Trabajo práctico III: estimación espectral

Procesamiento de Señales II - Facultad de Ingeniería, UBA

3 de diciembre de 2015

1. Condiciones de entrega y comentarios

El TP puede realizarse en grupos de hasta 2 personas.
Debe preparse un informe breve pero completo con lo siguiente:

- En la sección de técnicas no paramétricas deben realizarse exactamente 4 gráficos (uno para cada item). Debe discutir cualitativamente los resultados según se pida en cada inciso y en función de lo visto en clase.
- En la sección de técnicas paramétricas debe realizar exactamente 4 graficos (items 2 y 3). Debe discutir los resultados según se pida en cada inciso y en función de lo visto en clase.
- Deben incluirse los códigos empleados para generar los gráficos.

Realice los gráficos del periodograma en dB. Recuerde que el periodograma ya tiene unidades de potencia.

El trabajo práctico debe ser entregado **sin falta y completo** a más tardar el 22/12.

Las simulaciones se pueden realizar en cualquier software que desee el estudiante. Algunas funciones útiles de Matlab/Octave: `roots` (ceros de polinomios), `zeroplot` (diagrama de ceros), `xcorr` (estimador de la autocorrelación).

2. Técnicas no paramétricas

1. Genere un secuencia de 10000 realizaciones de ruido blanco gaussiano complejo circularmente simétrico de media nula y varianza unitaria. Estime las secuencias de autocovarianza utilizando los estimadores sesgado e insesgado de la correlación. Grafique ambos estimadores, el insesgado primero y arriba el sesgado. Compárelos con la autocovarianza teórica del ruido. ¿Qué observa y por qué?
2. Considere un sistema LTI con respuesta:
$$H(z) = \frac{1 - 1{,}3817z^{-1} + 1{,}5632z^{-2} - 0{,}8843z^{-3} + 0{,}4096z^{-4}}{1 + 0{,}3544z^{-1} + 0{,}3508z^{-2} + 0{,}1736z^{-3} + 0{,}2401z^{-4}}.$$
Asuma que el sistema es excitado por ruido blanco gaussiano circularmente simétrico de media nula y varianza unitaria denotado como $\{x_n\}_n$, dando lugar a una señal:
$$y[n] = (h * x)[n].$$
Denotaremos por N al número de muestras disponibles del proceso x y consideraremos el estimador de Blackman-Tukey:
$$\hat{\phi}_{BT} = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} w[k]\hat{r}[k]e^{-j\omega k}.$$
Tomando $w[k] = 1$ para todo k y $M = N$ se tiene el periodograma o correlograma clásico.

a) Grafique la verdadera densidad espectral de potencia de y, ϕ_y.

b) Genere para $J = 100$ realizaciones de largo N de x. Obtenga para cada $i = 1, \ldots, J$ el periodograma correspondiente, $\hat{\phi}_{y,i}$. Halle el periodograma promedio:

$$\bar{\hat{\phi}}_y(\omega) = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^{J} \hat{\phi}_{y,i}(\omega)$$

y su varianza:

$$\sigma^2_{\hat{\phi}_y}(\omega) = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^{J} (\hat{\phi}_{y,i}(\omega) - \bar{\hat{\phi}}_y(\omega))^2.$$

Realice un gráfico de ϕ_y y superponga, para $N = 64$ y $N = 512$, las curvas de $\bar{\hat{\phi}}_y$ y $\sigma^2_{\hat{\phi}_y} \pm \bar{\hat{\phi}}_y$. ¿Qué sucede con la varianza del estimador $\sigma^2_{\hat{\phi}_y}$ a medida que incrementa N? ¿Observa algún cambio?

c) Ahora realice un grafico de ϕ_y, $\bar{\hat{\phi}}_y$ y $\sigma^2_{\hat{\phi}_y} \pm \bar{\hat{\phi}}_y$ para $N = 256$ en las condiciones del punto anterior (estimador de Blackman-Tukey con ventana rectangular y $M = N$). Superponga en este gráfico las mismas curvas pero utilizando una ventana de Bartlett (triangular) con $M = N/4$ y $M = N/16$:

$$w[k] = \left(1 - \frac{|k|}{M}\right) \mathbb{1}\{|k| \leq M\}.$$

Recuerde hacer una FFT lo suficientemente larga si M es pequeño. ¿Qué ventajas observa ahora? Discuta las ventajas y desventajas de usar una ventana.

3. Técnicas paramétricas

Considere el modelo de dos sinusoides en ruido:

$$y[k] = e^{j(2\pi f_1 k + \phi_1)} + e^{j(2\pi f_2 k + \phi_2)} + v[k] \quad k = 1, ..., N$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son uniformes independientes en $[-\pi, \pi]$ y $v[k]$ es ruido blanco complejo circularmente simétrico de media nula y varianza σ_v^2. Suponga que tiene $N = 20$ muestras de la señal. El límite teórico de resolución del periodograma es entonces:

$$|f_2 - f_1| < 1/N = 1/20.$$

Considere que $f_1 = 0{,}2$ y parametrice a $f_2 = f_1 + \frac{\delta}{N}$, donde δ ajusta la separación entre las sinusoides. Sea $L > 2$ el orden del método MUSIC (el tamaño de la matriz de correlación empleada). Utilice el enfoque *forwards-backwards* para estimar la matriz de correlación de las muestras.

1. Escriba la expresion que utiliza para la SNR.

2. Considere que $L = 3$ (Pisarenko). Fije $\delta = 0{,}5$ y para SNR = 30dB y 10dB estime las frecuencias por el método de Pisarenko de las raíces. Grafique la posición de los ceros e indique los autovalores de la matriz de autocovarianza de las muestras. ¿Son compatibles los autovalores con lo discutido en clase? ¿Qué observa al bajar la SNR?

3. Ahora considere $\delta = 0{,}5$ y SNR=10dB igual que antes, pero ahora con L variable (MUSIC). Determine si para algún $3 < L \leq 10$ logra estimar las frecuencias de las sinusoides. Se le presentan dos situaciones:

   a) Si logra estimar las frecuencias de las sinusoides para algún $L \leq 10$: realice un periodograma, intente estimar las frecuencias de las mismas, y compare los resultados obtenidos con ambos técnicas.

b) Si no logra estimar las frecuencias para $L \leq 10$: determine el valor mínimo de δ tal que las dos sinusoides puedan ser distinguidas y su frecuencia estimada con un error inferior al 10 % (aprox.). A continuación realice un periodograma con ese valor de δ, intente estimar las frecuencias de las mismas, y compare los resultados obtenidos con ambas técnicas.

En ambos casos grafique el periodograma y el diagrama de ceros. ¿Por qué no puede aumentar demasiado L? ¿Convendría utilizar alguna ventana para el periodograma, o es mejor no utilizarla? ¿Por qué?