



**Lehrstuhl für Informationstechnik  
(Schwerpunkt Kommunikationselektronik)**

**LIKE**

Masterarbeit mit dem Thema:

**Modellfehler in optimierungsbasierter kombinierter  
Planung und Regelung für Rennwagen**

Bearbeiter	Weller Sebastian
Matrikelnr.	21777345
Studiengang	Informations und Kommunikationstechnik
Betreuer	Prof. Dr.-Ing. Jörn Thielecke
	Henrik Bey, M. Sc.
Beginn	08. Januar 2018
Ende	09. Juli 2018

---

# Bestätigung

---

## **Erklärung:**

Ich versichere, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und, dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, den (hier Datum eintragen)\_\_\_\_\_

---

## **Danksagung**

---

Ich möchte mich bei meinen Betreuern und meiner Familie bedanken.....

---

# Thema und Aufgabenstellung

---

**Thema:**

Modellfehler in optimierungsbasierter kombinierter Planung und Regelung für Rennwagen

**Aufgabenstellung:**

Die Automatisierung des Fahrens schließt sowohl die Planung als auch die Regelung des Fahrzeugs mit ein. Häufig werden beide Bestandteile hierarchisch voneinander getrennt. Dies ist sinnvoll, solange das kontrollierte Fahrzeug sicher innerhalb der Aktuatorlimitierungen betrieben werden soll, oder wenn die Trennung bereits durch die Problemstellung gegeben ist (Zieltrajektorie bereits vorgegeben) [WDG<sup>+</sup>16].

In anderen Fällen, z.B. wenn die gewünschte Dynamik wie in einer Rennsituation im Grenzbereich liegt, bietet sich eine kombinierte Planung und Regelung an. In diesem Beispiel würde die Kostenfunktion eine Minimierung der Rundenzeit beinhalten, während gleichzeitig die Beschränkungen des Fahrzeugs berücksichtigt werden.

Für derartige Probleme ist die modellprädiktive Regelung (MPC) bzw. eines ihrer Derivate besonders geeignet. Dabei kommt es immer zu einem sogenannten Modellfehler, der von der Komplexität und Genauigkeit des verwendeten Modells abhängt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den Abfall bei der Leistung des Regelungsansatzes durch den Modellfehler zu untersuchen. Dafür soll eine Simulation verwendet werden. Die Arbeit soll folgende Punkte beinhalten:

- Auswahl einer passenden Simulationsumgebung und deren Inbetriebnahme
- Implementierung verschiedener (gegebener) Modelle für die Simulation
- Implementierung des MPC-Ansatzes
- Entwicklung einer einfachen Evaluationsmethode, um die Leistungsfähigkeit des Reglers zu untersuchen

- Vergleich verschiedener Kombinationen aus Regler- und Simulationsmodellen

---

# Kurzzusammenfassung

---

Mit zunehmender Rechenleistung und Erfahrung der Automobilbranche mit autonomen Fahrzeugen rückt auch das Thema der selbstfahrenden Rennautos immer mehr in den Fokus. Das ROBORACE Projekt ist hier Vorreiter mit seiner ausgefeilten Hardwareplattform und dem bereits in öffentlichen Events gezeigten Fahrleistungen. Auch die Formula Student (FS) verschließt sich nicht diesem Trend und hat 2017 die Rubrik Driverless ins Leben gerufen.

Diese Masterarbeit beschreibt einen Ansatz zur Echtzeitregelung und Trajektorienplanung für ein eben solches Driverless-Racecar. Die Basis hierfür ist ein Model Predictive Control (MPC) Algorithmus. Er vereint die Regelung und Trajektorienplanung und ist adaptiv bezüglich verschiedener Fahrsituationen und Ziele. Als Ausgangssituation wird angenommen, dass das Fahrzeug bereits eine Runde auf einem unbekannten Kurs absolviert und nun eine genaue Karte des Kurses errechnet hat. Um das MPC nutzen zu können, muss ein Fahrzeugmodell hinterlegt werden. Je genauer dieses ist, desto näher kann die Regelung an die Grenzen des realen Fahrzeuges gehen. Neben der Auslegung für das aktuellste FS-Fahrzeug des High Octane Motorsports Teams für die Driverless Umrüstung, wird untersucht, ab welchem Punkt ein kinematisches Modell nicht mehr ausreicht, um das Fahrzeug sicher auf dem Rennkurs zu führen.

---

# Abstract

---

.....the Abstract is here..... Bitte nicht löschen oder auskommentieren - ist obligatorisch!

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Formula Student Driverless . . . . .	1
1.2 Problemstellung . . . . .	3
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>4</b>
<b>3 Grundlagen</b>	<b>6</b>
3.1 Model Predictive Control . . . . .	6
3.2 Optimierung . . . . .	9
3.2.1 Simplex-Verfahren . . . . .	11
3.2.2 Innere-Punkte-Verfahren . . . . .	12
3.2.3 Automatische Ableitung . . . . .	14
3.3 Fahrzeugmodelle . . . . .	16
3.3.1 Kinematisches Modell . . . . .	16
3.3.2 Reifenmodell . . . . .	18
3.3.3 Dynamisches Fahrzeugmodell . . . . .	24
<b>4 MPC zur Trajektorienplanung und Regelung</b>	<b>29</b>
4.1 Fahrzeugmodell . . . . .	31
4.2 Kostenfunktionen . . . . .	31
4.3 Strecken-, und Positionsbeschränkung . . . . .	33
4.4 Programmiersprachen . . . . .	38
4.4.1 Python . . . . .	38
4.4.2 Julia . . . . .	38
4.5 Simulationsumgebung . . . . .	41
4.5.1 Simple and Fast Multimedia Library . . . . .	42
4.5.2 Virtueller Rennkurs . . . . .	43
<b>5 Modellfehler</b>	<b>45</b>
5.1 Acceleration . . . . .	45
5.2 Skidpad . . . . .	46
5.3 Orientierung . . . . .	47

5.4 Reifenmodelle . . . . .	51
5.5 Longitudinale Modelle . . . . .	52
<b>6 Regelung des kinematischen Modells</b>	<b>53</b>
6.1 Prädiktionshorizont . . . . .	53
6.2 Kostenfunktionen . . . . .	53
6.2.1 Laufzeit . . . . .	53
6.2.2 Rundenzeit . . . . .	56
<b>7 Regelung des dynamischen Modells</b>	<b>57</b>
7.1 Maximale Querbeschleunigung und Prädiktionshorizont . . . . .	57
7.1.1 Dynamisches Modell . . . . .	57
7.1.2 Kammsches Modell . . . . .	58
7.2 Einfluss des Reifenmodells . . . . .	59
7.3 Regelfrequenz . . . . .	61
7.4 Quadratische Funktion . . . . .	61
<b>8 Ausblick</b>	<b>64</b>
8.1 Zusammenfassung . . . . .	64
8.2 Ausblick . . . . .	64
8.2.1 Dynamisches Fahrzeugmodell im MPC . . . . .	64
8.2.2 Zweispurmodell . . . . .	64
8.2.3 Trajektorienplanung . . . . .	64
<b>A Anhang</b>	<b>65</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>67</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>68</b>

---

# 1 Einleitung

---

Neben neu aufkommenden Trends in der Automobilindustrie, wie dem Elektroauto, Carsharing und dem aktuellen SUV-Boom, hat sich vor allem das autonome Auto in den letzten zwei Jahren mit dem Aufkommen von Teslas Autopilot stark in das Zentrum der Aufmerksamkeit von Firmen und Konsumenten bewegt. Das Jahr 2018 markiert dabei einen ganz besonderen Meilenstein. Ende des Jahres wird die Alphabet-Tochter Waymo die ersten vollautonomen Taxis in Phönix für die Öffentlichkeit in Betrieb nehmen [Way]. Dies ist jedoch nur möglich, da Google im gesamten Gebiet, in dem sie ihren Service anbieten werden, eine hochgenaue Umgebungskarte in den Fahrzeugen hinterlegt. Sollen die Fahrzeuge in unbekannten Umgebungen agieren, müssen sowohl die Sensorsysteme, wie auch die Algorithmen noch deutlich weiterentwickelt werden, bevor autonome Autos auf Stufe 5 frei verfügbar sind. Die Unterteilung dieser Level wurde von der Bundesanstalt für Straßenwesen zur Klassifizierung von selbst fahrenden Autos erstellt [BAS]. Die Spanne geht von Stufe 0, keinerlei Assistenz beim Fahren, bis Stufe 5, Vollautomatisierung. In diesen Fahrzeugen ist dann auch kein Lenkrad mehr vorgesehen. Die Forschung um dieses Ziel zu erreichen, wird nicht nur in den großen Automobilkonzernen betrieben. Bereits in der Schule aber vor allem an Universitäten und Hochschulen gibt es immer mehr Projekte an denen die Studenten sich intensiv mit der Entwicklung autonomer Roboter und Fahrzeugplattformen beschäftigen. Ein solches Projekt ist der Formula Student (FS) Driverless Wettbewerb.

## 1.1 Formula Student Driverless

Die Formula Student ist ein Ingenieurswettbewerb für Studenten. Er hat seine Wurzeln in den USA und wurde im Jahre 1981 das erste mal ausgetragen. Das Ziel des Wettbewerbes ist es, im Verlauf eines Jahres ein eigenes Rennauto zu konzipieren, designen, fertigen und sich schlussendlich mit anderen Teams zu messen. Dass der Wettbewerb sehr erfolgreich ist, machen nicht nur die inzwischen fast 700 Teams weltweit [FsW] deutlich, sondern auch die Anzahl der verschiedenen Events, die überall auf der Welt im Sommer stattfinden. Seit dem Jahr 2017 gibt es neben der ursprünglichen Combustion-Klasse und der vor 10 Jahren eingeführten Electric-Klasse auch noch die Driverless-Klasse. In dieser wird von den Teams ein Altfahrzeug mit Sensoren und Aktoren so erweitert, dass das Rennauto die

Kurse autonom befahren kann. Der Wettbewerb ist unterteilt in dynamische und statische Disziplinen. In letzteren werden verschiedene Präsentationen von den Teams verlangt. Diese beziehen sich auf die technische Realisierung, Softwaredesign, Kostenaufstellung und einen Businessplan. Die dynamischen Disziplinen, in denen das Fahrzeug selbstständig fährt, sind:

- Acceleration

Ein 75 Meter langer Beschleunigungsstreifen. Punkte werden nach der Zeit, nicht nach der Endgeschwindigkeit vergeben.

- Skidpad

Eine liegende 8, bei der an der Engstelle eingefahren wird und jeweils zwei rechte und zwei linke Runden gefahren werden. Die zweite Runde geht jeweils in die Zeitmessung ein. Die Abmaße sind exakt vorgegeben.

- Trackdrive

Ein bis zu 800 Meter langer Kurs mit maximal 80 Meter langen Geraden und Kurven mit minimalem Innenradius von neun Metern. Es werden elf Runden gefahren und die Teams erhalten im Vornherein keine Möglichkeit Messungen am Kurs vorzunehmen.

Für die vorliegende Arbeit ist vor allem der Trackdrive von Interesse. Es wird davon ausgegangen, dass das Fahrzeug bereits die erste Runde absolviert und sich damit eine genaue Karte des Rennkurses erstellt hat. Die Messungen und Vergleiche beziehen sich damit auch immer auf einen Kurs, der so in einem FS-Event für die Driverless-Fahrzeuge vorkommen könnte.



**Abbildung 1.1:** Zürichs FS-Driverless-Fahrzeug im Jahr 2017 während des Trackdrive

## 1.2 Problemstellung

Im Laufe dieser Arbeit soll ein Algorithmus entwickelt werden, der die Trajektorienplanung und Regelung eines FS Driverless Racecars berechnet. Der dafür gewählte Ansatz ist Model Predictive Control. Es handelt sich dabei um ein Verfahren welches die Planung von Trajektorien und die Steuerung des Rennautos in einem Algorithmus vereint. Wie der Name schon sagt, benötigt es hierfür ein Modell des zu kontrollierenden Systems, mit dem daraufhin das zukünftige Verhalten vorausberechnet werden kann. Dieses Wissen wird genutzt um mit Hilfe einer Kostenfunktion die Steuerparameter so zu variieren, dass das Rennauto eine möglichst schnelle Rundenzeit erreicht. In der Arbeit wird untersucht wie groß die Unterschiede zwischen einem rein geometrischen Fahrzeugmodell und einem um Reifenkräfte erweiterten, für hohe Geschwindigkeiten realistischeren, Modell sind. Zudem wird evaluiert, unter welchen Einschränkungen der Model Predictive Control (MPC)-Ansatz mit hinterlegtem kinematischen Modell ein dynamisches Modell im Simulator steuern kann. Das Ziel ist also eine möglichst niedrige Rundenzeit zu erfahren unter der Voraussetzung dass das Fahrzeug immer auf dem Kurs bleibt.

---

## 2 Stand der Technik

---

Obwohl es zum Zeitpunkt der Arbeit noch keine öffentliche, autonome Rennserie außerhalb der Formula Student gibt, ist das Interesse an den dafür benötigten Technologien sehr groß. Einen guten Rennfahrer zeichnet die Tatsache aus, dass er sein Fahrzeug in absoluten Grenzsituationen noch unter Kontrolle halten kann. Diese Eigenschaft ist nicht nur für autonome Rennautos wichtig, sondern ganz besonders auch für aktive Fahrassistentenzsysteme. In kritische Fahrsituationen, in denen ein ungeübter Fahrer einen Unfall nicht mehr verhindern kann, können diese Systeme noch eingreifen. Um einen guten Rennfahrer in Software nachzustellen zu können, müssen drei Grundvoraussetzungen geschaffen werden:

- Genaue Kenntnis der Umgebung (dem Rennkurs) und der eigenen Position.
- Möglichst viel Wissen über das Verhalten des Fahrzeugs (Fahrzeugmodell).
- Kurze Reaktionszeiten (engl.: muscle memory).

Um die Position des Fahrzeugs genau bestimmen zu können, werden verschiedene Sensortypen mit Hilfe von Filterverfahren fusioniert. Die Genauigkeit der Schätzung steigt im Vergleich zu den einzelnen Messsystemen durch die Kombination signifikant an [SCT07], [WDY16]. Um das Rennauto mit hoher Geschwindigkeit einen Rennkurs abfahren zu lassen, benötigt es ein Modell, welches das dynamische Verhalten des Fahrzeugs abbilden kann. Erst dieses Wissen ermöglicht die Berechnung von Trajektorien, welche das Rennauto an die Grenzen seiner Traktion bringt. Es muss dabei ein guter Kompromiss aus Komplexität (Rechenaufwand) und Genauigkeit der Abbildung gefunden werden. Eine sehr genaue Systembeschreibung ermöglicht das berechnen präziserer Trajektorien, ist dies jedoch nicht mehr in Echtzeit berechenbar, kann das Modell nicht verwendet werden. Die Ansätze variieren nach Komplexität und zu bewältigenden Fahrsituationen:

- Ein einfaches kinematisches Modell [HB15], basierend auf einem Einspurmodell, welches sehr schnell berechenbar ist, aber keine dynamischen Effekte berücksichtigt.

- Die Verwendung einer dynamischen Fahrzeugbeschreibung welche das Einspurmodell um ein lineares oder nichtlineares Reifenmodell erweitert [AAM], [PER16], [CUR18].
- Ein sehr genaues Zweispurmodell welches zehn Freiheitsgrade betrachtet und sogar das Einfedern des Fahrzeugs berücksichtigt [FGW02]

Um ein mathematisches Fahrzeugmodell in einem realen Fahrzeug einsetzen zu können, müssen die Parameter, welche das System beschreiben, möglichst genau bestimmt werden. Dies kann mit Hilfe einer linearen Regression sehr effizient und genau verwirklicht werden [WDG<sup>+</sup>16]. Die Aktualisierungszeit für neue Steuerparameter sollte im Anwendungsfall eines autonomen Rennautos zwischen 20 und 100 Hz liegen, je nachdem wie schnell das Fahrzeug fahren soll [AAM], [WDG<sup>+</sup>16].

Sind die Grundvoraussetzungen geschaffen, gibt es unterschiedliche Ansätze ein Rennauto möglichst performant um einen Rennkurs fahren zu lassen. Eine Möglichkeit ist der Einsatz von neuronalen Netzen um geeignete Steuerparameter zu berechnen, wie vom Autor in [AGT12] beschrieben wurde. Ein „g-g“-Ansatz, wie in [KG10], nutzt ein Diagramm von lateralen (g) zu longitudinalen (g) Kräften, abhängig von verschiedenen Euler Spiralen um das Verhalten eines Rennfahrers zu simulieren. Vor allem aber der in dieser Arbeit betrachtete MPC-Algorithmus wird in einer Vielzahl von Arbeiten untersucht und verwendet. Die Unterschiede bei den Verfahren beziehen sich auf die getrennte Berechnung von Trajektorie und Regelung, Trennung von longitudinalem und lateralem Regler [PER16], [CUR18] oder kombinierter Betrachtung [AAM].

---

## 3 Grundlagen

---

Um für das Fahrzeug ideale Trajektorien zu berechnen und gleichzeitig das Rennauto in Echtzeit zu regeln wurde der MPC-Ansatz gewählt. Dieses Verfahren basiert auf der Optimierung eines nichtlinearen Programms.

### 3.1 Model Predictive Control

Bei MPC handelt es sich um einen Algorithmus, mit dem sich komplexe, multivariable Regelungsprobleme lösen lassen. Er eignet sich für Prozesse mit mehreren Ein-, und Ausgängen die klar definierten Beschränkungen unterliegen. Vorausgesetzt es ist ein ausreichend genaues Modell des Prozesses vorhanden, können mit dem Einbeziehen des aktuellen Systemzustands zukünftige Zustände des Prozesses berechnet werden. Diese Information wird genutzt um die Eingangsparameter abhängig von dem gewünschten zukünftigen Verhalten des Prozesses, zu berechnen [SMED10].

Einige wichtige Vorteile von MPC sind:

- Das sehr gute Annähern an Prozessgrenzen und damit ein hoher Durchsatz/Effizienz. Ein Rennauto versucht zum Beispiel den Kurs bis an die Bande auszunutzen um die höchste Kurvengeschwindigkeit fahren zu können.
- Einschränkungen der Eingangs- und Ausgangsgrößen werden berücksichtigt.
- Die Vorhersage des Systemzustands kann genutzt werden, um mögliche Probleme frühzeitig zu detektieren. Zum Beispiel kann bei einer Blockade der Fahrbahn frühzeitig ermittelt werden ob eine Notbremsung eingeleitet werden muss.

Seit den späten 1970ern bis in die frühen 2000er wurde MPC vor allem in der Chemiebranche genutzt, um die komplexen multivariablen Regelungsprozesse, zum Beispiel in einer Ölraffinerie, zu steuern. Für diese Aufgabengebiete war MPC hervorragend geeignet, da die Prozesse im Vergleich zu anderen Regelungsaufgaben sehr langsam sind und damit die geringe Rechenleistung der damaligen Zeit ausreichend war. Gerade in den letzten Jahren, mit stark gestiegener Prozessorleistung, sind die Einsatzgebiete vielfältiger geworden. Auch die Steuerung hoch dynamischer Systeme wie Quadrocopter [GD17] oder Fahrzeugen [FB05] ist inzwischen möglich.

## Funktionsweise

Der systematische Ablauf eines MPC-Algorithmus ist in Abbildung 3.1 aufgezeigt.

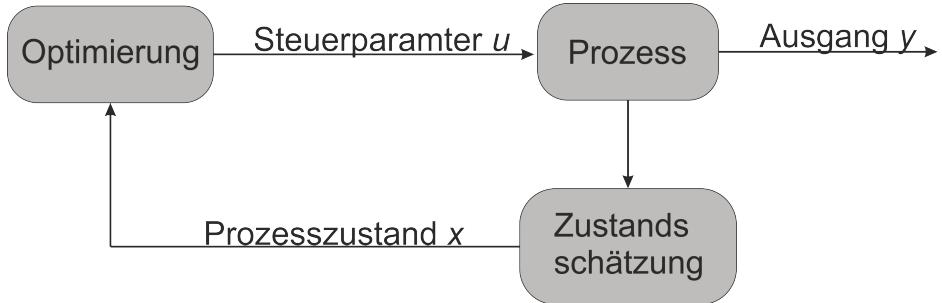


Abbildung 3.1: Block Diagramm zu MPC

Die Funktion lässt sich in drei Schritte unterteilen:

- Zustandsschätzung

Im ersten Schritt wird der aktuelle Zustand des Systems erfasst und als Ausgangspunkt für die Berechnung des Optimierungsproblems festgelegt.

- Optimierung

In diesem Schritt werden die zukünftigen Zustände des Systems berechnet und welche Steuerparameter vonnöten sind, um eine Kostenfunktion zu minimieren. Diese entspricht im industriellen Umfeld zum Beispiel einer Optimierung der Fertigungsrate, Kostenreduktion, Temperatursteuerung, etc.

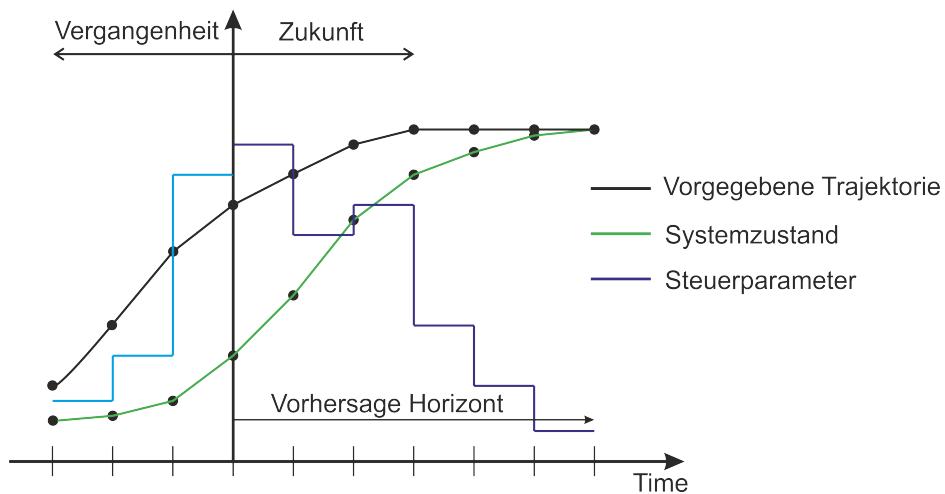
- Steuerung

Die berechneten Steuerparameter werden auf dem realen System angewandt. Danach wird wieder beim ersten Schritt fortgefahrene.

Die Stärke des MPC-Ansatzes basiert auf der Prädiktion des Systemverhaltens. Ein präzises Vorhersagen setzt eine möglichst gute Systembeschreibung voraus. Je genauer diese an die Realität heranreicht, desto weiter in die Zukunft können die Systemzustände, ohne große Abweichung von der Realität, berechnet werden. Zudem kann das System näher an seine Systemgrenzen geführt werden.

Bei MPC handelt es sich um ein Verfahren welches immer einen festen Zeitraum in die Zukunft plant. Die Optimierung wird also immer für einen bestimmten Zeitraum  $[t_0, t_0 + T]$  durchgeführt. Dieser Bereich  $T$  wird dann in  $k$  Schritte unterteilt, für die jeweils ein Prädiktionsschritt berechnet wird. Dieser geht aus dem Zustand des vorherigen Schrittes

$k - 1$  und den dazu gehörigen Steuergrößen hervor. Nachdem der Optimierer die für eine Kostenfunktion idealen Steuergrößen für den gesamten Prädiktionsvektor berechnet hat, wird nur der *erste* Steuerwert ausgewählt und zur Regelung im realen System eingesetzt. Der Zusammenhang aus Prädiktion und Kostenfunktion ist im Schaubild 3.2 verdeutlicht. Für jeden Schritt im Vorhersagehorizont wird der Steuerparameter berechnet, welcher den Systemzustand möglichst schnell der vorgegebenen Trajektorie annähert. Das Wissen über das zu steuernde System hilft, dafür die passenden Steuerparameter zu finden und frühzeitig genug die Amplitude so anzupassen, dass kein Übersteuern entsteht.



**Abbildung 3.2:** Funktionsprinzip von MPC: Die Kostenfunktion ist die Reduktion der Distanz zur Referenztrajektorie. Durch das Wissen über das hinterlegte Modell können die Kosten sehr schnell minimiert werden ohne die Beschränkungen zu verletzen.

Wie bereits ausgeführt wurde, berücksichtigt der MPC-Ansatz auch Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsbeschränkungen, mit welchen man den Suchraum einschränkt. Diese sind im Falle eines Rennautos zum Beispiel die maximale Geschwindigkeit, Lenkeinschlag, Beschleunigung und Bremskraft. Ebenfalls ein sehr gutes Beispiel für eine Zustandsbeschränkung ist die Reisequalität in einem normalen Straßenauto. ruckartiges Anfahren und allgemein plötzliche änderung der laterale wie longitudinale Beschleunigung trübt bei einem autonomen Fahrzeug das Fahrgefühl. Eine Möglichkeit diesem Problem zu begegnen ist die Begrenzung der Änderungsrate der Beschleunigung des Fahrzeugs.

Das Grundgerüst des MPC-Ansatz bildet der Optimierer, der die optimale Lösung für die gewünschte Kostenfunktion sucht. Im Folgenden wird daher auf die Funktionsweise von diesem eingegangen.

## 3.2 Optimierung

Das Ziel der Optimierung besteht darin, eine gegebene Funktion  $f(\vec{x})$ , auch als Kostenfunktion bezeichnet, zu mini- oder zu maximieren. Dies wird in einer Vielzahl von Anwendungsgebieten genutzt. Zur Berechnung von Profit bzw. Verlust in einem Betrieb, Geschwindigkeit oder Distanz in einem physikalischen Problem oder die erwartete Kapitalrendite für eine Geldanlage. Die Bezeichnung lineare Programmierung bezieht sich auf die Lösung eines linearen Optimierungsproblems und hat nichts mit dem eigentlichen Programm zu tun. Die allgemeine mathematische Definition eines Optimierungsproblems ist

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\vec{x}) \\ \text{subject to} \quad & g_i(\vec{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, p \\ & h_j(\vec{x}) = 0, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Der Eingabeparameter  $\vec{x}$  sei aus  $\mathbb{R}^n$ , das heißt, das Problem hängt von  $n$  Einflussparameter ab. Die Zielfunktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei einmal stetig differenzierbar. Weiterhin sind die Nebenbedingungen in Ungleichheitsform  $g_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $1 \leq i \leq p$  und in Gleichheitsform  $h_j : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $1 \leq j \leq m$  gegeben. Wird  $f(\vec{x})$  durch  $-f(\vec{x})$  ersetzt, wird aus dem Minimierungsproblem ein Maximierungsproblem. Der Unterschied zu einem nichtlinearen Programm ist nur, dass mindestens eine der Gleichungen des Optimierungsproblem nichtlinear ist.

Ein Optimierungsproblem hat nicht immer eine Lösung. Die Ungleichungen, welche den Suchraum einschränken, können sich widersprechen ( $x \leq 0$  und  $x > 0$ ). In diesem Fall gibt es keine Lösung. Außerdem kann das Problem unbeschränkt sein. Soll zum Beispiel eine Optimierungsvariable minimiert werden, diese nach unten aber nicht beschränkt ist, kann keine Lösung gefunden werden.

Ein Optimierungsproblem lässt sich in Matrixschreibweise darstellen. Es besteht aus  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  und zwei Vektoren  $b \in \mathbb{R}^{m,1}$  und  $c \in \mathbb{R}^{1,n}$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & \leq b_m \end{pmatrix}$$

Das Optimierungsverfahren sucht eine Lösung für den Vektor  $\vec{x}$  welcher sowohl die linearen Bedingungen erfüllt, als auch die Zielfunktion  $cx = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$  minimiert. Die Kurzschreibweise für dieses Gleichungssystem ist:

$$\min \{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

Besonders einfach veranschaulichen lässt sich die Lösung des Problems geometrisch im zweidimensionalen Raum, so dargestellt in Abbildung 3.3.

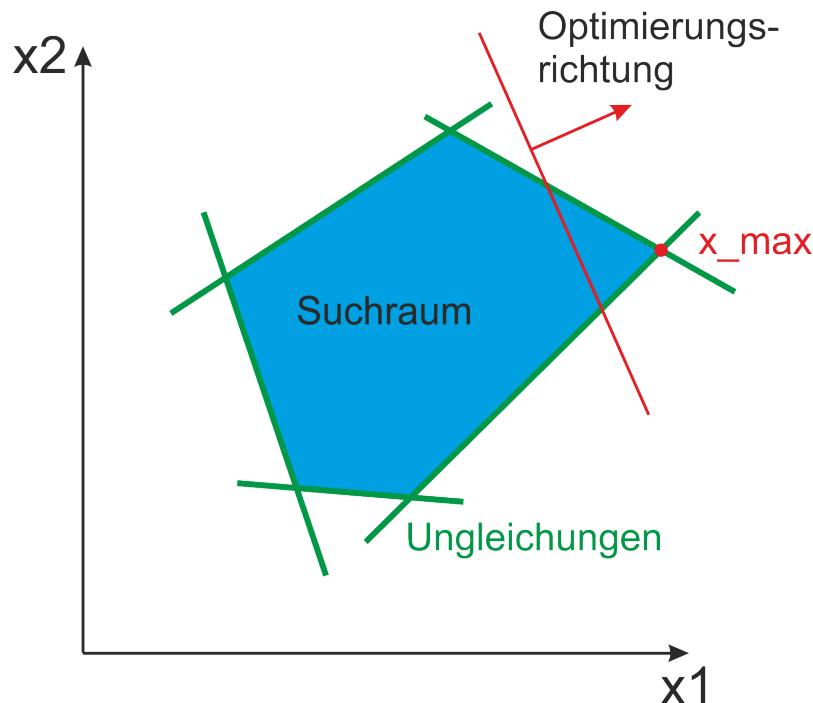


Abbildung 3.3: Lineare Optimierung

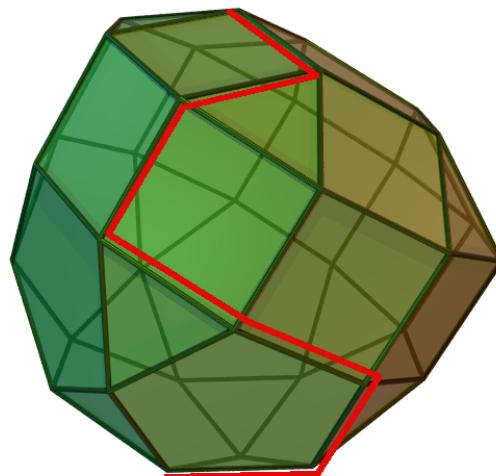
Jede Ungleichung  $a_i x \leq b_i$  teilt den Suchraum in zwei Hälften, eine mit zulässigen Punkten und eine ohne. Die Punkte auf der Grenze sind ebenfalls zulässig. Die Menge der Punkte, welche alle Ungleichungen erfüllt, ist genau der Schnitt dieser Halbräume. Dieser Bereich ist in Abbildung 3.3 blau dargestellt. Der Punkt, der die Kostenfunktion  $c : x \rightarrow c^T x$

minimiert, liegt auf den Kanten der Ungleichungen und wird durch Verschiebung der Hyperebene (siehe 3.3)  $\{x|c^T x = 0\}$  in Richtung des Vektors  $c$  gefunden. Nachdem das Optimierungsproblem aufgestellt ist, gibt es verschiedene Ansätze dieses zu berechnen.

## Lösungsverfahren

### 3.2.1 Simplex-Verfahren

Bei der in dieser Arbeit zu lösenden Optimierung, handelt es sich um ein nichtlineares Problem. Um ein besseres Verständnis für das Lösungsverfahren zu bekommen, welches hierfür genutzt wird, soll zuerst das Simplex-Verfahren kurz vorgestellt werden. Das Verfahren wurde 1947 von Dantzig [Dan51] entwickelt und nutzt die Eigenschaft, dass ein lösbares, in Standardform vorliegendes, lineares Programm immer einen Knoten besitzt an dem sich Kanten verschiedener Ungleichheitsbedingungen treffen und die Kostenfunktion minimieren. Das Verfahren nutzt diesen Zustand aus, in dem es sich iterativ von einem Eckpunkt zum nächsten bewegt.



**Abbildung 3.4:** Simplex Methode: Ablaufen des Suchraums entlang der Kanten der Ungleichheitsbedingungen von Knoten zu Knoten

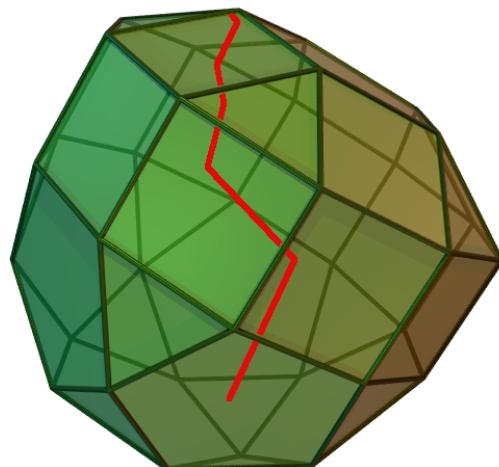
Die Richtung, welche gewählt wird, hängt von der Flanke (Ungleichung) ab, welche die Kostenfunktion weiter minimiert. Kann keine weitere Flanke gefunden werden, welche die Kosten weiter reduziert, endet das Verfahren im Optimum. Da im schlechtesten Fall

der Simplex-Algorithmus jeden Knotenpunkt einmal besuchen muss, hat das Verfahren ein exponentielles Wachstum  $\mathcal{O}(c^n)$  mit der Dimension des Optimierungsproblems [FGW02]. Trotz dieser Problematik hat das Simplex-Verfahren in der Praxis eine sehr gute Laufzeit und kann für den wiederholten Aufruf einer nur leicht veränderten Optimierung (anpassen von Parametern nach dem letzten Aufruf) einen sogenannten Warmstart nutzen. Dieser beschleunigt die Lösung ebenfalls deutlich [sim].

Die Suche nach noch besseren Verfahren, dessen Komplexität nur polynomial mit der Dimension anwächst, führte dann in den Jahren 1979 bis 1984 zur Entwicklung eines neuen Algorithmus, welcher auch für nichtlineare Probleme genutzt werden kann.

### 3.2.2 Innere-Punkte-Verfahren

Die Un- und Gleichheitsbedingungen wie auch die Kostenfunktionen welche für den MPC-Ansatz zum regeln des Rennautos benötigt werden sind nichtlinear. Zusätzlich gibt es wie im Kapitel 3.1 erwähnt, Beschränkungen die bei der Suche der Lösung eingehalten werden müssen. Das Innere-Punkte-Lösungsverfahren erfüllt diese Anforderung für lineare, quadratische und nichtlineare Optimierungsprobleme und wird im Folgenden kurz vorgestellt. Der Ansatz des Verfahrens ist es, sich nicht mehr wie im Simplex-Verfahren auf den Kanten zu bewegen, sondern immer im Inneren des zulässigen Lösungsbereiches. Diese Bewegung durch das Innere des Polytop ist in Abbildung 3.5 veranschaulicht.

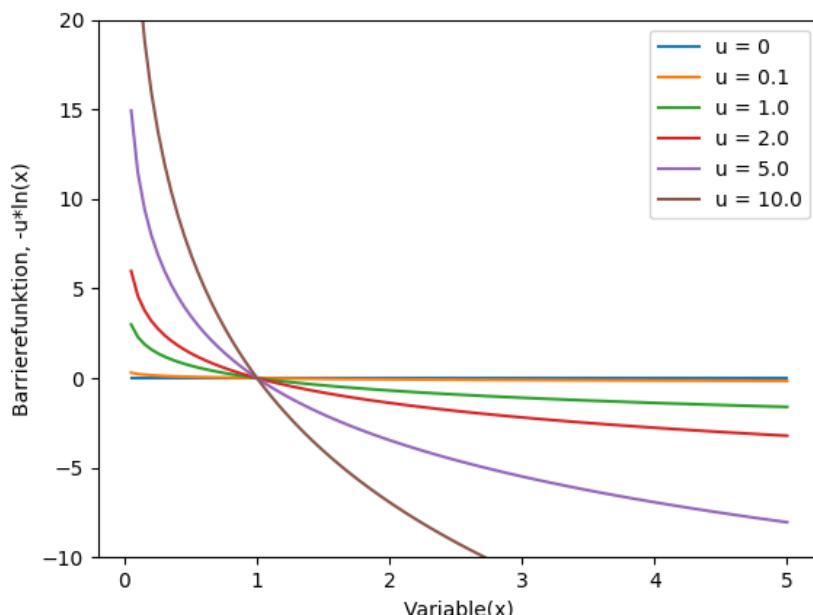


**Abbildung 3.5:** Beim Innere-Punkte-Verfahren bewegt sich der Optimierer durch das Innere des Polytop auf der Suche nach dem Minimum.

Um dieses Verfahren umzusetzen, wird die Positivitätsbedingungen  $x \geq 0$  der Standardform durch einen logarithmische Strafterm  $-\mu \ln x_i$  ersetzt und in die Kostenfunktion integriert. Der Faktor  $\mu$  wird genutzt, um die Gewichtung des Strafterms zu verändern. Die daraus resultierende Funktion wird als Barrierefunktion bezeichnet und ist definiert als

$$B(x, \mu) = c^T x - \mu \sum_i^n \ln x_i, \text{ mit } \mu > 0.$$

Das ursprüngliche Optimierungsproblem wird damit ersetzt durch  $\min\{B(x, \mu) | Ax \leq b\}$ . Der Strafterm verhindert, dass der Optimierer, wie beim Simplex-Verfahren, an den Grenzen der Un- und Gleichheitsbedingungen nach der Lösung sucht, sondern sich immer im Inneren des zulässigen Lösungsbereiches bewegt 3.5. Wird  $\mu$  sehr klein (tendiert gegen 0 ) entspricht die Lösung des Barriereproblems der gleichen wie beim ursprüngliches Optimierungsproblem. Diese Eigenschaft wird genutzt, um von einem großen  $\mu$  als Startpunkt iterativ  $B(x, \mu)$  zu optimieren und dann vor der nächsten Iteration  $\mu$  zu verkleinern. Der Zusammenhang aus Strafterm und  $\mu$  ist in der Abbildung 3.6 veranschaulicht.



**Abbildung 3.6:** Logarithmische Barrierefunktionen

Um in jedem der iterativen Schritte möglichst schnell zu einer Lösung zu kommen, bedient man sich dem Newton-Rapshon-Verfahren. Der Algorithmus benötigt die Ableitungsmatrix

der Barrierefunktion. Die Berechnung dieser wird durch eine automatische Ableitung realisiert.

### 3.2.3 Automatische Ableitung

Ableitungen sind eine Grundvoraussetzung für viele numerische Algorithmen. Die Genauigkeit der Berechnung und die Geschwindigkeit sind jedoch oftmals problematisch.

Ein möglicher Ansatz die Ableitung  $\Delta f(x) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$  der Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zu berechnen ist

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ mit } h \rightarrow 0.$$

Dieser Ansatz ist jedoch nicht nur sehr ineffizient  $\mathcal{O}(n)$ , sondern besitzt zudem noch Rundungsfehler [jul]. Eine andere Möglichkeit wäre die Ableitung manuell zu berechnen, was jedoch für komplexere Systeme sehr aufwendig und vor allem fehleranfällig ist. Eine bessere Lösung ist die automatische Ableitung (*automatic differentiation*). Dieses System kann die Ableitung bis auf die maximal mögliche Genauigkeit eines *float*-Datentyp berechnen. Zu der höheren Präzision kommt noch die deutlich bessere Laufzeit. Im Idealfall entspricht die Komplexität  $\mathcal{O}(1)$  [jul]. Um diese Vorteile nutzen zu können, benötigt es jedoch ein genaues Wissen über die abzuleitende Funktion  $f(x)$ . Realisiert wird dies durch den Zugriff auf den Sourcecode der Methode oder durch ein überladen der Operatoren. Das Verfahren ist abhängig von den Möglichkeiten der Programmiersprache und welcher Ansatz bei der Implementierung der automatischen Ableitung verfolgt wurde.

### Vorwärtsmodus

Ein Verfahren der Umsetzung ist der Vorwärtsmodus. Er basiert auf der Kettenregel  $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$ .

Um dies auszunutzen wird eine abzuleitende Funktion  $y = f(g(h(x)))$  in seine Bestandteile  $y = f(g(h(w_0))) = f(g(w_1)) = f(w_2) = w_3$  aufgetrennt und anschließend in die Kettenregel eingesetzt.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial w_2} \frac{\partial w_2}{\partial w_1} \frac{\partial w_1}{\partial x}.$$

Zum besseren Verständnis wird die Ableitung für folgende Funktion  $y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \sin(x_1)$  berechnet.

Dazu werden wie oben bereits beschrieben zuerst die Bestandteile substituiert:

$$y = w_1 w_2 + \sin(w_1)$$

$$y = w_3 + w_4$$

$$y = w_5$$

Danach muss der sogenannte *seed* errechnet werden. Er kodiert über welche Variable differenziert werden soll. Für  $x_1$  ist der *seed*  $\dot{w}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1$  und  $\dot{w}_2 = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0$  Im letzten Schritt werden nur noch von innen nach außen die Substitutionen ersetzt.

$$\dot{w}_3 = w_2 \dot{w}_1 + w_1 \dot{w}_2$$

$$\dot{w}_4 = \cos w_1 \cdot \dot{w}_1$$

$$\dot{w}_5 = \dot{w}_3 + \dot{w}_4$$

Dieses Verfahren kann im sogenannten Rückwärtsmodus auch von außen nach innen berechnet werden. Nachdem die Grundlagen zur Optimierung gelegt wurden, wird nun auf den Teil im Model Predictive Control eingegangen, welcher die Un- und Gleichheitsbedienungen definiert.

### 3.3 Fahrzeugmodelle

Wie der Name Model Predictive Control schon verdeutlicht, benötigt man eine Systembeschreibung des zu regelnden Modells. Diese wird genutzt, um zukünftige Zustände zu berechnen und bildet damit einen wichtigen Bestandteil des Verfahrens. Desto genauer die Beschreibung das reale System approximiert, desto besser ist die Vorhersage und damit auch die Regelung des Fahrzeugs. Im Folgenden wird zuerst ein kinematisches Fahrzeugmodell eingeführt und dann zu einem dynamischen Modell erweitert.

#### 3.3.1 Kinematisches Modell

Unter gewissen Einschränkungen kann ein kinematisches Modell die laterale und longitudinale Bewegung eines Fahrzeuges mathematisch beschreiben. In diesem sehr stark vereinfachten Modell werden keine wirkenden Kräfte berücksichtigt, sondern nur die geometrischen Beziehungen des Fahrzeugs genutzt, um die Bewegung zu berechnen.

Im ersten Schritt werden die jeweils an einer Achse verbundenen Räder zu einem einzigen zusammengefasst. Diese Vereinfachung, wird als Bicycle Modell bezeichnet und vereinfacht die Berechnungen [WQ01]. Obwohl auch für Hinterradlenkung möglich, wird im Folgenden nur die Vorderradlenkung betrachtet. Die Lenkwinkel, welche durch das Bicycle Modell berechnet werden, entsprechen nicht den Lenkwinkeln am echten Fahrzeug. Die kurveninneren und kurvenäußeren Räder bewegen sich auf zwei Kreisen mit unterschiedlichen Radien und damit auch verschiedenen Anstellwinkeln. Dies wird in Fahrzeugen durch die Ackermann Lenkung mechanisch umgesetzt [Raj11].

Die nichtlinearen, zeit kontinuierlichen Gleichungen basieren auf [Raj11, KPSB15] und beschreiben das kinematische Modell bezüglich eines Inertialsystems (siehe Abbildung 3.7),

$$\dot{x} = v \cos(\psi + \beta) \quad (3.3.1)$$

$$\dot{y} = v \sin(\psi + \beta) \quad (3.3.2)$$

$$\dot{\psi} = \frac{v}{l_r} \sin(\beta) \quad (3.3.3)$$

$$\dot{v} = a \quad (3.3.4)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{l_r}{l_f + l_r} \tan(\delta_f)\right) \quad (3.3.5)$$

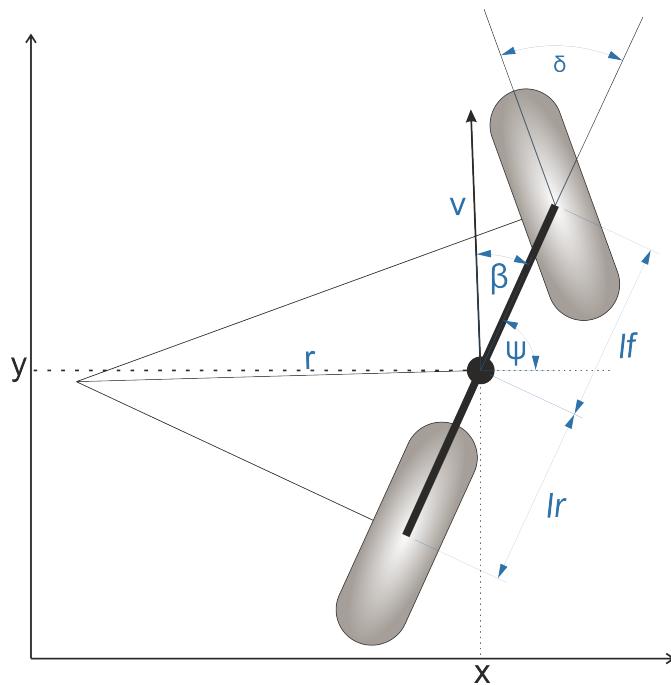


Abbildung 3.7: Kinematisches Modell:

in dem  $x$  und  $y$  die Koordinaten des Schwerpunktes im Inertialsystem darstellen.  $\varphi$  ist die Orientierung und  $v$  die Geschwindigkeit des Fahrzeugs.  $l_f$  und  $l_r$  sind die Abstände der vorderen ( $l_f$ ) und hinteren ( $l_r$ ) Achsen zum Schwerpunkt. Der Schwimmwinkel ( $\beta$ ), ist der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des Fahrzeugs im Schwerpunkt und der Fahrzeulgängsachse bei der Kurvenfahrt. Die Beschleunigung  $a$  bezieht sich ebenfalls auf den Schwerpunkt und zeigt immer in die Richtung des Geschwindigkeitsvektors. Die Parameter lassen sich in zwei Bereiche unterteilen:

- Steuerparameter  
 $a, \delta$
- Zustandsgrößen  
 $x, y, v, \psi$

Die Annahme eines kräftefreien Modells, bei dem das Vorderrad genau in die Richtung rollt, in die es zeigt, ist nur bis etwa 5 m/s plausibel [Raj11]. Danach müssen die Kräfte, welche die Reifen auf die Straße übertragen können mit betrachtet werden. Diese werden dann im dynamischen Modell genutzt, um eine genauere Vorhersage berechnen zu können.

Die für das kinematische Modell angenommenen Werte stammen vom Fahrzeug des High Octane Motorsports Verein (siehe 3.2). Die Beschleunigung  $a$  wurde für den besten *Acceleration Durchgang* in FSG-2017 mit der Zeit  $t = 4.5s$  und der Endgeschwindigkeit  $v = 32.78 \frac{m}{s^2}$  berechnet. Für

$$a = \frac{v}{t} \quad (3.3.6)$$

erhält man eine mittlere Beschleunigung von  $7.284 \frac{m}{s^2}$ .

Überprüft man die Werte mit der Formel zum Berechnen der zurück gelegten Entfernung

$$x = \frac{1}{2} * a * t^2 \quad (3.3.7)$$

liegt man mit  $73.75m$  nur zwei Prozent neben der genauen Streckenlänge von  $75m$ .

### Begrenzung des Kurvenradius

Da beim kinematischen Modell die Geschwindigkeit in Kurven keine Rolle spielt, kann das Fahrzeug mit jedem  $v$  den gleichen Kurvenradius durchfahren. Um auch in höheren Geschwindigkeiten eine akzeptable Regelung zu erhalten, wird eine Beschränkung eingefügt, welche die maximale Querbeschleunigung beschränkt. Der Maximalwert entspricht dem höchsten  $g$ -Wert den das Fahrzeug des High Octane Motorsports mit Aerodynamik in einer Kurve erreichen kann:  $a_{max} \sim 2.0g$ . Mit der Gleichung

$$|\beta| \leq \arctan\left(\frac{1}{2} \frac{\frac{l}{2} a_{max}}{v^2}\right) \quad (3.3.8)$$

wird dies über die Einschränkung des Schwimmwinkel (und damit gleichzeitig des Lenkwinkels) erreicht.

### 3.3.2 Reifenmodell

Da der Reifen der einzige Kontaktpunkt zwischen Fahrbahn und Fahrzeug ist, beeinflussen er das Fahrverhalten maßgeblich. Aufgabe des Reifens ist es, sämtliche Kräfte und Momente zu übertragen und eine optimale Straßenlage zu gewährleisten. Demzufolge ist der Reifen das Bauteil, welches die Fahrleistungen des Rennautos am stärksten beeinflusst.

Die Kräfte, welche ein Reifen auf die Straße übertragen kann, sind in longitudinal und lateral unterteilt. Sie hängen ab von der Radlast, die das Fahrzeug auf die Straße presst, dem Schlupf und dem Schräglauwinkel. Die Radlast  $F_z$  berechnet sich aus der Normalkraft und der Radlastverteilung und wird im folgenden als konstant angesehen. Der Schlupf tritt in longitudinaler Richtung auf und ist die Differenz aus Umlaufgeschwindigkeit und Bewegungsgeschwindigkeit des Fahrzeugs. Nur wenn ein Schlupf vorhanden ist, übertragen Reifen Kraft auf ihren Untergrund. Dies ist bei Beschleunigungsrennen gut zu beobachten wo die maximale Kraftübertragung im Bereich von 30 Prozent Schlupf liegt (leicht durchdrehende Reifen). Die Seitenführungskraft  $F_y$  wirkt bei einer Kurvenfahrt der Fliehkraft entgegen und hält das Fahrzeug auf der Spur solange ein Kräftegleichgewicht besteht. Für diese laterale Kraft muss der Schräglauwinkel, genauso wie beim Schlupf, größer null sein. Als Schräglauwinkel bezeichnet man den von der Radmittelebene  $\delta$  (Lenkwinkel) und der Bewegungsrichtung  $\theta_{vf}$  des Reifens eingeschlossenen Winkel (siehe Abbildung 3.8).

$$\alpha_f = \delta - \theta_{vf} \quad (3.3.9)$$

Der gleiche Zusammenhang gilt auch für das hintere Rad, welches jedoch in unserem Fall nicht gelenkt wird.

$$\alpha_r = \theta_{vr} \quad (3.3.10)$$

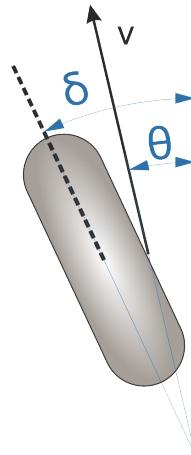


Abbildung 3.8: Schräglauwinkel

Für kleine Schräglauwinkel besteht ein linearer Zusammenhang aus lateraler Kraft und Winkel.

$$F_{yf} = C_\alpha \alpha_f \quad (3.3.11)$$

$$F_{yr} = C_\alpha \alpha_r \quad (3.3.12)$$

Am Schaubild 3.10 lässt sich dieser Bereich zwischen  $-1.5^\circ$  und  $1.5^\circ$  sehr gut erkennen. Für größere Schräglauwinkel kann kein linearer Verlauf mehr angenommen werden und es muss eine genauere Approximation des Kräfte gewählt werden. Hierfür wird die sogenannte *Magic Formula* [PB92] verwendet. Dabei handelt es sich um eine mathematische Gleichung die sehr gut Messkurven approximiert, welche auf Testständen gemessen werden. Es wurde 1993 von Pacejka und Bakker entwickelt und eignet sich sowohl für die Berechnung der longitudinalen, wie auch der lateralen Kräfte. Bei Eingabe des Schräglauwinkels  $\alpha$  erhält man die lateral auf die Straße wirkende Kraft  $F_y$ .

$$F_y = D \sin(C \arctan(B\alpha - E(\alpha - \arctan(B\alpha)))) \quad (3.3.13)$$

Die Gleichung hängt von den Faktoren C,B und E ab.

$$C = 1 + (1 - (\frac{2}{\pi} \arcsin(\frac{y}{D}))) \quad (3.3.14)$$

$$B = \frac{\tan(beta)}{C*D} \quad (3.3.15)$$

$$E = \frac{B*x_m - \tan(\frac{pi}{2C})}{B*x_m - \arctan(B*x_m)} \quad (3.3.16)$$

Diese werden abhängig von den folgenden Parametern berechnet.

- $D$

Die maximale Kraft welche der Reifen im höchsten Punkt übertragen kann.

- $beta$

Die Steigung im linearen Bereich.

- $xm$

Der Punkt in rad, an dem der die maximalen Kraft übertragen wird.

- $y_a$

Die maximale Kraft, gegen welche die Kurve für große Schräglauwinkel tendiert.

Diese ändern sich mit der Normalkraft, welche das Fahrzeug auf die Straße presst. Ist diese Konstant wie in unserem Fall, müssen die Werte nur ein mal berechnet werden und bleiben danach gleich. Sie unterscheiden sich jedoch für das vordere  $(.)_r$  und hintere Rad  $(.)_r$ . Werden in einem komplexeren Modell auch die aerodynamischen Abtriebskräfte und die Steigung der Straße berücksichtigt ändern sich  $D$ ,  $\beta$ ,  $x_m$  und  $y_a$  mit jeder Veränderung der Normalkraft, was die Neuberechnung von C,B und E zur Folge hat. Zur besseren Veranschaulichung ist in der Zeichnung ?? dargestellt, welchen Einfluss die einzelnen Werte auf die Kurve der Reifenkräfte haben.

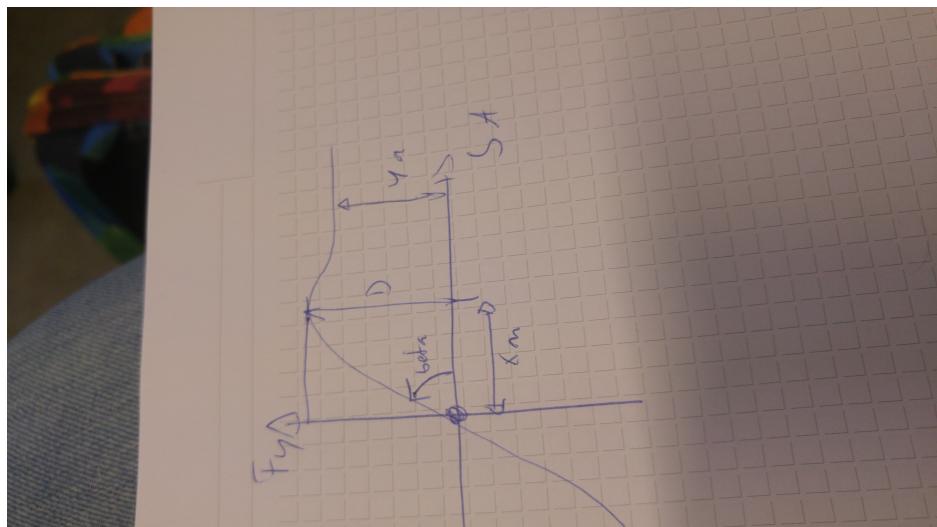


Abbildung 3.9: Parameter im Reifenmodell(Platzhalter)

Zusätzlich zu dem ursprünglichen Reifenmodell gibt es zwei Vereinfachungen, welche jeweils weniger Rechenaufwand erzeugen, dafür jedoch in ihrer Genauigkeit eingeschränkt sind. Die Modelle basieren weiterhin auf den oben beschriebenen Parametern B,C und D. Die Gleichungen sind

$$F_y = D \sin(C \arctan(Bx)) \quad (3.3.17)$$

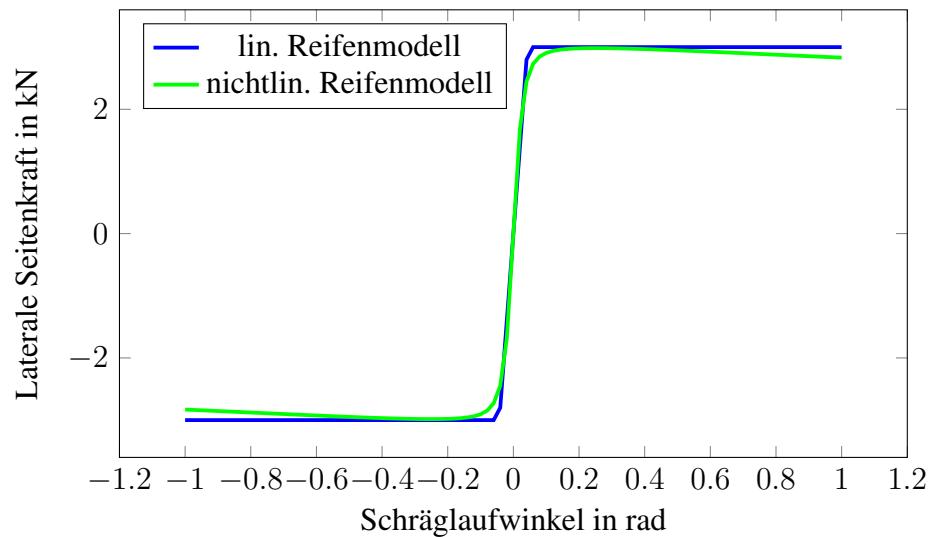
welche aus der Arbeit [AAM] entnommen wurde und eine lineare Version

$$F_y = C * x \quad (3.3.18)$$

welche mit  $|F_y| \leq F_{max}$  die Maximalkraft beschränkt. Nicht weiter spezifiziert, wird im Folgenden davon ausgegangen, dass das genauste Modell Verwendung findet. Die Parameter, welche für die *Magic Formula* benötigt werden, wurden vom High Octane Motorsports e.V. zur Verfügung gestellt.

Parameter	Wert	Einheit
$D_f$	2984	N
$D_r$	3274	N
$x_{mf}$	0.25	rad
$x_{mr}$	0.37	rad
$y_{af}$	2952	N
$y_{ar}$	3270	N
$\beta_{af}$	$\frac{\pi}{1.9}$	rad
$\beta_{ar}$	$\frac{\pi}{1.9}$	rad

**Tabelle 3.1:** Magic Formula Parameter



**Abbildung 3.10:** Reifenmodell

### Kammscher Kreis

Ähnlich wie bei  $F_y$  wird auch die Kraft welche das Fahrzeug in Längsrichtung beschleunigt  $F_x$  durch den Schlupf berechnet. Dieser hängt direkt von der Geschwindigkeit und Raddrehzahl ab. Da für die Bestimmung dieser jedoch eine Motorsimulation vonnöten wäre, wird  $F_x$  direkt aus der Motorleistung, Reibung und Luftwiderstand berechnet (siehe Abschnitt 3.3.3) und durch  $F_{max}$  begrenzt.  $F_{max}$  entspricht der maximalen Kraft, die der Reifen übertragen kann.

$$F_x \leq F_{max} \quad (3.3.19)$$

Der Zusammenhang zwischen lateraler und longitudinaler Kraft wird über den Kammschen Kreis modelliert (siehe Schaubild 3.11). Dieser schränkt die wirkenden Kräfte so ein, dass die Hypotenuse aus  $F_x$  und  $F_y$  sich maximal auf einem Einheitskreis bewegen kann. Der Radius entspricht der maximalen Kraft, welche die Reifen übertragen können ( $F_{max}$ ).

$$F \leq F_{max} \quad (3.3.20)$$

$$F_{ll} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (3.3.21)$$

$$(3.3.22)$$

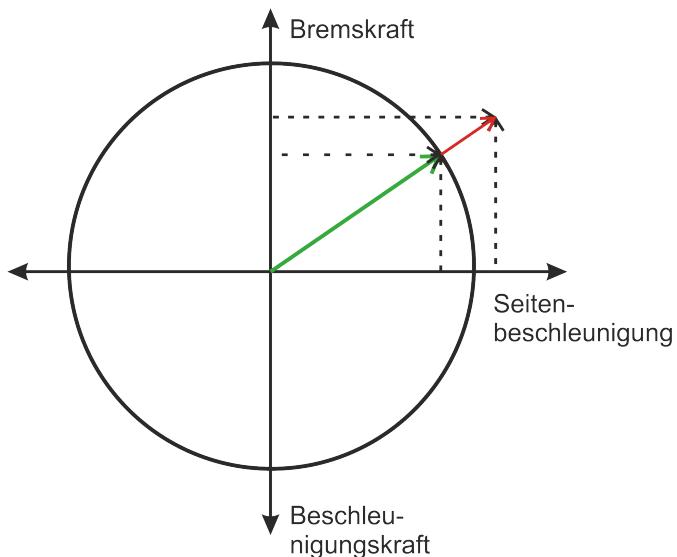
Falls die Kraft  $F_{ll}$  größer als  $F_{max}$  ist, wird das Verhältnis der Kräfte berechnet und auf  $F_{max}$  herunterskaliert.

$$\alpha = \arctan(F_x, F_y) \quad (3.3.23)$$

$$F_x = F_{max} \sin(\alpha) \quad (3.3.24)$$

$$F_y = F_{max} \cos(\alpha) \quad (3.3.25)$$

$$(3.3.26)$$



**Abbildung 3.11:** Kammscher Kreis: Zusammenhang von longitudinaler, lateraler und maximaler Reifenkraft

Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass bei einem gleichen Anteil an longitudinaler und lateraler Kraft die Reifen das größte Moment auf die Straße übertragen können. Dieser Punkt wird von Rennfahrern versucht in Kurven zu treffen, um das gesamte Potenzial der Reifen auszunutzen.

Mit dem Wissen wie die longitudinalen und lateralen Kräfte berechnet werden, kann nun ein genaueres Systemmodell genutzt werden.

### 3.3.3 Dynamisches Fahrzeugmodell

Die Basis ist, wie auch schon beim kinematischen Modell, das bicycle model. Es wird nun um die durch das zweite newtonsche Gesetz entstehenden Kräfte entlang der  $y$ -Achse erweitert.

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr} \quad (3.3.27)$$

Wobei  $a_y$  aus zwei Anteilen besteht, der Querbeschleunigung  $\ddot{y}$  und der Zentripetalkraft  $\dot{x}\dot{\psi}$ . Die Kräfte  $F_{yf}$  und  $F_{yr}$  greifen jeweils am vorderen  $(\cdot)_f$  und hinteren  $(\cdot)_r$  Rad (siehe Schaubild 3.12).

Unter Einbezug des Trägheitsmoments  $I_z$  des Fahrzeugs, kann das Drehmoment um die  $z$ -Achse betrachtet werden.

$$I_z\ddot{\psi} = l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \quad (3.3.28)$$

Als Ergebnis lassen sich die Gleichungen für Longitudinal-, Lateral- und Drehbewegung aufstellen.

$$m\ddot{x} = m\dot{y}\dot{\psi} + F_x \quad (3.3.29)$$

$$m\ddot{y} = -m\dot{x}\dot{\psi} + F_y \quad (3.3.30)$$

$$I(\ddot{\psi}) = l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \quad (3.3.31)$$

Die Kräfte  $F_x$  und  $F_y$  wirken auf den Schwerpunkt des Fahrzeugs und setzen sich aus den Einzelkomponenten der Radkräfte zusammen.

$$F_x = F_{xf} + F_{xr} \quad (3.3.32)$$

$$F_y = F_{yf} + F_{yr} \quad (3.3.33)$$

Diese hängen ab von den lateralen  $(.)_C$  und longitudinalen  $(.)_l$  Radkräften und dem Lenkwinkel. Da das Vorderrad nicht angetrieben wird, besitzt es keinen longitudinalen Anteil.

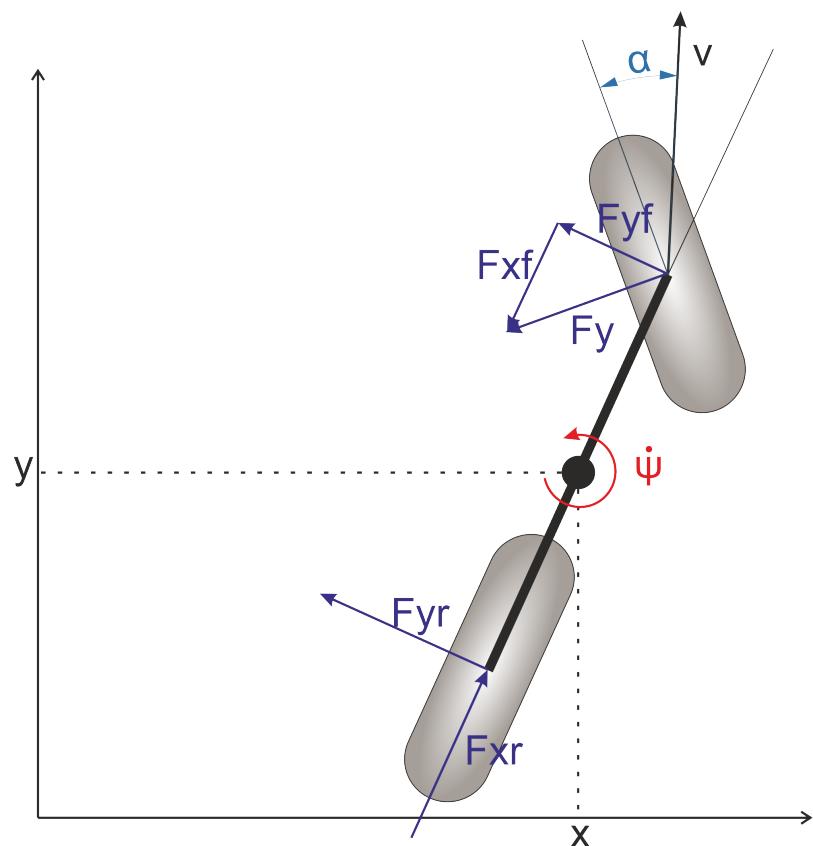


Abbildung 3.12: Dynamic Vehicle Model

$$F_{xf} = -2F_{Cf} \sin(\delta_f) \quad (3.3.34)$$

$$F_{yf} = 2F_{Cf} \cos(\delta_f) \quad (3.3.35)$$

$$F_{xr} = F_{lr} \quad (3.3.36)$$

$$F_{yr} = 2F_{Cr} \quad (3.3.37)$$

Es ist zu beachten, dass das Fahrzeug in der Realität an jeder Achse zwei Reifen besitzt und daher die Kräfte verdoppelt werden müssen.

Die Kräfte  $F_{Cf}$  und  $F_{Cr}$  werden durch die *magic formula* wie im letzten Abschnitt 3.3.2 berechnet. Die dafür benötigten Schräglaufwinkel werden durch folgende Formeln bestimmt:

$$\alpha_f = \delta_f - \arctan\left(\frac{\dot{y} + l_f \dot{\psi}}{\dot{x}}\right) \quad (3.3.38)$$

$$\alpha_r = -\arctan\left(\frac{\dot{y} - l_r \dot{\psi}}{\dot{x}}\right) \quad (3.3.39)$$

## Longitudinale Kräfte

Da keine Simulation des Motors genutzt wird, müssen die Kräfte  $F_{lr}$  welche die Reifen longitudinal auf die Straße bringen anders als über den Schlupf berechnet werden. Dies wird realisiert über die Motorleistung und  $F_{max}$ .

$$F_{lr_{acc}} = \frac{P_{engine}}{|\dot{x}|} \quad (3.3.40)$$

$$F_{lr_{acc}} \leq 2F_{max} \quad (3.3.41)$$

$$F_{lr_{dec}} = -2F_{max} * break \quad (3.3.42)$$

Die Motorleistung berechnet sich aus der maximalen Motorleistung und der Gaspedalstellung  $tp$ .

$$P_{engine} = P_{engine_{max}} * tp \quad (3.3.43)$$

Die Berechnung der Reifenkräfte ist für Beschleunigung und Bremsvorgang unterschiedlich.

Beschleunigt das Fahrzeug, wirkt nicht nur die Rollreibung der longitudinalen Kraft des Motors entgegen, sondern auch der Luftwiderstand. Es wird von einem Rennkurs ausgegangen der keine Steigung besitzt.

$$F_{reib} = m\mu g \quad (3.3.44)$$

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_d A_f \dot{x}^2 \quad (3.3.45)$$

Die resultierende longitudinale Kraft

$$F_{lr} = F_{lr} - F_{reib} - F_{aero} \quad (3.3.46)$$

wird mit den lateralen Kraft im Kammschen-Kreis verrechnet und in der finalen Bewegungsgleichung verwendet.

$$\dot{X} = \dot{x} \cos(\psi) - \dot{y} \sin(\psi) \quad (3.3.47)$$

$$\dot{Y} = \dot{x} \sin(\psi) + \dot{y} \cos(\psi) \quad (3.3.48)$$

$$m\ddot{x} = m\dot{y}\dot{\psi} + F_{xf} + F_{xr} \quad (3.3.49)$$

$$m\ddot{y} = -m\dot{x}\dot{\psi} + F_{yf} + F_{yr} \quad (3.3.50)$$

$$I\ddot{\psi} = l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \quad (3.3.51)$$

Das Gleichungssystem kann auch in diskreter Form aufgestellt werden.

Formelzeichen	Wert	Einheit
$l_f$	1.09	m
$l_r$	0.9	m
$l_b$	1.99	m
$r$	0.2	m
$m$	163	kg
$I$	1700	$\text{kgm}^2$
$A_f$	1.5	$\text{m}^2$
$P_{engine}$	40,5	kW
$C_d$	1.5	-
$\rho$	1.225	kg / $\text{m}^3$
$F_{max}$	3	kN

**Tabelle 3.2:** Vehicle Parameter

$$X_{k+1} = X_k + \Delta t(\dot{x}_k \cos(\Psi_k) - \dot{y}_k \sin(\Psi_k)) \quad (3.3.52)$$

$$Y_{k+1} = Y_k + \Delta t(\dot{x}_k \sin(\Psi_k) - \dot{y}_k \cos(\Psi_k)) \quad (3.3.53)$$

$$\Psi_{k+1} = \Psi_k + \Delta t \dot{\psi}_k \quad (3.3.54)$$

$$\dot{x}_{k+1} = \dot{x}_k + \Delta t \left( \frac{F_{xf_k} + F_{xr_k} - F_a}{m} + \dot{y}_k \dot{\psi}_k \right) \quad (3.3.55)$$

$$\dot{y}_{k+1} = \dot{y}_k + \Delta t \left( \frac{F_{yf_k} + F_{yr_k}}{m} - \dot{x}_k \dot{\psi}_k \right) \quad (3.3.56)$$

$$\dot{\psi}_{k+1} = \dot{\psi}_k + \Delta t \frac{l_f F_{yf} - l_r F_{yr}}{I} \quad (3.3.57)$$

$$(3.3.58)$$

Im dynamische Fahrzeugmodell ändert sich damit auch der Zustandsvektor:

$X, Y, x_d, y_d, \Psi, \dot{\psi}$

Der Steuervektor bleibt gleich.

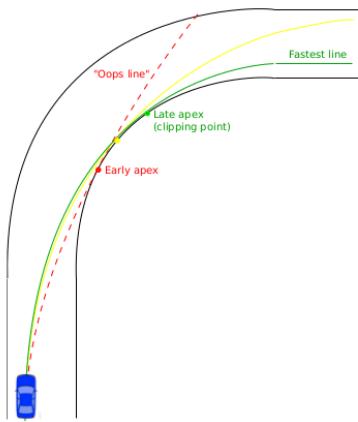
Die zur Berechnung verwendeten Fahrzeugparameter wurden für das zum Verfassen dieser Arbeit aktuellstem Fahrzeug erfasst. Die Informationen hierfür sind aus dem CAD-Modell oder im Feld erfassten Testdaten entnommen worden (siehe Anhang).

---

## 4 MPC zur Trajektorienplanung und Regelung

---

Ein schneller Rennfahrer zeichnet sich dadurch aus, dass er genau abschätzen kann wie viel Kräfte die Reifen des Fahrzeugs auf die Straße übertragen können. Die Kunst liegt also darin, möglichst in jeder Fahrsituation das gesamte Potential voll auszunutzen. Zudem kann er sich dynamisch an Änderungen der Streckeverhältnisse anpassen und versucht immer die Idealtrajektorie zu treffen. Die Definition dieser ist, möglichst viel Streckenlänge in der kleinstmöglichen Zeit zurückzulegen. Für eine Gerade oder eine einzige Kurve ist dies, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, leicht zu berechnen. Der so genannte Scheitelpunkt markiert hierbei den Punkt des geringste Radius und der kleinsten Geschwindigkeit. An diesem Punkt muss das Fahrzeug im besten Fall genau die Seitenbegrenzung tangieren. Bei komplexeren Streckengefügen kann es jedoch von Vorteil sein, eine Kurve eventuell nicht ideal auszufahren um im späteren Verlauf einen größeren Geschwindigkeitsgewinn in einer anderen Kurve einfahren zu können.



**Abbildung 4.1:** Ideale Trajektorie für eine 90 Grad Kurve (Dummy Bild)

Um all dies mit dem MPC-Algorithmus nachzustellen wird im Folgenden auf die einzelnen Schritte bei der Entwicklung eingegangen.

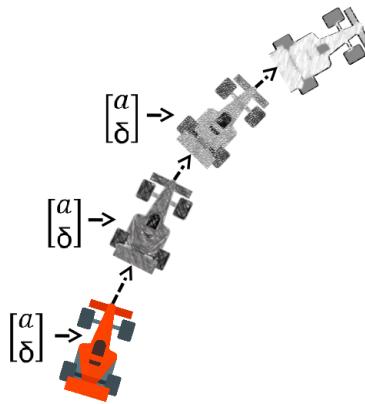
Zu Beginn hätte die Möglichkeit bestanden die Regelung der lateralen und longitudinalen Führung des Fahrzeuges zu trennen. Vorteile hierfür wären gewesen:

- Einfachere Anpassung der Parameter für das reale Fahrzeug.
- Robustheit. Der Ausfall eines Reglers würde zumindest noch eine eingeschränkte Kontrolle ermöglichen.
- Zwei einfacher zu berechnende Probleme. Da die Berechnungszeit nicht linear mit der Komplexität steigt, wären hier möglicherweise deutliche Geschwindigkeitssteigerungen möglich.
- Ein weniger komplexer MPC-Ansatz ist einfacher zu testen und entwickeln.

Die Vorteile werden aber mit dem Nachteil begleitet, dass bei einem Rennauto die longitudinale und laterale Bewegung des Fahrzeugs ganz signifikant miteinander verbunden ist. Durch die Trennung kann keine optimale Lösung mehr gefunden werden. Zudem ist die Integration komplexer, da beide Regler gleichzeitig laufen und ihre Berechnungen miteinander ausgetauscht werden müssen. Aufgrund des Anwendungsszenarios wurde sich gegen den zweigeteilten Ansatz entschieden.

Der erste Schritt ist das Erstellen des Vektors an Einflussparametern  $\vec{X}$ . Er setzt sich immer aus der Kombination von Systemzustand und Steuerparametern zusammen  $\vec{x} = [x, y, v, \psi, a, \delta]^T$  (siehe 3.3.1). Dieser Teilvektor wird dann für die Anzahl der gewünschten Prädiktionsschritte  $N$  mal in  $\vec{X}$  wiederholt. Da zusätzlich zu den Prädiktionsschritten auch der aktuelle Fahrzeugzustand benötigt wird, besteht der Vektor also aus  $N + 1$  Teilvektoren  $\vec{x}$ . In der Abbildung 4.2 ist grafisch dargestellt, wie man sich die Prädiktion für  $N = 3$  vorstellen kann. Zwischen jedem der einzelnen Schritte wird ein  $\Delta t$  angenommen, welches der Abtastrate der Positionsschätzung entspricht also  $\frac{1}{20}s$ . Obwohl immer nur der erste Steuerbefehl des berechneten Steuervektors im realen System angewandt wird, ist der Vektor trotzdem von nutzen. Sollte die Optimierung unterbrochen durch andere Prozesse, einmal nicht schnell genug sein, können die Steuerbefehle aus der vorherigen Optimierung verwendet werden. Dies geht solange die Zeitverzögerung kleiner als die gesamte Zukunftsprädiktion ist. Obwohl man diese Werte zum Regeln nutzen kann, nimmt aufgrund von Modellfehlern die Güte der berechneten Werte mit  $n$  ab. Man ist also bestrebt den Algorithmus mit der gleichen Rate wie die Positionsschätzung laufen zu lassen.

Nachdem der Vektor mit den Einflussparametern definiert ist, werden im nächsten Schritt alle Beschränkungen sukzessive ergänzt.



**Abbildung 4.2:** Grafische Visualisierung der Prädiktion abhängig von den Steuerparametern für drei Schritte in die Zukunft

## 4.1 Fahrzeugmodell

Zu Beginn haben die Teilvektoren  $\vec{x}$  keinen Zusammenhang untereinander. Da jedoch die einzelnen Prädiktionsschritte voneinander über den Fahrzeugzustand, Steuerparameter und das Fahrzeugmodell zusammenhängen, werden im zweiten Schritt die Beschränkungen hierfür definiert und als Ungleichungsbedingungen in das zu Optimierende nichtlineare Problem integriert. Dazu wird die diskretisierte Form des Systemmodells 3.3.1 genutzt, um immer zwei aufeinander folgende Schritte miteinander zu verknüpfen. Die entstehenden Un- und Gleichheitsbedingungen sind im Anhang unter ??ufgeführt.

Zusätzlich zu der Systembeschreibung fehlen noch Einschränkungen für den Optimierer, welche die physikalischen Eigenschaften des Rennautos abbilden. Dazu zählen die maximale Geschwindigkeit, Beschleunigung und Lenkwinkel. Diese Beschränkungen werden auch für jeden der Teilvektoren hinterlegt. Zusammen mit dem Fahrzeugmodell benötigt das MPC noch eine Kostenfunktion damit der Optimierer überhaupt einen Anlass hat das Rennauto zu beschleunigen.

## 4.2 Kostenfunktionen

Erst eine geeignete Kostenfunktion führt zu der Planung einer Trajektorie die das Rennauto um den Kurs führt. Es wurden drei verschiedene Kostenfunktionen implementiert:

### Maximalgeschwindigkeit

In dieser Funktion wird die Summe aller Geschwindigkeitswerte der einzelnen Prädiktionsschritte addiert und als Kosten versucht zu maximieren.

$$f(\vec{X}) = \sum_1^{N+1} v_i$$

Die Berechnung startet nicht beim 0ten Schritt, da dieser dem aktuellen Zustand entspricht und der Optimierer keinen Einfluss mehr auf diesen hat. Die Idee hinter dieser Funktion ist, dass sie einfach zu berechnen ist und im Vorhersagehorizont eine möglichst schnelle Trajektorie entsteht.

### Zielpunkt Distanzminimierung

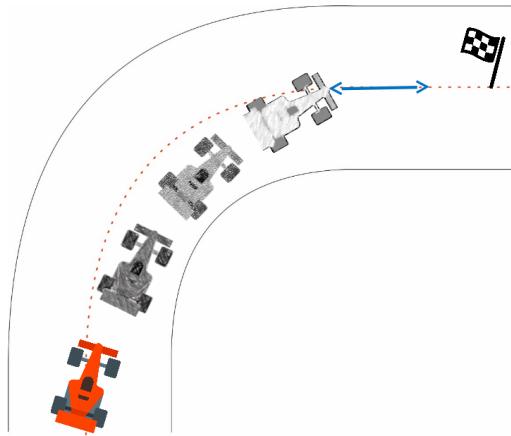
Für diese Kostenfunktion wird vor den letzten Prädiktionsschritt ein virtuelles Ziel definiert und die Distanz des  $N + 1$  Schrittes zu diesem Ziel minimiert. Der Optimierer wird also versuchen Steuerparameter zu finden die ihn möglichst schnell auf dieses Ziel zu fahren lassen. Das virtuelle Ziel wird nach jedem Update wieder so neu positioniert, dass das Rennauto den Punkt niemals erreichen kann und damit konstant schnell weiter fährt. Die Distanz, in der das virtuelle Ziel platziert wird, wird durch die maximale Geschwindigkeit und die Anzahl der Prädiktionsschritte berechnet.

$$d_{goal} = \sum_0^N v_{max} * \Delta t \quad (4.2.1)$$

Eine bildliche Darstellung der Kostenfunktion ist in Abbildung 4.5 zu sehen.

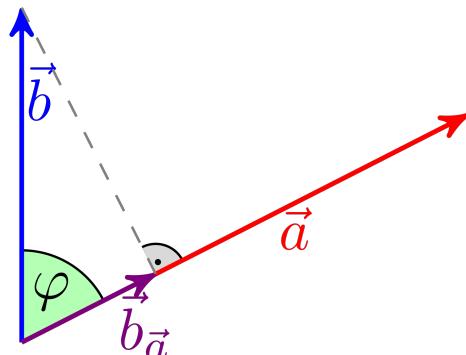
### Maximieren der Streckendistanz

Um eine Kostenfunktion zu finden welche einer Idealtrajektorie am nächsten kommt, muss überlegt werden wie man diese Messbar macht. Die bestmögliche Trajektorie ist diejenige welche für ein  $\Delta t$  die zurückgelegte Strecke nicht bezogen auf das Fahrzeug sondern auf den Rennkurs maximiert. Dies lässt sich durch eine Umformung zu einer Minimierung der nach dem Zeitschritt übrig bleibenden Reststrecke umformen. Mit der Vereinfachung, dass das Ziel und damit die Reststrecke in einer Distanz vorm dem letzten Prädiktionsschritt sich befindet welchen das Fahrzeug nicht erreichen kann. Der Unterschied zur Kostenfunktion welche die Distanz minimiert ist, dass sich die Differenz nicht auf einen Punkt sondern auf



**Abbildung 4.3:** Zielpunkt Distanzminimierung: Das virtuelle Ziel wird immer weit genug vor dem Fahrzeug her geführt, so dass es nie erreicht werden kann.

eine Gerade senkrecht zur Rennkursmitte bezieht. Realisiert wird dies durch eine *vector rejection*  $d = |a - \frac{ab}{bb}b|$ . Dies ist in der Abbildung 4.4 bildlich veranschaulicht.

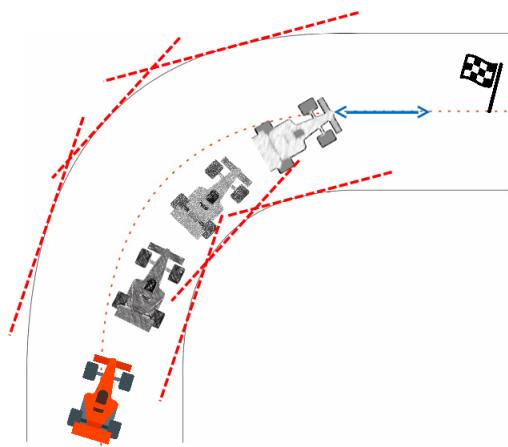


**Abbildung 4.4:** Maximieren der Streckendistanz (Dummy)

### 4.3 Strecken-, und Positionsbeschränkung

Die Kostenfunktionen führen dazu, dass der Optimierer die Steuerparameter so anpasst, dass die Kosten minimal werden. Dies würde auf einem Rennkurs zum Abkürzen bei Kurven führen, da in diesem Fall die Kosten geringer werden. Um dies zu verhindern wurde eine zusätzliche Streckenbeschränkung eingeführt. Diese basiert auf zwei Tangenten die für jedes Prädiktionsschritt an die Fahrbahn Außen-, und Innenseite projiziert werden.

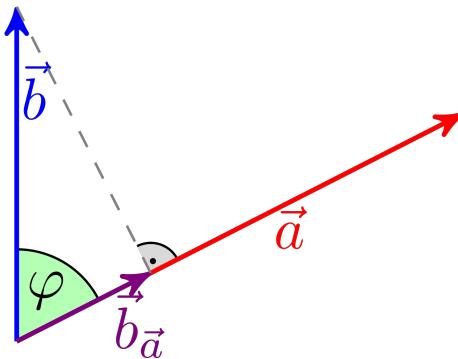
So lange sich das Rennauto innerhalb dieser Tangenten bewegt ist die Beschränkung erfüllt. Während des Optimierungsvorgangs wird die Position der Tangenten nicht verändert, sondern vor der Optimierung fix gesetzt. Um für den Prädiktionsschritt  $n$  den passenden Streckenabschnitt zu suchen, für den die Beschränkung ausgelegt wird, kann auf die Ergebnisse der vorausgehenden Optimierung zurückgegriffen werden. Die Position des  $n+1$ -Schritt wird gewählt und als Ausgangssituation gewählt. Für den letzten Schritt  $N$  ist dies nicht möglich, hier wird mithilfe der Geschwindigkeit und Orientierung ein virtueller Punkt projiziert.



**Abbildung 4.5:** Tangentiale Begrenzung hält das Fahrzeug auf der Fahrspur

Dieses Verfahren funktioniert nur, da die Beschleunigung des Rennautos physikalischen Grenzen unterliegt und sich daher immer in einem bestimmten Bereich um den Punkt herum bewegt, welcher bei gleichbleibender Geschwindigkeit  $\Delta t * v$  Meter entfernt von seinem Vorgängerzustand liegt. Wenn sich dieser Punkt in einer Kurve direkt an der Streckenmarkierung befindet, könnte das Fahrzeug sich trotzdem, trotz erfüllen der Tangentialbeschränkung, vom Kurs herunter bewegen. Dies wird dadurch verhindert, dass der nächste Prädiktionsschritt in diesem Fall seine Beschränkung nicht mehr erfüllen würde. Mathematisch lassen sich die Tangenten durch eine Vektorprojektion  $d = \frac{a \cdot b}{|b|}$  realisieren. Dabei  $a$  entspricht dem Vektor vom Mittelpunkt der Strecke zum Massenschwerpunkt des Rennautos und  $b$  dem Vektor vom Mittelpunkt zum Rand des Rennkurses.

Für diese Beschränkung können sich die Räder des Fahrzeuges über den Rand hinaus bewegen. Soll dies verhindert werden, muss diese Beschränkung auf jedes der einzelnen Räder erweitert werden.



**Abbildung 4.6:** Vektor Projektion zum berechnen der tangentialen Beschränkung (platzhalter für richtiges Bild)

Im letzten Schritt, bevor der MPC-Algorithmus funktionsbereit ist, muss der Fahrzeugzustand des aktuellen Zeitschritts  $t_0$  als Beschränkung verankert werden. Dies ist nötig um zu verhindern, dass der Optimierer einfach die  $x$ -, und  $y$ -Position auf einen Punkt legt, welcher die Kostenfunktion ideal minimiert.

### Suchbereichsbeschränkung

Während dem Testen der Kostenfunktion zum Maximieren der Geschwindigkeit ist das Phänomen aufgetreten, dass der Optimierer augenscheinlich, unmögliche Lösungen gefunden hat bei denen sich das Rennauto links aus einer Rechtskurve und andersherum, herausbewegt. Dies passiert jedoch nur in Kurven die mehr als  $90^\circ$  aufweisen. Der Grund hierfür liegt in den tangentialen Beschränkungen und dass sie immer nur am Anfang des MPC-Zyklus aktualisiert werden. Werden die Tangenten wie in Abbildung 4.7 sehr lang eingezeichnet, ist ersichtlich, dass eine zweite mögliche Trajektorie entstehen kann welche eine höhere Geschwindigkeit ermöglicht. Bei der Berechnung der tangentialen Beschränkung für den nächsten MPC-Durchlauf liegen jetzt jedoch alle Tangen nahezu auf einem Punkt und verhindern daher das Ausscheren des Rennautos. Die daher entstehende neue optimale Trajektorie entspricht wieder nahezu der ursprünglichen. Es entsteht also ein 3er Zyklus, welcher im schlechtesten Fall solange durchlaufen wird, bis das Fahrzeug eine Tangente trifft und die Optimierung beendet wird da keine weitere mögliche Lösung gefunden werden kann.

Um dieses Verhalten zu verhindern, wird für diese Kostenfunktion eine zusätzliche

Suchbereichsbeschränkung eingeführt. Diese legt um die Prädiktionsschritte der letzten Optimierung einen Kreis, welcher den Suchbereich so einschränkt, dass keine neue Trajektorie entstehen kann. Es ist darauf zu achten, dass das Fahrzeug trotzdem in den Grenzen seines Fahrzeugmodells keine Beschränkung erfährt.

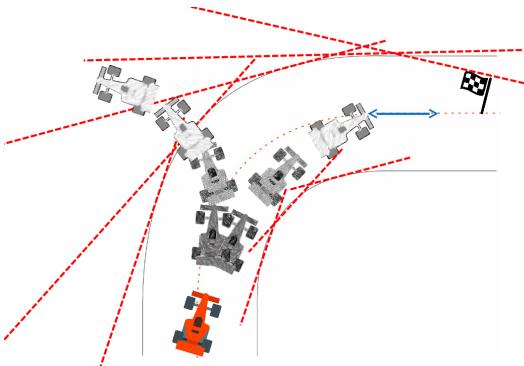


Abbildung 4.7: Fehlerhaftes Verhalten in Spitzkurven

### Elastische Distanzminimierung

Der Nachteil beider oben aufgeführten Kostenfunktionen ist, dass sie keinen Spielraum beim Erfüllen der Streckenbeschränkung haben. In der Simulationsumgebung kann, wenn sowohl das im Simulator wie auch im MPC hinterlegte Fahrzeugmodell exakt gleich ist, das virtuelle Rennauto bis an die Streckenbegrenzung heranfahren, ohne dass die Optimierung unlösbar wird. In der Realität würde eine solche Kostenfunktion das Fahrzeug jedoch zu nah an die Pylonen heranführen. Bei nur dem kleinsten Regelfehler, Rutschen, Abweichungen vom Fahrzeugmodell etc. würde sich der initiale Fahrzeugzustand  $\vec{x}_0$  bereits außerhalb der Beschränkungen befinden und damit keine Lösung mehr für das Optimierungsproblem möglich sein. Um dieses Problem zu umgehen, wird eine neue Art der Kostenfunktion eingeführt, welche die Ungleichheitsbedingung der Streckenbegrenzung ersetzt. Dafür wird eine der oberen Funktionen durch einen Kostenanteil erweitert, der wächst, sobald sich das Fahrzeug vom Mittelpunkt der Fahrbahn nach außen hin bewegt. Das Verhältnis der beiden Kostenfunktionen wird über die Gewichtungsvariablen  $a$  und  $b$  gesteuert.

$$f(\vec{x}) = a(\sum_1^{N+1} v_i) + b(\sum_1^{N+1} g(h(\vec{x}_i)))$$

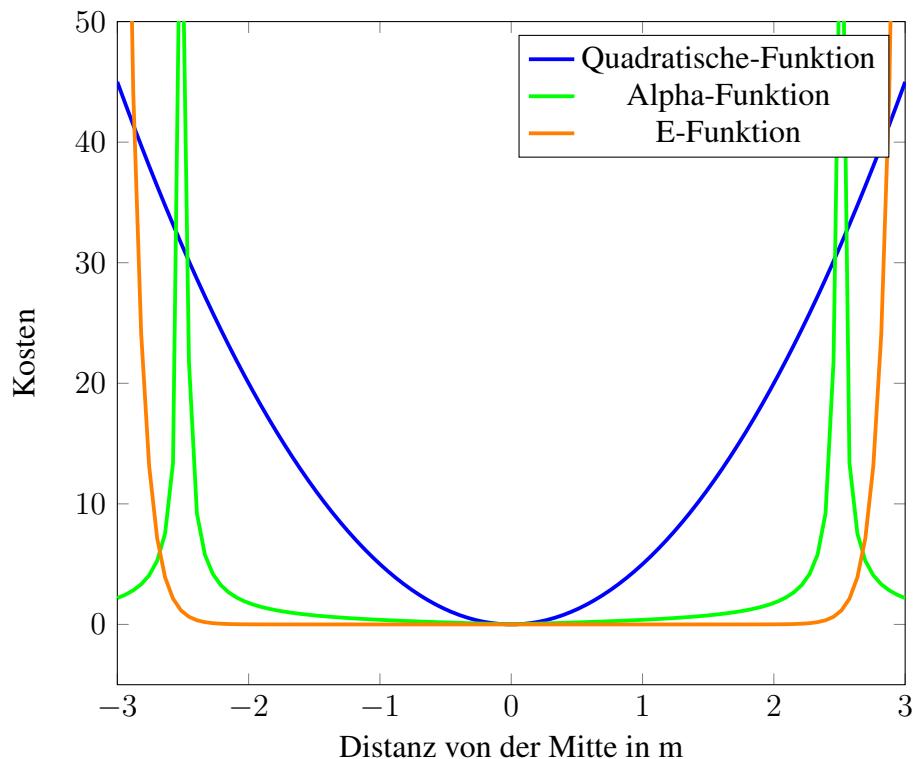
Die Funktion  $g(d)$  dient als Platzhalter für verschiedene Gewichtungsfunktionen. Die Funktion  $h(\vec{x}_i)$  berechnet die Distanz  $d$  vom Mittelpunkt der Strecke genauso wie bei den tangentialen Beschränkungen in Abschnitt 4.3. Mögliche Funktionen sind:

$$g(d) = \alpha d^2 \quad (4.3.1)$$

$$g(d) = e^{\alpha(k_1+d)} + e^{-\alpha(k_2+d)} \quad (4.3.2)$$

$$g(d) = \left| \frac{\alpha}{k_1-d} + \frac{\alpha}{k_2-d} \right| \quad (4.3.3)$$

Die Parameter  $\alpha$ ,  $k_1$  und  $k_2$  dienen zum variierten der Scheitelpunkte und Steigung. Mögliche Graphen der Gleichungen sind zu Veranschaulichung in Abbildung 4.8 dargestellt.



**Abbildung 4.8:** Verschiedene Distanzmaße um das Verhalten der Trajektorienplanung zu beeinflussen.

Die Idee hinter den Funktionen 4.3.2 und 4.3.3 ist, dass das Rennauto sich uneingeschränkt auf der ganzen Breite der Strecke bewegen kann, ohne dass die Distanzfunktion eine größere Rolle spielt. Erst beim Erreichen des Fahrbahnrandes werden die Kosten sehr schnell extrem groß. Idealerweise stellen also diese Kostenfunktionen die tangentialen Begrenzungen ideal nach. Die Funktionen welche quadratisch oder linear wachsen, sollen

ebenfalls betrachtet werden um zu untersuchen ob mit ihnen eine erfolgreiche Regelung möglich wäre, bei gesenktem Rechenaufwand.

## 4.4 Programmiersprachen

Gerade noch nicht ganz klar wo das Kapitel genau hin soll ....

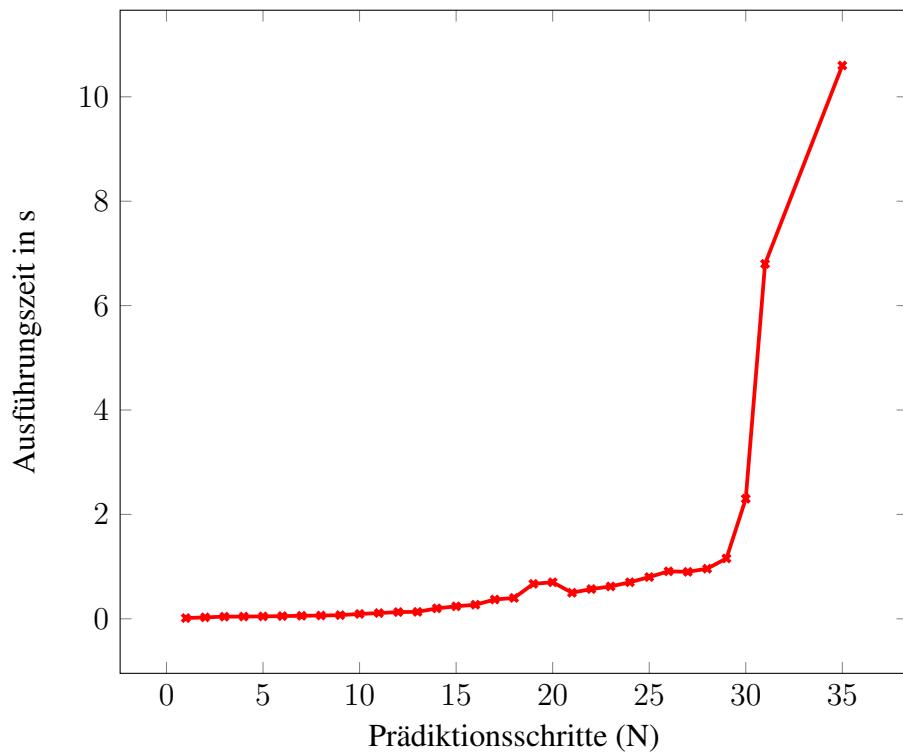
### 4.4.1 Python

Zu Beginn der Arbeit wurde zuerst die Programmiersprache Python verwendet um den MPC-Ansatz zu programmieren. Als Optimierer wurde ein *Sequential Least SQuarez Programming (SLSQP)*-Algorithmus verwendet. Dieser ist direkt in die SciPy-Bibliothek integriert und unterstützt Eingangs-, Ausgangs- und Zustandsbeschränkungen, ohne die es nicht möglich ist den MPC-Algorithmus für die Fahrzeugregelung auszulegen. So lange die Anzahl der Prädiktionsschritte klein bleibt und 10 nicht überschreitet ist die Ausführungszeit gering genug um eine Aktualisierungsrate von 20 Hz zu erreichen.

Bei größeren Prädiktionsvektoren fällt die Geschwindigkeit jedoch sehr schnell ab. Der Benchmark 4.9 ist für das fertige Optimierungsproblem gemessen worden. Dies liegt daran, dass der SLSQ- Algorithmus nicht für nichtlineare Probleme ausgelegt ist. Bessere Skalierung erhält man bei der Verwendung eines *Solvers* der das Innere-Punkte-Verfahren nutzt. Dieser Algorithmus setzt jedoch, um gute Performance zu erreichen, wie in Abschnitt 3.2.2 beleuchtet, die Kenntnis über die Ableitung der Systemfunktion voraus. Diese kann mit Frameworks wie: CasADi, PyADOL-C, PyCppAD berechnet werden [TT16]. Eine Implementierung des MPC-Ansatzes in CasADi wurde aufgrund der schlechten Dokumentation abgebrochen und nach einer Alternativlösung gesucht. Das Ergebnis dieser Suche führte zur Verwendung einer neuen Programmiersprache.

### 4.4.2 Julia

Julia ist die Programmiersprache, die die Umsetzung des Model Predictive Control-Algorithmus effizient und performant ermöglichte. Sie wurde im Jahr 2009 von Jeff Bezanson, Stefan Karpinski, Viral B. Shah, and Alan Edelman ersonnen und ist damit noch eine sehr junge Sprache. Sie ist vor allem für numerische Analyse und wissenschaftliche Berechnungen entworfen worden und bietet in diesen Bereichen viele Funktionalitäten.



**Abbildung 4.9:** Ausführungszeiten für verschiedene große Horizontlängen

Ebenfalls ein wichtiges Ziel bei der Entwicklung war es, ohne vorheriges Kompilieren sehr schnell zu sein und trotzdem weiterhin das *general-purpose* Paradigma zu erfüllen. Ein Vergleich der Berechnungsgeschwindigkeit verschiedener Sprachen bezüglich viel genutzter Funktionen im wissenschaftlichen Umfeld ist in dem Benchmark 4.10 zu sehen.

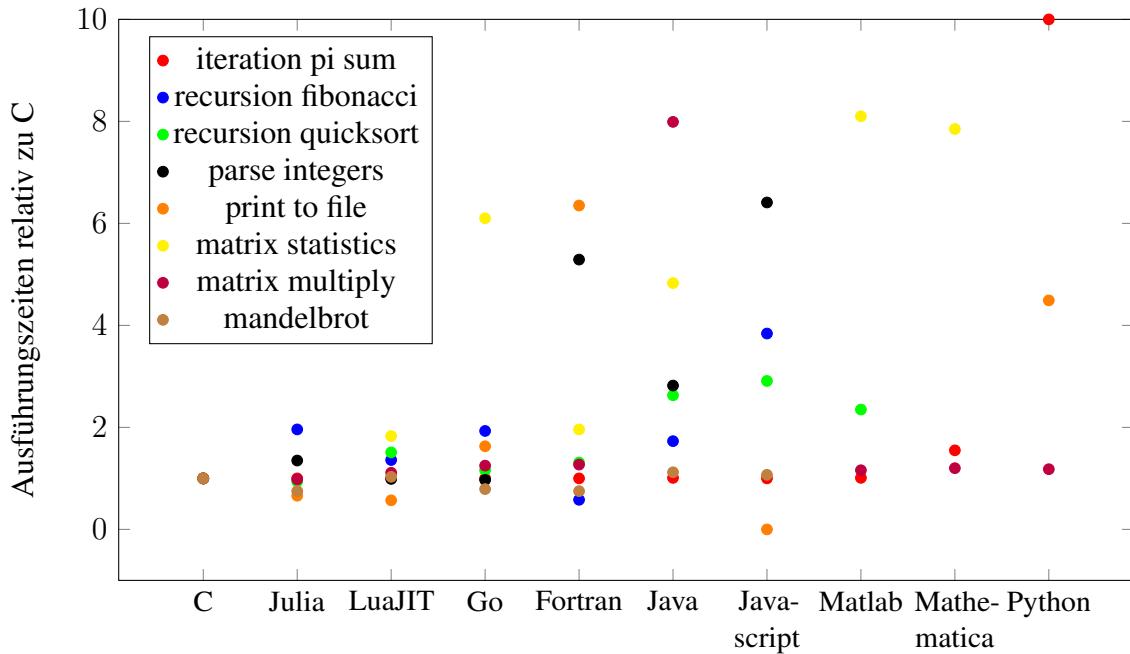
Die wichtigsten Features von Julia sind:

- multiple dispatch

Wird genutzt um die gleiche Methode für verschiedene Kombinationen an Eingabeparametern oder Variablen Typen zu überladen. Bei dem Funktionsaufruf wird die am besten passende Methodendefinition aufgerufen.

- type inference

Das automatische Detektieren des Datentyps. Dies befreit den Programmierer vom festlegen des Typs und ermöglicht trotzdem Typprüfung.



**Abbildung 4.10:** Ausführungszeiten für verschiedene Sprachen

- just-in-time (JIT) Kompilierung

Ein System, in dem ein JIT Kompilierer implementiert ist, wandelt den Computer Code erst zur Laufzeit in Bytecode um. Der große Vorteil ist, dass während der Ausführung kontinuierlich Analysen durchgeführt werden, um Bereiche ausfindig zu machen die durch ein Neukompilieren eine signifikante Verbesserung bei der Ausführungszeit erfahren würden.

Obwohl es möglich wäre die einzelnen Bestandteile, welche nötig sind um den Model Predictive Control - Algorithmus zu berechnen, in Julia zu implementieren gibt es eine umfangreiche Erweiterung welche eine passende Schnittstelle für solche Probleme zur Verfügung stellt.

## Jump

Jump ist eine Erweiterung für Julia mit der sich mathematische Probleme modellieren und lösen kann. Es besitzt Schnittstellen für mehrere sowohl frei verfügbare, wie auch

kommerzielle Optimierer, mit denen sich zum Beispiel lineare oder nichtlineare Probleme lösen lassen. Der große Vorteil von Jump ist, dass die Definition des mathematischen Problems unabhängig von dem verwendeten Optimierer ist und dieser damit leicht ausgetauscht werden kann (siehe Schaubild 4.12). Ebenfalls ersichtlich ist das Jump sich direkt um die automatische Ableitung kümmert und so dem Programmierer sehr viel Arbeit erspart.

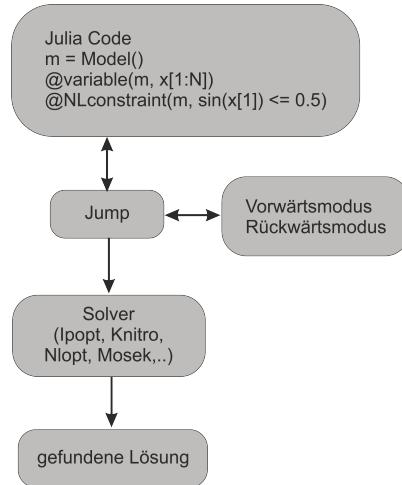


Abbildung 4.11: Blockdiagramm von Jump

Die Syntax welche Jump für die Definition der Probleme vorsieht ähnelt der standardmäßigen mathematischen Definition, was die Anwendung intuitiv gestaltet. Zudem ist die Dokumentation sehr ausführlich.

## 4.5 Simulationsumgebung

Um die Funktion des MPC-Algorithmus verifizieren zu können wurde eine Simulationsumgebung entwickelt. Der Aufbau ist dreigeteilt. Eine Fahrzeugsimulation welche mit austauschbaren Fahrzeugmodellen die Bewegung des Rennautos abhängig von Steuereingaben und einem  $\Delta t$  berechnet. Der Regelanteil in Form des MPC und eine Visualisierung auf Basis einer Spieleengine welche auch die zeitlichen Abläufe kontrolliert.

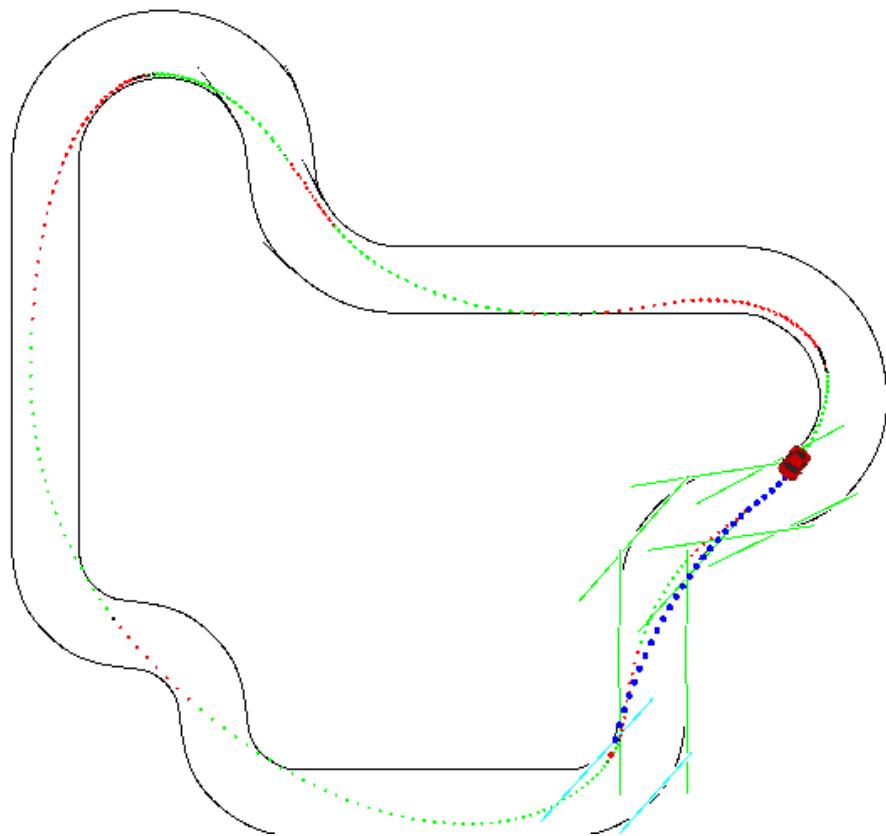


Abbildung 4.12: Grafische Darstellung des MPC - Algorithmus in der Simulationsumgebung

#### 4.5.1 Simple and Fast Multimedia Library

Die Basis für die Simulation bildet die *Simple and Fast Multimedia Library (SFML)* welche für die grafische Darstellung des Kurses, Rennauto, Prädiktionsschritte und Fahrzeuginformationen genutzt wird. Gleichzeitig zur Visualisierung stellt die Spieleengine auch sicher, dass die zeitlichen Abläufe eingehalten werden. Das Grundprinzip ist eine einzige unendlich laufende Schleife die mit einer vorher festgelegten Häufigkeit pro Sekunde (frames per second fps) ausgeführt wird. Benötigen die Berechnungen innerhalb dieser Schleife länger als das angegebenen  $\Delta t = \frac{1}{fps}$  sinkt die Ausführungsrate, überschritten wird sie jedoch nie. Die Schritte, die innerhalb dieser Schleife abgearbeitet werden sind zuerst das Abfragen möglicher Eingaben des Nutzers oder *events* der einzelnen Objekte, z.b. eine Kollision. Im zweiten Schritt werden alle Berechnungen der eigentlichen Fahrzeugsimulation und MPC ausgeführt und im letzten Schritt werden die grafische Elemente erstellt und angezeigt. Wie für eine Spieleengine üblich, befindet sich der

Ursprung des Koordinatensystems in der linken oberen Ecke, die  $y$ -Achse ist daher entgegengesetzt zu dem in der Fahrzeugsimulation verwendeten Standardachsenaufbau orientiert. Zudem werden Distanzen in der Engine nur in Pixeln gemessen. Es wurden daher 2 Parameter eingeführt welche die Fenstergröße in Pixeln festlegen (in  $x$ - und  $y$ -Richtung) und zusätzlich eine Angabe wie viel Metern dieser Pixelbereich jeweils entspricht. Die daraus resultierenden Verhältnisse

$$scaleX = \frac{windowSizeXinPixel}{windowSizeXinM}$$

$$scaleY = -\frac{windowSizeYinPixel}{windowSizeYinM}$$

werden verwendet, um alle Größenverhältnisse einheitlich in der Simulation zu halten und eine realistische Visualisierung zu gewährleisten. Durch die Parameter kann nun bequem die Größe des Bereichs, in dem der Rennkurs abgesteckt wird und die Fenstergröße, zur Darstellung der Simulation, angepasst werden. Zusätzlich wurde ein Offset eingeführt welcher die Null-Position der  $x$ - und  $y$ -Position im Koordinatensystem verschiebt. Damit kann der Ursprung des Koordinatensystems der Fahrzeugsimulation beliebig im Anzeigebereich verschoben werden. Der Aufbau ist in dem Blockdiagramm 4.13 nochmals zusammengefasst.

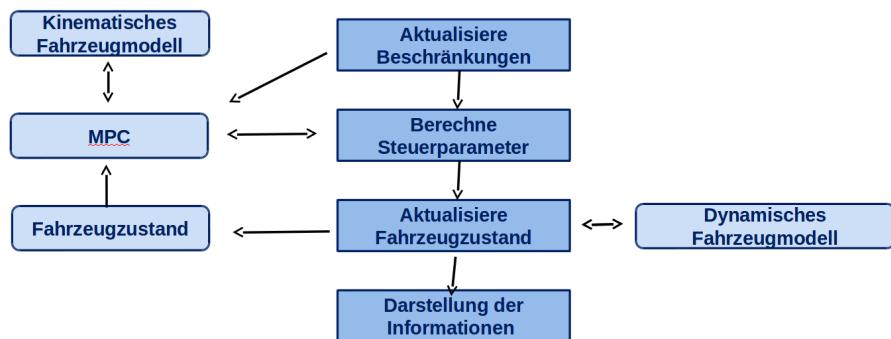


Abbildung 4.13: Blockdiagramm der Simulation ohne MPC

### 4.5.2 Virtueller Rennkurs

Wie in der Einführung bereits erwähnt, ist das Ziel der Arbeit ein MPC-Algorithmus zu entwickeln mit dem die *trackdrive* Disziplin möglichst schnell abgefahren werden kann. Die Grundvoraussetzung für diese Arbeit ist die bereits vollständig erstellte Karte des Rennkurses und eine Lokalisierung innerhalb dieser Karte. Die Updaterate für diese Positionsschätzung wird mit 20 Hz angenommen. Das Ziel ist es also die Regelparameter

mit einem  $\Delta t$  von  $\frac{1}{20}s$  für das Rennauto berechnen zu können. Zum Testen der Algorithmen wurde ein beliebiger Kurs definiert, welcher sich an die Vorgaben des Regelwerkes hält und damit einen minimalen Kurvenradius von 9 m, Maximallänge einer Geraden von 80m und maximal  $180^\circ$  Spitzkurven besitzt.

---

## 5 Modellfehler

---

Ohne eine genaue Verifizierung der Plausibilität der implementierten Modelle ist keine systematische Untersuchung möglich. Hierfür wurden die zwei Disziplinen acceleration und skidpad gewählt und die besten gefahrenen Ergebnisse des Events 2017 in Hockenheim als Vergleichsbasis genutzt.

### 5.1 Acceleration

In dieser Disziplin ist es das Ziel der Teams eine 75m lange, gerade Strecke in möglichst kurzer Zeit zurückzulegen. Es werden drei verschiedene longitudinale Konfigurationen des Fahrzeugmodells evaluiert. Zuerst das kinematische Modell in dem die maximale mittlere Beschleunigung aus den Fahrzeugdaten, wie in 3.3.6 beschrieben, errechnet wird. Das zweite untersuchte Modell basiert auf der Leistung des Motors und der maximal übertragbaren Kraft der Reifen (3.3.40). Das genaueste Modell betrachtet zusätzlich noch Reibung und Luftwiderstand.

In der Grafik 5.1 wird deutlich, wie stark sich die einzelnen Modelle, obwohl sie sich auf das gleiche Fahrzeug beziehen, voneinander unterscheiden. Für alle Modelle wird fünf Sekunden lang maximal beschleunigt und danach 2.5 s mit maximaler Kraft gebremst. Das Fahrzeug besitzt eine Maximalgeschwindigkeit von 118 kmh, welche durch die Übersetzung im Getriebe herrührt. Das kinematische Modell trifft mit seiner durchschnittlichen Beschleunigung exakt die gefahrenen Testwerte. Da aber die dynamischen Modelle eine größere Anfangsbeschleunigung haben und vom kinematischen Modell, hinterlegt im MPC, geregelt werden, wird die Beschleunigung im kinematischen Modell so angepasst, dass es die gleiche Anfangssteigung besitzt. Die Steigung beträgt  $24 \frac{m}{s^2}$ . Das longitudinale Modell mit Strömungswiderstand und Reibung ist bei den gemessenen Zeiten sehr nah an der Realität. Bei einem perfekten Start, bei dem der Schlupf möglichst genau die optimalen 30 Prozent trifft, ist mit dem realen Rennauto eine Beschleunigung von 3.9 s realistisch.

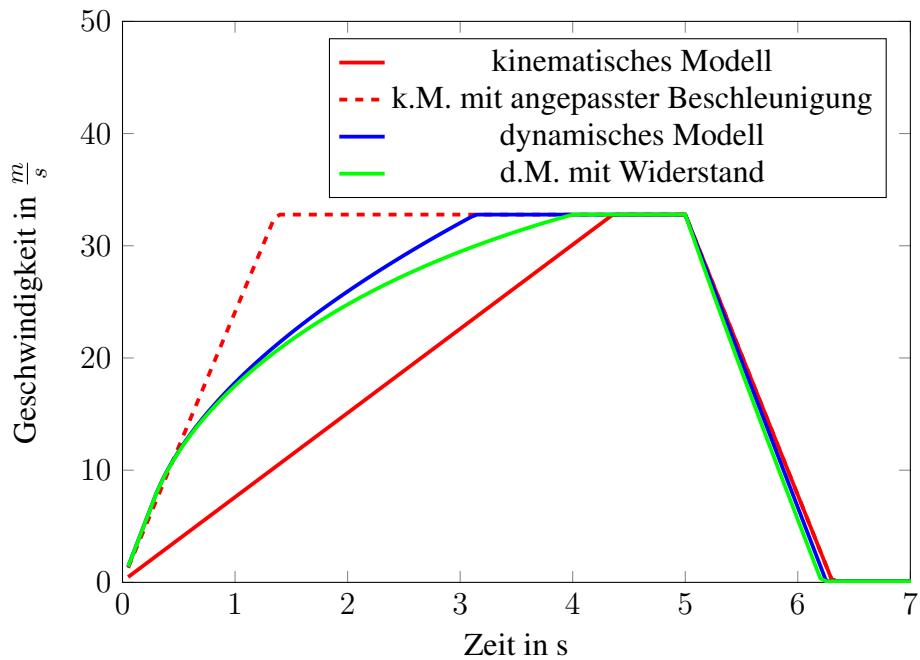


Abbildung 5.1: Beschleunigung für verschiedene longitudinale Modelle

## 5.2 Skidpad

In dieser Disziplin fährt das Fahrzeug eine liegende 8. Der limitierende Faktor ist hier also die maximale Querbeschleunigung, welche das Rennauto noch auf dem Kurs hält. In der Simulation wird vereinfacht von einem Rundkurs, welcher in Abbildung 5.2 dargestellt wird, mit dem Außendurchmesser von 21.25 m ausgegangen. Ob die Begrenzung der Querbeschleunigung 3.3.1 mit der Simulation übereinstimmt, kann durch die wirekende Zentripetalkraft überprüft werden.

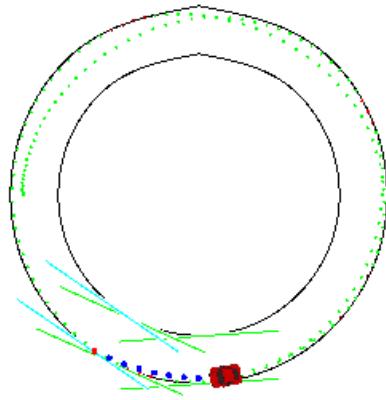
$$\omega = 2\pi f \quad (5.2.1)$$

$$v = r * \omega \quad (5.2.2)$$

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (5.2.3)$$

$$(5.2.4)$$

Für das in der Simulationsumgebung hinterlegtes kinematisches Modell ist die gemessene Rundenzeit 4.65 s. Daraus lässt sich eine Durchschnittsgeschwindigkeit  $v = 13.9 \frac{m}{s}$  berechnen, was einer Querbeschleunigung von  $a = 19.37 \frac{m}{s^2}$  entspricht. Das



**Abbildung 5.2:** Rundkurs zum messen der maximalen Querbeschleunigung

im Fahrzeugmodell hinterlegte  $a_{max}$  ist mit  $19.62 \frac{m}{s^2}$  also sehr nah an dem in der Simulation erfahrenen werten. Die Differenz zu der schnellsten gemessenen Runde mit dem echten Fahrzeug (7.5 s) lässt sich dadurch erklären, dass der MPC-Algorithmus die ideale Stellgrößen berechnet und damit auch einen idealen Rundkurs abfährt. Zudem wurde die maximal gemessene Querbeschleunigung des Fahrzeugs als  $a_{max}$  gewählt, dies kann in der Realität nicht durchgängig gehalten werden. Für das dynamische Fahrzeugmodell wurde eine minimale Rundenzeit 3.05 s gemessen. Die damit erhaltene maximale Querbeschleunigung ist deutlich größer als die des kinematischen Models. Zum Vergleich, die schnellste gefahrene Runde im Deutschen Event der Formula Student waren 5.7 Sekunden.

Um nachzuvollziehen, wodurch diese niedrige Rundenzeit entsteht, wurde überprüft, wie sich das dynamische Modell in hintereinander folgenden Kurven verhält. Dieses deutlich dynamischere Szenario hängt nicht nur von den lateralen Kräften ab welche das Fahrzeug auf der Strecke halten und wie im Fall des Skidpad konstant sind, sondern ganz besonders auch vom Trägheitsmoment.

### 5.3 Orientierung

In der Darstellung 5.3 ist die Änderung der Orientierung für einen oszillierenden Lenkwinkel veranschaulicht. Es werden vier verschiedenen Geschwindigkeiten 7, 14,

21 und  $28 \frac{m}{s}$  ohne jegliche longitudinale Beschleunigung getestet. Dies soll einen guten Überblick über den gesamten Geschwindigkeitsbereich ermöglichen.

Zuerst wird das Verhalten des kinematischen Modells betrachtet. Bei der geringsten Geschwindigkeit von  $7 \frac{m}{s}$  folgt die Orientierung noch genau dem Lenkwinkel nach und erreicht damit den Maximalwert im Nulldurchgang der Sinusfunktion des Lenkwinkels. Mit höheren Geschwindigkeiten begrenzt jedoch immer stärker die Beschränkung der maximalen Querbeschleunigung. Bei  $14 \frac{m}{s}$  ist dies deutlich zu erkennen, der Anfangspunkt der Kurve ist noch leicht abgerundet. Dies ist bei 21 und  $28 \frac{m}{s}$  nicht mehr der Fall. Ab der Geschwindigkeit von  $14 \frac{m}{s}$  begrenzt die maximale Querbeschleunigung auch immer stärker die maximal erreichte Orientierung.

Das Verhalten des dynamischen Modells und das des um den Kammschen Kreis erweiterten sind in diesem Anwendungsfall genau gleich. Dies ist darauf zurückzuführen, dass keinerlei longitudinale Kraft an den Reifen anliegt. Die vom Reifen zu übertragenden Kräfte bewegen sich daher nur auf der x-Achse und erfahren keine Einschränkung. Das Verhalten der dynamischen Modelle bei den unterschiedlichen Geschwindigkeiten ist nicht direkt aus den Gleichungen nachvollziehbar. Aus dem Verlauf der Diagramme wird jedoch deutlich, dass das Trägheitsmoment dazu führt, dass die maximale Orientierung deutlich dem kinematischen Modell und damit dem Lenkwinkel nacheilt. Ebenfalls ersichtlich ist, wie das Fahrzeugmodell bei höheren Geschwindigkeiten immer mehr zum Übersteuern neigt und die maximale Orientierung immer weiter steigt.

Wird nun das gleiche Szenario aber für eine zusätzliche longitudinale Beschleunigung betrachtet, ergibt sich ein gänzlich neues Bild 5.4. Zuerst lohnt sich nochmals der Blick auf das kinematische Modell. Hier ist nun sehr gut zu sehen, wie mit zunehmender Geschwindigkeit die Kurve immer weniger rund ist und durch die maximale Querbeschleunigung begrenzt wird. Das Verhalten der beiden dynamischen Modelle ist in diesem Szenario nicht mehr kongruent. Für  $7 \frac{m}{s}$  ist die große Differenz klar durch die eingeschränkten lateralen Kräfte durch den Kammschen Kreis ersichtlich. Dass die Differenz bei dem letzten Diagramm mit  $28 \frac{m}{s}$  nahezu verschwindet, ist darauf zurück zu führen, dass  $F_x$  welches mit der Gleichung 3.3.40 berechnet wird, mit zunehmender Geschwindigkeit immer kleiner wird.

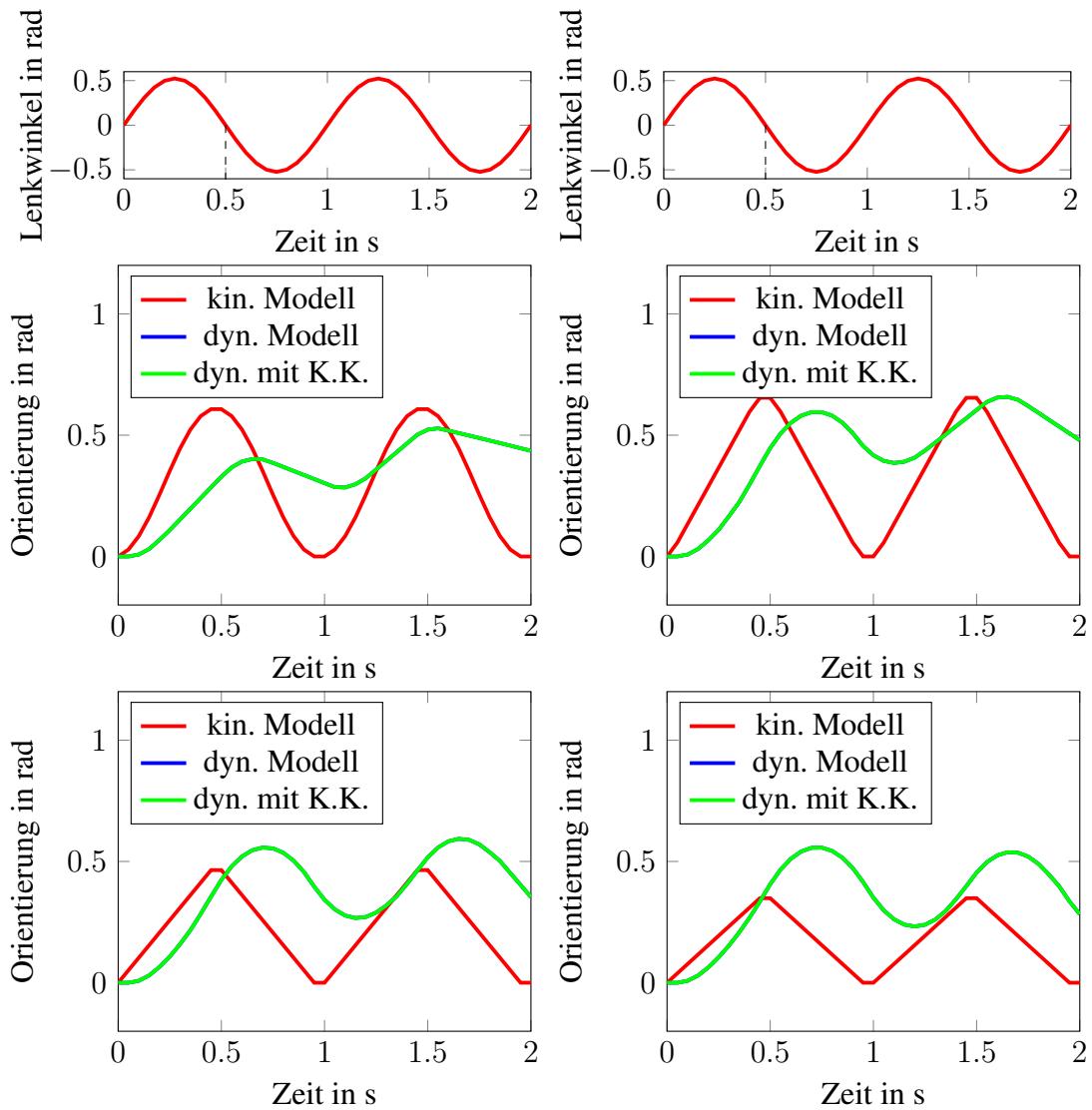


Abbildung 5.3

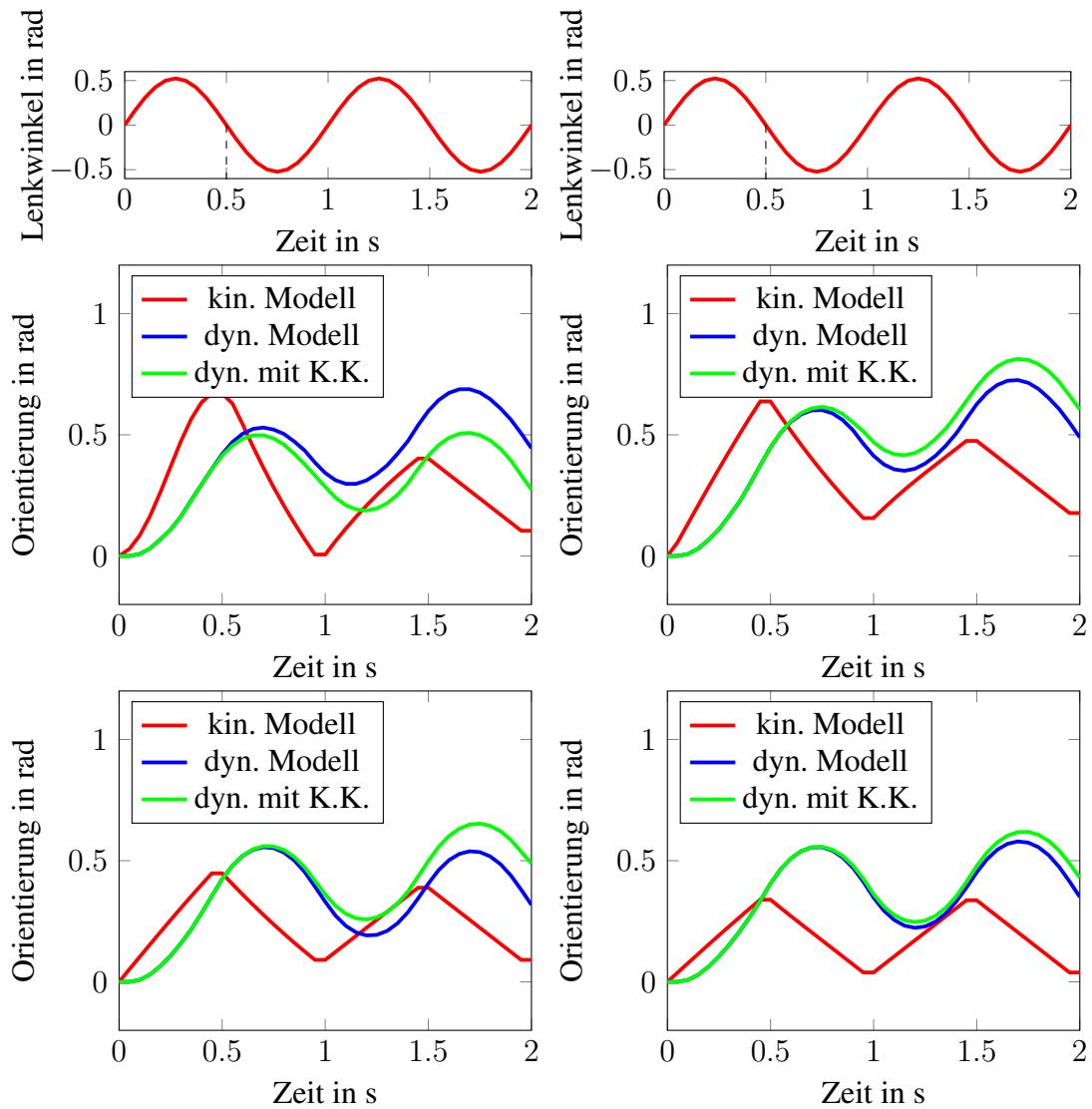


Abbildung 5.4

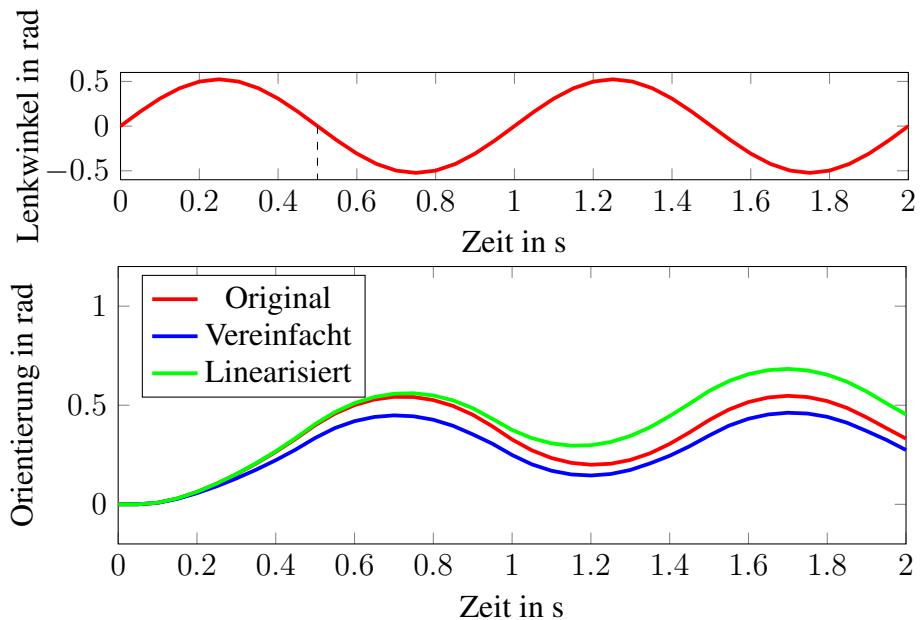


Abbildung 5.5

## 5.4 Reifenmodelle

Das Reifenmodell, welches bis zu diesem Punkt in der Arbeit verwendet wurde, entspricht dem genauesten *magic model*. Im folgenden soll nun kurz untersucht werden, was für einen Auswirkung die drei verschiedenen Modelle auf das Fahrzeugverhalten haben. Auch für diese Untersuchung wird eine Sinuswelle als Eingabe für den Lenkwinkel des Modells gewählt.

Die Differenz der Modelle ist deutlich erkennbar, ob es einen Einfluss auf die Regelung gibt, wird im späteren Verlauf im Kapitel 7 näher untersucht. Generell lässt sich jedoch sagen, ist das Einsparen von Rechenzeit nicht das oberste Ziel, sollte immer das genaueste Reifenmodell verwendet werden. Wie schon im Kapitel 3.3.2 angedeutet, hängt beim dynamischen Modell das Verhalten sehr stark von den Reifenkräften ab und sollte daher möglichst genau abgebildet werden. Soll trotzdem viel Rechenleistung gespart werden, entspricht das lineare Modell einer guten Alternative zum vereinfachten *magic model*. Es liefert eine gute Annäherung und ist zudem noch weniger Komplex. Dies gilt jedoch nur der Fall für Rennreifen. Diese können über einen großen Bereich des Schräglauwinkels hohe Seitenkräfte übertragen. Normale Straßenreifen brechen deutlich

stärker nach dem Erreichen ihrer maximalen Seitenkraft ein und werden daher nicht gut durch das linearisierte Modell repräsentiert.

## 5.5 Longitudinale Modelle

---

# 6 Regelung des kinematischen Modells

---

In diesem Kapitel wird untersucht, mit welcher Kostenfunktion die besten Rundenzeiten erreicht werden können. Zudem wird erprobt, wie groß der Einfluss des Vorhersagehorizontes auf die gefahrene Zeit ist. Um dies tun zu können, muss zuerst die mindestens erforderliche Länge des Prädiktionshorizontes gefunden werden. In einem Szenario im öffentlichen Verkehr muss der Horizont immer mindestens so lang sein, dass eine Vollbremsung von der aktuellen Geschwindigkeit durchgeführt werden kann, bevor das Fahrzeug das Ende des Horizontes erreicht hat. Auf dem Rennkurs ist dies nicht nötig, da nicht davon auszugehen ist, dass sich plötzlich Hindernisse auf der Strecke befinden (bei Formula Student Driverless befindet sich immer nur ein Fahrzeug auf der Strecke). Da im Simulator und im MPC das gleiche Fahrzeugmodell hinterlegt ist, wird die tangentielle Beschränkung genutzt, um das Rennauto daran zu hindern die Strecke zu verlassen.

## 6.1 Prädiktionshorizont

Muss neu berechnet werden da sich das Modell geändert hat. Irgendwas zwischen 15 und 20.

## 6.2 Kostenfunktionen

Mit der Information, wie groß der kleinste Prädiktionshorizont mindestens sein muss, wird nun untersucht, wie die unterschiedlichen Kostenfunktionen gegeneinander abschneiden. Um eine gute Vergleichbarkeit zu erhalten, wird ein zufälliger Rennkurs erstellt auf dem die Messungen durchgeführt werden.

### 6.2.1 Verifizierung der Funktionen

Bevor die Messungen für die einzelnen Kostenfunktionen erstellt werden, soll überprüft werden, dass die Funktionen auch fehlerfrei funktionieren. Auf einer im Simulator definierten 75m Geraden wird überprüft, ob die Zeit zum Abfahren dieser Strecke für alle Funktionen gleich ist. Abweichungen könnten entstehen, wenn die Zielposition nicht groß

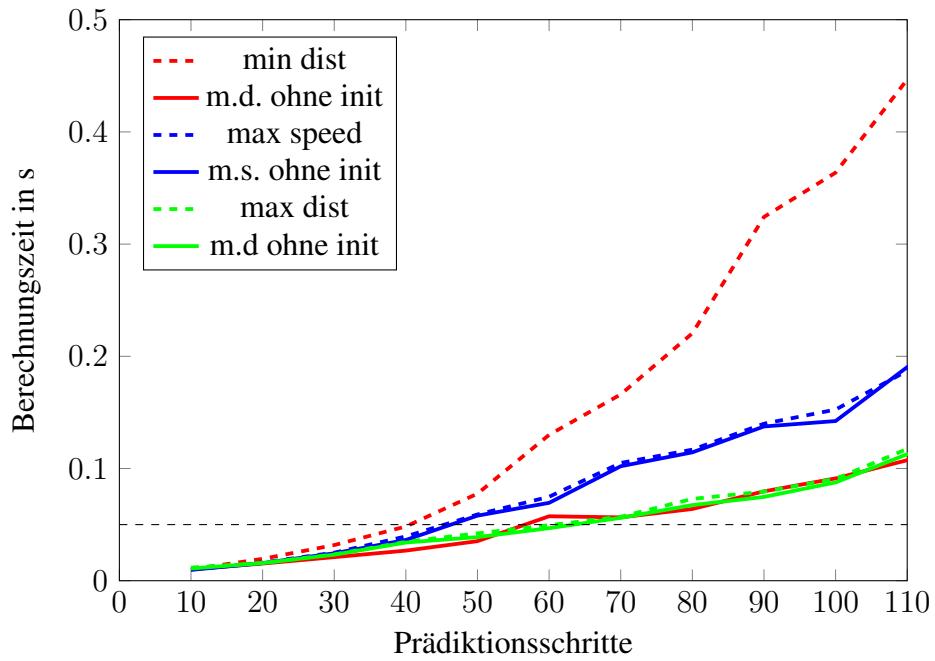
genug gewählt ist und beim Beschleunigen die Distanz zu null wird. In diesem Fall würde das Fahrzeug für die 75m mehr Zeit benötigen als die Kostenfunktion welche in jedem Zeitschritt versucht die Geschwindigkeit zu maximieren. Ebenfalls wurde überprüft ob das Rennauto für eine der Kostenfunktionen einen Slalom fährt um die Geschwindigkeit oder den zurückgelegten Weg zu maximieren. Die Funktionen haben alle wie erwartet ideal Beschleunigt und den 75m Kurs in der gleichen Zeit absolviert.

### 6.2.2 Laufzeit

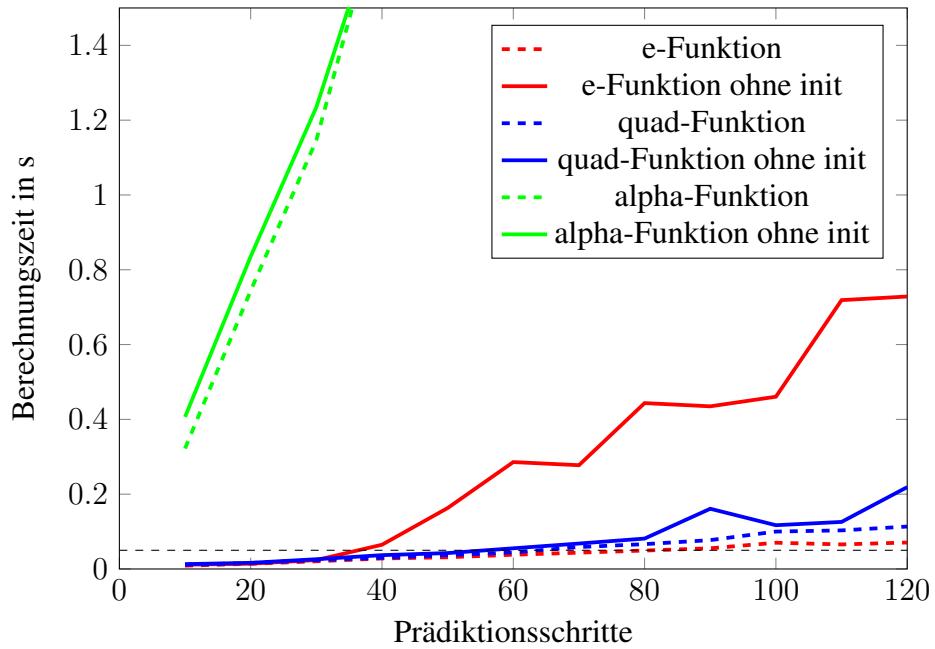
Mit der Gewissheit dass alle Kostenfunktionen die gewünschten Ergebnisse erzeugen, wird nun die Berechnungszeit verglichen. Die Geschwindigkeit wurde auf  $7 \frac{m}{s}$  limitiert um auch kleinere Horizonte testen zu können. Die Ergebnisse der Messung sind im Benchmark 6.1 visualisiert. Bei einigen Kostenfunktionen dauert die Berechnung des initialen Optimierungsvektor im Vergleich zu allen darauf folgenden Schritten extrem lange. Dies liegt an dem sogenannten *hot start*. Solange die Parameter der Beschränkungen (neue Tangenten und neue Startposition) nicht signifikant verändert werden, findet der Optimierer in aufeinander folgenden Schritten sehr schnell eine passende Lösung. Dies kann man sich wie in einem Schieberegister vorstellen, in dem die Lösung einen Schritt nach links verschoben wird und nur für den letzten Schritt eine neue Lösung gesucht werden muss. Aus diesem Grund wurden auch Messungen erstellt die erst anfangen, wenn der *hot start* durchgeführt wird. Die Berechnungszeit der  $max_{dist}$  Funktion den anderen beiden überlegen. Die ersten Schritte werden nahezu mit der gleichen Geschwindigkeit berechnet wie der Rest, sie besitzt zusammen mit der  $min_{dist}$  Kostenfunktion die beste Laufzeit und skaliert auch deutlich besser mit den Prädiktionsschritten als die  $max_{speed}$  Funktion.

Im späteren Verlauf wird die Verwendung der elastischen Begrenzungen nötig. Um eine Vorauswahl zu treffen, welche Kostenfunktionen hierfür in Betracht gezogen werden sollen, wird im Folgenden die gleiche Messung wie für die normalen Kostenfunktionen durchgeführt. Die Messungen werden mit dem kinematischen Modell im Simulator vorgenommen, um möglichst gute Vergleichbarkeit zu erhalten.

Die Auswahl der möglichen Kostenfunktionen ist schnell getroffen. Die e-Funktion und die quadratische-Funktion haben eine deutlich bessere Laufzeit und lassen sogar die einfacheren Kostenfunktionen aus der vorherigen Messung hinter sich. Dies ist darauf



**Abbildung 6.1:** Berechnungszeit für verschiedene Kostenfunktionen mit und ohne die ersten 40 von 240 Berechnungen



**Abbildung 6.2:** Berechnungszeit für verschiedene Kostenfunktionen mit elastischer Beschränkung.  
Mit und ohne die ersten 40 von 240 Berechnungen

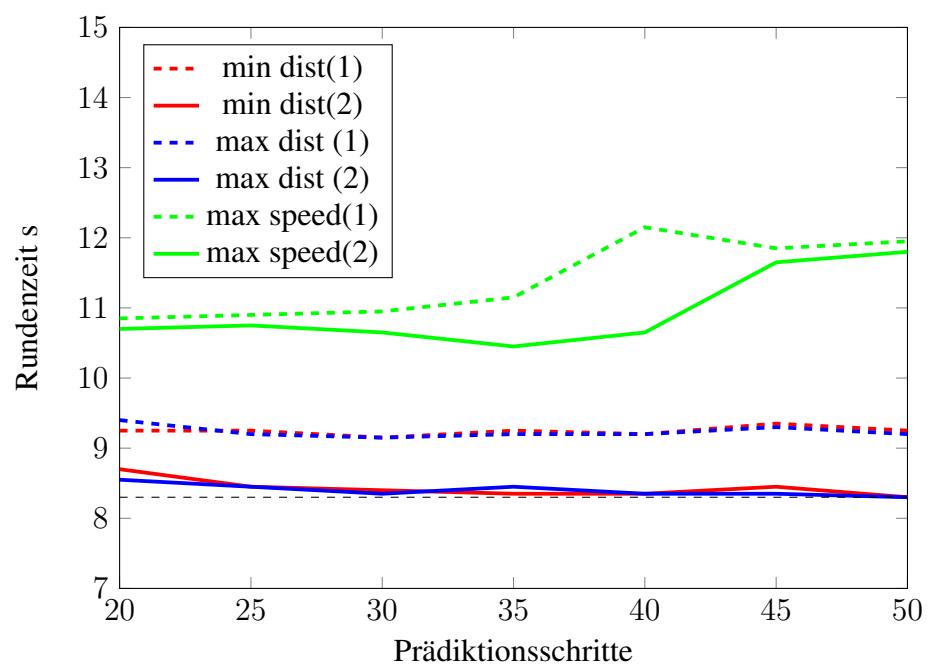
zurückzuführen, dass keine tangentialen Beschränkungen mehr vorhanden sind und damit das MPC-Problem eine geringere Komplexität aufweist.

Die deutlich höhere Ausführungszeit ist bei der alpha-Funktion darauf zurück zu führen, dass jeweils auf der Rückseite der Erhöhung die Kosten wieder gegen Null fallen. Der Optimierer muss also einen sehr großen Suchraum betrachten. Es werden auch mögliche Trajektorien evaluiert, welche die hohen Kosten für 2-3 Schritte in Kauf nehmen und anschließend das Rennauto außerhalb des Kurses steuern. Diese Situation kann nachgestellt werden, in dem das Kostenverhältnis zu Gunsten der elastischen Beschränkung angepasst wird woraufhin das Fahrzeug den Kurs verlässt. Der lineare

### 6.2.3 Rundenzeit

Um die Qualität der Kostenfunktionen einschätzen zu können wird im folgenden untersucht, wie schnell die einzelnen Rundenzeiten abhängig von den Prädiktionsschritten für jede einzelne Funktion ist. Gemessen wurde sowohl die erste und zweite Runde, da in der ersten Runde die Anfangsbeschleunigung und die eventuell ungünstige Startposition die Rundenzeit beeinträchtigen. Es wurde auch jeweils noch eine dritte Rundenzeit ermittelt, diese entspricht aber nahezu genau der vorhergehenden.

Das Verhalten, der Kostenfunktion  $\max_{speed}$ , mit längerer Vorwärtsprädiktion immer langsamer zu werden, lässt sich mit dem Wissen über den Kurs erklären. Desto weiter in die Zukunft der Optimierer schauen kann, desto mehr fängt er an Kurven voll auszufahren, also den zurückgelegten Weg länger zu planen. Dadurch kann zwar die Geschwindigkeit erhöht werden, die Rundenzeit leider allerdings deutlich darunter. Die Differenz zwischen den beiden Kostenfunktionen, welche die Distanz zu einem Punkt beziehungsweise die gefahrene Streckendistanz maximieren, ist sehr klein und auch bei geringeren Horizontlängen bereits sehr gut. Betrachtet man jedoch zusätzlich die Berechnungszeit setzt sich die Kostenfunktion zur Maximierung der Streckendistanz deutlich als die bessere ab.



**Abbildung 6.3**

---

# 7 Regelung des dynamischen Modells

---

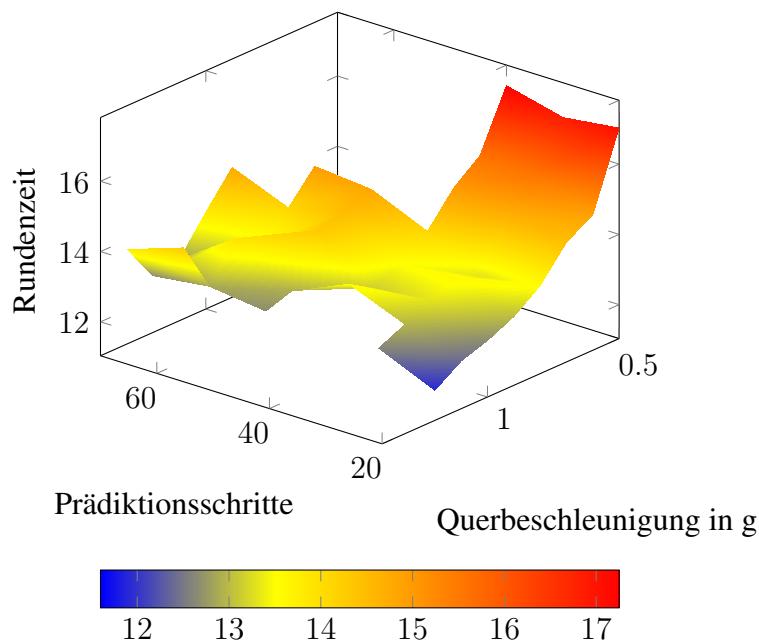
In der Realität ist das kinematische Modell nur für geringe Geschwindigkeiten genau genug die Bewegung des Fahrzeugs zu modellieren. Im Folgenden wird deswegen das Modell im Simulator durch das dynamische Fahrzeugmodell mit berechneten Reifenkräften ersetzt. Das Ziel ist zu evaluieren, wie gut sich das deutlich komplexere System mit dem weiterhin im MPC-Algorithmus hinterlegte, sehr einfache kinematischen Modell, regeln lässt. Die deutlichen Unterschiede der Modelle wurden bereits im Kapitel 5 evaluiert. Für diesen Abschnitt, wird nun von dem Fahrzeugmodell ausgegangen, welches Reibung und Luftwiderstand berücksichtigt, durch den Kammschen Kreis erweitert wird und die Reifenkräfte mit dem genauesten *magic model* errechnet.

## 7.1 Maximale Querbeschleunigung und Prädiktionshorizont

Zuerst wird ermittelt, bis zu welcher maximalen Querbeschleunigung das Rennauto stabil im Rennkurs geregelt werden kann. Um diesen Wert zu finden, wurde die elastische Beschränkung basierend auf der e-Funktion gewählt und ein sehr hoher Kostenfaktor eingestellt um sicherzustellen, dass das Fahrzeug nicht den Kurs verlässt um die Strecke abzukürzen. Erst wenn der Regler die Kontrolle verliert und das Fahrzeug nicht mehr auf dem Rennkurs halten kann ist die maximal mögliche Querbeschleunigung erreicht.

### 7.1.1 Dynamisches Modell

Für dieses Anwendugnszenario wird zuerst das dynamische Modell evaluiert um eine Vergleich zum Modell, welches durch den Kammschen Kreis erweitert wurde anstellen zu können. Der in Abbildung ?? dargestellte Graph zeigt den Zusammenhang aus maximaler Querbeschleunigung und Prädiktionschritten an. Die beste erreichte Zeit 11.6 s ist entgegen der Erwartung für einen sehr kurzen Horizont von 20 Schritten erreicht worden. Dies hängt vermutlich damit zusammen, dass bei einem großen Prädiktionshorizont die Bahn des Rennautos sehr nah an den Streckenbegrenzungen vorbei führt. Dadurch sind



**Abbildung 7.1**

höhere Geschwindigkeiten in engen Kurven möglich. Das dynamische Modell schießt jedoch deutlich öfter über die geplante Trajektorie hinaus als bei einem kurzen Horizont. Die ideale Querbeschleunigung für den MPC-Regler liegt bei  $1.4g$ .

Die Rundenzeiten wurden jeweils für die zweite Runde gemessen.

Nachdem die erste Messung nur recht grob durchgeführt wurde, ist in der Grafik 7.2 der Bereich von 20-30 Prädiktionsschritten genauer untersucht worden.

### 7.1.2 Kammsches Modell

Die beste Rundenzeit welche für das dynamische Modell mit hinterlegtem Kammschen Kreis erreicht wurde, liegt bei 11.65 Sekunden. Dieser Wert wurde für einen Prädiktionshorizont von 21 Schritten bei der maximalen Querbeschleunigung von  $1.2g$  erreicht. Dieses Ergebnis überrascht im Hinblick auf die deutlichen Unterschiede der Modelle. Das dynamische Modell welches in Situationen, in denen stark beschleunigt und gebremst wird deutlich höhere Kräfte übertragen kann, kann sich in der schnellsten Runde nur einen Zeitschritt mit 0.05 s absetzen. Dieses Ergebnis entsteht dadurch, dass durch das hinterlegte kinematische Modell und die Beschränkung der Querbeschleunigung der

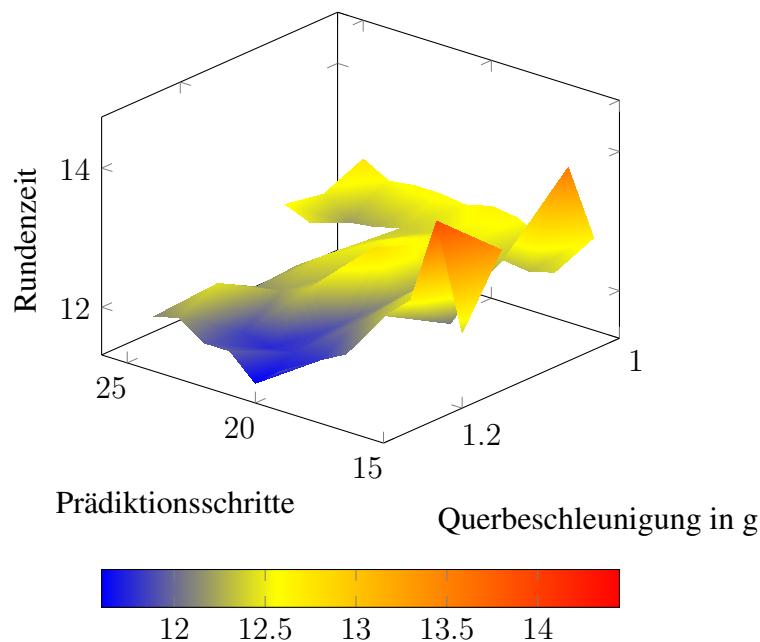


Abbildung 7.2

Regler sehr früh das Bremsen anfängt, um in der Kurve möglichst nah an der inneren Kurve zu bleiben. Die wirkenden Kräfte sind dadurch in der Grenzsituation beim Einfahren in die Kurve so klein, dass die Maximalkräfte welche durch den Kammschen Kreis beschränkt werden, nur geringfügig auftreten.

## 7.2 Einfluss des Reifenmodells

Der Einfluss des Reifenmodells soll auch kurz untersucht werden. Hierfür wird die Grenzsituation, welche im vorherigen Abschnitt gefunden wurde, gewählt, um die Auswirkung der verschiedenen Reifenkräfte zu überprüfen.

Das Ergebnis der Messung entspricht dem erwarteten Ergebnis. Die Gleichung welche das Ursprüngliche *magic model* vereinfacht, fällt nach dem Erreichen seines Maximalwertes für die lateralen Kräfte deutlich stärker ab als die beiden anderen Modelle (siehe 3.10). Dieser Umstand macht sich auch bei den Rundenzeiten bemerkbar, das Fahrzeugmodell welches auf das vereinfachte Reifenmodell zurückgreift ist durchgängig langsamer als die anderen beiden. Da nur in dem Fall der Rennreifen die linearisierte Version gute Ergebnisse liefert, ist davon abzuraten nicht das genaueste Reifenmodell welches zur Verfügung steht zu nutzen.

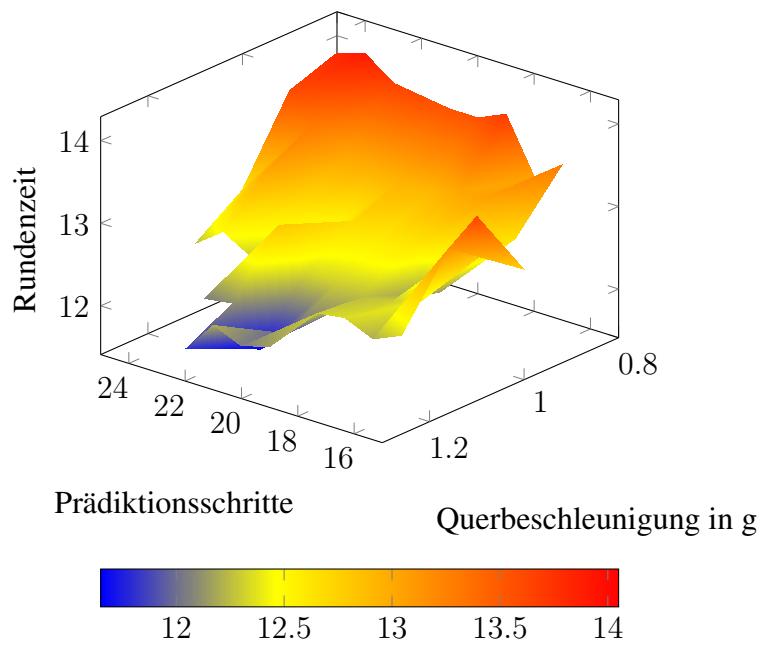


Abbildung 7.3

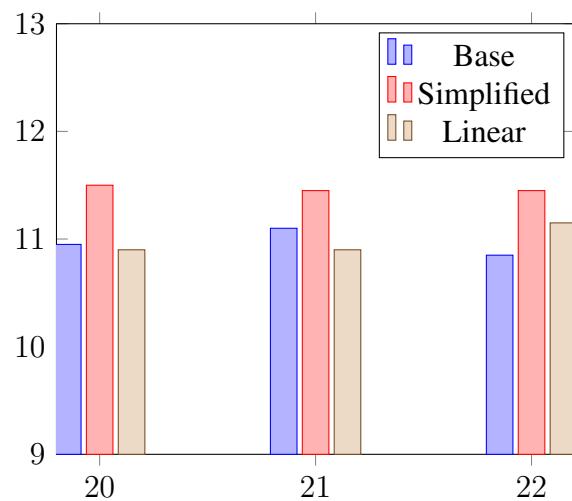


Abbildung 7.4

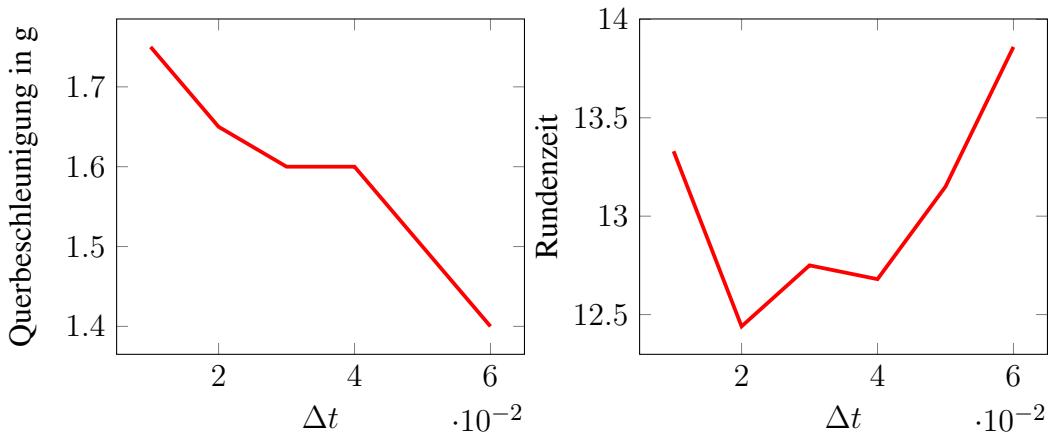


Abbildung 7.5

### 7.3 Regelfrequenz

Abschließend soll noch eine Betrachtung durchgeführt werden, ob eine höhere Aktualisierungsrate die Stabilität des Systems erhöht. Um dies zu überprüfen wird eine Parameterauswahl getroffen, in der das Rennauto beginnt auszubrechen. Bei Abweichungen des Fahrzeugs von der erwarteten Trajektorie sollte mit einer höheren Aktualisierungsrate weniger Zeit bis zu einer neu geplanten Trajektorie vergehen. Unabhängig davon, kann ein Fahrzeug, welches zu schnell in die Kurve fährt und nicht genug laterale Kräfte übertragen kann um auf der Kreisbahn zu bleiben, auch durch die schneller geplante Trajektorie nicht auf dem Kurs gehalten werden. Um eine gute Vergleichbarkeit zu erzielen, wird für jedes  $\Delta t$  die Anzahl der Prädiktionsschritte angepasst, alle Messungen beziehen sich also auf einen gleich langen vorausplanten Horizont. Wenn der Zeitwert welcher Vorausprädiziert werden soll keinen ganzen Teiler für das betrachtete  $\Delta t$  besitzt, wurde der nächst mögliche Wert gewählt.

### 7.4 Quadratische Funktion

Die Idee hinter der quadratischen Funktion ist, dass das Rennauto etwas mehr in der Mitte der Spur bleibt und daher im besten Fall auch bei höheren Geschwindigkeiten noch kontrollierbarer bleibt. Da es jedoch keinen abrupten Kostenanstieg an den Kursgrenzen gibt, muss evaluiert werden für welchen Faktor  $\alpha$  und das Verhältnis aus  $a$  und  $b$  der Regler die besten Rundenzeiten liefert ohne den Kurs zu verlassen. Für  $N$  wurde ein konstanter Wert von 25 Schritten mit einem  $\Delta t$  von 0.05s gewählt. In den Messungen hat

sich der Ansatz nicht bestätigen lassen. Die Trajektorien werden immer möglichst in der Mitte des Kurses angelegt, bei aufeinander folgenden Kurven, in denen das dynamische Modell stark vom kinematischen abweicht, verliert das Fahrzeug dadurch sehr schnell die Kontrolle. Auch geringe Querbeschleunigungen ändern an diesem Problem nichts, da die maximale Geschwindigkeit des Fahrzeugs nicht eingeschränkt ist. Die Folge daraus ist, dass das Rennauto mit zu hohen Geschwindigkeiten in die Kurven einfährt. Ohne ein genaueres Fahrzeugmodell im MPC-Algorithmus ist eine Regelung des Rennautos, trotz der schnellen Berechnungszeit, mit dieser Kostenfunktion nicht zu empfehlen. Die problematische Stelle im Kurs ist schematisch für die zwei verschiedenen Verhalten für die quadratische und die exponentielle Kostenfunktion dargestellt.

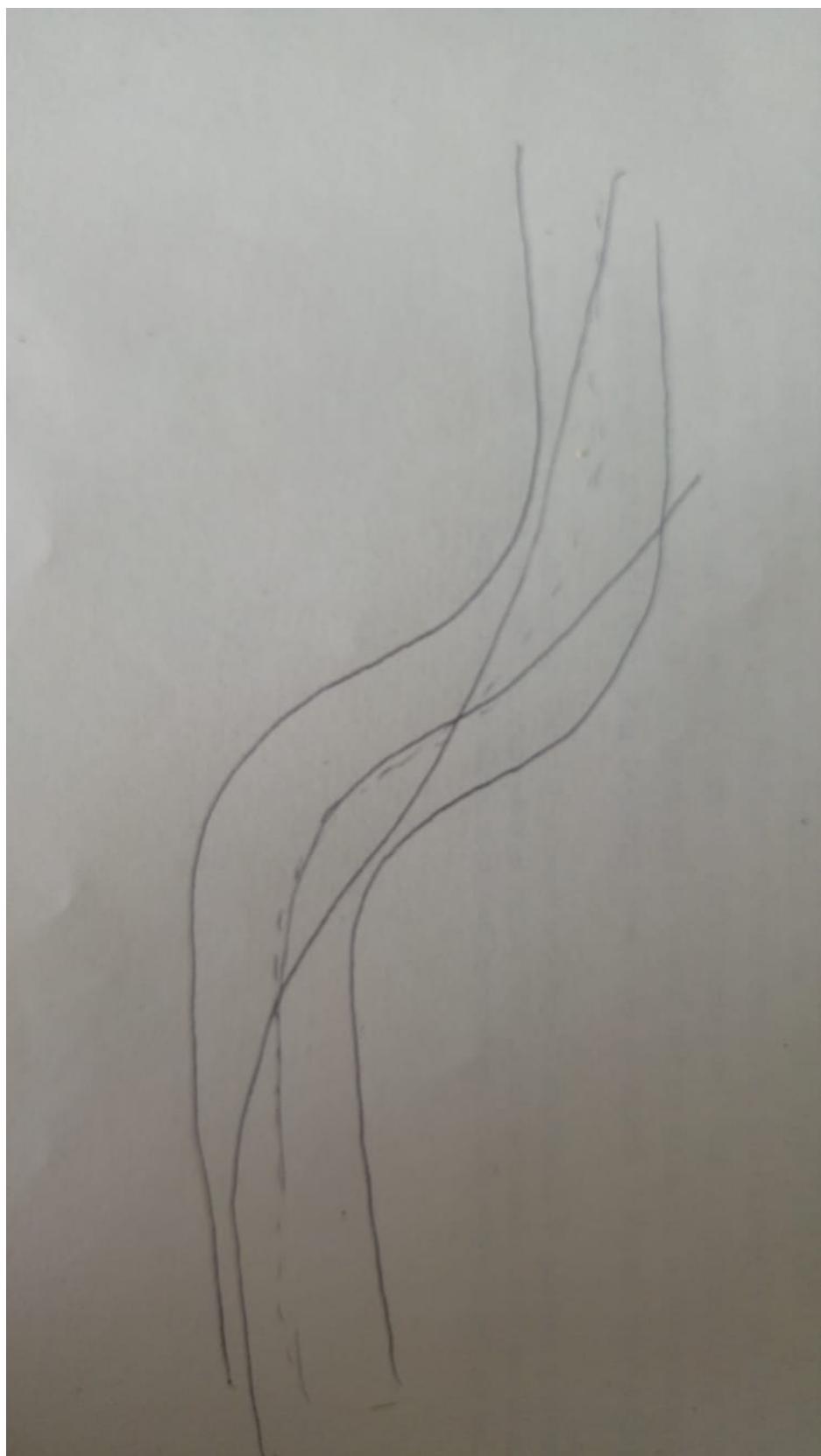


Abbildung 7.6: Platzhalter  
64

---

# 8 Zusammenfassung und Ausblick

---

## 8.1 Zusammenfassung

Dieses Kapitel erhält zunächst einige Worte zu den möglichen Verbesserungen des Simulators und vor allem des MPC-Algorithmus.

## 8.2 Ausblick

### 8.2.1 Dynamisches Fahrzeugmodell im MPC

In dieser Arbeit wurde untersucht, unter welchen Bedingungen ein autonomes Rennauto mit einem Model Predictive Control Algorithmus geregelt werden kann. Das für das Fahrzeug hinterlegte Modell, welches zur Prädiktion zukünftiger Systemzustände genutzt wird, entspricht einem stark vereinfachten kinematischen Modell. Trotz dieser Einschränkung sind bereits hohe Geschwindigkeiten gut kontrollierbar.

### 8.2.2 Zweispurmodell

### 8.2.3 Trajektorienplanung

---

# A Anhang

---

## Elektronischer Anhang

### Fahrzeugdaten

**Abbildung A1:** Engine Power

Engine speed rpm	450SXF_2_Restriktor.s hp	450SXF_2_Restriktor.sum N*m
2000,0030517578	8,3819561005	29,8436508179
2500,001953125	10,3697595596	29,5369606018
3000,001953125	13,8593196869	32,8971099854
3500,00390625	16,6403408051	33,8556404114
3999,9990234375	18,1146297455	32,2482910156
4499,994140625	18,2581005096	28,8922195435
4999,998046875	24,487859726	34,8753318787
5500,001953125	26,7614707947	34,6484909058
6000,0009765625	32,7806510925	38,9048194885
6500,001953125	33,4750900269	36,6729202271
7000	36,7797889709	37,4152297974
7500	43,285118103	41,0974311829
8000	46,9468193054	41,7881698608
8499,9990234375	49,3668899536	41,3574790955
9000	51,845741272	41,0211410522
9499,9990234375	53,4694099426	40,0792007446
9999,9990234375	54,3385696411	38,6941604614
10500	55,5974998474	37,7053718567
11000	57,0893096924	36,9572181702
11500	57,8139610291	35,7990989685
12000	57,2001113892	33,9431991577
12500	54,5902709961	31,0987205505
13000	51,3287887573	28,1160907745

### Einbindung Grafik im Anhang

**Abbildung A2:** Max Tire Force

Engine speed rpm	450SXF_2_Restriktor.s hp	450SXF_2_Restriktor.sum N*m
2000,0030517578	8,3819561005	29,8436508179
2500,001953125	10,3697595596	29,5369606018
3000,001953125	13,8593196869	32,8971099854
3500,00390625	16,6403408051	33,8556404114
3999,9990234375	18,1146297455	32,2482910156
4499,994140625	18,2581005096	28,8922195435
4999,998046875	24,487859726	34,8753318787
5500,001953125	26,7614707947	34,6484909058
6000,0009765625	32,7806510925	38,9048194885
6500,001953125	33,4750900269	36,6729202271
7000	36,7797889709	37,4152297974
7500	43,285118103	41,0974311829
8000	46,9468193054	41,7881698608
8499,9990234375	49,3668899536	41,3574790955
9000	51,845741272	41,0211410522
9499,9990234375	53,4694099426	40,0792007446
9999,9990234375	54,3385696411	38,6941604614
10500	55,5974998474	37,7053718567
11000	57,0893096924	36,9572181702
11500	57,8139610291	35,7990989685
12000	57,2001113892	33,9431991577
12500	54,5902709961	31,0987205505
13000	51,3287887573	28,1160907745

**Abbildung A3:** Unterschrift Bild x Die auf die Rotationsfrequenz des Innenzyinders normierten Eigenfrequenzen der gefun-denenen Grundmoden der Taylor-Strömung für h(Die azimutale Wellenzahl ist mit m bezeichnet.)

---

## Abkürzungsverzeichnis

---

**MPC** Model Predictive Control

**FS** Formula Student

**JIT** just-in-time

**SLSQP** Sequential Least SQuarez Programming

**SFML** Simple and Fast Multimedia Library

---

# Literaturverzeichnis

---

- [AAM] Liniger Alexander, Domahidi Alexander, and Morari Manfred. Optimization-based autonomous racing of 1:43 scale rc cars. *Optimal Control Applications and Methods*, 36(5):628–647.
- [AGT12] C. Athanasiadis, D. Galanopoulos, and A. Tefas. Progressive neural network training for the open racing car simulator. In *2012 IEEE Conference on Computational Intelligence and Games (CIG)*, pages 116–123, Sept 2012.
- [BAS] Rechtsfolgen zunehmender fahrzeugautomatisierung. [https://www.bast.de/BAST\\_2017/DE/Publikationen/Foko/2013-2012/2012-11.html](https://www.bast.de/BAST_2017/DE/Publikationen/Foko/2013-2012/2012-11.html). Accessed on 2018-06-22.
- [CUR18] FLORIAN CURINGA. Autonomous racing using model predictive control. 2018.
- [Dan51] G. B. Dantzig. *Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities, in Activity Analysis of Production and Allocation*, chapter XXI. Wiley, New York, 1951.
- [FB05] T. Keviczky J. Asgari D. Hrovat F. Borrelli, P. Falcone. Mpc-based approach to active steering for autonomous vehicle systems. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems (IJVAS)*, 3(2/3/4), 2005.
- [FGW02] Anders Forsgren, Philip E. Gill, and Margaret H. Wright. Interior methods for nonlinear optimization. *SIAM Review*, 44(4):525–597, 2002.
- [FsW] Formula student - world ranking lists. <https://mazur-events.de/fs-world/>. Accessed on 2018-05-14.
- [GD17] G. Ganga and M. M. Dharmana. Mpc controller for trajectory tracking control of quadcopter. In *2017 International Conference on Circuit, Power and Computing Technologies (ICCPCT)*, pages 1–6, April 2017.

- [HB15] Grischa Gottschalg Lukas Ortmann Henrik Bey, Lukas Brunke. MPC for Trajectory Planning of Race Cars with Obstacle Avoidance. 2015.
- [jul] Juliadiff. <http://www.juliadiff.org/>. Accessed on 2018-06-01.
- [KG10] Krisada Kritayakirana and J. Christian Gerdes. Autonomous cornering at the limits: Maximizing a “g-g” diagram by using feedforward trail-braking and throttle-on-exit. *IFAC Proceedings Volumes*, 43(7):548 – 553, 2010. 6th IFAC Symposium on Advances in Automotive Control.
- [KPSB15] J. Kong, M. Pfeiffer, G. Schildbach, and F. Borrelli. Kinematic and dynamic vehicle models for autonomous driving control design. In *2015 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, pages 1094–1099, June 2015.
- [PB92] Hans B. Pacejka and Egbert Bakker. The magic formula tyre model. *Vehicle System Dynamics*, 21(sup001):1–18, 1992.
- [PER16] GONÇALO COLLARES PEREIRA. Model Predictive Control for Autonomous Driving of Over-Actuated Research Vehicle. 2016.
- [Raj11] R. Rajamani. *Vehicle Dynamics and Control*. Mechanical Engineering Series. Springer US, 2011.
- [SCT07] M. Spcmgenberg, V. Calmettes, and J. Y. Tourneref. Fusion of gps, ins and odometric data for automotive navigation. In *2007 15th European Signal Processing Conference*, pages 886–890, Sept 2007.
- [sim] Simplex verfahren. <https://de.wikipedia.org/wiki/Simplex-Verfahren>. Accessed on 2018-05-31.
- [SMED10] D.E. Seborg, D.A. Mellichamp, T.F. Edgar, and F.J. Doyle. *Process Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, 2010.
- [TT16] Andrei Turkin and Aung Thu. Benchmarking python tools for automatic differentiation. *CoRR*, abs/1606.06311, 2016.
- [Way] First autonomous taxi in 2018 says waymo. [https://www.theregister.co.uk/2018/05/09/first\\_autonomous\\_vehicles/](https://www.theregister.co.uk/2018/05/09/first_autonomous_vehicles/). Accessed on 2018-05-15.

- [WDG<sup>+</sup>16] Grady Williams, Paul Drews, Brian Goldfain, James M. Rehg, and Evangelos Theodorou. Aggressive driving with model predictive path integral control. *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1433–1440, 2016.
- [WDY16] Shiyao Wang, Zhidong Deng, and Gang Yin. An accurate gps-imu/dr data fusion method for driverless car based on a set of predictive models and grid constraints. *Sensors*, 16(3), 2016.
- [WQ01] Danwei Wang and Feng Qi. Trajectory planning for a four-wheel-steering vehicle. In *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.01CH37164)*, volume 4, pages 3320–3325 vol.4, 2001.

---

# Sebastian Weller

---

## Persönliche Daten

Adresse	An der Kühruh 13 96123 Litzendorf
Mobil	0170 - 9732890
Email	sebastian.weller01@gmail.com
Geburtsdatum	01.04.1992
Staatsangehörigkeit	deutsch

## Studium und Schulbildung

01/2013 - 07/2018	Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg Studium: Informations und Kommunikationstechnik
01/2011 - 01/2013	Ohm-Fachhochschule Nürnberg Studium: Elektrotechnik

## Berufliche Erfahrungen / Praktika

01/2016 - 07/2016	Wissenschaftlicher Hilfsmitarbeiter am Fraunhofer IIS
01/2016 - 07/2016	Praktikum bei Siemens Erlangen

## Zusatzqualifikationen

Sprachen	Deutsch (Muttersprache) Englisch (fließend in Wort und Schrift)
Programmiersprachen	Java    C++    C Julia    Python

Erlangen, den (Datum eintragen)

---

Sebastian Weller