n \leq p$

fie $i = 2$

$xy^iz = a^m a^{2n} a^{2^p-m-n} = a^{2^p+n}$

$m > 0$

$2^p + n > 2^p, \ n > 0$

$2^{p+1} = 2 \cdot 2^p = 2^p + 2^p > 2^p + p \geq 2^p + n$

$\Rightarrow xy^2z \notin L$

$\Rightarrow$ Lema de pompare nu are loc

$\Rightarrow$ Limbajul nu e regular

5

② a) fie limbajul $L = \{a^k \mid k \text{ neprim}\}$

complementul lui este $\{a^k \mid k \text{ prim}\}$ $\xrightarrow[\text{închidere}]{\text{prop.}}$ $\{a^k \mid k \text{ neprim}\}$ nu este regular

↳ știm că nu este regular

b) Alegeți un nr. nat p a.î., alegând un cuvânt din limbaj, de lungime mai mare decât p, să puteți da o descompunere $w = xyz$ a.î. xy^iz să fie tot un cuvânt din limbaj $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

$w = a^6$, $|w| = 6 \geq p = 4$

fie $w = xyz$ $\quad \forall i, \; xy^iz = a\,a^{i \cdot 4} \cdot a = a^{4i+2}$

$x = a$

$y = a^4$

$z = a$

$\left.\begin{matrix} (4i+2) \vdots 2 \\ 4i+2 \geq 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4i+2$ nu este prim $\Rightarrow a^{4i+2} \in L$

2 a) Dați un limbaj regular. Dați AF care îl acceptă. Dați o gr. regulară care îl generează. Dați o gr. independentă de context care nu e regulară ce îl generează.

$L = \{a\}$

$P \xrightarrow{a} q$

gr. regulară: $P \to a$

gr. neregulară: $P \to aA$

$A \to \varepsilon$

b) Dați un limbaj independent de context care nu e regular. Dați g.i.c ce îl generează.

$L = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$P \to ab^2$

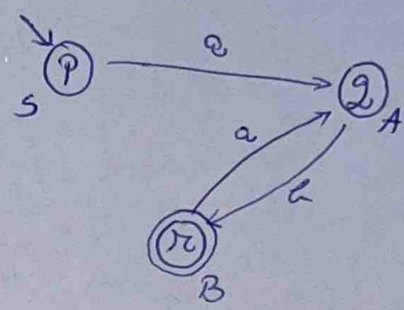
$P \to aSb^2$

5] Dați o gramatică regulară echivalentă cu gram. dată prin urm. r.p:

a) $S \to abS$ $\qquad \longrightarrow \qquad$ $S \to aA$

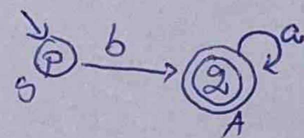
$S \to ab$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $A \to b$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $A \to bS$



b) $S \to Sa$

$S \to b$ $\quad \Rightarrow L = \{ba^n \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$



$\Rightarrow$ $S \to bA$

$A \to \varepsilon$ $\qquad$ sau $\qquad$ $S \to bP$

$A \to aA$ $\qquad\qquad\qquad$ $S \to b$

$P \to a$

$P \to aP$