

Trabajo Práctico: Detección y Localización de un Móvil con Radar

Sebastián Sampayo

11 de Junio de 2013

1° Entrega

1. Objetivos

El presente trabajo práctico tiene el objetivo de fijar los conceptos principales vistos en la materia a través de una aplicación real simplificada del campo ingenieril. Se pretende que los alumnos tomen contacto con un trabajo del área de radares y, aplicando los conocimientos estudiados en la materia, puedan resolver un problema concreto. Para ello se les facilita una serie de ayudas provistas por el cuerpo docente, que les permitan focalizar la resolución del trabajo práctico en los conceptos y no en detalles de implementación.

2. Implementación

Para encontrar el máximo del módulo del vector r (que está compuesto por la observación luego de pasar por cada uno de los filtros adaptados) lo que se hizo fue multiplicar la observación R por el filtro adaptado y para obtener las diferentes integrales para cada 'u', se convolucionó con un escalón de tamaño T . Luego el u para el cual se de el máximo de este vector resultante será el instante inicial de la cosenoide recibida.

En futuras implementaciones podría mejorarse el algoritmo evitando el uso de la convolución y solucionando el problema de maximizar la función con otro método más rápido. Ejemplo FFT.

Luego de implementar y simular reiteradas veces el filtro con el factor de escala sugerido en la especificación del trabajo ($\sqrt{\frac{2}{T}}$), se descubrió que el umbral de decisión se encontraba demasiado cerca del valor que daba el máximo a la salida del filtro cuando efectivamente se enviaba una señal. Por el contrario cuando no se enviaba una señal, la diferencia entre el valor de la observación filtrada y el umbral de decisión era mucho más amplia. Por esta razón, la función solo detectaba correctamente cuando la relación señal/ruido era muy grande. En base a estos hechos, se concluyó que un umbral menor detectaría mejor. Entonces se analizó cada uno de los parámetros que influyen en dicha regla y se optó por independizar de la frecuencia utilizada, la potencia de la señal y por lo tanto la relación señal/ruido y a su vez el umbral de decisión. En concreto lo que se tenía era:

$$h1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(2\pi i \cdot fc \cdot (\tau_0 - t))$$

$$h2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin(2\pi i \cdot fc \cdot (\tau_0 - t))$$

obteniendo así al pasar la señal por el filtro (ver ecuaciones (19) y (22) de la especificación del trabajo):

$$R_1 = \sqrt{\frac{T}{2}} \cdot A \cdot \cos(\Theta)$$

y lo análogo para R_2 .

Como se puede ver, la varianza de esto dependerá claramente de la frecuencia utilizada:

$$\sigma_1^2 = \frac{T}{2} \cdot (\alpha\sigma)^2$$

$$SNR = \frac{\sigma_1^2}{N_0/2} = \frac{T}{N_0} \cdot (\alpha\sigma)^2$$

Si en cambio se opta por elegir un factor de escala para h_1 y h_2 de forma tal que dicha dependencia se anule, se obtiene:

$$h_1 = \frac{2}{T} \cdot \cos(2\pi f_c \cdot (\tau_0 - t))$$

$$h_2 = \frac{2}{T} \cdot \sin(2\pi f_c \cdot (\tau_0 - t))$$

$$R_1 = A \cdot \cos(\Theta)$$

$$\sigma_1^2 = (\alpha\sigma)^2$$

$$SNR = \frac{\sigma_1^2}{N_0/2} = \frac{2}{N_0} \cdot (\alpha\sigma)^2$$

3. Simulaciones

En las siguientes pruebas se utilizaron los siguientes parámetros:

```
% ----- Parámetros -----
M = 1e5; Cantidad de muestras generadas
alpha = 1; % Parámetro de variable aleatoria usada para la amplitud
fc = 100e6; % Frecuencia utilizada [Hertz]
k = 10; % Cantidad de períodos de señal a transmitir
kf = 100; % Cantidad de períodos de señal que entran en el largo temporal del sistema.
% Determina distancia máxima posible de detectar.

sigma = 1; % Parámetro de variable aleatoria usada para la amplitud
v = 0; % [metros por segundo]
d0 = 100; % Distancia real del objeto [metros]
N0 = 1e-9; % Potencia de ruido = N0/2
p = .5; % Probabilidad de que haya un objeto
% -----
```

Los resultados obtenidos luego de la simulación del primer modelo y que llevaron al replanteo del problema se muestran a continuación. Es importante destacar, que en este caso no se condice realmente el cálculo utilizado para la relación señal/ruido con lo que se puede ver en los gráficos, ya que en estos últimos se observa que con valores tan bajos de N_0 la señal enviada es casi determinística.

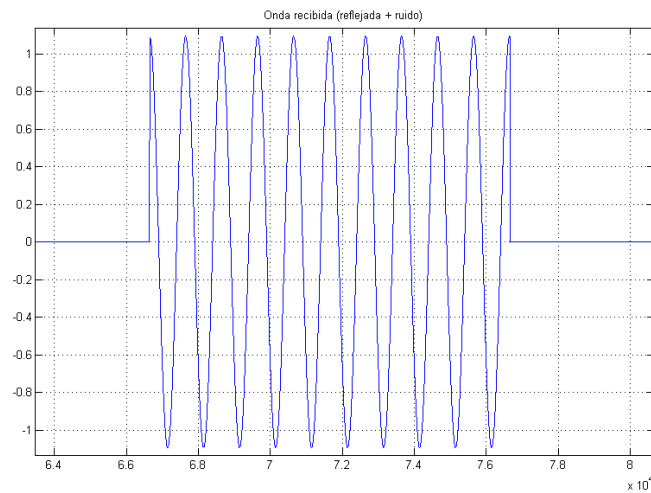


Figura 1: Onda recibida para una $SNR = 1$. Señal determinística + Ruido Blanco. Filtro sin modificar.

Se supuso que esta contradicción se encuentra generada por el factor de escala utilizado, como se describió anteriormente.

```

--- Tests 100 iteraciones en cada caso ---
NO = 0.010000
Relación señal/ruido: 0.000010 Efectividad
(aciertos/iteraciones): 0.520000
.
NO = 1e-7
Relación señal/ruido: 1.000000
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.660000
.
NO = 1e-9
Relación señal/ruido: 100.000000
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.980000
.
NO = 1e-10
Relación señal/ruido: 1000.000000
Efectividad (aciertos/iteraciones): 1.000000
-----

```

La mejoría en el algoritmo detector fue comprobada satisfactoriamente con los resultados de las simulaciones que se detallan a continuación.

```

--- Tests 100 iteraciones en cada caso---
NO = 1
Relación señal/ruido: 2.000000
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.770000
.
NO = .5
Relación señal/ruido: 4.000000
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.810000
.

```

```
NO = .1
Relación señal/ruido: 20.000000
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.900000
.
NO = .01
Relación señal/ruido: 200.000000
Efectividad (aciertos/iteraciones): 0.980000
-----
```

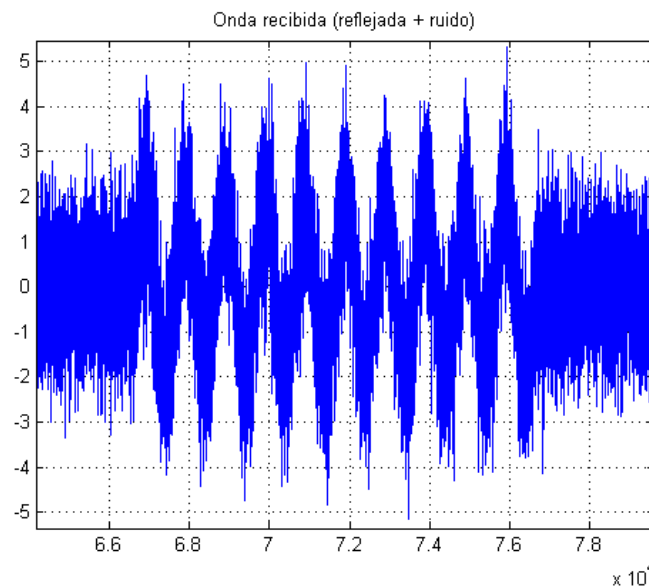


Figura 2: Onda recibida para una $SNR = 1$. Señal determinística + Ruido Blanco. Filtro modificado.

4. Ejercicios Obligatorios

4.1. Ejercicio 1

En este ejercicio analizamos los procesos dados por la onda reflejada por un blanco fijo, por un blanco móvil y, finalmente, la onda que recibe el radar. En todos los casos, extender la parte que coincide a la onda senoidal, de modo que los procesos queden definidos $\forall t \in \mathbb{R}$ en forma no trivial.

4.1.1. a)

Probar que la onda reflejada por un objeto fijo, dada por la siguiente ecuación, es un proceso ESA y calcular su media y su función de autocorrelación.

$$X(t) = A \cdot \cos[2\pi \cdot f_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta] , \quad \forall t$$

$$A \sim RAY(\alpha\sigma) , \quad \mu_A = \alpha\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \sigma_A^2 = (\alpha\sigma)^2 \cdot 2\pi$$

$$\Theta \sim U[0, 2\pi)$$

A modo de facilitar el desarrollo de las formulas y facilitar la comprensión definiré la siguiente constante:

$$\omega_c \triangleq 2\pi \cdot f_c$$

En los siguientes resultados se omitirán los cálculos intermedios en la utilización de propiedades trigonométricas básicas como el coseno de suma de angulos, dado que facilita la lectura y no se considera fundamental en el desarrollo de la idea.

Media

$$\mu_X = \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta]] \quad (1)$$

Como A es independiente de Θ ,

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta]] \quad (2) \\ &= \mu_A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \theta] \cdot f_{\Theta}(\theta) d\theta \\ &= \mu_A \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \theta] d\theta \\ &= \mu_A \cdot \frac{1}{2\pi} \sin[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \theta] \Big|_0^{2\pi} = \boxed{\mu_X = 0} \end{aligned}$$

Autocorrelación

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t) \cdot X(t + \tau)] \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta] \cdot A \cdot \cos[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0) + \Theta]] \quad (4) \\ &= \mathbb{E}[A^2] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \Theta] \cdot \cos[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0) + \Theta]] \end{aligned}$$

Defino por comodidad: $g(\theta) \triangleq \cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0) + \theta] \cdot \cos[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0) + \theta]$

$$= (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta$$

Por propiedades trigonométricas de cosenos de sumas de ángulos, y eliminando los productos cruzados de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ (dado que al integrar entre 0 y 2π dará 0), la ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$= (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot (\cos[\omega_c \cdot (t - \tau_0)] \cdot \underbrace{\cos[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0)] \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta}_{\pi} +$$

$$+ \sin[\omega_c \cdot (t - \tau_0)] \cdot \sin[\omega_c \cdot ((t + \tau) - \tau_0)] \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta}_{\pi})$$

Desarrollando nuevamente los senos y cosenos se puede llegar al siguiente resultado

$$R_X(\tau) = \frac{(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \cos(\omega_c \cdot \tau)}{2}$$

Como se puede ver, el proceso es ESA y además es cicloestacionario, dado que la función de autocorrelación es periódica.

4.1.2. b)

Idem para la onda reflejada por un objeto que se mueve a una velocidad constante. Compare ambas funciones de autocorrelación y extraiga conclusiones.

$$X(t) = A \cdot \cos[2\pi \cdot (f_c + f_D) \cdot t + \Theta], \quad \forall t$$

$$A \sim RAY(\alpha\sigma)$$

$$\Theta \sim U[0, 2\pi)$$

$$\omega_0 \triangleq 2\pi \cdot (f_c + f_D)$$

Media

$$\mu_X = \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \Theta]] \quad (5)$$

Como A es independiente de Θ ,

$$= \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_c \cdot t + \Theta]] \quad (6)$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en *a*)

$$= \mu_A \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\omega_c \cdot t + \theta] d\theta$$

$$\boxed{\mu_X = 0}$$

Autocorrelación

$$R_X(\tau) = \mathbb{E}[X(t) \cdot X(t + \tau)] \quad (7)$$

$$= \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] \cdot A \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta]] \quad (8)$$

$$= \mathbb{E}[A^2] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta]]$$

Defino por comodidad: $g(\theta) \triangleq \cos[\omega_0 \cdot t + \theta] \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \theta]$

$$= (\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta$$

Desarrollando nuevamente los senos y cosenos se puede llegar nuevamente a

$$R_X(\tau) = \frac{(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)}{2}$$

Como se puede ver, el proceso es ESA y además es cicloestacionario, dado que la función de autocorrelación es periódica.

4.1.3. c)

Idem para la onda recibida. Determine también la densidad espectral de potencia. ¿Cuál es la influencia del ruido?

$$R(t) = A \cdot \cos[2\pi \cdot (f_c + f_D) \cdot t + \Theta] + N(t), \quad \forall t \quad (9)$$

$$A \sim \text{RAY}(\alpha\sigma)$$

$$\Theta \sim U[0, 2\pi)$$

$$N(t) : \text{Ruido blanco aditivo Gaussiano, } \sigma_N^2 = \frac{N_0}{2}$$

A modo de facilitar el desarrollo de las formulas y facilitar la comprensión definiré la siguiente constante:

$$\omega_0 \triangleq 2\pi \cdot (f_c + f_D)$$

Media

$$\mu_R = \mathbb{E}[R(t)] = \mathbb{E}[A \cdot \cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] + N(t)] \quad (10)$$

Como A es independiente de Θ ,

$$= \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta]] + \mathbb{E}[N(t)] \quad (11)$$

Dado que $N(t)$ es ruido blanco, $\mu_N = 0$:

$$= \mu_A \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta]] + 0 \quad (12)$$

La ecuación a resolver es idéntica a la formulada en el punto b) cuyo resultado es 0,

$$\Rightarrow \boxed{\mu_R = 0} \quad (13)$$

Autocorrelación

$$R_R(\tau) = \mathbb{E}[R(t) \cdot R(t + \tau)] \quad (14)$$

$$= \mathbb{E}[(A \cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] + N(t)) (A \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta] + N(t + \tau))] \quad (15)$$

$$= \mathbb{E}[A^2] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta]] + \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[\cos[\omega_0 \cdot t + \Theta] \cdot N(t + \tau)] + \\ + \mathbb{E}[A] \cdot \mathbb{E}[N(t) \cdot \cos[\omega_0 \cdot (t + \tau) + \Theta]] + \mathbb{E}[N(t)N(t + \tau)] \quad (16)$$

Sin embargo, como $N(t)$ y Θ son independientes, entonces están descorrelacionados, y por lo tanto las esperanzas de los productos cruzados darán 0, quedando únicamente la misma autocorrelación calculada en el punto b) sumada a la autocorrelación del ruido blanco, que es una delta en cero:

$$R_R(\tau) = \frac{(\mu_A^2 + \sigma_A^2) \cdot \cos(\omega_0 \cdot \tau)}{2} + \sigma_N^2 \cdot \delta(\tau) \quad (17)$$

Como se puede ver, el proceso es ESA y además es cicloestacionario, dado que la función de autocorrelación es periódica.

Densidad espectral de potencia

$$S_R(\omega) = \mathcal{F}\{R_R(\tau)\} \quad (18)$$

$$S_R(\omega) = \frac{(\mu_A^2 + \sigma_A^2)}{2} \cdot \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \sigma_N^2 \quad (19)$$

Se puede apreciar que el ruido influye en todas las frecuencias con igual cantidad de energía, desplazando verticalmente el gráfico de la densidad espectral de potencia.

4.2. Ejercicio 2

Sea $N(t)$ ruido blanco Gaussiano de media nula y con densidad espectral de potencia igual a $\frac{N_0}{2}$.

4.2.1. a)

Suponga que dicho proceso pasa por un filtro pasa banda ideal centrado en f_c y de ancho de banda B . Denote al proceso que se obtiene a la salida del filtro como $W(t)$. Caracterice a dicho proceso.

Sea

$$u_B(\omega) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \frac{B}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (20)$$

$$h(t) \triangleq \frac{B}{2\pi} \cdot \text{sinc}(t \cdot \frac{B}{2\pi}) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t) \cdot 2 \quad (21)$$

(hacer nota al pie con definicion de sinc)

Utilizando propiedades de la Transformada de Fourier:

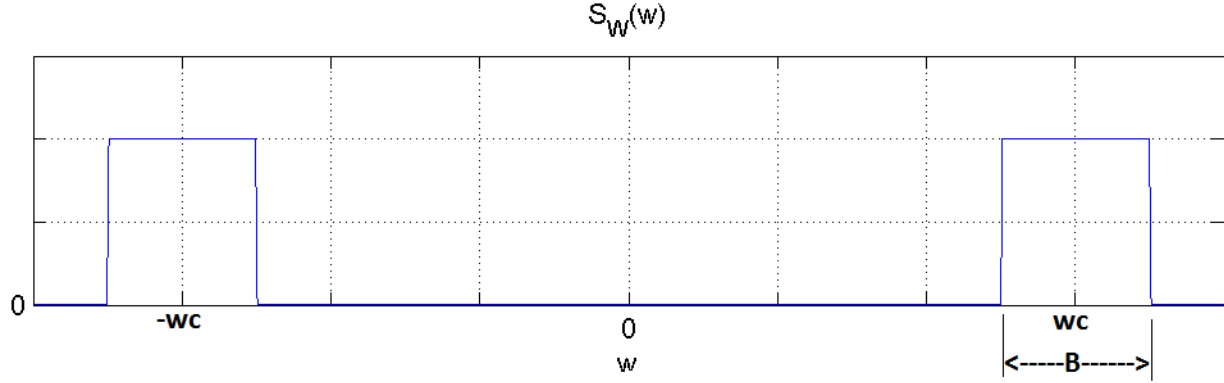
$$\Rightarrow H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot u_b(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \cdot 2 \quad (22)$$

$$H(\omega) = u_b(\omega) * [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \quad (23)$$

Considerando el filtrado como un sistema LTI, entonces se cumplirá que:

$$S_W(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_N(\omega) \quad (24)$$

$$S_W(\omega) = \frac{N_0}{2} \cdot H(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & \text{si } \omega_c - \frac{B}{2} < |\omega| < \omega_c + \frac{B}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (25)$$

Figura 3: Densidad espectral de $W(t)$

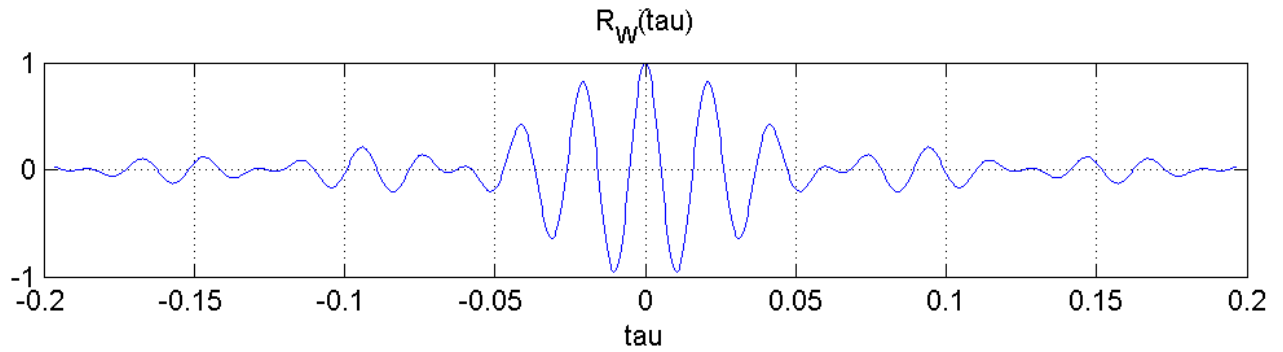
Por otro lado:

$$\mathbb{E}[W(t)] = \underbrace{\mu_N}_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \boxed{\mu_W = 0} \quad (26)$$

$$\Rightarrow C_W(\tau) = R_W(\tau)$$

$$R_W(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_W(\omega)\} = \frac{N_0}{2} \cdot h(\tau) \quad (27)$$

$$\boxed{R_W(\tau) = \frac{N_0 \cdot B}{2\pi} \cdot \text{sinc}\left(\tau \cdot \frac{B}{2\pi}\right) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot \tau)} \quad (28)$$

Figura 4: Autocorrelación de $W(t)$

4.2.2. b)

Ahora el proceso se muestrea a una frecuencia f_s y se obtiene un proceso $W(n)$. Encuentre qué condición debe satisfacer f_s para que $W(n)$ sea ruido blanco Gaussiano y encuentre la relación entre la varianza del proceso y $\frac{N_0}{2}$.

Sea $T_s = \frac{1}{f_s}$, entonces

$$R_{W_d}(k) = \mathcal{F}^{-1} \{S_W(e^{j\omega T_s})\} = \frac{T_s}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} S_W(e^{j\omega T_s}) \cdot e^{jk\omega T_s} d\omega \quad (29)$$

$$R_{W_d}(k) = \frac{T_s}{2\pi} \left(\int_{\omega_c - B/2}^{\omega_c + B/2} e^{jk\omega T_s} d\omega + \int_{-\omega_c - B/2}^{-\omega_c + B/2} e^{jk\omega T_s} d\omega \right)$$

Análogamente a la ecuación (19),

$$R_{W_d}(k) = \frac{N_0}{2} \cdot h(k \cdot T_s) \cdot T_s$$

$$R_{W_d}(k) = R_W(\tau = k \cdot T_s) = \frac{N_0 \cdot B \cdot T_s}{2\pi} \cdot \text{sinc}\left(k \cdot T_s \cdot \frac{B}{2\pi}\right) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot k \cdot T_s)$$

(30)

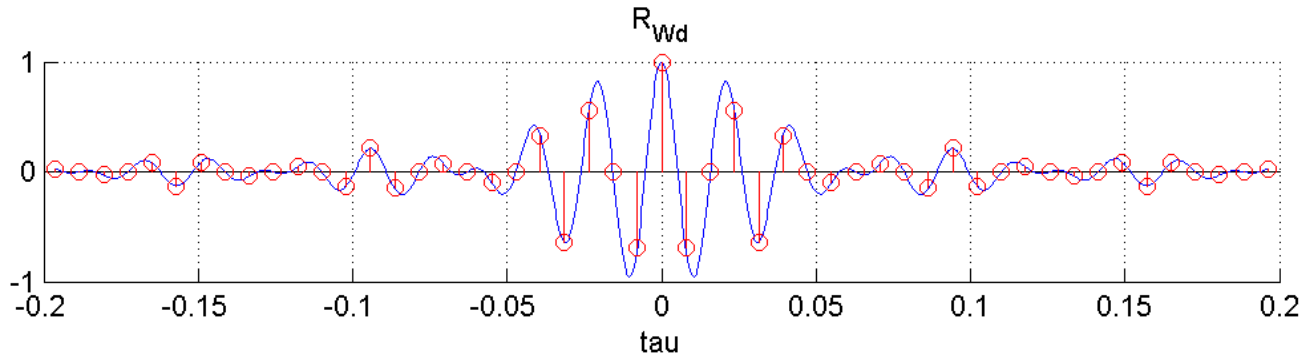


Figura 5: Autocorrelación de $W(n)$

Si se desea que $W(n)$ sea ruido blanco Gaussiano, basta con elegir T_S de forma tal que siempre se tomen las variables aleatorias descorrelacionadas, es decir, donde R_W se hace 0. Por lo tanto, como los ceros de la función se encuentran en

$$k \cdot T_S \cdot \frac{B}{2\pi} = m, \text{ con } m \text{ entero}$$

$$k = m \cdot \frac{2\pi}{B \cdot T_S}$$

si se elige $T_S = \frac{2\pi}{B}$, o cualquier múltiplo de este, cualquier valor de k evaluará la función *sinc* en un entero, obteniendo siempre 0.

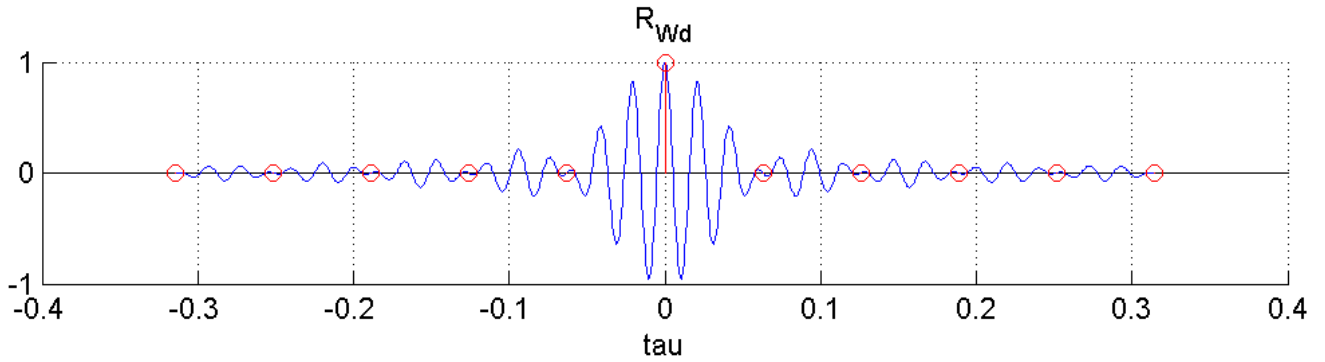


Figura 6: Autocorrelación de $W(n)$ con $T_S = \frac{2\pi}{B}$

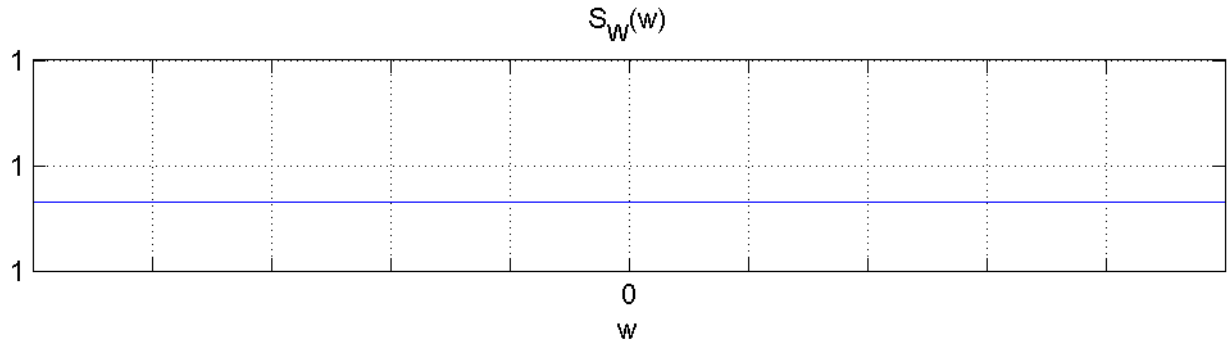


Figura 7: Densidad espectral de $W(n)$ con $T_S = \frac{2\pi}{B}$

Para encontrar la relación entre la varianza del proceso y $\frac{N_0}{2}$, evalúo $R_{Wd}(k)$ en 0, y dado que la media es nula, la varianza será:

$$\sigma_{Wd}^2 = R_{Wd}(0) = \frac{N_0 \cdot B \cdot T_S}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_{Wd}^2}{\sigma_N^2} = \frac{B \cdot T_S}{\pi}}$$