PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DOCENTE: NIKOLA KAMBUROV
AYUDANTE: MATÍAS DÍAZ

MAT2555 - Análisis Funcional

Tarea 2 - Omar Neyra, Sebastián Sánchez

PROBLEMA 1

Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $T \in B(H,H)$ un operador lineal acotado. Demuestre que existe un único operador $T^* \in B(H,H)$ tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

El operador $T^* : H \to H$ se llama el **operador adjunto** de T. Pruebe que T^* satisface

1. $\|T^*\| = \|T\|$.
2. $(T^*)^* = T$.

Definamos el operador lineal $x \mapsto \langle Tx, y \rangle$ para y fijo. Luego,

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \|y\| \implies \|\langle T \cdot, y \rangle\| < \infty.$$

Así, por el teorema de representación de Riesz se tiene que existe un único y^* tal que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle.$$

Definamos $T^* y = y^*$. Por Riesz está bien definido, además, T^* es lineal y acotado. En efecto, consideremos $T^* 0$, luego,

$$\langle x, T^* 0 \rangle = \langle Tx, 0 \rangle = 0 \quad \forall x \in X \quad \therefore \quad T^* 0 = 0.$$

Por otro lado, si tomamos $\lambda y_1 + y_2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*(\lambda y_1 + y_2) \rangle &= \langle Tx, \lambda y_1 + y_2 \rangle \\
&= \langle Tx, \lambda y_1 \rangle + \langle Tx, y_2 \rangle \\
&= \overline{\lambda} \langle Tx, y_1 \rangle + \langle Tx, y_2 \rangle \\
&= \overline{\lambda} \langle x, T^* y_1 \rangle + \langle x, T^* y_2 \rangle \\
&= \langle x, \lambda T^* y_1 + T^* y_2) \rangle.
\end{aligned}$$

para todo $x \in X$ y por lo tanto $T^*(\lambda y_1 + y_2) = \lambda T^* y_1 + T^* y_2$.

Ahora veamos que es acotado. Sea y unitario. Luego,

$$\|T^*y\|^2 = |\langle T^*y, T^*y\rangle| = |\langle T(T^*y), y\rangle| \leq \|T(T^*y)\|\|y\| \leq \|T\|\|T^*y\|$$

Así que $\|T^*y\| \leq \|T\|$ y por lo tanto $\|T^*\| \leq \|T\| < \infty$.

Para ver la unicidad, supogamos que existe otro operador lineal acotado S que satisface lo mismo. Luego,

$$\langle x, T^*y\rangle = \langle x, Sy\rangle \implies \langle x, T^*y - Sy\rangle = 0 \quad \forall y \in Y, \forall x \in X.$$

Por lo tanto $T^* = S$.

Ahora veamos el resto.

1. Ya tenemos una igualdad. Queda ver el converso, es decir, que $\|T\| \leq \|T^*\|$. Sea x de norma 1. Luego,

$$\begin{aligned} &\|Tx\|^2 \\ &\qquad = |\langle Tx, Tx\rangle| \\ &\qquad = |\langle x, T^*(Tx)\rangle| \\ &\qquad \leq \|T^*(Tx)\|\|x\| \\ &\qquad \leq \|T^*\|\|Tx\| \Rightarrow \|Tx\| \leq \|T^*\|. \end{aligned}$$

   Tomando supremo se obtiene lo pedido.

2. Sean $x, y \in X \times Y$ cualquiera, luego:

$$\langle T^*x, y\rangle = \overline{\langle y, T^*x\rangle} = \overline{\langle Ty, x\rangle} = \langle x, Ty\rangle.$$

   Por lo tanto $T = (T^*)^*$.

PROBLEMA 2

Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert separable y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ una sucesión acotada: $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Demuestre que existe un $x \in H$ y una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \langle x_{n_k}, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall y \in H.$$

Se dice que $\{x_{n_k}\}$ **converge débilmente** a x.

(*Sugerencia:* tome y igual a cada uno de los miembros de una base ortonormal y ejecute un argumento diagonal).

Como H es un espacio de Hilbert separable, existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Consideremos la sucesión $S_1 = \{\langle x_n, e_1\rangle\} \subset \mathbb{K}$. Dado que la sucesión $\{x_n\}$ es acotada, la sucesión S_1 es acotada (aplicando Cauchy-Schwarz). Luego, por Heine-Borel existe una subsucesión convergente. Denotemos a los elementos de la primera entrada de esa sucesión por $\{x_{n,1}\}$. i.e.

$$\{\langle x_{n,1}, e_1\rangle\}_n \text{ converge en } \mathbb{K}.$$

Consideremos ahora la sucesión $S_2 = \{\langle x_{n,1}, e_2\rangle\}$. Por el mismo argumento anterior existe una subsucesión convergente. Denotemos a los elementos de $\{x_{n,1}\}$ en S_1 que aparecen en esta subsucesión por $\{x_{n,2}\}$. Entonces tenemos que

$$\{\langle x_{n,2}, e_2\rangle\}_n \text{ converge en } \mathbb{K}.$$

Inductivamente tendremos sucesiones $\{x_{n,k}\}$ tales que

$$\{\langle x_{n,k}, e_k\rangle\}_n \text{ converge en } \mathbb{K}.$$

Digamos que $\langle x_{n,k}, e_k\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_k \in \mathbb{K}$. Nótese que

$$\langle x_{n,n}, e_k\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_k.$$

pues $\{x_{n,k+1}\}_n \subset \{x_{n,k}\}_n$.

Definamos $x = \sum_k \lambda_k e_k$. Afirmamos que x existe y que $\lim_{k\to\infty}\langle x_{n,n}, y\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $y \in Y$.

Existencia: Usaremos que

$$\sum_k c_k e_k \in H \iff \{c_k\}_k \in \ell^2.$$

Veamos entonces que los coeficientes están en ℓ^2. Consideremos las sumas parciales:

$$\sum_{k\le N} |\lambda_k|^2 = \sum_{k\le N} \left|\lim_{n\to\infty} \langle x_{n,n}, e_k\rangle\right|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\le N} |\langle x_{n,n}, e_k\rangle|^2 \le \limsup_n \|x_{n,n}\|^2 \le \sup_n \|x_n\|^2.$$

Luego, x existe.

Propiedad: Sea $y \in H$. Luego,

$$|\langle x_{n,n}, v\rangle - \langle x, v\rangle| \le \underbrace{\left|\langle x_{n,n}, \sum_{k\le N}\lambda_k e_k\rangle - \langle x, \sum_{k\le N}\lambda_k e_k\rangle\right|}_{\to 0} + 2\underbrace{\sup_n x_n}_{\text{acotado}} \underbrace{\left\|v - \sum_{k\le N}\lambda_k e_k\right\|}_{\to 0}.$$

Por lo tanto se concluye el resultado.

PROBLEMA 3

Sea $f \in C(\mathbb{T})$ y sea

$$f(\theta) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n(\theta)$$

la serie de Fourier de f.

(a) Demuestre que para todo $r \in [0,1)$ la serie

$$u(r,\theta) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \hat{f}(n) e_n(\theta)$$

define una función $u(r,\theta) \in C^2([0,1]\times\mathbb{T})$, la cual satisface la ecuación de Laplace en coordenadas polares (r,θ):

$$\Delta u = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\right) u = 0$$

en el disco unitario $\mathbb{D} = \{0 \le r < 1, \theta \in \mathbb{T}\}$.

(b) Pruebe que podemos expresar $u(r,\theta) = P_r * f(\theta)$ como una convolución de f con el kernel de Poisson

$$P_r(\theta) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}.$$

(c) Demuestre que

$$\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = f(\theta)$$

uniformemente en θ. (*Sugerencia:* Verifique que $\{P_r\}_{r\in[0,1)}$ es una familia de buenos kernels en $L^1(\mathbb{T})$).

(a) Notar que f y e_n son acotadas (son continuas en un compacto). Luego,

$$|u(r,\theta)| \leq C\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \leq 2C\sum_{n\geq 0} r^n < \infty$$

para alguna constante $C > 0$. Así, la serie es absoluta y uniformemente convergente. Luego, podemos derivar la serie término a término. De esta forma se tiene que

$$\partial_r u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|r^{|n|-1}\hat{f}(n)e_n(\theta)$$
$$\partial_\theta u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} ine_n(\theta)r^{|n|}\hat{f}(n)$$

Dado que (para $r \neq 0$)

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|r^{|n|-1}\hat{f}(n)e_n(\theta) &\leq \frac{2C}{r}\sum_{n\geq 0} nr^n \\ &\leq \frac{2C}{r}\lim_{N\to\infty}\frac{r-(N+1)r^{N+1}+Nr^{N+2}}{(1-r)^2} < \infty\end{aligned}$$

La serie derivada también es absoluta y uniformemenente convergente, así que podemos volver a derivar término a término (el argumento para la serie derivada con respecto a θ es análogo).

$$\partial_r^2 u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|(|n|-1)r^{|n|-2}\hat{f}(n)e_n(\theta)$$
$$\partial_\theta^2 u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -n^2e_n(\theta)r^{|n|}\hat{f}(n)$$

Esta serie también es absoluta y uniformemente convergente, por lo tanto, la función $u \in C^2$.

Aplicando la fórmula vemos que

$$\begin{aligned}\Delta u &= |n|(|n|-1)r^{|n|-2}\cdot\star + |n|r^{|n|-2}\cdot\star - \frac{n^2}{r^2}\cdot\star \\ &= (|n|^2r^{|n|-2} - n^2r^{|n|-2})\cdot\star \\ &= 0\end{aligned}$$

donde $\star = \hat{f}(n)e_n(\theta)$.

(b) Expandamos los términos:

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{|n|} f(x) e^{in(\theta-x)}\, dx$$

Por TCD podemos cambiar la integral con la serie:

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} f(x) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \cdot r^{|n|} e^{in(\theta-x)}\, dx = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}) * f(r,\theta).$$

(c) Supongamos momentáneamente que la familia $\{P_r\}_{r\in[0,1)}$ es de buenos kernels. En tal caso tenemos que

$$\begin{aligned} |f(\theta) - u(r,\theta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - x) r^{|n|} e^{-inx}\, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - x)| r^{|n|} e^{-inx}\, dx \end{aligned}$$

De esta forma, tomando una bola alrededor del origen podemos controlar el término con f por continuidad y el resto lo podemos achicar porque la cola de los kernel se va a cero. Concretamente: dado que f es continua, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x| < \delta \implies |f(\theta) - f(\theta + x)| < \varepsilon.$$

Por otro lado, para el mismo δ se satisface que

$$\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |P_r(x)|\, dx \xrightarrow{r\to 1} 0.$$

De esta forma tenemos que

$$|f(\theta) - u(r,\theta)| \leq \varepsilon \int_{|x|\leq\delta} P_r(x)\, dx + \sup_{\mathbb{T}} |f| \int_{\delta\leq|x|\leq\pi} P_r(x)\, dx.$$

Tomando r suficientemente cercado a 1 podemos hacer el término no constante del segundo sumando menor a ε. Notando el que término que acompaña a ε en el primer sumando está acotado (porque son buenos kernels) concluimos que:

$$|f(\theta) - u(r,\theta)| \leq \varepsilon C.$$

<u>Demostración que $\{P_r\}_{r\in[0,1)}$ es una familia de buenos kernels:</u>

a) Integra 1: Por la convergencia absolutamente uniforme podemos cambiar la integral con la serie, resultando en

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}\, dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} \underbrace{\int e^{in\theta}\, dt}_{=0 \text{ si } n\neq 0} = 1.$$

b) Cota absolutamente uniforme: Dado que $P_r(t)$ es positiva,

$$\int_{\mathbb{T}} |P_r(t)|\, dt = \int_{\mathbb{T}} P_r(t)\, dt = 1.$$

para cualquier r.

c) Colas se van a cero: Sea $0 < \delta < \pi/2$. Luego, existe $r \in (0,1)$ tal que $\delta = \arccos(r/2)$. Por la identidad dada se sigue que

$$\int_{\delta \le |x| \le \pi} P_r(x) \le \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \le |x| \le \pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(x)} \le C(1-r^2).$$

Similarmente, si $\delta > \pi/2$ podemos acotar directamente

$$\int_{\delta \le |x| \le \pi} P_r(x) \le \frac{1}{2\pi} \int_{\pi/2 \le |x| \le \pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(x)} \le C(1-r^2).$$

En ambos casos, tomando $r \to 1$ nos da lo pedido.

PROBLEMA 4

Denote por $F_N \in L^1(\mathbb{T})$, $N \in \mathbb{N}$, el kernel de Fejèr. Sea $\sigma_N f := f * F_N$. Demuestre que para todo $p \in [1, \infty]$

$$\|\sigma_N f\|_{L^p(\mathbb{T})} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T}).$$

Sugerencia: Utilice la desigualdad de Hölder en estimar

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(y)\, |f(x-y)|\, dy = \int_{\mathbb{T}} F_N(y)^{1/q} F_N(y)^{1/p}\, |f(x-y)|\, dy \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

en combinación con el *Teorema de Fubini-Tonelli*:

$$\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} K(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} K(x,y)\, dy \right) dx$$

para toda $K\colon \mathbb{T}^2 \to [0, \infty]$ Lebesgue medible.

Caso $1 < p < \infty$: Equivalentemente, debemos probar que

$$\|\sigma_N f\|_p^p \le \|f\|_{L^p}^p$$

Expandamos el término de la izquierda

$$\begin{aligned}
\|\sigma_N f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{T}} |f * F_N(x)|^p\, dx \\
&\le \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)| F_N(y)\, dy \right)^p dx = \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)| F_N(y)^{1/p} F_N(y)^{1/q}\, dy \right)^p dx
\end{aligned}$$

con $1/p + 1/q = 1$. Luego, por la desigualdad de Hölder

$$\|\sigma_N f\|_{L^p}^p \le \|F_N\|_{L^1}^{p/q} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x-y)|^p F_N(y)\, dy\, dx$$

El integrando es medible (f es medible y F_N es suave) así que podemos aplicar Tonelli-Fubini:

$$\|\sigma_N f\|_{L^p}^p \leq 1 \cdot \int_{\mathbb{T}} F_N(y) \int_{\mathbb{T}} |f(x-y)|^p \, dx \, dy$$

Como estamos integrando sobre el círculo y la función es periódica, tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}} |f(x-y)|^p \, dx = \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p \, dx = \|f\|_{L^p}^p$$

Por lo tanto,

$$\|\sigma_N f\|_{L^p}^p \leq \|f\|_p^p.$$

Caso $p=1$: Ya apareció en el cálculo anterior, pero aquí va:

$$\|\sigma_N f\|_{L^1} \leq \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x-y)| F_N(y) \, dy \, dx.$$

Por Tonelli-Fubuni y la observación anterior de integrar sobre el círculo tenemos que

$$\|\sigma_N f\|_{L^1} \leq \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x-y)| F_N(y) \, dx \, dy \leq \|f\|_{L^1} \underbrace{\|F_N\|_{L^1}}_{=1}.$$

Caso $p=\infty$:

$$\|\sigma_N f\|_{L^\infty} \leq \operatorname{esssup}_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} |f(x-y)| F_N(y) \, dy.$$

PROBLEMA 5

Sea f una función 2π-periódica en $\mathbb{R}$ de clase C^1.

(a) Pruebe que $\hat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$. Concluya que $\lim_{|n|\to\infty} |n|\hat{f}(n) = 0$.

(b) Suponga que adicionalmente $\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = 0$. Utilizando la identidad de Parseval, demuestre la *desigualdad de Wirtinger*:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \left|f'(x)\right|^2 dx$$

(a) Haciendo integración por partes tenemos

$$\hat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx = \frac{1}{2\pi} \left[f(x) e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi} + in \int_T f(x) e^{-inx} \, dx = in\hat{f}(n).$$

Como f' es continua, en particular es L^1 integrable. Aplicando Riemann-Lebesgue tenemos:

$$\lim_{|n|\to\infty} |n|\hat{f}(n) = \lim_{|n|\to\infty} \hat{f'}(n) = 0.$$

(b) Por Parseval,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| &= \left|\hat{f}'(0)\right| + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus 0} \frac{\left|\hat{f}'(n)\right|}{n} \\ &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}'(n)\right| = \left\|f'\right\|_{L^2}\end{aligned}$$

PROBLEMA 6

Considere la función en $\mathbb{T}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , |x| > \delta \\ 1 - |x|/\delta & , |x| \leq \delta \end{cases}, \delta \in (0, \pi).$$

Pruebe que

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\delta}{n^2\pi\delta}\cos(nx).$$

Dado que la función está en L^2, se tiene que $S_N f \to f$. Para $n \neq 0$ se tiene que:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} f(t)e^{-int} = \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\int_{|t|\leq\delta} e^{-int}}_{I} - \frac{1}{\delta}\underbrace{\int_{|t|\leq\delta} |t|e^{-int}}_{J}\right)$$

Computemos J: reordenando la integral y haciendo integración por partes tenenemos

$$\begin{aligned}J &= \int_{-\delta}^{0} -te^{-int} + \int_0^\delta te^{-int} \\ &= \int_0^\delta te^{int} + \int_0^\delta te^{-int} \\ &= \int_0^\delta t(e^{int} + e^{-int}) \\ &= 2\int_0^\delta t\cos(nt) \\ &= 2\left(\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^\delta - \frac{1}{n}\int_0^\delta \sin(nt)\right) \\ &= 2\left(\frac{\delta\sin(n\delta)}{n} + \frac{\cos(n\delta)-1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

Ahora veamos I:

$$I = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-int} = \frac{e^{in\delta} - e^{-in\delta}}{in} = \frac{2\sin(n\delta)}{n}.$$

Juntando todo:

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\sin(n\delta)}{n} - \frac{2\sin(n\delta)}{n} - 2\frac{\cos(n\delta)-1}{\delta n^2}\right)\\ &= \frac{1-\cos(n\delta)}{\delta\pi n^2}.\end{aligned}$$

Luego, el coeficiente es par ($\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$), así que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus 0} \hat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)(e^{inx} + e^{-inx}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(n)\cos(nx).$$

Finalmente, para $n = 0$ tenemos que

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\le\delta}(1-|t|/\delta) = \frac{1}{2\pi}(2\delta - \frac{2}{\delta}\frac{\delta^2}{2}) = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Así, concluimos que

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(n\delta)}{n^2\delta n}\cos(nx).$$

PROBLEMA 7

Sea X un espacio normado y $J \subset X$. Demuestre que $\{f(x) \colon x \in J\}$ es acotado para todo funcional lineal acotado $f \in X'$ si y solo si J es acotado.

$$\exists M > 0, \quad \|x\| \le M \text{ para todo } x \in J.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Consideremos el funcional evaluación $f_x \colon X' \to \mathbb{K}, f_x(x') = x'(x)$. Por Hahn-Banach este operador es una isometría. Luego, $\|x\| = \|f_x\| < \infty$ para todo $x \in X$. Aplicando Banach-Steinhaus sobre el conjunto J tenemos que

$$\sup_{x\in J}\|x\| = \sup_{x\in J}\|f_x\| < \infty.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que J es acotado. Sea $x' \in X'$ un funcional lineal acotado. Luego, para $x \in J$ se tiene que $\|x'(x)\| \le \|x'\|\|x\| < \infty$ porque el funcional es acotado y $\|x\| \le \sup_{x\in J}\|x\| < \infty$ por hipótesis.

PROBLEMA 8

Sean X, Y dos espacios de Banach y $\{T_n\}_n \subset B(X,Y)$ una sucesión de operadores lineales acotados. Suponga que para todo $x \in X$ el límite $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ existe. Pruebe que si $x_n \to x$, entonces $T_n x_n \to Tx$ para todo $x \in X$.

Por un corolario de Banach-Steinhaus visto en clases, el operador T es lineal y acotado. Veamos la convergencia:

$$\|Tx - T_n x_n\| \le \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x\|$$

Por la convergencia puntual, existe N_0 tal que $\|Tx - T_n x\| < 1/N_0$ para $n > N_0$. Por otro lado, el operador T_n es lineal y acotado, así que $\|T_n y\| \leq \|T_n\| \|y\|$; además, como $x_n \to x$, existe N_1 tal que $\|x - x_n\| < 1/N_1$. Así, tomando $N \geq \text{máx}(N_0, N_1)$ se tiene que

$$\|Tx - T_n x_n\| \leq \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - T_n x\| \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N}\|T_n\| \qquad \forall n \geq N.$$

También por Banach-Steinhaus, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < M$ para algún $M < \infty$. Así, tomando $N \to \infty$ se tiene lo pedido.

$$\|Tx - T_n x_n\| \leq \frac{1}{N}(M+1) \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$