

Trabajo Práctico: Detección y Localización de un Móvil con Radar

Sebastián Sampayo

25 de Junio de 2013

2° Entrega

Índice

1. Objetivos	2
2. Implementación	2
3. Simulaciones	3
4. Ejercicios Obligatorios	6
4.1. Ejercicio 1	6
4.1.1. a)	6
4.1.2. b)	7
4.1.3. c)	8
4.2. Ejercicio 2	9
4.2.1. a)	9
4.2.2. b)	11
4.3. Ejercicio 3	13
4.4. Ejercicio 4 (Simulación)	14
4.5. Ejercicio 5 (Simulación)	15
5. Ejercicios Opcionales	17
5.1. Ejercicio 1	17
5.2. Ejercicio 2	17
5.3. Ejercicio 3	18
6. Conclusiones	19

1. Objetivos

El presente trabajo práctico tiene el objetivo de fijar los conceptos principales vistos en la materia a través de una aplicación real simplificada del campo ingenieril. Se pretende que los alumnos tomen contacto con un trabajo del área de radares y, aplicando los conocimientos estudiados en la materia, puedan resolver un problema concreto. Para ello se les facilita una serie de ayudas provistas por el cuerpo docente, que les permitan focalizar la resolución del trabajo práctico en los conceptos y no en detalles de implementación.

2. Implementación

Para encontrar el máximo del módulo del vector r (que está compuesto por la observación luego de pasar por cada uno de los filtros adaptados) lo que se hizo fue multiplicar la observación R por el filtro adaptado y para obtener las diferentes integrales para cada 'u', se convolucionó con un escalón de tamaño T . Luego el u para el cual se de el máximo de este vector resultante será el instante inicial de la cosenoide recibida.

En futuras implementaciones podría mejorarse el algoritmo evitando el uso de la convolución y solucionando el problema de maximizar la función con otro método más rápido. Ejemplo FFT.

Luego de implementar y simular reiteradas veces el filtro, se descubrió que el umbral de decisión se encontraba demasiado cerca del valor que daba el máximo a la salida del filtro cuando efectivamente se enviaba una señal. Por el contrario cuando no se enviaba una señal, la diferencia entre el valor de la observación filtrada y el umbral de decisión era mucho más amplia. Por esta razón, la función solo detectaba correctamente cuando la relación señal/ruido era muy grande. En base a estos hechos, se concluyó que un umbral menor detectaría mejor. En primer lugar se modificó la constante del filtro¹.

Se tenía:

$$h1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(2\pi i \cdot fc \cdot (\tau_0 - t))$$

$$h2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin(2\pi i \cdot fc \cdot (\tau_0 - t))$$

y se modificó por:

$$h1 = \frac{2}{T} \cdot \cos(2\pi i \cdot fc \cdot (\tau_0 - t))$$

$$h2 = \frac{2}{T} \cdot \sin(2\pi i \cdot fc \cdot (\tau_0 - t))$$

Luego se fijó "por decreto" las varianzas de las variables aleatorias, independizándolas de la frecuencia de señal utilizada (f_c). Se tenía:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \tag{1}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{T}{2} \cdot (\alpha\sigma)^2 + \frac{N_0}{2} \tag{2}$$

y se las cambió por:

$$\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2}$$

$$\sigma_1^2 = (\alpha\sigma)^2 + \frac{N_0}{2}$$

3. Simulaciones

En las siguientes pruebas se utilizaron los siguientes parámetros:

```
% ----- Parámetros -----
M = 1e5; Cantidad de muestras generadas
alpha = 1; % Parámetro de variable aleatoria usada para la amplitud
fc = 100e6; % Frecuencia utilizada [Hertz]
k = 10; % Cantidad de períodos de señal a transmitir
kf = 100; % Cantidad de períodos de señal que entran en el largo temporal del sistema.
    % Determina distancia máxima posible de detectar.

sigma = 1; % Parámetro de variable aleatoria usada para la amplitud
v = 0; % [metros por segundo]
d0 = 100; % Distancia real del objeto [metros]
p = .5; % Probabilidad de que haya un objeto
% -----
```

Los resultados obtenidos luego de la simulación del primer modelo y que llevaron al replanteo del problema se muestran a continuación. La idea fue corroborar lo que estaba dando el umbral de decisión y la salida del filtro cuando se recibía señal y cuando no.

```
--- Tests 100 iteraciones en cada caso ---
NO = 1e-10
Efectividad (aciertos/iteraciones): 1.000000
||r|H1||2(en promedio): 9.78e-008
Umbral: 6.91e-010
||r|H0||2(en promedio): 5.06e-021
.
NO = 1e-9
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.980000
||r|H1||2(en promedio): 1.39e-007
Umbral: 4.66e-009
||r|H0||2(en promedio): 4.85e-020
.
NO = 1e-7
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.660000
||r|H1||2(en promedio): 9.62e-008
Umbral: 1.39e-007
||r|H0||2(en promedio): 5.07e-018
.
NO = 0.010000
Efectividad(aciertos/iteraciones): 0.520000
||r|H1||2(en promedio): 1.17e-007
Umbral: 1.00e-002
||r|H0||2(en promedio): 4.89e-013
-----
```

Cuadro 1: Resultados de las simulaciones. (r : observación, salida del filtro)

Como se puede ver, la ubicación del umbral no aprovecha la relación señal/ruido maximizada por el filtro adaptado, ya que este nivel se encuentra mucha más cerca del valor a la salida del filtro cuando hay señal que cuando no.

La mejoría en el algoritmo detector fue comprobada satisfactoriamente con los resultados de las simulaciones que se detallan a continuación.

```

--- Tests 100 iteraciones en cada caso ---
NO = 1.00e-007
Efectividad (aciertos/iteraciones): 1.000000
 $\|r|_{\mathcal{H}_1}\|^2$ (en promedio): 1.53e+000
Umbral: 1.68e-006
 $\|r|_{\mathcal{H}_0}\|^2$ (en promedio): 1.02e-010
.
NO = 1.00e-002
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.980000
 $\|r|_{\mathcal{H}_1}\|^2$ (en promedio): 2.02e+000
Umbral: 5.33e-002
 $\|r|_{\mathcal{H}_0}\|^2$ (en promedio): 9.88e-006
.
NO = 5.00e-001
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.840000
 $\|r|_{\mathcal{H}_1}\|^2$ (en promedio): 2.51e+000
Umbral: 1.01e+000
 $\|r|_{\mathcal{H}_0}\|^2$ (en promedio): 5.03e-004
.
NO = 1.00e+000
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.690000
 $\|r|_{\mathcal{H}_1}\|^2$ (en promedio): 1.89e+000
Umbral: 1.65e+000
 $\|r|_{\mathcal{H}_0}\|^2$ (en promedio): 1.01e-003
-----

```

Cuadro 2: Resultados de las simulaciones. (r : observación, salida del filtro)

Si bien ahora el umbral se encuentra más centrado aprovechando la relación señal/ruido, al aumentar la potencia de ruido se ve que este nivel se acerca nuevamente al valor que arroja la salida del filtro cuando hay señal. Esto indica que se podría seguir modificando el umbral hasta encontrar un nivel óptimo.

En concreto, siguiendo la consigna original, el programa difícilmente detectaba la siguiente señal:

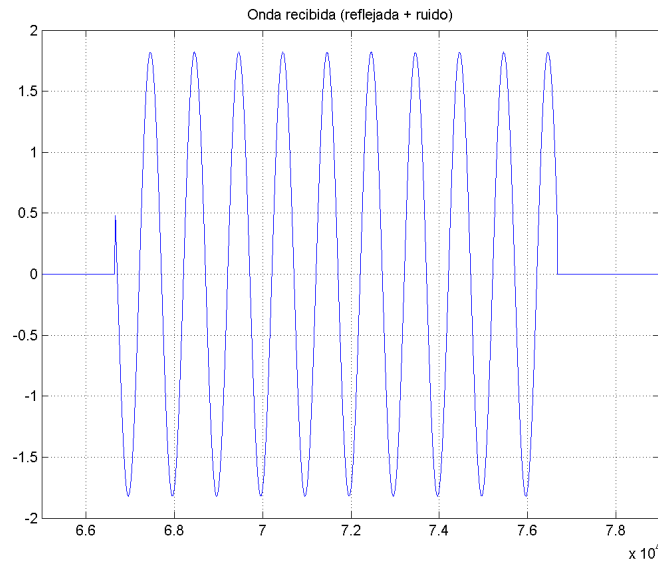


Figura 1: Onda recibida para una $N_0 = 1 \cdot 10^{-6}$. Señal determinística + Ruido Blanco.

Por otro lado, al modificar el umbral, el programa detectaba efectivamente el siguiente tipo de señal:

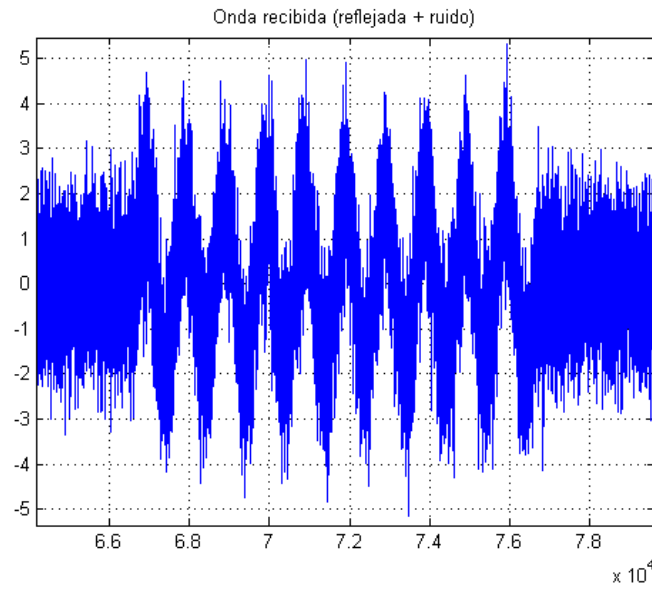


Figura 2: Onda recibida para una $N_0 = 1$. Señal determinística + Ruido Blanco.

4. Ejercicios Obligatorios

4.1. Ejercicio 1

En este ejercicio analizamos los procesos dados por la onda reflejada por un blanco fijo, por un blanco móvil y, finalmente, la onda que recibe el radar. En todos los casos, extender la parte que coincide a la onda senoidal, de modo que los procesos queden definidos $\forall t \in \mathbb{R}$ en forma no trivial.

4.1.1. a)

Probar que la onda reflejada por un objeto fijo, dada por la siguiente ecuación, es un proceso ESA y calcular su media y su función de autocorrelación.

$$X(t) = A \cdot \cos[2\pi \cdot f_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta] , \quad \forall t$$

$$A \sim RAY(\alpha\sigma) , \quad \mu_A = \alpha\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \sigma_A^2 = (\alpha\sigma)^2 \cdot 2\pi$$

$$\Theta \sim U[0, 2\pi)$$

A modo de facilitar el desarrollo de las formulas y facilitar la comprensión definiré la siguiente constante:

$$\omega_c \triangleq 2\pi \cdot f_c$$

En los siguientes resultados se omitirán los cálculos intermedios en la utilización de propiedades trigonométricas básicas como el coseno de suma de ángulos, dado que facilita la lectura y no se considera fundamental en el desarrollo de la idea.

Media

$$\mu_X = \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta]] \quad (3)$$

Como A es independiente de Θ ,

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta]] \quad (4) \\ &= \mu_A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \theta] \cdot f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \mu_A \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \theta] d\theta \\ &= \mu_A \cdot \frac{1}{2\pi} \sin[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \theta] \Big|_0^{2\pi} = \boxed{\mu_X = 0} \end{aligned}$$

Autocorrelación

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t) \cdot X(t + \tau)] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta] \cdot A \cdot \cos[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0) + \Theta]] \quad (6) \\ &= \mathbb{E}[A^2] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta] \cdot \cos[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0) + \Theta]] \end{aligned}$$

Defino por comodidad: $g(\theta) \triangleq \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \theta] \cdot \cos[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0) + \theta]$

$$= (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta$$

Por propiedades trigonométricas de cosenos de sumas de ángulos, y eliminando los productos cruzados de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ (dado que al integrar entre 0 y 2π dará 0), la ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$= (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot (\cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0)] \cdot \cos[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0)] \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta}_{\pi} + \\ + \sin[\omega_c \cdot (t - \tau_0)] \cdot \sin[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0)] \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta}_{\pi})$$

Desarrollando nuevamente los senos y cosenos se puede llegar al siguiente resultado

$$R_X(\tau) = \frac{(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \cos(\omega_c \cdot \tau)}{2}$$

Como se puede ver, el proceso es ESA y además es cicloestacionario, dado que la función de autocorrelación es periódica.

4.1.2. b)

Idem para la onda reflejada por un objeto que se mueve a una velocidad constante. Compare ambas funciones de autocorrelación y extraiga conclusiones.

$$X(t) = A \cdot \cos[2\pi \cdot (f_c + f_D) \cdot t + \Theta], \quad \forall t$$

$$A \sim RAY(\alpha\sigma)$$

$$\Theta \sim U[0, 2\pi)$$

$$\omega_0 \triangleq 2\pi \cdot (f_c + f_D)$$

Media

$$\mu_X = \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \Theta]] \quad (7)$$

Como A es independiente de Θ ,

$$= \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_c \cdot t + \Theta]] \quad (8)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en a)

$$= \mu_A \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\omega_c \cdot t + \theta] d\theta$$

$$\boxed{\mu_X = 0}$$

Autocorrelación

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t) \cdot X(t + \tau)] \quad (9)$$

$$= \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] \cdot A \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta]] \quad (10)$$

$$= \mathbb{E}[A^2] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta]]$$

Defino por comodidad: $g(\theta) \triangleq \cos[\omega_0 \cdot t + \theta] \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \theta]$

$$= (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta$$

Desarrollando nuevamente los senos y cosenos se puede llegar nuevamente a

$$R_X(\tau) = \frac{(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)}{2}$$

Como se puede ver, el proceso es ESA y además es cicloestacionario, dado que la función de autocorrelación es periódica.

4.1.3. c)

Idem para la onda recibida. Determine también la densidad espectral de potencia. ¿Cuál es la influencia del ruido?

$$R(t) = A \cdot \cos[2\pi \cdot (f_c + f_D) \cdot t + \Theta] + N(t), \quad \forall t \quad (11)$$

$$A \sim \text{RAY}(\alpha\sigma)$$

$$\Theta \sim U[0, 2\pi)$$

$$N(t) : \text{Ruido blanco aditivo Gaussiano}, \sigma_N^2 = \frac{N_0}{2}$$

A modo de facilitar el desarrollo de las formulas y facilitar la comprensión definiré la siguiente constante:

$$\omega_0 \triangleq 2\pi \cdot (f_c + f_D)$$

Media

$$\mu_R = \mathbb{E}[R(t)] = \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] + N(t)] \quad (12)$$

Como A es independiente de Θ ,

$$= \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta]] + \mathbb{E}[N(t)] \quad (13)$$

Dado que $N(t)$ es ruido blanco, $\mu_N = 0$:

$$= \mu_A \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta]] + 0 \quad (14)$$

La ecuación a resolver es idéntica a la formulada en el punto b) cuyo resultado es 0,

$$\Rightarrow \boxed{\mu_R = 0} \quad (15)$$

Autocorrelación

$$R_R(\tau) = \mathbb{E}[R(t) \cdot R(t + \tau)] \quad (16)$$

$$= \mathbb{E}[(A \cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] + N(t)) (A \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta] + N(t + \tau))] \quad (17)$$

$$= \mathbb{E}[A^2] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta]] + \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] \cdot N(t + \tau)] + \\ + \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[N(t) \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta]] + \mathbb{E}[N(t)N(t + \tau)] \quad (18)$$

Sin embargo, como $N(t)$ y Θ son independientes, entonces están descorrelacionados, y por lo tanto las esperanzas de los productos cruzados darán 0, quedando únicamente la misma autocorrelación calculada en el punto b) sumada a la autocorrelación del ruido blanco, que es una delta en cero:

$$R_R(\tau) = \frac{(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)}{2} + \sigma_N^2 \cdot \delta(\tau) \quad (19)$$

Como se puede ver, el proceso es ESA y además es cicloestacionario, dado que la función de autocorrelación es periódica.

Densidad espectral de potencia

$$S_R(\omega) = \mathcal{F}\{R_R(\tau)\} \quad (20)$$

$$S_R(\omega) = \frac{(\mu_A^2 + \sigma_A^2)}{2} \cdot \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \sigma_N^2 \quad (21)$$

Se puede apreciar que el ruido influye en todas las frecuencias con igual cantidad de energía, desplazando verticalmente el gráfico de la densidad espectral de potencia.

4.2. Ejercicio 2

Sea $N(t)$ ruido blanco Gaussiano de media nula y con densidad espectral de potencia igual a $\frac{N_0}{2}$.

4.2.1. a)

Suponga que dicho proceso pasa por un filtro pasa banda ideal centrado en f_c y de ancho de banda B . Denote al proceso que se obtiene a la salida del filtro como $W(t)$. Caracterice a dicho proceso.

Sea²

$$u_B(\omega) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \frac{B}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (22)$$

$$h(t) \triangleq \frac{B}{2\pi} \cdot \text{sinc}(t \cdot \frac{B}{2\pi}) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \cdot 2$$

Utilizando propiedades de la Transformada de Fourier:

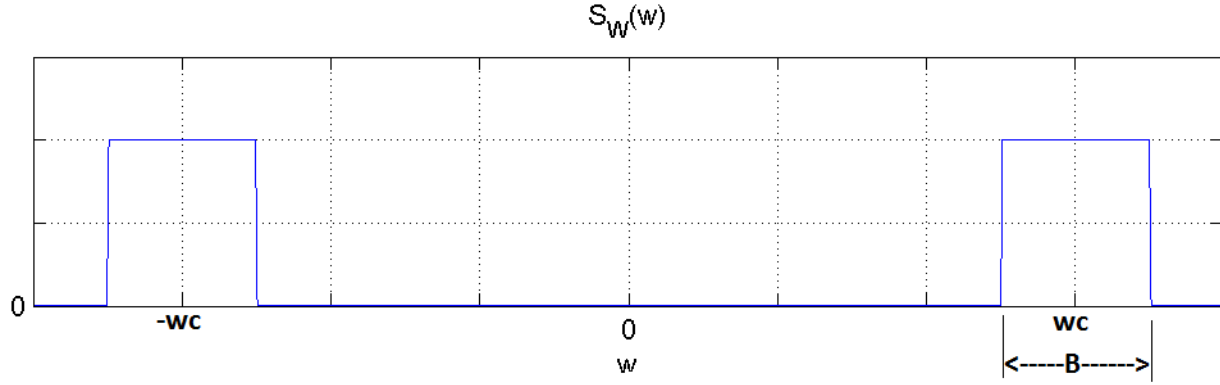
$$\Rightarrow H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot u_b(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \cdot 2 \quad (23)$$

$$H(\omega) = u_b(\omega) * [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \quad (24)$$

Considerando el filtrado como un sistema LTI, entonces se cumplirá que:

$$S_W(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_N(\omega) \quad (25)$$

$$S_W(\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot H(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{si } \omega_c - \frac{B}{2} < |\omega| < \omega_c + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (26)$$

Figura 3: Densidad espectral de $W(t)$

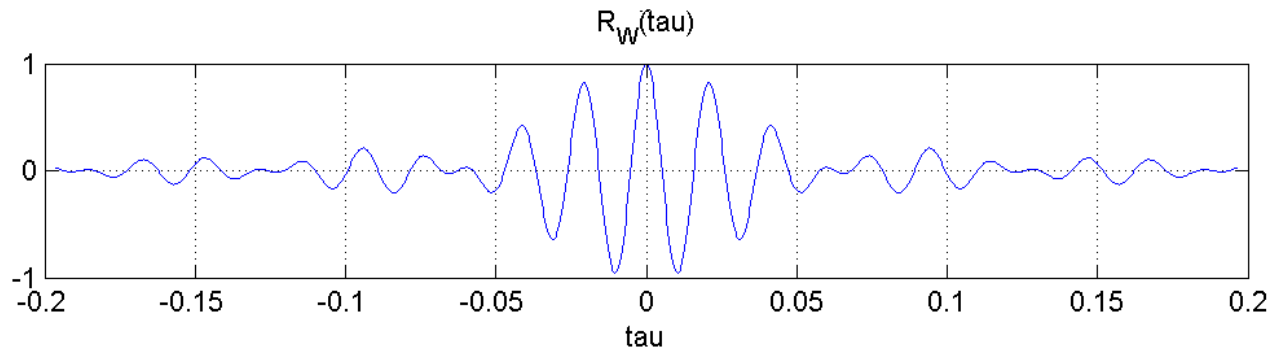
Por otro lado:

$$\mathbb{E}[W(t)] = \underbrace{\mu_N}_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \boxed{\mu_W = 0} \quad (27)$$

$$\Rightarrow C_W(\tau) = R_W(\tau)$$

$$R_W(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_W(\omega)\} = \frac{N_0}{2} \cdot h(\tau) \quad (28)$$

$$R_W(\tau) = \frac{N_0 \cdot B}{2\pi} \cdot \text{sinc}\left(\tau \cdot \frac{B}{2\pi}\right) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot \tau) \quad (29)$$

Figura 4: Autocorrelación de $W(t)$

4.2.2. b)

Ahora el proceso se muestrea a una frecuencia f_s y se obtiene un proceso $W(n)$. Encuentre qué condición debe satisfacer f_s para que $W(n)$ sea ruido blanco Gaussiano y encuentre la relación entre la varianza del proceso y $\frac{N_0}{2}$.

Sea $T_s = \frac{1}{f_s}$, entonces

$$R_{W_d}(k) = \mathcal{F}^{-1} \{S_W(e^{j\omega T_s})\} = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} S_W(e^{j\omega T_s}) \cdot e^{jk\omega T_s} d\omega \quad (30)$$

$$R_{W_d}(k) = \frac{T_s}{2\pi} \left(\int_{\omega_c - B/2}^{\omega_c + B/2} e^{jk\omega T_s} d\omega + \int_{-\omega_c - B/2}^{-\omega_c + B/2} e^{jk\omega T_s} d\omega \right)$$

Análogamente a la ecuación 29,

$$R_{W_d}(k) = \frac{N_0}{2} \cdot h(k \cdot T_s) \cdot T_s$$

$$R_{W_d}(k) = R_W(\tau = k \cdot T_s) = \frac{N_0 \cdot B \cdot T_s}{2\pi} \cdot \text{sinc}(k \cdot T_s \cdot \frac{B}{2\pi}) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot k \cdot T_s)$$

(31)

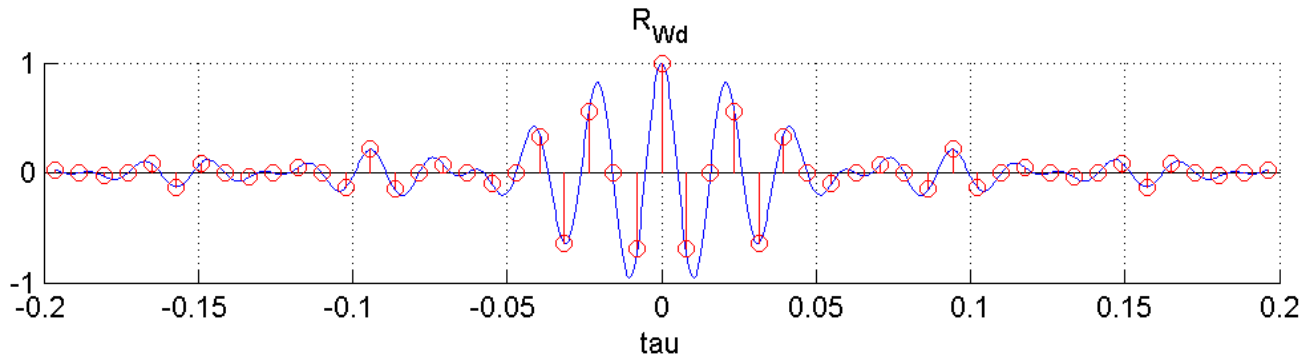


Figura 5: Autocorrelación de $W(n)$

Si se desea que $W(n)$ sea ruido blanco *Gaussiano*, basta con elegir T_S de forma tal que siempre se tomen las variables aleatorias descorrelacionadas, es decir, donde R_W se hace 0. Por lo tanto, como los ceros de la función se encuentran en

$$k \cdot T_S \cdot \frac{B}{2\pi} = m, \text{ con } m \text{ entero}$$

$$k = m \cdot \frac{2\pi}{B \cdot T_S}$$

si se elige $T_S = \frac{2\pi}{B}$, o cualquier múltiplo de este, cualquier valor de k evaluará la función *sinc* en un entero, obteniendo siempre 0.

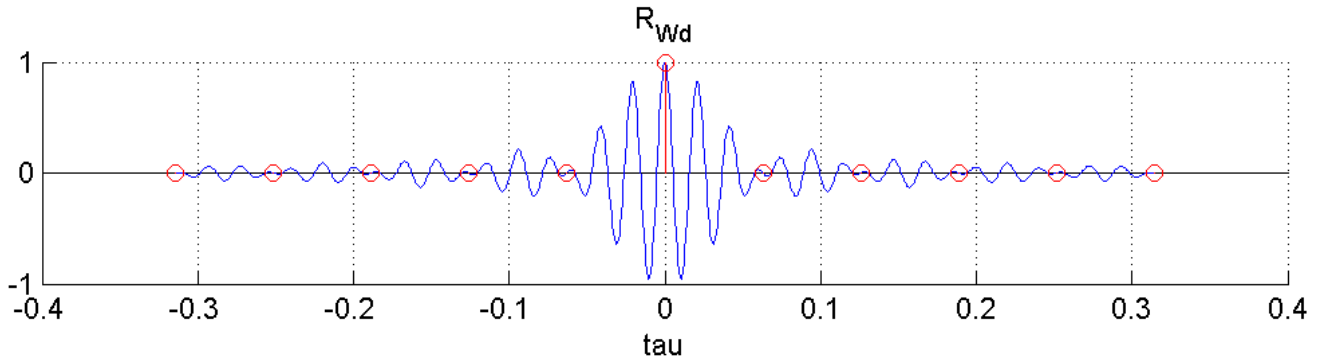


Figura 6: Autocorrelación de $W(n)$ con $T_S = \frac{2\pi}{B}$

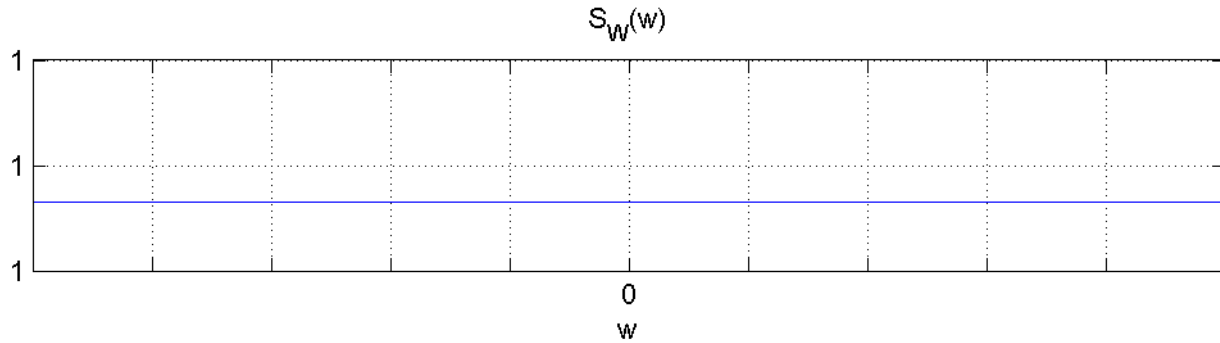


Figura 7: Densidad espectral de $W(n)$ con $T_S = \frac{2\pi}{B}$

Para encontrar la relación entre la varianza del proceso y $\frac{N_0}{2}$, evalúo $R_{Wd}(k)$ en 0, y dado que la media es nula, la varianza será:

$$\sigma_{Wd}^2 = R_{Wd}(0) = \frac{N_0 \cdot B \cdot T_S}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_{Wd}^2}{\sigma_N^2} = \frac{B \cdot T_S}{\pi}$$

4.3. Ejercicio 3

Derive la regla de decisión (29) y encuentre la probabilidad de error.

Regla de decisión:

$$\|r\|^2 \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} 2 \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \left(\ln \gamma - \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)$$

donde $\sigma_0^2 = \text{Var}(R|\mathcal{H}_0) = \frac{N_0}{2}$ y $\sigma_1^2 = \text{Var}(R|\mathcal{H}_1) = \frac{T}{2}(\alpha\sigma)^2 + \frac{N_0}{2}$

Por comodidad llamaré $A = 2 \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \left(\ln \gamma - \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)$

Como $R|\mathcal{H}_0 \sim N(0, \sigma_0)$ y $R|\mathcal{H}_1 \sim N(0, \sigma_1)$ por ser combinación lineal de variables aleatorias *Gaussianas*, se tiene que:

$$f_{R|\mathcal{H}_i}(r|\mathcal{H}_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\|r\|^2}{\sigma_i^2}}$$

En consecuencia, la probabilidad de error estará dada por:

$$\mathbb{P}(\text{Error}) = \mathbb{P}(\|r\|^2 > A | \mathcal{H}_0) + \mathbb{P}(\|r\|^2 < A | \mathcal{H}_1)$$

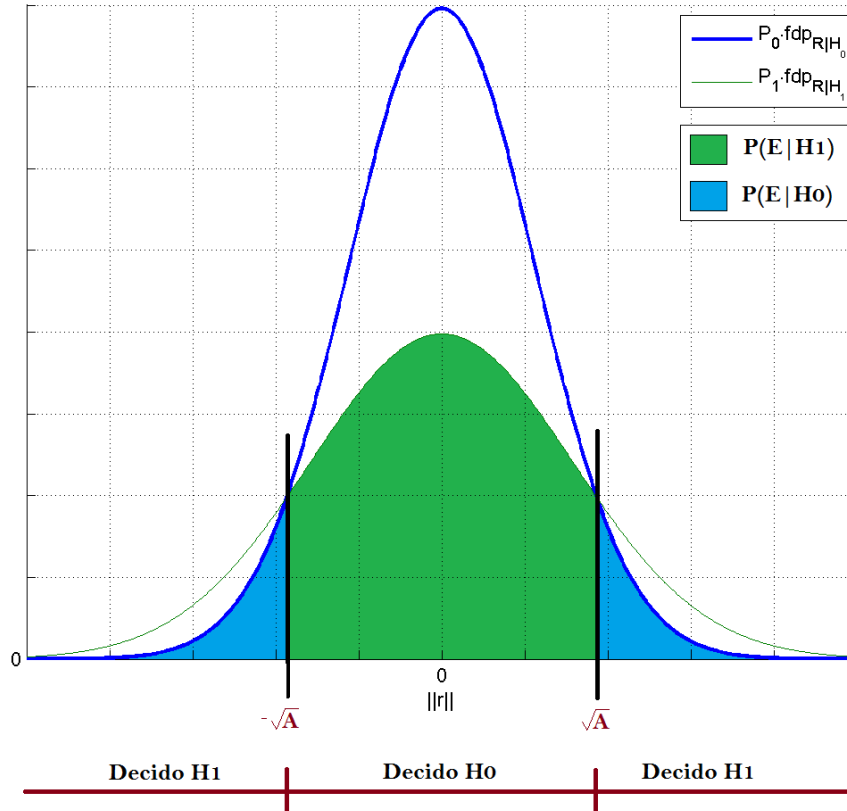


Figura 8: Regiones de decisión. Representación gráfica de la probabilidad de error.

Como se puede ver en la figura, esto corresponde a:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Error}) &= 2P_0 \cdot \mathbb{P}\left(\|r|_{\mathcal{H}_0}\| < -\sqrt{A}\right) + P_1 \mathbb{P}\left(-\sqrt{A} < \|r|_{\mathcal{H}_1}\| < \sqrt{A}\right) \\ &= 2P_0 \cdot \mathbb{P}\left(\|r|_{\mathcal{H}_0}\| < -\sqrt{A}\right) + P_1 \cdot 2 \left[\frac{1}{2} - \mathbb{P}\left(\|r|_{\mathcal{H}_1}\| < -\sqrt{A}\right) \right]\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable para normalizar a *gaussianas* de media nula y desvío unitario y definiendo la función de distribución de una $Z \sim N(0, 1)$ como $F(z) \triangleq \mathbb{P}(Z < z)$, entonces:

$$\mathbb{P}(\text{Error}) = 2P_0 \cdot F\left(-\frac{\sqrt{A}}{\sigma_0}\right) + 2P_1 \left[\frac{1}{2} - F\left(-\frac{\sqrt{A}}{\sigma_1}\right) \right]$$

En el siguiente gráfico se puede ver donde se encuentra realmente el umbral de decisión para este caso. Dado que ambas variables aleatorias ($R|H_0$ y $R|H_1$) tienen distribución *Gaussiana* y media nula, el umbral -es decir, la intersección entre las curvas- quedará determinado por el desvío de cada una. Cuanto menor sea esta diferencia, más se alejará del 0 el umbral. Aquí se puede ver también que, si la potencia de ruido es muy grande, ambos desvíos serán iguales, dado que debido al factor $\left(\frac{T}{2}\right)$ que multiplica la potencia de señal, esta se hace muy pequeña en relación a $N_0/2$ (Ver eq. (1) y (2)). Así, el umbral de decisión se hace extremadamente alto. En consecuencia, la probabilidad de error dado H_1 crece (área bajo la curva de fdp_1 en la región H_0).

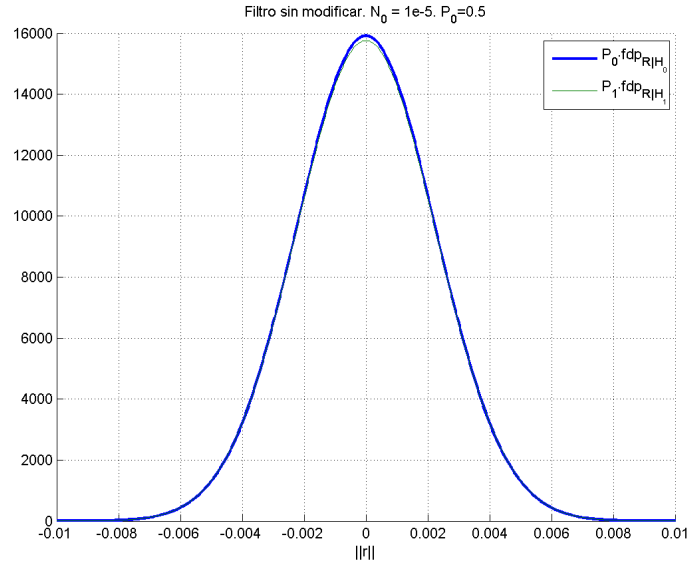


Figura 9: Funciones de densidad de probabilidad.

4.4. Ejercicio 4 (Simulación)

Simule el sistema de radar utilizando los siguientes parámetros:

$\alpha = 1$, $f_c = 100\text{MHz}$, $k = 10$, $k_f = 1000$, $M = 10^5$, $\sigma = 1$, $d_0 = 100\text{m}$, $v = 300\text{m/s}$, $N_0 = 10^{-10}\text{W/Hz}$, $p = 1/2$

Realice varias simulaciones y determine su performance. Para ello, calcule la cantidad de errores cometidos sobre el total y el error cuadrático medio empírico del estimador de posición inicial (y, opcionalmente, del estimador de velocidad). Extraiga conclusiones.

Utilizando el código en “ejercicio4_Performance.m”, se obtuvo el siguiente resultado:

```

M =      100000
alpha =   1
fc =     1e+008
k =       10
kf =     1000
sigma =   1
v =       300
d0 =     100
N0 =     1e-010
p =       0.5
T =       1e-007
s0 =     5e-011
s1 =     5.005e-008
iteraciones: 1000
Efectividad (100*aciertos/iteraciones): 90.2%
Error Cuadrático Medio: 0.08507

```

El 90.2 % de efectividad se debe a que la relación señal ruido es inmensa, por lo tanto la señal recibida es muy fácil de distinguir.

El valor del error cuadrático medio empírico se compara con el valor de la posición inicial real obteniendo así un error relativo de:

$$e_r \% = \frac{d_0 - d_{0est}}{d_0} 100 = \frac{\sqrt{ECM}}{d_0} \cdot 100 = 0,2917 \%$$

4.5. Ejercicio 5 (Simulación)

En este ejercicio buscamos evaluar como depende la performance de los distintos parámetros. Elija los 4 parámetros que considere más importantes y juegue con valores para cada uno de ellos, manteniendo a todos los demás constantes. Extraiga conclusiones.

Los parámetros elegidos han sido N_0 , f_c y p .

Para cada parámetro se dejaron todos los valores del resto fijos y se lo fue variando obteniéndose los siguientes resultados:

Parámetro variable	Filtro sin modificar			Filtro modificado		
N_0	$\mathbb{P}(Error)$	Efectividad	ECM	$\mathbb{P}(Error)$	Efectividad	ECM
1.00E-10	0.1205	0.902	0.09	0.02	1.00	0.0001086
1.00E-05	0.4998	0.506	0.00	0.004408	1.00	0.0001034
0.01	0.5	0.52	0.00	0.09161	0.981	0.0001106
1.00	0.5	0.499	0.00	0.3874	0.729	0.0002466

Cuadro 3: Variando N_0 . $f_c = 100MHz$, $p = 0,5$.

En esta tabla se puede ver como disminuyendo la relación señal ruido (por aumentar la potencia de ruido) la probabilidad de error se incrementa y la efectividad disminuye independientemente de la constante utilizada para el filtro adaptado. Sin embargo, se ve como los valores para el filtro modificado son notablemente mejores para igual parámetros de entrada.

Parámetro variable	Filtro sin modificar			Filtro modificado		
f_c	$\mathbb{P}(Error)$	Efectividad	ECM	$\mathbb{P}(Error)$	Efectividad	ECM
5.00E+08	0.5	0.46	0.00	0.09161	0.986	6.94e-006
1.00E+08	0.5	0.497	0.00	0.09161	0.991	0.0001024
1.00E+07	0.5	0.471	0.00	0.09161	0.986	0.01089
1.00E+05	0.4996	0.497	0.00	0.09161	0.989	100.8

Cuadro 4: Variando f_c . $N_0 = 0,01$, $p = 0,5$.

Aquí se hizo variar la frecuencia de la señal. La gran mayoría de los parámetros se ven inalterados. Por otro lado, se puede ver que con el filtro modificado el error cuadrático medio experimental (ECM) aumenta a medida que f_c disminuye.

Parámetro variable	Filtro sin modificar			Filtro modificado		
p	$\mathbb{P}(Error)$	Efectividad	ECM	$\mathbb{P}(Error)$	Efectividad	ECM
0.2	0.2	0.801	0.00	0.04101	0.995	4.32e-005
0.4	0.4	0.597	0.00	0.07596	0.989	0.08
0.6	NaN	0.421	0.00	0.1058	0.985	0.0001253
0.8	NaN	0.209	0.00	0.1265	0.98	0.0001647

Cuadro 5: Variando p . $N_0 = 0,01$, $f_c = 100MHz$.

En este caso se varió la probabilidad de que exista señal. Con la implementación original se ve que la probabilidad de error para $p < 0,5$ vale exactamente p , lo que podría hacernos sospechar que el detector siempre elige \mathcal{H}_0 . Los valores con *NaN* (*not a number*) se deben a que el cálculo del umbral de decisión ha dado negativo, con lo cual no se puede calcular la raíz cuadrada y obtener la probabilidad de error (Ver Ejercicio 3). Un umbral negativo significa que siempre se decidirá \mathcal{H}_1 , dado que cualquier $\|r\|^2$ será claramente positivo. De este modo, $\mathbb{P}(Error) = 1 - p$.

Por otro lado, utilizando el filtro modificado, los parámetros de la *performance* se ven prácticamente inalterados por los cambios en p , con excepción de la probabilidad de error que aumenta ligeramente a medida que p aumenta.

5. Ejercicios Opcionales

5.1. Ejercicio 1

Implemente el receptor II descrito en la sección 4.5. Evalúe la performance del mismo con los mismos parámetros definidos previamente. Extraiga conclusiones.

La ecuación (36) de la especificación, demuestra como al multiplicar por una senoide a la observación se obtiene una suma de 2 senoides con frecuencias bien distinguidas, donde una de ellas es la frecuencia de corrimiento de *Doppler* que se busca estimar. Sin embargo, este razonamiento no considera que las muestras que se tienen no son infinitas. De hecho, son tan pocas que nunca se alcanza a distinguir ni un período de la senoide con frecuencia *Doppler*. Para que esta pueda ser distinguida y así aparezca al visualizar la densidad espectral, se debe cumplir que:

$$T_D < kT_c$$

donde k es la cantidad de períodos en una transmisión, $T_D = \frac{1}{f_D}$ y $T_c = \frac{1}{f_c}$, por lo tanto, sabiendo que $f_D = \frac{2v}{c} \cdot f_c$, se llega a que:

$$k > \frac{c}{2v}$$

o bien:

$$v > \frac{c}{2k}$$

Por ejemplo, para un valor de $v = 300m/s$, como se indica en el ejercicio 4, se obtiene un $k > 5 \cdot 10^5$. Esto hace que k_f sea aún mayor y que además se necesiten muchas más muestras para visualizar correctamente la señal.

No obstante, se implementó una función que teóricamente debería funcionar, aunque debido a los altos valores mencionados, MATLAB se queda sin memoria o tarda demasiado en realizar el cálculo. Es por eso que no se ha podido comprobar la *performance* satisfactoriamente.

La función básicamente estima la autocorrelación de la observación multiplicada por la senoide de frecuencia f_c , luego calcula la densidad espectral a través de la FFT. Se buscan los 2 picos mayores del espectro, uno estará en $2f_c$ y el otro en f_D . Finalmente, se estima v con la formula presentada anteriormente. Otra opción es aplicar la FFT directamente al proceso obtenido de multiplicar la observación por la senoide y buscar los picos.

Una alternativa para solucionar el problema sería simplemente intentar detectar el pico del espectro de la onda recibida (que debiera encontrarse en $f_c + f_D$), y restarle f_c .

5.2. Ejercicio 2

Analice el proceso $V(t) = \cos(2\pi f_c t)N(t)$, donde $N(t)$ es ruido blanco Gaussiano de media nula y densidad espectral de potencia igual a $N_0/2$. Compare un periodograma de muestras de $V(t)$ con un periodograma de muestras de $N(t)$. ¿Qué diferencias observa? ¿Cuál será su influencia en la estimación del corrimiento de Doppler?

Para saber si $V(t)$ es un proceso ESA, se buscó la autocorrelación:

$$R_V(t, \tau) = \mathbb{E}[N(t)\cos(\omega_c t) \cdot N(t + \tau)\cos(\omega_c(t + \tau))]$$

como los cosenos son determinísticos salen afuera de la expectación:

$$R_V(t, \tau) = \mathbb{E}[N(t) \cdot N(t + \tau)] \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c(t + \tau))$$

$$R_V(t, \tau) = R_N(\tau) \cos(\omega_c t) \cos(\omega_c(t + \tau))$$

Por lo tanto el proceso NO es ESA, y no tiene sentido hablar de su densidad espectral, al menos en el sentido en que la venimos trabajando.

Realizando la transformada de *Fourier* del proceso simulado se obtuvo lo siguiente:

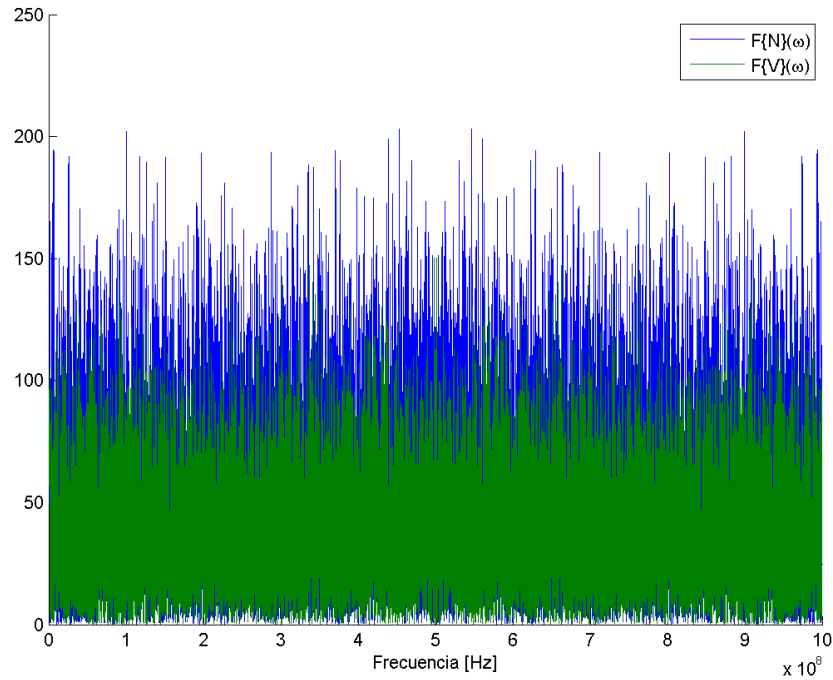


Figura 10: Densidad espectral de potencia para $N(t)$ y $V(t)$.

Se observa que el proceso $V(t)$ está ligeramente más atenuado y es más uniforme en frecuencia que $N(t)$.

5.3. Ejercicio 3

En el trabajo práctico hemos desarrollado el detector pensando en minimizar la probabilidad de error. Sin embargo, el problema de detección de un móvil es asimétrico (i.e., no pesan lo mismo los distintos tipos de errores). Esto puede capturarse sencillamente con el criterio Bayesiano. Modifique el test para tener esto en cuenta si los costos C_{ij} de elegir la hipótesis \mathcal{H}_i cuando \mathcal{H}_j es cierta son:

$$C_{00} = 0, C_{10} = 1, C_{01} = 1000, C_{11} = 0$$

manteniendo los demás parámetros iguales. ¿Cuál es el efecto sobre el umbral?. Justifique en forma intuitiva.

El problema consiste en elegir la hipótesis que menor riesgo presente dada la observación, esto es:

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}_0|r) \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\gtrless}} \mathcal{R}(\mathcal{H}_1|r)$$

donde el riesgo se define como:

$$\mathcal{R}(\mathcal{H}_i|r) \triangleq \sum_{j=0}^1 C_{ij} \mathbb{P}(\mathcal{H}_j|r)$$

Reemplazando, se obtiene:

$$\begin{aligned}
C_{00}\mathbb{P}(\mathcal{H}_0|r) + C_{01}\mathbb{P}(\mathcal{H}_1|r) &\underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} C_{10}\mathbb{P}(\mathcal{H}_0|r) + C_{11}\mathbb{P}(\mathcal{H}_1|r) \\
\mathbb{P}(\mathcal{H}_1|r)(C_{01} - C_{11}) &\underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \mathbb{P}(\mathcal{H}_0|r)(C_{10} - C_{00}) \\
\frac{f_{R|\mathcal{H}_1}(r|\mathcal{H}_1)}{f_{R|\mathcal{H}_0}(r|\mathcal{H}_0)} &\underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} \frac{\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)(C_{10} - C_{00})}{\mathbb{P}(\mathcal{H}_1)(C_{01} - C_{11})} \triangleq \gamma'
\end{aligned}$$

Que es en esencia el mismo problema que se tenía en principio cambiando γ por γ' . Por lo tanto, la regla de decisión queda:

$$||r||^2 \underset{\mathcal{H}_0}{\overset{\mathcal{H}_1}{\geq}} 2 \frac{\sigma_0^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \left(\ln \gamma' - \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)$$

En este caso particular:

$$\gamma' = \frac{\gamma}{1000}$$

en consecuencia, el nivel del umbral bajará, como se puede apreciar en la formula, dado que depende del logaritmo de γ' . Esto implica dar un margen mayor para aceptar la hipótesis de que “hay señal”, ya que equivocarse en este caso es lo más costoso. Además, significa equivocarse un poco más al negar la hipótesis de que “no hubo señal”, en este caso porque este error es intrascendente.

6. Conclusiones

A pesar de no haber logrado resultados completamente satisfactorios, se logró mejorar notablemente la *performance* del detector. No obstante, dejando de lado la implementación, el trabajo práctico sirvió de aprendizaje para afianzar los conceptos de Filtro Adaptado y Teoría de Decisión Bayesiana vistos en el curso de Procesos Estocásticos.

Si bien se ha explicado como nivelando mejor el umbral se obtienen mejores resultados, no se ha obtenido un fundamento teórico consistente para justificar los valores propuestos para los desvíos de las variables aleatorias involucradas en la decisión Bayesiana (fijados “por decreto”, ver sección 2).

Una alternativa a la solución podría ser reformular el problema de decisión como:

$$R' = \begin{cases} ||X + N||^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_1 \\ ||N||^2 & \text{bajo } \mathcal{H}_0 \end{cases}$$

donde ahora $R'|\mathcal{H}_i$ distribuirá como una *chi-cuadrado* de 2 grados de libertad, que es equivalente a una exponencial, donde se pueden calcular sus momentos fácilmente. Luego reformular la regla MAP con las funciones de densidad correspondientes y así obtener un nuevo umbral de decisión a ver que sucede.