

Procesamiento de Señales II
TP3: Estimación espectral

Sampayo, Sebastián Lucas

Segundo Cuatrimestre 2015



**FACULTAD
DE INGENIERIA**

Universidad de Buenos Aires

Índice

1. Técnicas no paramétricas	1
1.1. Autocovarianza	1
1.2. Densidad espectral de potencia	2
1.2.1. a) Valor verdadero	2
1.2.2. b) Periodograma	2
1.2.3. c) Blackman-Tukey	3
2. Técnicas paramétricas	5
2.1. Relación Señal/Ruido SNR	5
2.2. Pisarenko - MUSIC de las raíces. $L = 3$	5
2.3. Pisarenko - MUSIC. L variable	7

1. Técnicas no paramétricas

1.1. Autocovarianza

Con el objetivo de analizar los estimadores de la autocovarianza vistos en clase se generó una secuencia de 10.000 realizaciones de ruido blanco gaussiano complejo circularmente simétrico de media nula y varianza unitaria. La autocovarianza de este proceso es en teoría una delta de dirac en el origen.

El estimador insesgado utilizado es:

$$\hat{r}[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=k+1}^N x[n]x^*[n-k], \quad 0 \leq k \leq N-1$$

El problema que tiene este estimador es que el factor $\frac{1}{N-k}$ aumenta con k , con lo cual $\hat{r}[k]$ aumenta para valores de k cercanos a N . Además dichos valores se estiman con pocas sumas ($N-k$ sumas), lo que lleva a valores muy dispersos y dependientes de la realización particular. De hecho en general, la autocovarianza real debería decrecer rápidamente con valores grandes de k .

Por otro lado, el estimador sesgado, si bien su esperanza no conduce a valor real, carece del problema anterior, dado que el factor de escala $\frac{1}{N}$ es constante para todo k .

El resultado de la simulación para estos estimadores y su comparación con la delta teórica se muestran en el siguiente gráfico:

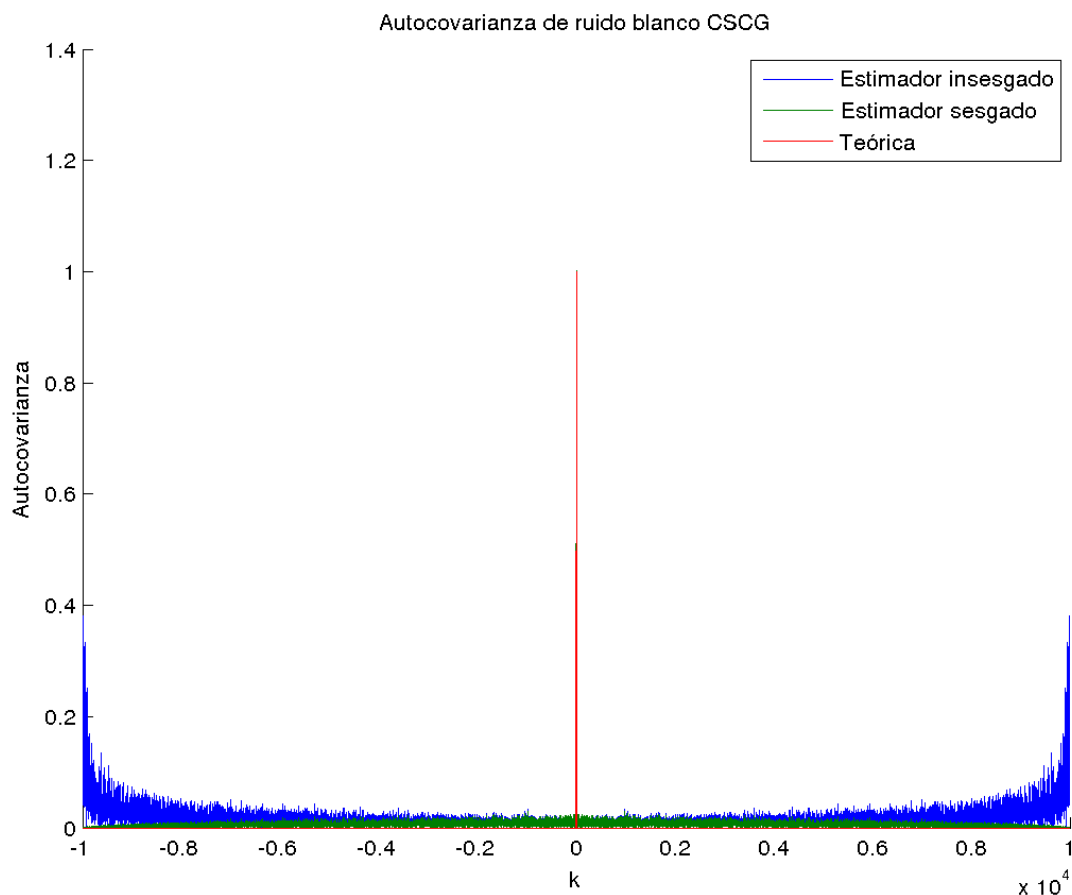


Figura 1: Comparación de estimadores de autocovarianza.

1.2. Densidad espectral de potencia

1.2.1. a) Valor verdadero

Realizando los cálculos se puede comprobar que para un sistema LTI cuya entrada es la señal aleatoria $x[n]$, con PSD $\phi_x(w)$ y respuesta al impulso $h[n]$, con respuesta en frecuencia $H(w)$, la PSD de la salida se puede escribir como:

$$\phi_y(w) = |H(w)|^2 \cdot \phi_x(w)$$

Ahora bien, al ser ruido blanco la entrada, la PSD es una constante igual a la varianza del proceso (ESA), que para el caso es 1. De esta manera:

$$\phi_y(w) = |H(w)|^2$$

$$H(Z) = \frac{1 - 1,3817z^{-1} + 1,5632z^{-2} - 0,8843z^{-3} + 0,4096z^{-4}}{1 + 0,3544z^{-1} + 0,3508z^{-2} + 0,1736z^{-3} + 0,2401z^{-4}}$$

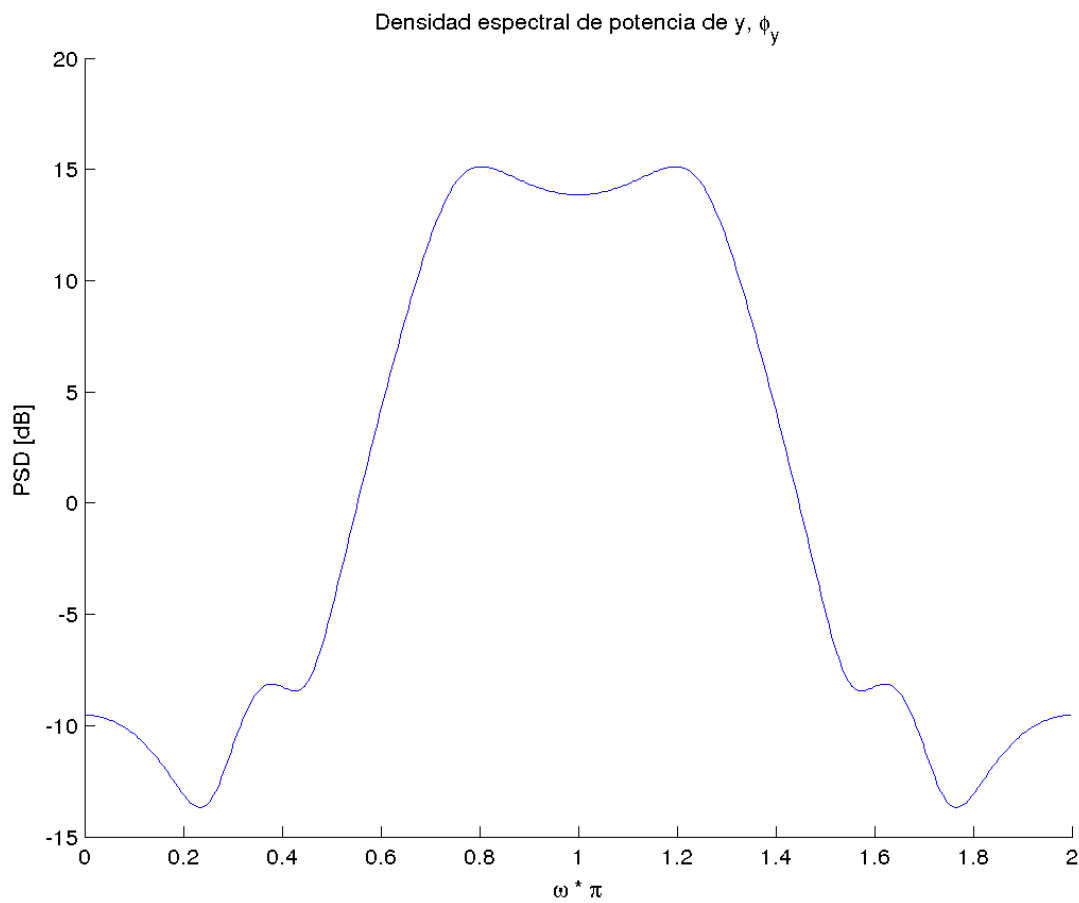


Figura 2: Valor real de la PSD a la salida del sistema.

1.2.2. b) Periodograma

En este punto se calculó el promedio de 100 periodogramas de realizaciones del sistema del punto anterior, de largo $N = 64$ y $N = 512$. Para esto se generó ruido blanco de largo N , del mismo modo que en 1.1. Esta señal fue filtrada con $H(Z)$ obteniendo las realizaciones de $y[n]$ a las cuales se les aplicó el estimador sesgado de la autocovarianza, ya que este se comporta mejor para valores grandes de k que el insesgado. Luego a la autocovarianza se le tomó la FFT para obtener un estimado de la PSD $\hat{\phi}_{y,i}(w)$. Finalmente el periodograma

promedio se obtuvo mediante:

$$\bar{\phi}_y(w) = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \hat{\phi}_{y,i}(w)$$

Luego, usando este valor se estimó la varianza:

$$\sigma_{\hat{\phi}_y}^2(w) = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^J \left(\hat{\phi}_{y,i}(w) - \bar{\phi}_y(w) \right)^2$$

En la siguiente figura se puede observar la PSD teórica ϕ_y junto con las curvas de $\bar{\phi}_y$ y $\bar{\phi}_y \pm \sigma_{\hat{\phi}_y}^2$ para cada N . Observar que los límites inferiores (cuando se resta el desvío) a veces dan $-\infty$, dado que el desvío es del mismo orden que la media, dando un resultado negativo, que al tomar logaritmo fue interpretado como $-\infty$

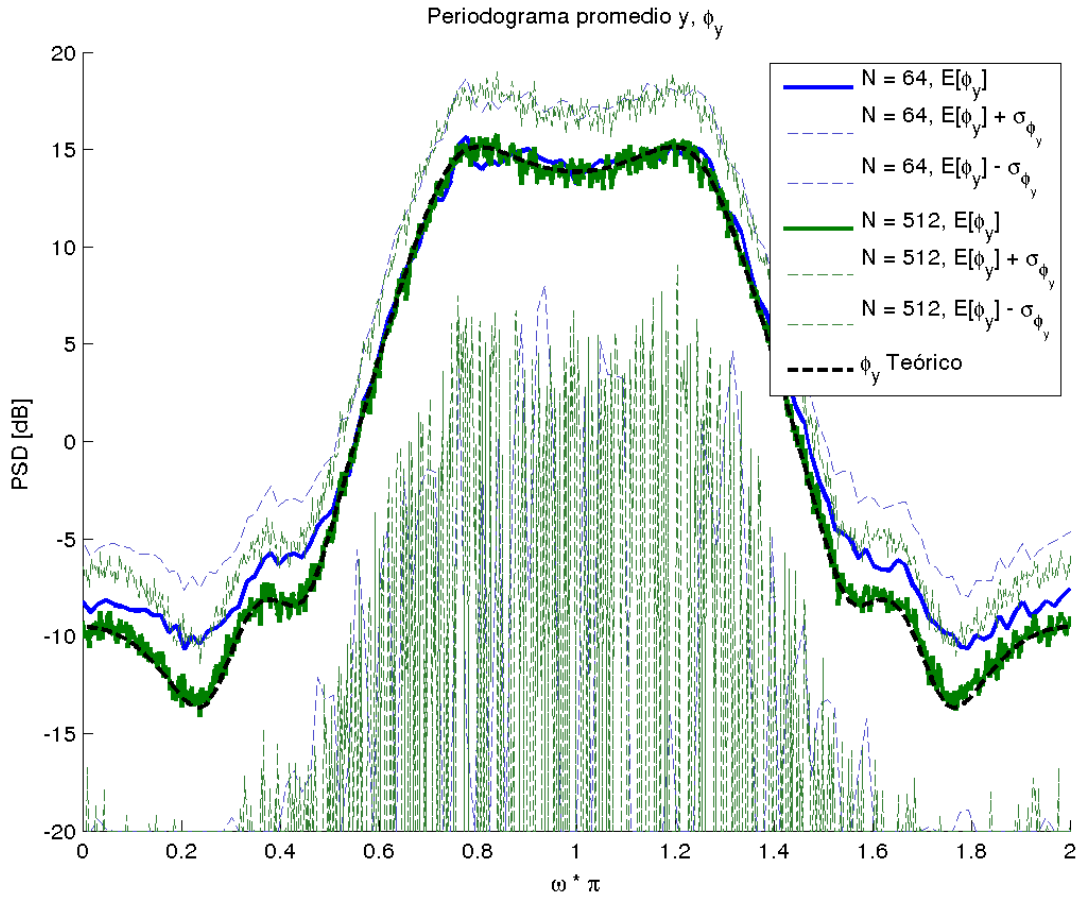


Figura 3: Estimación del periodograma para realizaciones de distintos tamaños.

Como se puede ver en la figura, para $N = 64$, la estimación de la PSD se encuentra desplazada por el sesgo del estimador (que se aprecia en los extremos del gráfico, en 0 y en π) y al aumentar el valor de N , este desplazamiento es menor, acercándose más al valor verdadero. Esto es coherente con el hecho de que el periodograma es asintóticamente insesgado. No obstante, no podemos afirmar lo mismo para la varianza, ya que como se puede ver en la imagen en ambos casos son similares. Esto es porque el estimador es inconsistente, es decir que la varianza no tiende a cero con N creciente.

1.2.3. c) Blackman-Tukey

Tomando las mismas condiciones del punto anterior pero multiplicando la autocovarianza por una ventana de Bartlett $w[k]$ se obtiene el estimador de Blackman-Tukey. La esperanza del periodograma entonces es la

convolución periódica entre la PSD real y la ventana de Bartlett.

$$w[k] = \left(1 - \frac{|k|}{M}\right) 1\{|k| \leq M\}.$$

Se graficó para valores de $M = N, M = N/4, M = N/16$:

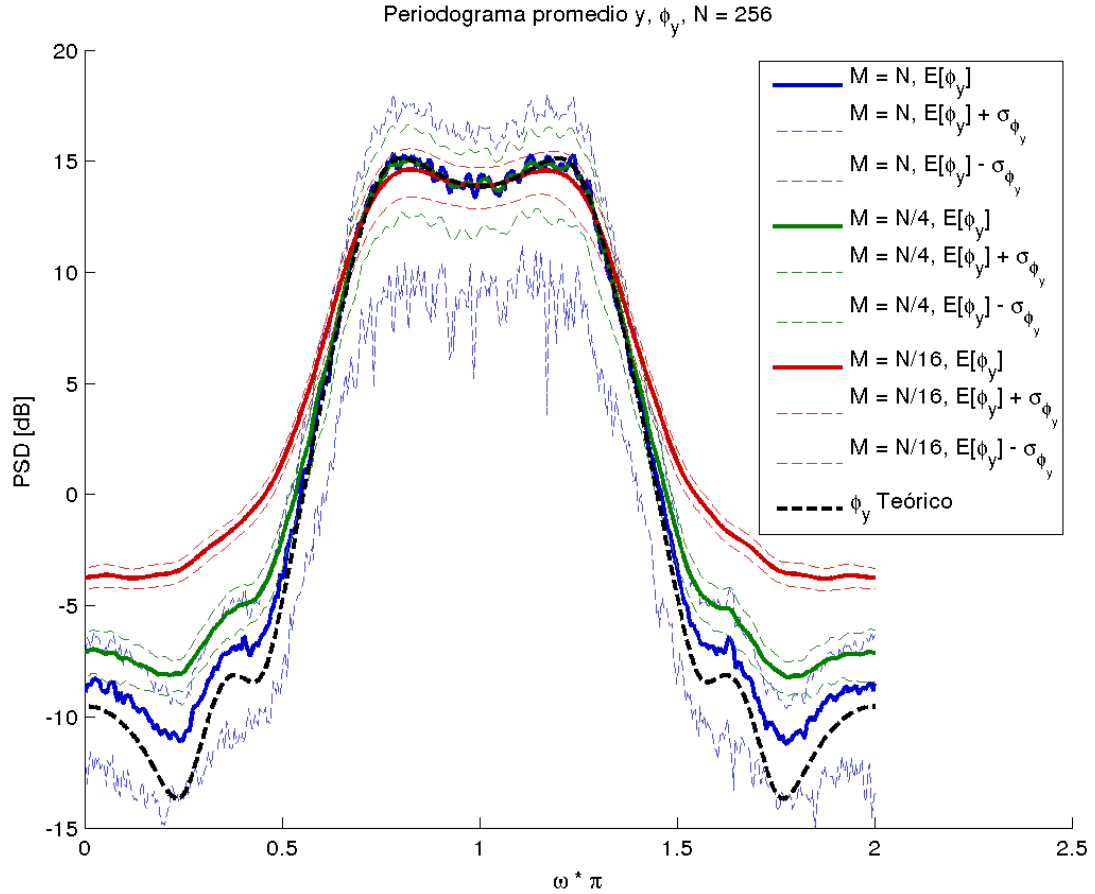


Figura 4: Blackman-Tukey.

En este caso podemos ver como al achicar la ventana en k , el espectro de esta se ensancha en frecuencia, dando como resultado una curva más suave, pero un sesgo mayor.

Además podemos ver que al reducir M , la varianza del estimador se reduce. Esto se debe a que se ha truncado a M muestras, eliminando esos valores que se estiman con pocas sumas, como fue indicado en la sección 1.1.

2. Técnicas paramétricas

2.1. Relación Señal/Ruido SNR

Sea el modelo de K sinusoides con ruido blanco CSCG:

$$y[n] = \sum_{k=1}^K \alpha_k e^{jw_k n + \phi_k} + v[n]$$

con autocorrelación:

$$r_y[k] = \sum_{k=1}^K \alpha_k^2 e^{jw_k n} + \sigma_v^2 \delta[n]$$

Por lo tanto, la potencia del ruido es σ_v^2 , mientras que la potencia de señal se corresponde con $\sum_{k=1}^K \alpha_k^2$. De esta manera, la relación señal ruido se puede expresar como:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{\sum_{k=1}^K \alpha_k^2}{\sigma_v^2} \right)$$

Para nuestro caso particular, tenemos que $K = 2$ y $\alpha_k = 1$, quedando:

$$SNR_{dB} = 10 \log \left(\frac{2}{\sigma_v^2} \right)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{2}{10^{SNR_{dB}/10}}$$

2.2. Pisarenko - MUSIC de las raíces. L = 3

En esta sección se utilizó el método de Pisarenko de las raíces fijando los siguientes parámetros:

$$N = 20, \quad L = 3, \quad \delta = 0,5$$

Para distintas relaciones señal ruido se graficaron las raíces obtenidas con el algoritmo MUSIC, donde los triángulos representan la posición verdadera que deberían ocupar las raíces, mientras que los círculos los resultados del programa:

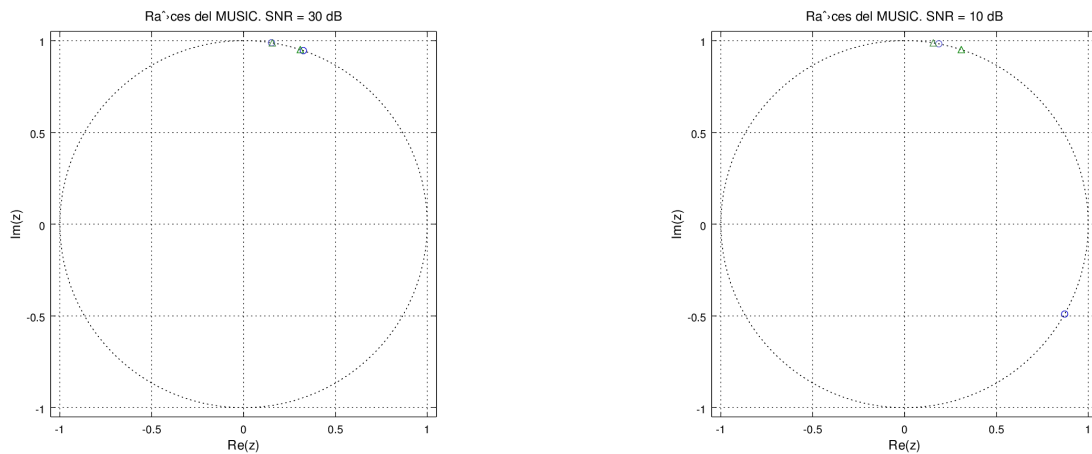


Figura 5: Raíces devueltas por el algoritmo y teóricas.

Los resultados numéricos completos son los siguientes:

Para $SNR = 30dB$

Parámetro	Valor verdadero	Valor estimado	Error %
w_1	1.26	1.24	1.39
w_2	1.41	1.42	0.29
σ_v^2	0.002	0.0022	10.29
Autovalores de R	[0.0022 0.039 1.8]		

Para $SNR = 10dB$

Parámetro	Valor verdadero	Valor estimado	Error %
w_1	1.26	-0.51	140.74
w_2	1.41	1.38	2.15
σ_v^2	0.2	0.12	70.28
Autovalores de R	[0.12 0.18 1.9]		

El menor autovalor de la matriz de autocovarianza debiera corresponder a σ_v^2 . Por lo tanto con los autovalores del estimador de R se obtiene un estimado de dicha varianza.

No obstante, al disminuir la relación señal/ruido, este estimador se vuelve muy malo.

2.3. Pisarenko - MUSIC. L variable

Para estudiar mejor el algoritmo se varió el parámetro L entre 3 y 10 obteniendo los siguientes errores en la estimación de frecuencia, en todos los casos para $SNR = 10dB$:

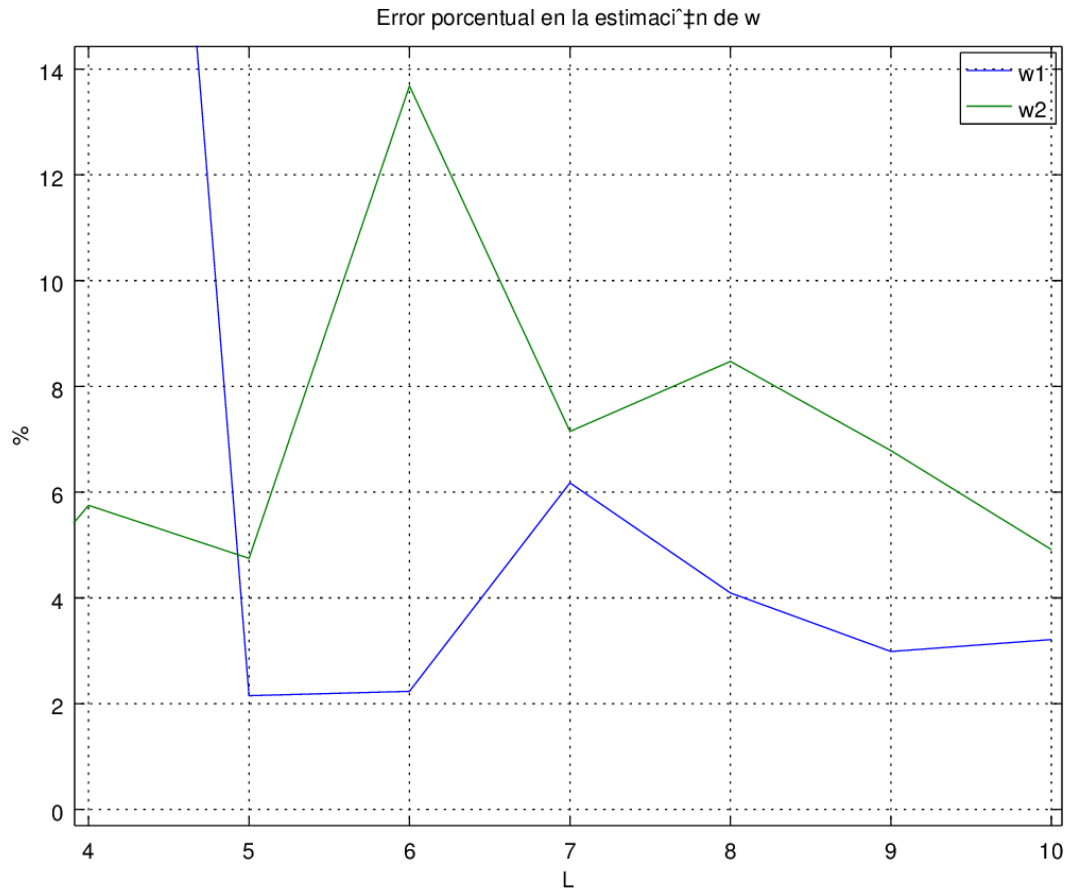


Figura 6: Error de estimación en función de L .

Como se puede ver, al aumentar L , el error se reduce. Sin embargo, cabe destacar que no en todas las realizaciones se obtienen resultados útiles. Esto sucede debido a que los errores, al realizar los cálculos con precisión finita, hacen que las raíces que deberían encontrarse en el círculo unitario se alejen. Por otro lado, alguna de las otras raíces que aparecen al aumentar L , puede tener un módulo más cercano a 1 que la raíz correspondiente a la solución del problema, por lo tanto el algoritmo se equivoca, resultando en un error grande. Esto se puede ver mejor en el siguiente gráfico adicional, donde se observa que la raíz elegida por el algoritmo (abajo a la izquierda) es incorrecta:

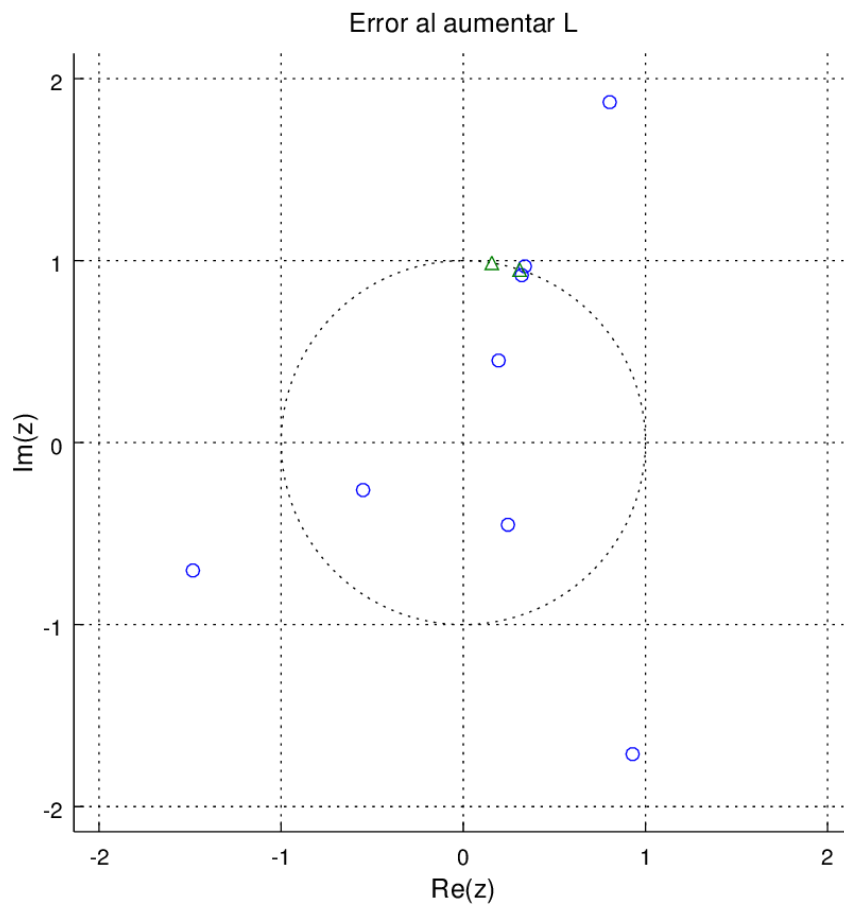


Figura 7: Error al aumentar L.

Por otro lado, a continuación podemos ver el periodograma de la señal y simulada, junto con una referencia de la ubicación de las frecuencias verdaderas:

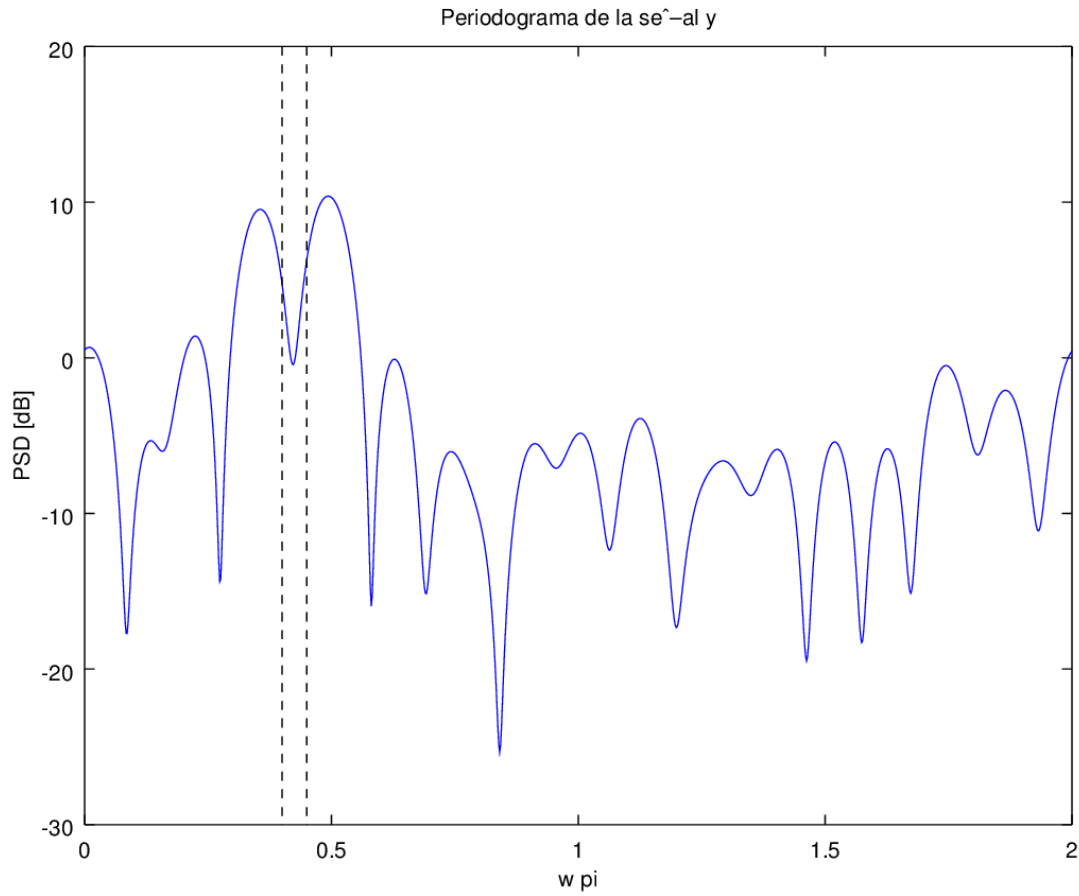


Figura 8: Periodograma de la seˆ-al.

Para intentar estimar las frecuencias a partir del periodograma es necesario que dicho gráfico sea lo suficientemente preciso de modo de poder distinguir máximos distintos en las distintas frecuencias componentes de la seˆ-al. En teoría se tiene que el periodograma no permite separar frecuencias f_1, f_2 tales que:

$$|f_1 - f_2| < 1/N$$

Por lo tanto, como en este caso la separación es menor, no debería poder distinguirse más de 1 máximo. Sin embargo podemos distinguir 2 picos ligeramente corridos de la posición de referencia en un 10% aproximadamente.

Además, cabe destacar que la utilización de otra ventana distinta a la rectangular solo empeora las cosas, debido a que cualquiera que sea, tendría una banda de transición en frecuencia mayor que la rectangular (la cual es óptima en dicho sentido). En conclusión, sería más difícil distinguir 2 frecuencias próximas, a pesar de la reducción en el rizado producto de una ventana más suave.