

# Trabajo Práctico: Detección y Localización de un Móvil con Radar

66.75 - Procesos estocásticos

Universidad de Buenos Aires, Facultad de ingeniería

Abril de 2013

## 1. Objetivo

El presente trabajo práctico tiene el objetivo de fijar los conceptos principales vistos en la materia a través de una aplicación real simplificada del campo ingenieril. Se pretende que los alumnos tomen contacto con un trabajo del área de radares y, aplicando los conocimientos estudiados en la materia, puedan resolver un problema concreto. Para ello, se les facilita una serie de ayudas provistas por el cuerpo docente, que les permitan focalizar la resolución del trabajo práctico en los conceptos y no en detalles de implementación.

## 2. Normas

El trabajo práctico es de carácter obligatorio y está regido por una serie de normas que se mencionan a continuación:

- Se podrá resolver el trabajo práctico en forma individual o grupal con un máximo de 2 alumnos por grupo sin excepción.
- La fecha de entrega del trabajo práctico está publicada en el calendario y es inamovible. No obstante, los grupos podrán realizar entregas parciales, si así lo desean, a lo largo del cuatrimestre y antes de la fecha de entrega. Luego de la entrega, el cuerpo docente dispondrá de una semana para su corrección. Si el trabajo práctico no está listo para aprobar, será devuelto al/los autor/es para su mejora. En ese caso, los alumnos dispondrán de una oportunidad más para entregarlo nuevamente, contando con una semana de tiempo para ello. Los trabajos prácticos que sean entregados después de la fecha publicada no serán aceptados.

- Al finalizarse el trabajo práctico, se deberá confeccionar un informe por grupo (sea de 1 ó 2 personas) que detalle la resolución del mismo. El informe debe ser conciso, prolijo, claro y no incluir el enunciado del trabajo práctico. Los informes que no cumplan con estas condiciones no serán aceptados.
- Si el alumno no aprobó la evaluación parcial, deberá rendir una evaluación oral a modo de recuperatorio, donde también deberá defender el trabajo práctico realizado.
- La nota del trabajo práctico se promedia junto con la del parcial para obtener la nota de la cursada.

### 3. Introducción y motivación

En este trabajo vamos a analizar un sistema de radar, en particular, la detección y estimación de la posición y velocidad de un móvil. El diseño y análisis de sistemas de radar es un tema complejo que involucra una gran cantidad de problemas [2]. Aquí nos concentraremos únicamente en algunos aspectos relacionados con la materia. Para ello, realizaremos una serie de hipótesis o simplificaciones que nos permitirán focalizarnos únicamente en la integración de los conceptos estudiados en el curso. Con el objetivo de enriquecer la comprensión del sistema y analizar variantes en forma rápida y sencilla, se realizarán simulaciones en la computadora<sup>1</sup>.

Un radar es un sistema electromagnético utilizado para la detección y localización de objetos. Para ello, el transmisor emite una onda o señal de banda angosta centrada en una frecuencia de portadora  $f_c$ . Por simplicidad, supondremos que la antena es isotrópica, es decir, que la energía se emite uniformemente en todas las direcciones<sup>2</sup>. Si hay un objeto presente, una porción de la señal transmitida será reflejada por el mismo. En general, la forma de la onda reflejada dependerá de las características del blanco (por ejemplo, su tamaño, forma y tipo de trayectoria que realiza). Aquí consideraremos que durante el intervalo de tiempo que el mismo es “iluminado” por el radar, sus características no varían significativamente y que la distancia del radar al objeto es mucho mayor a sus dimensiones. Esto nos permitirá modelar al móvil como un objeto puntual. A su vez, supondremos por simplicidad que el mismo se mueve a una velocidad constante. Como veremos, esto implica que los efectos del objeto sobre la señal son simplemente una atenuación y un corrimiento en fase. Típicamente, al receptor llega una versión atenuada y distorsionada de la señal reflejada. Las perturbaciones pueden deberse a diversas causas: fuentes externas de ruido, reflexiones con otros obstáculos o, en forma más general, el fenómeno de *clutter*<sup>3</sup>, etc. En este trabajo, vamos a modelar estas perturbaciones mediante ruido aditivo Gaussiano, lo

---

<sup>1</sup>Se recomienda usar MATLAB/Octave, aunque esto no es un requisito.

<sup>2</sup>En realidad, esta onda es transmitida con un diagrama de radiación, resultando en diferentes niveles de densidad de potencia para distintas direcciones.

<sup>3</sup>Esto incluye todos los “ecos” no deseados.

cual puede justificarse en cierta medida mediante el teorema central del límite.

Hay dos problemas fundamentales que queremos resolver:

- I Decidir si efectivamente hay un móvil presente o no. Este es un problema de *detección*.
- II Medir eventualmente su posición y velocidad. Este es un problema de *estimación*.

Obviamente, ambos problemas están ligados: no tiene sentido estimar la posición y velocidad del móvil si decidimos que no hay móvil. Esto nos llevará a plantear un problema de detección y estimación conjunta.

Finalmente, notamos que a pesar de las simplificaciones realizadas, este trabajo permitirá al alumno comprender los aspectos fundamentales de procesamiento de señales involucrados en los sistemas modernos de radar. En una etapa posterior, uno podría refinar el modelo para adaptarlo a una situación real.

## 4. Descripción del Sistema e Implementación

En la figura 1 se muestra un diagrama conceptual del sistema completo. A continuación discutiremos cada aspecto por separado, de modo de facilitar la implementación del mismo.

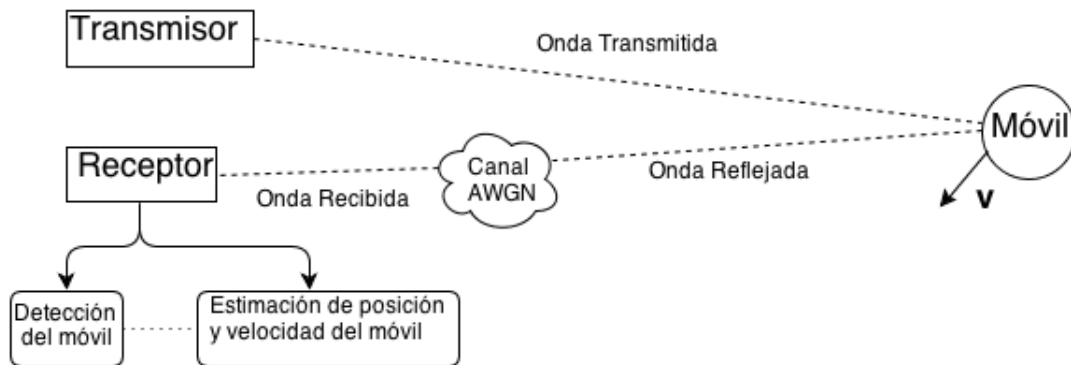


Figura 1: Esquema simple de un sistema de radar.

### 4.1. Transmisor

Supongamos que el radar emite una onda senoidal, de amplitud  $\alpha$  y frecuencia  $f_c$ , modulada por un pulso rectangular de duración  $T$ :

$$s(t) = \begin{cases} \alpha \cos(2\pi f_c t), & \text{para } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{para } T \leq t \leq T_f \end{cases} \quad (1)$$

donde  $T_f$  se considera el tiempo final de observación y se relaciona directamente con el rango del radar, es decir, la distancia máxima a la cual puede detectar un objeto. Dicha relación se evaluará en detalle más adelante. Por simplicidad, supondremos que  $T$  y  $T_f$  son múltiplos del período de la senoidal  $T_c = 1/f_c$ . En otras palabras, tendremos que

$$k = \frac{T}{T_c} = T \times f_c \quad (2)$$

para algún valor de  $k \in \mathbb{N}$ , y

$$k_f = \frac{T_f}{T_c} = T_f \times f_c \quad (3)$$

para algún valor de  $k_f \in \mathbb{N}$ .

La implementación del bloque transmisor es es muy sencilla. Se debe generar un vector de  $M$  muestras equiespaciadas de la señal transmitida con una función que siga el siguiente prototipo:

```
s = generar_onda_transmitida(alpha, fc, theta, k, kf, M)
```

donde por generalidad se agregó un parámetro  $\theta$ , que representa la fase inicial. Si bien es nula en este caso, brinda una flexibilidad que será útil en la implementación de los siguientes bloques.

## 4.2. Reflexión

Ahora consideramos que la onda es reflejada por un blanco. Primero analizamos el caso simple de un blanco fijo y luego procedemos a modelar la reflexión más compleja que produce un blanco móvil.

### 4.2.1. Blanco fijo

Supongamos que la onda es reflejada por un blanco que se encuentra a una distancia  $d$  del transmisor. El tiempo  $\tau$  que le toma a la onda viajar desde el transmisor hasta el objeto y volver se denomina retardo de *round-trip* y se puede calcular como

$$\tau = \frac{2d}{c} \quad (4)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz, de valor aproximadamente igual a  $3 \times 10^8$  m/s. Como hemos mencionado, suponemos que la distancia entre el objeto y el radar es mucho mayor

que las dimensiones del mismo. Esto significa que podemos modelar la respuesta del objeto a la onda transmitida como una única reflexión dada por [4]

$$X(t) = \begin{cases} \alpha A \cos(2\pi f_c(t - \tau) + \Theta), & \text{para } \tau \leq t \leq \tau + T \\ 0, & \text{para } t < \tau, \tau + T < t \leq T_f \end{cases} \quad (5)$$

donde  $A$  representa la atenuación de la señal, modelada como una variable aleatoria Rayleigh con parámetro  $\sigma$  y  $\Theta$  es un corrimiento en fase propio de la reflexión, que modelamos como una variable aleatoria Uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ .

Finalmente, podemos absorber la amplitud  $\alpha$  original de la onda transmitida en la variable Rayleigh, de modo que

$$X(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_c(t - \tau) + \Theta), & \text{para } \tau \leq t \leq \tau + T \\ 0, & \text{para } t < \tau, \tau + T < t \leq T_f \end{cases} \quad (6)$$

donde ahora  $A$  es una variable aleatoria Rayleigh con parámetro  $\alpha\sigma$ . Es interesante notar que este es un proceso estocástico ESA si se lo considera definido en todo instante de tiempo como  $X(t) = A \cos(2\pi f_c(t - \tau) + \Theta)$  (ver ejercicio 1).

Ahora podemos relacionar el tiempo final de observación con la distancia máxima a la cual puede estar un objeto, y la duración del pulso transmitido, de modo que el mismo pueda ser detectado correctamente por el radar.<sup>4</sup> En el caso límite, tendremos que  $\tau_{\text{máx}} + T = T_f$ , o bien

$$\tau_{\text{máx}} = T_f - T \quad (7)$$

Así, la distancia máxima o el *rango* del radar es:

$$d_{\text{máx}} = \frac{c(T_f - T)}{2} \quad (8)$$

La implementación se considera en el siguiente apartado, para el caso más general de un blanco móvil.

#### 4.2.2. Blanco móvil

Consideremos ahora que el móvil se mueve en la dirección radial<sup>5</sup> al radar con una velocidad constante  $v$ , siendo  $v > 0$  si el mismo se acerca al radar y  $v < 0$  si se aleja. En dicho caso, la distancia entre ambos en un instante  $t$  será

$$d(t) = d_0 - vt \quad (9)$$

<sup>4</sup>Adoptamos como criterio poder ver todo el pulso reflejado.

<sup>5</sup>Al ser el radar isotrópico, únicamente podemos detectar el movimiento del blanco en la dirección radial. Esto nos permite simplificar el problema tridimensional a uno unidimensional.

donde  $d_0$  es la distancia inicial del objeto al radar. Aquí, el retardo de round-trip también dependerá del tiempo. Sea  $\tau(t)$  el retardo de round-trip de una onda emitida por el radar en el instante  $t$ . Notar que una señal emitida en el instante  $t$  es reflejada por el móvil en el instante  $t + \tau(t)/2$ . Entonces, por definición:

$$\tau(t) = \frac{2d(t + \tau(t)/2)}{c} = \frac{2[d_0 - v(t + \tau(t)/2)]}{c} \quad (10)$$

Despejando  $\tau(t)$ , obtenemos

$$\tau(t) = \frac{2d_0/c}{1 + v/c} - \frac{2(v/c)t}{1 + v/c} \approx \frac{2d_0}{c} - \frac{2v}{c}t \quad (11)$$

donde la aproximación considera el hecho de que la velocidad del móvil es mucho menor que la velocidad de la luz. Esto significa que el round-trip para el pulso de largo  $T$  variará entre  $2d_0/c$  y  $2d_0/c - 2(v/c)T$ . Entonces, el pulso reflejado se observará entre

$$\tau(0) = \tau_0 = 2\frac{d_0}{c} \quad (12)$$

y

$$\tau(T) + T = 2\frac{d_0}{c} + \left(1 - 2\frac{v}{c}\right)T \approx 2\frac{d_0}{c} + T = \tau_0 + T \quad (13)$$

Esto significa que podemos ignorar la “dispersión” del pulso y modelar la onda reflejada como

$$X(t) = \begin{cases} A \cos \left[ 2\pi f_c \left( 1 + \frac{2v}{c} \right) t - 2\pi f_c \tau_0 + \Theta \right] & \text{para } \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \\ 0, & \text{para } 0 \leq t < \tau_0, \tau_0 + T < t \leq T_f \end{cases} \quad (14)$$

Notar que hay un cambio en la frecuencia debido al movimiento del blanco que se denomina *corrimiento Doppler* y está dado por

$$f_D = \frac{2v}{c} f_c \quad (15)$$

También observamos que podemos absorber  $2\pi f_c \tau_0$  en la variable aleatoria  $\Theta$  ya que  $\Theta - 2\pi f_c \tau_0 \bmod 2\pi \sim \mathcal{U}[0, 2\pi)$ , de modo que podemos simplificar la onda reflejada a

$$X(t) = \begin{cases} A \cos [2\pi(f_c + f_D)t + \Theta] & \text{para } \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \\ 0, & \text{para } 0 \leq t < \tau_0, \tau_0 + T < t \leq T_f \end{cases} \quad (16)$$

La función a implementar para este bloque debe generar un vector de  $M$  muestras equiespaciadas de la onda reflejada por un móvil, cuya velocidad radial es constante e igual a  $v$ . Su prototipo es de la forma

`x = generar_onda_reflejada(alpha, fc, k, kf, sigma, v, d0, M)`

La misma debe escribirse en base a la función que genera la onda transmitida, es decir, evite repetir código.

### 4.3. Ruido

Como mencionamos en la introducción, la perturbación será modelada como un ruido blanco aditivo Gaussiano  $N(t)$ , cuya densidad espectral de potencia es igual a  $N_0/2$ . Esto significa que la señal recibida será:

$$R(t) = \begin{cases} A \cos [2\pi(f_c + f_D)t + \Theta] + N(t), & \text{para } \tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T \\ N(t), & \text{para } 0 \leq t < \tau_0, \tau_0 + T < t \leq T_f \end{cases} \quad (17)$$

cuando haya un móvil presente, y

$$R(t) = N(t), \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_f \quad (18)$$

cuando no.

En adelante, llamaremos  $\mathcal{H}_0$  a la hipótesis de que no hay blanco y  $\mathcal{H}_1$  a la hipótesis de que si lo hay<sup>6</sup>. Luego, la probabilidad de que haya un blanco es  $p = \mathbb{P}(\mathcal{H}_1)$  y, por lo tanto, la probabilidad de que no lo haya es  $q = 1 - p = \mathbb{P}(\mathcal{H}_0)$ .

A los efectos de la implementación, se deberán escribir dos funciones. En primer lugar, una que genere un vector de  $M$  muestras de ruido blanco Gaussiano de varianza igual a  $N_0/2$ , con el siguiente prototipo:<sup>7</sup>

```
N = generar_ruido_blanco_gaussiano(N0,M)
```

Valiéndose de esta función, y las anteriores, podrá escribir la segunda función. La misma debe devolver  $M$  muestras de la onda recibida que será igual a (17) con probabilidad  $p$  e igual a (18) con probabilidad  $q$ . Recibe como entrada a la onda reflejada y los parámetros  $N_0$  y  $p$ . El prototipo es el siguiente:

```
R = generar_onda_recibida(X,N0,p)
```

<sup>6</sup>Esta nomenclatura es la que luego usaremos para formular el problema de detección del blanco. Si el alumno aún no está familiarizado con la misma, puede consultar el apunte de detección binaria, o bien las referencias [3] o [1].

<sup>7</sup>Hay que aclarar que estas no son muestras directas del proceso  $N(t)$ , sino que representan muestras de un proceso de ruido que se obtiene en la práctica tras filtrar el proceso  $R(t)$  con un filtro pasabanda. Aquí estamos considerando que dicho filtro pasabanda es ideal y que las muestras representan ruido blanco en tiempo discreto (ver ejercicio 2).

#### 4.4. Receptor I: Detección y Estimación de la Posición Inicial

Como hemos mencionado en la introducción, en el problema de radar debemos resolver un problema de detección y uno de estimación que están ligados entre sí. Por este motivo, es natural presentar un algoritmo que permita resolverlos en forma conjunta. En esta sección nos dedicaremos al problema de detección y de estimación de la posición inicial del móvil, difiriendo la generalización a la estimación de la velocidad para la siguiente. Las ondas recibidas bajo las hipótesis  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_0$ , están dadas por las ecuaciones (17) y (18), respectivamente. Vemos que la única diferencia entre ambas, es decir, el proceso  $X(t)$ , es relevante únicamente en el intervalo  $\tau_0 \leq t \leq \tau_0 + T$ . Esto significa que nuestra detección puede basarse solamente en la señal observada en ese intervalo. El problema es que desconocemos  $\tau_0$  y es por esto que interviene el problema de estimación. Primero ignoraremos este inconveniente, asumiendo que dicha constante es conocida, para luego presentar el algoritmo en su forma más general.

Consideremos otra representación equivalente para  $R(t)$  bajo  $\mathcal{H}_1$  en el período de interés. Despreciando el corrimiento Doppler<sup>8</sup>, resulta:

$$\begin{aligned} R(t) &= A \cos(2\pi f_c t + \Theta) + N(t) \\ &= A \cos \Theta \cos(2\pi f_c t) - A \sin \Theta \sin(2\pi f_c t) + N(t) \end{aligned} \quad (19)$$

Esta expresión muestra que  $R(t)$  se puede escribir como una combinación lineal de dos funciones conocidas y ortogonales<sup>9</sup> cuyas amplitudes son aleatorias, con distribución Gaussiana<sup>10</sup> de media nula y varianza  $(\alpha\sigma)^2$ , sumada a ruido blanco Gaussiano. Al ser únicamente aleatorias las amplitudes, podemos encontrar el filtro adaptado a cada componente:

$$h_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c(\tau_0 - t)) \quad (20)$$

$$h_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c(\tau_0 - t)) \quad (21)$$

donde las constantes  $\sqrt{2/T}$  son arbitrarias y se eligen únicamente para normalizar las respuestas impulsivas en un intervalo  $T$ . Como vimos en el curso, el filtro adaptado maximiza la relación señal a ruido resultante en el instante de detección. Esto nos permitirá basar la decisión en las siguientes dos variables:

<sup>8</sup>Esto es posible pues  $f_D \ll f_c$  y aquí no nos interesa la velocidad del móvil.

<sup>9</sup>Cuyo significado matemático es  $\int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos(2\pi f_c u) \sin(2\pi f_c u) du = 0$ .

<sup>10</sup>Ver ejercicio 14 de la guía 1.



$$\begin{aligned}
R_1 &= R(t) * h_1(t) \Big|_{t=\tau_0} = \sqrt{\frac{2}{T}} A \cos \Theta \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos^2(2\pi f_c u) du + \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \cos(2\pi f_c u) N(u) du \\
&= \sqrt{\frac{T}{2}} A \cos \Theta + N_1
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
R_2 &= R(t) * h_2(t) \Big|_{t=\tau_0} = \sqrt{\frac{2}{T}} A \sin \Theta \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \sin^2(2\pi f_c u) du + \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \sin(2\pi f_c u) N(u) du \\
&= \sqrt{\frac{T}{2}} A \sin \Theta + N_2
\end{aligned} \tag{23}$$

donde  $N_1$  y  $N_2$  son dos variables aleatorias independientes, Gaussianas de media nula y varianza  $N_0/2$ .

Ahora podemos reformular el problema de decisión como:

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{X} + \mathbf{N}, & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{N}, & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \end{cases} \tag{24}$$

donde  $\mathbf{X} = \sqrt{\frac{T}{2}} [A \cos \Theta, A \sin \Theta]^T$  y  $\mathbf{N} = [N_1, N_2]^T$ . Luego, decidiremos en base al valor  $\mathbf{r}$  que tome esta variable, siguiendo la regla MAP:

$$\frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1|\mathbf{r})}{\mathbb{P}(\mathcal{H}_0|\mathbf{r})} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} 1 \tag{25}$$

donde  $\mathbb{P}(\mathcal{H}_i|\mathbf{r})$  es la probabilidad a posteriori de la hipótesis  $i$ , esto es, la probabilidad de la hipótesis  $i$  dada la observación  $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ . Usango la regla de Bayes, esta probabilidad puede escribirse como:

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}_i|\mathbf{r}) = \frac{f_{\mathbf{R}|\mathcal{H}_i}(\mathbf{r}|\mathcal{H}_i)\mathbb{P}(\mathcal{H}_i)}{f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})} \tag{26}$$

y entonces la regla MAP toma la forma

$$L(\mathbf{r}) = \frac{f_{\mathbf{R}|\mathcal{H}_1}(\mathbf{r}|\mathcal{H}_1)}{f_{\mathbf{R}|\mathcal{H}_0}(\mathbf{r}|\mathcal{H}_0)} \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)}{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1)} = \gamma \tag{27}$$

donde  $L(\mathbf{r})$  se denomina cociente de verosimilitud, que se compara con el umbral  $\gamma$  para efectuar la decisión. Por conveniencia matemática, aplicamos logaritmo natural a la regla de decisión y obtenemos finalmente<sup>11</sup>

<sup>11</sup>Esto es posible porque el logaritmo es una función monótona creciente.

$$l(\mathbf{r}) = \log L(\mathbf{r}) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \log \gamma \quad (28)$$

donde  $l(\mathbf{r})$  se conoce como cociente de verosimilitud logarítmico. En este caso, la regla de decisión se puede escribir como (ver ejercicio 3)

$$\|\mathbf{r}\|^2 \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} 2 \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \left( \log \gamma - 2 \log \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right) \quad (29)$$

donde  $\sigma_0^2 = \text{Var}(\mathbf{R}|\mathcal{H}_0) = N_0/2$  y  $\sigma_1^2 = \text{Var}(\mathbf{R}|\mathcal{H}_1) = T/2(\alpha\sigma)^2 + N_0/2$ . Notar que hemos obtenido un detector cuadrático, lo cual tiene sentido pues la diferencia entre la variable observada para las distintas hipótesis está en el momento de segundo orden.

Hasta el momento, hemos supuesto como conocido  $\tau_0$  pero, como mencionamos previamente, es necesario estimarlo. Considerando el efecto del filtro adaptado como correlador, una estrategia es evaluar las siguientes funciones a partir de la observación  $r(t)$ :

$$r_1(u) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_u^{u+T} r(t) \cos(2\pi f_c t) dt \quad (30)$$

y

$$r_2(u) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_u^{u+T} r(t) \sin(2\pi f_c t) dt \quad (31)$$

Luego, buscamos el valor de  $u$  entre 0 y  $T_f - T$  que maximice  $\|\mathbf{r}(u)\|^2$ . Si para este valor de  $u$ , digamos  $u^*$ , se verifica que

$$\|\mathbf{r}(u^*)\|^2 > 2 \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \left( \log \gamma - 2 \log \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right) \quad (32)$$

entonces se detecta un blanco y la estimación de  $d_0$  (lo que nos interesa en última instancia) es

$$\hat{d}_0 = \frac{cu^*}{2} \quad (33)$$

Implemente una función que detecte un móvil y estime la posición inicial. La variable  $D$  valdrá 0 ó 1 de acuerdo a la hipótesis escogida. En caso de decidir  $\mathcal{H}_0$ , la variable  $\hat{d}_0$  es irrelevante, y puede tomar un valor negativo, por ejemplo  $-1$ . El prototipo es el siguiente:

```
[D, d0_est] = detectar_y_estimar_posicion_inicial(R, alpha, fc, k, kf, sigma, N0, p)
```

## 4.5. Receptor II: Detección y Estimación de Posición y Velocidad\*

Esta parte es de implementación opcional, pero se recomienda fuertemente si se cuenta con el tiempo necesario. Ya hemos apreciado que el corrimiento Doppler es muy pequeño frente a la frecuencia de la portadora y, por este motivo, parece difícil estimar la velocidad del móvil con una precisión aceptable. Sin embargo, si detectamos un móvil y estimamos su retardo inicial, podemos aplicar una transformación muy simple que nos permitirá estimar el corrimiento Doppler. La idea es multiplicar la señal recibida en el intervalo  $[\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_0 + T]$  por una senoidal con frecuencia  $f_c$  y valernos de una simple identidad trigonométrica<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned}\cos(2\pi f_c t)R(t) &= A \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi(f_c + f_D)t + \Theta) + \cos(2\pi f_c t)N(t) \\ &= \frac{A}{2} [\cos(2\pi f_D t + \Theta) + \cos(2\pi(2f_c + f_D)t + \Theta)] + \cos(2\pi f_c t)N(t) \quad (34)\end{aligned}$$

Esto muestra que la señal resultante está formada por dos procesos monocromáticos con frecuencias muy distintas y ruido Gaussiano<sup>13</sup>. Luego, es posible usar algún estimador de la densidad espectral de potencia, de los estudiados en clase, para obtener la velocidad del móvil. Escriba una función que complete el receptor anterior, permitiendo la estimación de la velocidad, cuyo prototipo sea el siguiente:

```
[D, d_est, v_est] = detectar_y_estimar_pos_y_vel(R, alpha, fc, k, kf, sigma, N0, p)
```

## 5. Ejercicios Obligatorios

En esta sección presentaremos una serie de ejercicios teóricos y de simulación que forman el núcleo del trabajo práctico.

### 5.1. Ejercicios Teóricos

1. En este ejercicio analizamos los procesos dados por la onda reflejada por un blanco fijo, por un blanco móvil y, finalmente, la onda que recibe el radar. En todos los casos, extender la parte que contiene a la onda senoidal, de modo que los procesos queden definidos  $\forall t \in \mathbb{R}$  en forma no trivial.

- a) Probar que la onda reflejada por un objeto fijo, dada por la ecuación (6), es un proceso ESA y calcular su media y su función de autocorrelación.

<sup>12</sup> $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}$

<sup>13</sup>Notar que si bien este proceso es Gaussiano, no es estacionario. Su efecto se estudiará en un ejercicio opcional.

- b) Idem para la onda reflejada por un objeto que se mueve a una velocidad constante. Compare ambas funciones de autocorrelación y extraiga conclusiones.
  - c) Idem para la onda recibida. Determine también la densidad espectral de potencia. ¿Cuál es la influencia del ruido?
2. Sea  $N(t)$  ruido blanco Gaussiano de media nula y con densidad espectral de potencia igual a  $N_0/2$ .
- a) Suponga que dicho proceso pasa por un filtro pasa banda ideal centrado en  $f_c$  y de ancho de banda  $B$ . Denote al proceso que se obtiene a la salida del filtro como  $W(t)$ . Caracterice a dicho proceso.
  - b) Ahora el proceso se muestrea a una frecuencia  $f_s$  y se obtiene un proceso  $W(n)$ . Encuentre qué condición debe satisfacer  $f_s$  para que  $W(n)$  sea ruido blanco Gaussiano y encuentre la relación entre la varianza del proceso y  $N_0/2$ .
3. Derive la regla de decisión (29) y encuentre la probabilidad de error.

## 5.2. Ejercicios de Simulación

4. Simule el sistema de radar utilizando los siguientes parámetros:<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \quad f_c = 100 \text{ MHz}, \quad k = 10, \quad k_f = 1000, \quad M = 10^5, \quad \sigma = 1, \quad d_0 = 100 \text{ m}, \\ v &= 300 \text{ m/s}, \quad N_0 = 10^{-10} \text{ W/Hz}, \quad p = 1/2 \end{aligned} \quad (35)$$

Realice varias simulaciones y determine su performance. Para ello, calcule la cantidad de errores cometidos sobre el total y el error cuadrático medio empírico del estimador de posición inicial (y, opcionalmente, del estimador de velocidad). Extraiga conclusiones.

5. En este ejercicio buscamos evaluar como depende la performance de los distintos parámetros. Elija los 4 parámetros que considere más importantes y juegue con valores para cada uno de ellos, manteniendo a todos los demás constantes. Extraiga conclusiones.

## 6. Ejercicios Opcionales

Estos ejercicios son complementarios y buscan extender algunas características del sistema. La realización de ellos profundizará, en forma global, la comprensión del alumno sobre el trabajo y se verá reflejada en la calificación final.

<sup>14</sup>Los parámetros se eligieron por comodidad en las simulaciones y los cálculos y no representan necesariamente valores típicos que se usan en la práctica.

1. Implemente el receptor II descrito en la sección 4.5. Evalúe la performance del mismo con los mismos parámetros definidos previamente. Extraiga conclusiones.
2. Analice el proceso  $V(t) = \cos(2\pi f_c t)N(t)$ , donde  $N(t)$  es ruido blanco Gaussiano de media nula y densidad espectral de potencia igual a  $N_0/2$ . Compare un periodograma de muestras de  $V(t)$  con un periodograma de muestras de  $N(t)$ . ¿Qué diferencias observa? ¿Cuál será su influencia en la estimación del corrimiento Doppler?
3. En el trabajo práctico hemos desarrollado el detector pensando en minimizar la probabilidad de error. Sin embargo, el problema de detección de un móvil es asimétrico (i.e., no pesan lo mismo los distintos tipos de errores). Esto puede capturarse sencillamente con el criterio Bayesiano. Modifique el test para tener esto en cuenta si los costos  $C_{ij}$  de elegir la hipótesis  $\mathcal{H}_i$  cuando  $\mathcal{H}_j$  es cierta son:

$$C_{00} = 0, \quad C_{10} = 1, \quad C_{01} = 1000, \quad C_{11} = 0 \quad (36)$$

manteniendo los demás parámetros iguales. ¿Cuál es el efecto sobre el umbral? Justifique en forma intuitiva.

## Referencias

- [1] S. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume II: Detection Theory*. Prentice Hall, 1998.
- [2] M. Skolnik. *Introduction to Radar Systems*. McGraw-Hill, 2002.
- [3] H. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part I*. Wiley, 2001.
- [4] H. Van Trees. *Detection, Estimation and Modulation Theory, Part III*. Wiley, 2001.