

Trabajo práctico II: filtrado adaptativo

Procesamiento de Señales II - Facultad de Ingeniería, UBA

15 de octubre de 2015

1. Introducción

El objetivo de este trabajo práctico es estudiar el comportamiento de los filtros adaptativos vistos en clase (LMS, NLMS, APA y RLS). Primero se evaluará mediante simulaciones Monte Carlo la validez de los análisis teóricos vistos en clase y luego se considerará el problema de cancelación de una sinusoide en una señal de ECG. Las condiciones de entrega del trabajo son las siguientes:

- Los ejercicios teóricos pueden ser hechos a mano y entregados en la clase.
- Para el resto se deberá confeccionar un informe. El informe puede ser enviado en PDF o subido al campus en la fecha correspondiente.

El TP puede realizarse en grupos de hasta 2 personas.

La fecha límite para entregar el trabajo práctico es el 5/11.

Las simulaciones se pueden realizar en cualquier software que desee el estudiante.

2. Análisis para entradas estacionarias

2.1. Modelo a utilizar

En toda esta sección consideraremos el modelo de regresión lineal para la generación de una señal de referencia:

$$d_i = \mathbf{h}^T \mathbf{u}_i + v_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

donde $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ es un vector fijo y

$$\mathbf{u}_i = [u_i, \dots, u_{i-M+1}]^T \in \mathbb{R}^{M \times 1},$$

contiene muestras de un proceso ESA $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de media nula y matriz de autocorrelación

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}} \triangleq \mathbb{E}[\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T] \in \mathbb{R}^{M \times M}.$$

La secuencia $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es de ruido blanco gaussiano de media nula y varianza σ_v^2 , independiente de $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Se desea estimar \mathbf{h} y la señal de referencia d_i y se utiliza para ello un banco de pruebas como el indicado en la Fig. 1. La señal de error en el instante i , definida como

$$e_i \triangleq d_i - \hat{d}_i = d_i - \mathbf{w}_i^T \mathbf{u}_i, \quad (2)$$

es utilizada para obtener la realización del filtro que se utilizará en el instante siguiente \mathbf{w}_{i+1} .

A continuación detallamos el *setup* de simulación:

- Como vector \mathbf{h} utilizaremos la respuesta impulsiva de largo $M = 128$ contenida en el archivo `ir_short.mat` provisto. Dicha respuesta puede verse graficada en la Fig. 2.

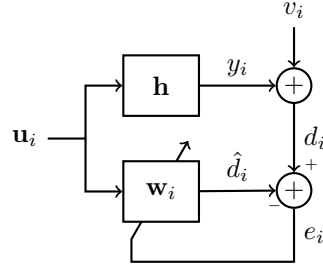
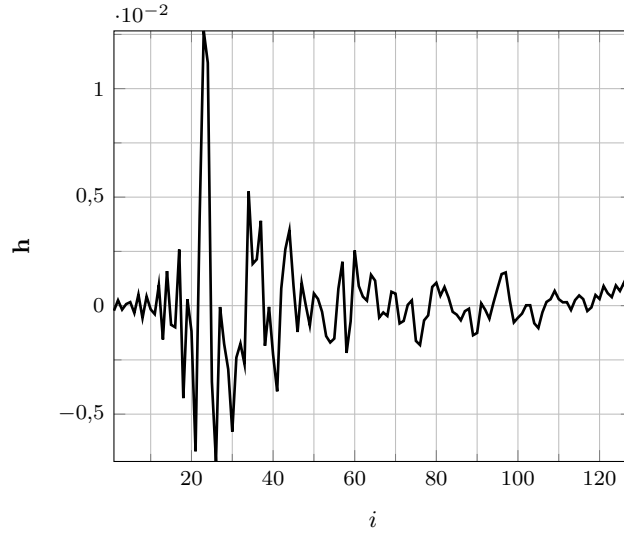


Figura 1: Esquema del banco de simulación a implementar.

Figura 2: Respuesta impulsiva a utilizar, de largo $M = 128$.

- Para la entrada u_i consideraremos un proceso autoregresivo de orden 1 (AR1) con parámetro a , excitado por ruido blanco gaussiano x_i de media nula y varianza σ_x^2 . Es decir,

$$u_i = au_{i-1} + x_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

con $u_0 = 0$. El parámetro $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$, se utiliza para controlar el grado de correlación o “color” de la señal de entrada u . Una entrada blanca se obtiene tomando $a = 0$ y la entrada se vuelve más coloreada a medida que $|a| \rightarrow 1$ (el polo del AR1 se acerca a la circunferencia unidad).

- Para medir la calidad de la aproximación utilizaremos el *mismatch*, definido como:

$$\mathcal{D}_i \triangleq \frac{\|\mathbf{h} - \mathbf{w}_i\|^2}{\|\mathbf{h}\|^2}. \quad (4)$$

En particular, consideraremos el *mismatch* promedio y lo expresaremos en dB, es decir, consideraremos:

$$\mathbb{E}[\mathcal{M}_i] [\text{dB}] = 10 \log_{10} \left(\frac{\mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \mathbf{w}_i\|^2]}{\|\mathbf{h}\|^2} \right). \quad (5)$$

Asimismo, consideraremos el *misadjustment* que definiremos aquí como:

$$\mathcal{M} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[e_i^2] - J_{\min}}{J_{\min}}. \quad (6)$$

Ejercicio 1 [Cálculo de la SNR]. Un parámetro a ajustar para estudiar el funcionamiento del filtro será la relación señal a ruido (SNR), definida (en dB) como:

$$\text{SNR} \triangleq 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_v^2} \right). \quad (7)$$

a) Demuestre que la autocorrelación del proceso AR1 de entrada puede escribirse como:

$$r(k) = \mathbb{E}[u_i u_{i-k}] = \frac{\sigma_x^2}{1 - a^2} a^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (8)$$

y escriba la matriz de correlación del proceso de entrada \mathbf{R}_u en función de (8).

b) Exprese la SNR (7) como función de \mathbf{R}_u y \mathbf{h} para poder utilizarla en lo que sigue para fijar la SNR en los valores indicados.

Ejercicio 2 [Error cuadrático medio mínimo]. Considere la función de costo del filtro de Wiener FIR:

$$J(\mathbf{w}) = \mathbb{E}[|e_i(\mathbf{w})|^2] = \mathbb{E}[|d_i - \mathbf{w}^T \mathbf{u}_i|^2]. \quad (9)$$

Asuma que la señal de referencia es generada por medio de un modelo de regresión como (1). Demuestre que entonces el filtro de Wiener estima perfectamente la respuesta del sistema, es decir:

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}_u^{-1} \mathbf{p},$$

donde $\mathbf{p} = \mathbb{E}[\mathbf{u}_i d_i]$. Demuestre entonces que el error cuadrático medio mínimo alcanzable viene dado por la varianza del ruido, es decir:

$$J_{\min} \triangleq \min_{\mathbf{w}} \mathbb{E}[|e_i(\mathbf{w})|^2] = \sigma_v^2.$$

2.2. Algoritmo LMS

Ejercicio 3 [Algoritmo LMS]. Considere un estimador recursivo del vector \mathbf{h} de la forma:

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \Delta \mathbf{w}_i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Considere el error instantáneo $e_i = d_i - \mathbf{w}_i^H \mathbf{u}_i$. Demuestre que si se elije la actualización $\Delta \mathbf{w}_i$ para que la actualización se mueva en contra del gradiente del valor absoluto del error instantáneo $|e_i|^2$ entonces se obtiene el algoritmo LMS.

Considere el proceso de entrada AR1 con parámetro $a = 0,3$ y $\text{SNR} = 20\text{dB}$.

- Para $\mu = 0.01, 0.005, 0.001$ y 0.0005 realice una simulación Monte Carlo para estimar el *mismatch* promedio (5) como función de los valores de μ indicados.

Compare las curvas simuladas con el análisis teórico utilizando la *small step-size theory*:

$$\mathbb{E}[\|\mathbf{h} - \mathbf{w}_i\|^2] = \sum_{k=1}^M \frac{\mu J_{\min}}{2 - \mu \lambda_k} + (1 - \mu \lambda_k)^{2i} \left(|q_k(0)|^2 - \frac{\mu J_{\min}}{2 - \mu \lambda_k} \right). \quad (10)$$

Refiérase a [1] o a las notas de clase para la interpretación de las magnitudes correspondientes. ¿Qué puede decir acerca de la validez de la teoría? ¿Cómo se ve afectado el error final cuando incrementa el valor de μ ? ¿Cómo se ve afectada la velocidad de convergencia inicial al variar el μ ?

- Ajuste el valor de μ hasta que el filtro empiece a volverse inestable (observe para ello corridas sueltas (4)). Compare ese valor con el límite de estabilidad de $2/\lambda_{\max}$ que se desprende de la *small step-size theory*.
- Para $\mu \in [5 \times 10^{-4}, 10^{-2}]$, estime el valor del *misadjustment* (6) mediante una simulación Monte Carlo. Compare los resultados predichos por la *small step-size theory* [1]:

$$\mathcal{M} = \frac{\mu}{2} \text{tr}\{\mathbf{R}_u\}. \quad (11)$$

2.3. Algoritmos NLMS y APA

Ejercicio 4 [Algoritmo NLMS]. Cuando la entrada es muy coloreada, el algoritmo LMS encuentra dificultades para converger. Particularmente, el valor del paso μ debe ser cada vez más pequeño cuanto más coloreada está la señal de entrada y la convergencia se torna más lenta. Esto podría mitigarse considerando un algoritmo LMS de paso variable, con una recursión de la forma:

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \mu_i \mathbf{u}_i e_i^*, \quad (12)$$

donde $\mu_i > 0$ es el paso variable. Demuestre que si se elije el paso variable de modo de minimizar el error cuadrático medio en cada instante, es decir:

$$\mu_i : \mathbb{E}[|e_i|^2] \text{ sea mínima}, \quad (13)$$

se obtiene el algoritmo NLMS.

En esta sección consideraremos el proceso AR1 con distinto a , y $\text{SNR} = 20\text{dB}$. Llamaremos K al orden del APA, dando $K = 1$ el algoritmo NLMS.

Realice las siguientes simulaciones:

- Considere $a = 0,9$. Ajuste el valor de μ para el LMS de modo que el algoritmo sea estable en media cuadrática y obtenga las curvas del *mismatch* promedio (5) mediante una simulación Monte Carlo. Realice también las simulaciones del *mismatch* con el algoritmo NLMS para $\mu: 0.1$ y 1 . ¿Qué observa? ¿Qué ventaja presenta el algoritmo NLMS en cuanto a la elección del μ ?
- Considere ahora el algoritmo APA para $K = 1, 2$ y 4 . Asuma que $a = 0,95$. Grafique el *mismatch* promedio (5) para cada valor de K considerando $\mu = 0.1, 0.5, 1$. ¿Qué puede concluir del comportamiento del APA en relación al LMS para entradas muy coloreadas? ¿Qué puede concluir de las ventajas de aumentar el K ?
- Para $K = 1, 2, 4$ y 8 , estime mediante una simulación Monte Carlo el valor asintótico del *mismatch* promedio (5):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\mathcal{M}_i] \text{ [dB]} \quad (14)$$

como función de $0 < \mu < 2$. ¿Se verifican las conclusiones del paper de Sankaran y Beex [2] de que el *mismatch* final es creciente con μ ?

2.4. Algoritmo RLS

Ejercicio 5 [Opcional, para titanes que quieran crédito extra] Considere el problema de cuadrados mínimos y la ecuación normal:

$$\mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^H \mathbf{b}. \quad (15)$$

Demuestre que la solución por cuadrados mínimos provista por la pseudoinversa de \mathbf{A} es ortogonal al núcleo de \mathbf{A} . Deduzca de ahí que debe ser la solución mínima norma.

Realice dos gráficos:

- Para una SNR de 30dB, con $a = 0$ (entrada blanca) y $a = 0,9$, simule y compare el mismatch promedio (6) del LMS, APA ($K = 1, 2$ y 4) y el RLS. En cada caso optimice los parámetros μ , δ y λ manualmente (en forma aproximada) para maximizar la velocidad inicial de convergencia.
- Repita para SNR = 5dB.

En ambos casos, compare el desempeño de los algoritmos en términos de velocidad de convergencia y error final en función de la SNR y el color de la entrada. Compare las ventajas de cada algoritmo en función de su costo computacional.

3. Ejemplo de aplicación: cancelación de una senoide

Se tiene una señal de ECG (archivo `senal_ECG1.mat`) a la que se le superpone una señal de interferencia con una fase determinada y frecuencia de 60Hz. A estas dos señales también se les puede agregar ruido gaussiano y blanco de potencia determinada. La señal total observada es:

$$d_i = s_i + g_i + v_i, \quad (16)$$

donde s_i es la señal de ECG¹, $g_i = A \sin(\omega i + \theta)$ y v_i es ruido blanco de media nula y potencia σ_v^2 . ω es la frecuencia angular correspondiente para una frecuencia de 60 Hz con un muestreo de 8192 Hz², y θ es una fase arbitraria para la interferencia. También se dispone de una señal de referencia para la interferencia de forma:

$$u_i = B \sin(\omega i).$$

Asuma que $B = 0,1A$ y que:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{A^2}{2\sigma_v^2} \right) = 20\text{dB}.$$

1. Analice desde el punto de vista de la estimación lineal óptima el problema genérico de cancelar una señal de interferencia usando una señal de referencia correlacionada con la misma. ¿Cuál es la señal de error? Además de las mencionadas, ¿qué otras hipótesis pueden ser necesarias?
2. Implemente un LMS para cancelar esa interferencia sinusoidal y poder observar la señal de ECG lo mejor posible. Pruebe con diferentes valores de *step-size* y largo de los filtros y para fases de la señal de interferencia igual a $\pi/4$ y $\pi/2$.

¹La señal ECG sin ruido se encuentra en el archivo indicado. Las otras deberán ser generadas por el estudiante.

²Si lo desea el estudiante puede decimar la señal en forma apropiada, para aliviar la carga computacional. Para este tipo de señales una decimación a frecuencias en el orden de 500 Hz (y aún menos) es usual y no introduce pérdidas de información.

3. Compute para cada instante de tiempo la distancia entre la señal de ECG original y la que surge luego de cancelar la interferencia, para uno de los *step-size* y largo de filtro del punto anterior.
4. Realice una corrida donde a la mitad de la simulación la frecuencia de la interferencia y la referencia cambian en forma abrupta a 70 Hz. ¿Qué observa?
5. Implemente un filtro notch digital a la frecuencia nominal de 60 Hz de forma tal que solo elimine esa frecuencia y no altere la forma de la señal original de ECG. Trate de cancelar la interferencia por medio de esta estructura suponiendo que la frecuencia de la señal de interferencia está fija y que varía según el punto anterior. Considere también un ambiente sin ruido y otro con ruido con SNR de 20 dB. Compare sus resultados con los que surgen de aplicar un LMS.

Aclaración: Para la Sección 3, se considerará positivamente la realización de otras pruebas siempre y cuando las mismas sean razonable y estén debidamente justificadas. Se evaluará también la presentación, calidad y prolijidad del informe así como cualquier análisis y conclusiones que enriquezcan al mismo.

Referencias

- [1] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4ta o 5ta ed. Pearson.
- [2] S. G. Sankaran and A. Beex, "Convergence behavior of affine projection algorithms," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 4, pp. 1086–1096, Apr 2000.