PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DOCENTE: NIKOLA KAMBUROV
AYUDANTE: MATÍAS DÍAZ

MAT2555 - Análisis Funcional

Tarea 3 - Omar Neyra, Sebastián Sánchez

PROBLEMA 1

Sea (Ω, M, μ) un espacio de medida y suponga que $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ para algún $p_0 \in [1, \infty)$. Pruebe que $f \in L^p$ para todo $p \geq p_0$ y que

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

SOLUCIÓN El caso $p = p_0$ es directo, así que supongamos que la desigualdad es estricta y denotemos $p' := p - p_0 > 0$. Notando que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ tenemos que

$$\int |f|^p = \int |f|^{p_0} |f|^{p'} \leq \int |f|^{p_0} \|f\|_\infty^{p'} \leq \|f\|_\infty^{p'} \|f\|_{p_0}^{p_0} \tag{1}$$

Todas las cantidades son positivas, así que tomando raíz obtenemos que

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{p'/p} \|f\|_{p_0}^{p_0/p} < \infty, \tag{2}$$

pues la norma uniforme y p_0 están acotadas. Tomando límite se ve directamente que

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \tag{3}$$

pues $p'/p = 1 - p_0/p \to 1$ y $p_0/p \to 0$ cuando $p \to \infty$.

Para la otra dirección, consideremos $\varepsilon > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p} & \geq \left(\int_{\{|f| + \varepsilon > \|f\|_\infty\}} |f|^p \right)^{1/p} \\ \geq \left(\int_{\{|f| + \varepsilon > \|f\|_\infty\}} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \right)^{1/p} & \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \mu(\{|f| + \varepsilon > \|f\|_\infty\})^{1/p}. \end{aligned}$$

Notar que $\mu(\{|f| + \varepsilon > \|f\|_\infty\}) < \infty$ pues $f \in L^p$. Tomando límite tenemos que $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. Como ε es arbitrario, se concluye el resultado.

PROBLEMA 2

Para todo $a \in \mathbb{R}$ construya una función $f_a \in L^\infty(\mathbb{R})$ con $\|f_a - f_b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq 1$ cuando $a \neq b$. Demuestre que esto implica que $L^\infty(\mathbb{R})$ no es separable.

SOLUCIÓN Para cada $a \in \mathbb{R}$ definamos $f_a(x) = \mathbb{1}_{[a,\infty)}(x)$. Claramente $f_a \in L^\infty(\mathbb{R})$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Sea $b \neq a \in \mathbb{R}$. Supongamos sin perdida de generalidad que $a < b$. Luego, $(a,b) \neq \varnothing$ y por lo tanto $(f_a - f_b)(x) = 1$ para todo $x \in (a,b)$. Concluimos que, ya que (a,b) es un conjunto de medida no nula, $\|f_a - f_b\|_\infty \geq 1$.

Supongamos por contradicción que $L^\infty(\mathbb{R})$ es separable. Sea $U := \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$ denso. Definamos $B_a := B_{1/2}(f_a) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$. Notemos que la intersección

$$B_a \cap U$$

es no vacía para a lo más numerables valores de a. Luego, el conjunto $S := \{a \in \mathbb{R} : B_a \cap U = \varnothing\}$ es no vacio. Se tiene enconces que el conjunto $\bigcup_{a\in S} B_a$ es un conjunto abierto y luego

$$\|f_b - u_n\|_\infty \geq \frac{1}{2} \ \forall b \in S, n \in \mathbb{N}.$$

Esto contradice la densidad de U, por lo que tenemos lo pedido.

PROBLEMA 3

Suponga que el espacio de medida (Ω, M, μ) es σ-finito. Decimos que una sucesión $f_n \in L^p$ *converge débilmente* a $f \in L^p$ si $c(f_n) \to c(f)$ para todo $c \in (L^p)^*$. Escribimos $f_n \rightharpoonup f$ en L^p.

(a) Demuestre que $f_n \rightharpoonup f$ en L^p, $p \in [1, \infty)$, si y solo si

$$\int f_n g \to \int fg$$

para toda $g \in L^q$, con $1/p + 1/q = 1$.

(b) Pruebe que cuando $f_n \rightharpoonup f$ en L^p, $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$

(c) (Compacidad débil de L^p) Sea $p \in (1, \infty)$ y suponga que L^q es separable. Pruebe que si $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$, entonces existe $f \in L^p$ y una sucesión $f_{n_k} \in L^p$ tal que $f_{n_k} \rightharpoonup f$.

(d) De un contraejemplo del ítem anterior cuando $p = 1$.

SOLUCIÓN

(a) $\boxed{\Rightarrow:}$ Notamos que para todo $g \in L^q$, el mapa $\Phi\colon L^p \to \mathbb{K}$ dado por $a \mapsto \int ag$ define un funcional lineal acotado. En efecto, la linealidad es directa por la linealidad de la integral y la cota sale por Hölder:

$$|\Phi(a)| \leq \int |ag| \leq \|a\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Luego, la convergencia débil nos da que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \Phi(f) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n g = \int fg.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ Por el teorema de representación de Riesz para espacios de funciones integrables, para todo $T \in (L^p)^*$ existe $h \geq 0$ en L^q tal que

$$T(a) = \int ah.$$

Por la hipótesis, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n h = \int fh = T(f).$$

(b) Sea $x' \in (L^p)^*$ de norma 1 tal que $|x'(f)| = \|f\|_p$. Esto lo podemos pedir por Hahn-Banach. Por hipótesis, se cumple que $x'(f_n) \to x'(f)$. Se sigue que:

$$\|f\|_p = \left|x'(f)\right| = \left|\lim_{n\to\infty} x'(f_n)\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \left|x'(f_n)\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \left\|x'\right\| \|f_n\|_p = \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p.$$

(c) Recordemos que para $1 < p < \infty$, $L^q \cong (L^p)^*$. Luego, $(L^p)^*$ es separable. Tomemos $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(L^p)^*$ denso y numerable. Luego, $(\phi_1(f_n))_n$ define una sucesión acotada de números en el cuerpo. Se sigue que existe una subsecuencia $f_{n,1}$ tal que $\phi_1(f_{n,1}) \to c_1 \in \mathbb{K}$. De manera inductiva tenemos secuencias $(f_{n,k})_n \subset (f_{n,k-1})_n$ tal que

$$\phi_k(f_{n,k}) \to c_k \in \mathbb{K}.$$

Definamos la secuencia diagonal $f_{n_k} = f_{n_k,n_k}$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\phi_n(f_{n_k}) \xrightarrow{n_k\to\infty} c_n \in \mathbb{K}.$$

Definamos $f = \text{lím} f_{n_k}$. Notar que $\phi_n(f_{n_k}) \to \phi_n(f)$. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $g \in (L^p)^*$. Por densidad de las ϕ_n, existe un $N_1 > 0$ tal que:

$$\|\phi_N - g\|_{p^*} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, existe N_1 tal que:

$$|\phi_n(f_{n_k}) - \phi_n(f)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para $n_k > N_1$. Tomando $N > \text{máx}(N_0, N_1)$ nos da que:

$$|g(f) - g(f_{n_k})| \leq \underbrace{|g(f) - \phi_n(f)|}_{\leq\|g-\phi_n\|} + |\phi_n(f_{n_k}) - \phi_n(f)| + \underbrace{|\phi_n(f_{n_k}) - g(f_{n_k})|}_{\leq\|g-\phi_n\|} \leq \varepsilon.$$

(d) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1([0,1])$ definidas por $f_n(t) = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}(t)$. Claramente, para $n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt = \int_0^{1/n} |n|dt = 1.$$

Luego, $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_1 < \infty$. Notemos que para toda $g \in C([0,1]) \subseteq L^\infty([0,1])$,

$$\int_0^1 u_n(t)g(t)dt = n\int_0^{1/n} g(t)dx.$$

Como g es continua en $[0,1/n]$, este alcanza su maximo y su minimo en el intervalo. Luego,

$$\int_0^{1/n} g(t)dt \leq \frac{1}{n} \max_{t\in[0,1/n]} g(t);$$
$$\int_0^{1/n} g(t)dt \geq \frac{1}{n} \min_{t\in[0,1/n]} g(t),$$

y te tendría que $\int_0^1 f_n(t)g(t)dt \to g(0)$.

Sea $(f_{n_k})_k$ una subsucesión. Supongamos por contradicción que existe $f \in L^1([0,1])$ tal que $f_{n_k} \rightharpoonup f$. Se debe cumplir que

$$\int_0^1 f_{n_k}(x)\varphi(t)dt \to \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt$$

para toda $\varphi \in L^\infty([0,1])$. Por lo anterior, si tomamos $\psi \in C([0,1])$,

$$\int_0^1 f_{n_k}(x)\psi(t)dt \to \psi(0),$$

y por unicidad del limite, f cumple que $\int_0^1 f(t)\psi(t)dt = \psi(0)$ para cualquier ψ continua.

Tomemos $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,1]) \subseteq L^\infty([0,1])$ tales que $\psi_n(t) = (1-t)^n$. Se tiene que $\int_0^1 f(t)\psi_n(t)dt = \psi_n(0) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, por lo que $\psi_n(0) \xrightarrow{n\to\infty} 1$. Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n(t) \leq 1$, $t \in [0,1]$ por lo que, como $u \in L^1([0,1])$, por el TCD,

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{n\to\infty} \psi_n(0) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)\psi_n(t)dt \\
&\overset{\text{TCD}}{=} \int_0^1 f(t) \lim_{n\to\infty} \psi_n(t)dt.
\end{aligned}$$

Como $\psi_n \to \psi$, con $\psi(t) = \mathbb{1}_{\{0\}}(t)$ puntualmente,

$$\int_0^1 f(t) \lim_{n\to\infty} \psi_n(t)dt = 0$$

. Esta contradicción demuestra que no existe tal f, por lo que tenemos lo pedido.

PROBLEMA 4

Sean $(\Omega_i, \mathscr{M}_i, \mu_i)$, $i = 1,2$ dos espacios de medida σ-finita y sea $K : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{K}$ una función $\mu_1 \otimes \mu_2$ medible. Fije $1 \leq q \leq \infty$.

(a) Suponga que $K \geq 0$. Utilice la propiedad isométrica de la correspondencia entre $(L^p)^*$ y L^q para demostrar la *Desigualdad integral de Minkowski*:

$$\left\| \int_{\Omega_2} K(\cdot, y) d\mu_2(y) \right\|_{L^q(\Omega_1, \mu_1)} \leq \int_{\Omega_2} \|K(\cdot, y)\|_{L^q(\Omega_1, \mu_1)} d\mu_2(y).$$

(b) Pruebe que la desigualdad se cumple también cuando $K(\cdot, y) \in L^q(\Omega_1, \mu_1)$ para todo $y \in \Omega_2$.

SOLUCIÓN

(a) Notemos que $\mu_1 \times \mu_2$ es σ-finita. Para $p = 1$ basta aplicar Tonelli. Supongamos que $p > 1$. Sea $\Omega_n \uparrow \Omega_1 \times \Omega_2$ tal que $\mu_1 \times \mu_2(\Omega_n) < \infty$. Sea Φ el mapa:

$$\begin{aligned} \Phi \colon L^q(\Omega_1 \times \Omega_2) &\to (L^p(\Omega_1 \times \Omega_2))^* \\ g &\mapsto \langle \cdot, g \rangle \end{aligned}$$

donde $g \in L^q(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Sabemos que Φ es un isomorfismo isométrico porque $p \in [1, \infty)$ y $\mu_1 \times \mu_2$ es σ-finito.

Sea $s_n \in \Omega_n$ una función simple. Notar que $s_n \in L^q(\Omega_n)$ y $\int s_n(\cdot, x_2) \in L^q(\Omega_n^{x_1}))$. Tomemos $g \in L^p(\Omega_n^{x_1}$ de norma 1. Luego,

$$\begin{aligned} \left| \Phi^{x_1}\left(\int s_n(\cdot, x_2) d\mu_2\right)(g) \right| &= \left| \langle \int s_n(\cdot, x_2), g \rangle \right| \\ &\leq \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |s_n(x_1, x_2) g(x_2)| \\ &\overset{\text{tonelli}}{=} \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} |s_n(x_1, x_2) g(x_2)| \\ &\overset{\text{hölder}}{\leq} \int_{\Omega_2} \|s_n(\cdot, x_2)\|_q \end{aligned}$$

Dado que Φ es isometría, se tiene que

$$\left\| \Phi\left(\int s_n(\cdot, x_2) d\mu_2\right\|_{p^*} = \left\| \int s_n(\cdot, x_2) d\mu_2 \right\|_q$$

y se concluye el resultado. Dado que $K \geq 0$ y es medible, existe una sucesión de funciones simples que convergen a K monotonamente. Combinando el procedimiento anterior concluimos que vale para K.

(b) Aplicando el mapa Φ sobre K se sigue lo pedido como se muestra arriba para funciones simples. Esto ya que el mapa Φ es isometría entre L^q y $(L^p)^*$ y no importa el signo.

PROBLEMA 5

Sea μ_i, ν_i medidas σ-finitas en (Ω_i, M_i) tales que $\nu_i \ll \mu_i$ para $i = 1,2$. Pruebe que la medida producto $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y que la derivada de Radon-Nikodým:

$$\left[\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}\right] = \left[\frac{d\nu_1}{d\mu_1}\right](x_1)\left[\frac{d\nu_2}{d\mu_2}\right](x_2)$$

SOLUCIÓN Denotemos por $h_i := [d\nu_i/d\mu_i]$ y por $H = [d(\nu_1 \times \nu_2)/d(\mu_1 \times \mu_2)]$. Además, pongamos $\Pi_\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2$.

$\underline{\Pi_\nu \ll \Pi_\mu}$: Sea $E \in \Pi_M$ un medible en el producto. Supongamos que $\Pi_\mu(E) = 0$. Denotemos por $E^\bullet, E_\bullet$ a las secciones en Ω_2 y Ω_1, respectivamente. Luego (usando que las medidas son σ-finitas):

$$\begin{aligned}
0 = \Pi_\mu(E) = \int_{\Omega_1} \mu_2(E^{x_1})\, d\mu_1(x_1) &= \int_{\Omega_2} \mu_1(E_{x_2})\, d\mu_2(x_2) \\
&\implies \mu_1(E_\bullet) = 0 \vee \mu_2(E^\bullet) = 0 \\
&\implies \nu_1(E_\bullet) = 0 \vee \nu_2(E^\bullet) = 0 \\
&\implies \Pi_\nu(E) = \int_{\Omega_1} \nu_2(E^{x_1})\, d\nu_1(x_1) = \int_{\Omega_2} \nu_1(E_{x_2})\, d\nu_2(x_2) = 0.
\end{aligned}$$

$\underline{H(x_1,x_2) = h_1(x_1)h_2(x_2)}$: Para toda $f \in L^1(\Pi_\mu)$ se tiene:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d\Pi_\nu = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} fH\, d\Pi_\mu \tag{4}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d\Pi_\nu &\overset{\text{fubini}}{=} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f\, d\nu_2\right) d\nu_1 \\
&\overset{\text{RN}}{=} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} fh_2(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) h_1(x_1) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} fh_1(x_1)h_2(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1) \\
&\overset{\text{fubini}}{=} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} fh_1(x_1)h_2(x_2)\, d\Pi_\mu
\end{aligned} \tag{5}$$

Restando (4) y (5) nos da que:

$$H(x_1,x_2) = h_1(x_1)h_2(x_2) \quad \text{c.t.p. en } \Omega_1 \times \Omega_2.$$

PROBLEMA 6

Pruebe que si Y es un espacio vectorial de dimensión finita en un espacio normado X, entonces Y tiene un *complemento cerrado*, i.e. existe un subespacio cerrado Z tal que $X = Y \oplus Z$.

SOLUCIÓN Sea $e_1, \ldots, e_n \subset X$ una base de Y. Podemos definir $f_i \in Y^*$ tales que

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Por Hahn-Banach, podemos extender cada f_i a una extensión $g_i \in X^*$. Definamos $Z := \bigcap_{i=1}^n \ker g_i$. Sea $x \in X$. Tomemos $y = \sum_{i=1}^n g_i(x) e_i \in Y$. Tenemos que para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$g_j(y) = \sum_{i=1}^n g_j(e_i) g_i(x) = \sum_{i=1}^n f_j(e_i) g_i(x) = g_j(x),$$

Por lo que $g_j(x-y) = 0$ para $j = 1, \ldots, n \Rightarrow x - y \in Z$. Como $x \in X$ arbitrario, $X = Y + Z$. Falta demostrar que $Y \cap Z = \{0\}$. Esto es directo ya que si $x \in Y \cap Z$, entonces $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Luego, ya que $x \in Z$, para $j = 1, \ldots, n$,

$$0 = f_j(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(e_i) = \alpha_j. \Rightarrow x = 0.$$

PROBLEMA 7

Sea $x_o(t) \in X = C([0,1])$ una función continua fija y sea $L = Gen(x_0)$. Defina en L el funcional lineal

$$f(x) := \lambda \quad \text{si } x = \lambda x_0.$$

(a) Pruebe que $\|f\|_{L^*} = 1$

(b) De acuerdo con el teorema de Hahn-Banach, f se puede extender a un funcional $F \in X^*$ con norma $\|F\|_{X^*} = 1$. Es la extensión única si

- $x_0(t) = t$;
- $x_0(t) = 1 - 2t$?

SOLUCIÓN

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^*} &= \sup_{\|y\|_\infty \neq 0} \frac{|f(y)|}{\|y\|} \\ &= \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|f(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|_\infty} \\ &= \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda|}{|\lambda| \|x_0\|_\infty} = 1. \end{aligned}$$

(b)
- $\boxed{x_0(t) = t}$ Veamos que el funcional de evaluación $\tilde{f}(x) = x(1) \in X^*$ es el único funcional lineal que extiende f. Sea $F \in X^*$ una extensión de f. Sea $\varphi \in X$ tal que $\varphi(t) = 0$ para $t \in [1-\delta, 1]$, para algún $\delta > 0$. Veamos que $F(\varphi) = 0$. Por contradicción, supongamos sin perdida de generalidad que $F(\varphi) > 0$. Definamos $\psi_\varepsilon(t) = t + \varepsilon\varphi(t)$ (Si $F(\varphi) < 0$, lo definimos como $\psi_\varepsilon(t) = t - \varepsilon\varphi(t)$). Para ε suficientemente pequeño, $\|\psi_\varepsilon\|_\infty \leq 1$, pero por linealidad,
$$|F(\psi_\varepsilon)| = |F(t) + \varepsilon F(\varphi)| > 1,$$
lo que contradice que $\|F\|_{X^*} = 1$.
Veamos ahora que para $\varphi \in X$ tales que $\varphi(1) = 0$, se cumple que $F(\varphi) = 0$. Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\varphi_n \to \varphi$ uniforme, y con $\varphi_n(t) = 0$ para $t \in [1-\delta_n, 1]$. Por continuidad de F,
$$F(\varphi) = \lim_{n\to\infty} F(\varphi_n) = 0.$$
Finalmente, se tiene que $F(x) = x(1)$ para todo $x \in X$ ya que definiendo $\varphi(t) = x(t) - x(1)t$, como $\varphi(1) = 0$,
$$0 = F(\varphi) = F(x) - x(1) \Rightarrow F(x) = x(1).$$
Como $x \in X$ arbitrario, concluimos que $F = \tilde{f}$, que es lo que queríamos demostrar.

- $\boxed{x_0(t) = 1 - 2t}$ Basta notar que los funcionales de evaluación $f_1, f_2 \in X^*$ tales que $f_1(x) = x(0)$, $f_2(x) = -x(1)$ cumplen que para $y = \lambda x_0 \in L$,

  $$\begin{aligned} f_1(y) &= y(0) = \lambda x_0(0) = \lambda, \\ f_2(y) &= -y(1) = -\lambda x_0(1) = \lambda. \end{aligned}$$

  Además, es claro que $\|f_i\|_{X^*} = 1$, $i = 1, 2$ ya que para todo $a \in [0, 1]$, $|x(a)| \leq \|x\|_\infty \Rightarrow \|f_i\|_{X^*} \leq 1$ y las funciones constantes $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = -1$ realizan el supremo para f_1, f_2, respectivamente.

PROBLEMA 8

Suponga que X es un espacio de Banach.

(a) Pruebe que X es reflexivo si y solo si X^* es reflexivo.

(b) Demuestre que si X^* es separable, entonces X es separable. (Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$, escoja $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ y $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$, donde $f_n \in X^*$ es un subconjunto contable denso, y demuestre (por contradicción) que $Gen_{\mathbb{K}_c}(\{x_n\}_n) = X$, donde $Gen_{\mathbb{K}_c}(S)$ denota el conjunto de combinaciones lineales finitas de S, con coeficientes en $\mathbb{K}_c = \mathbb{Q}$ cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K}_c = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Note que la combinación de esta proposición y la Pregunta 2 muestra que, en general, $(L^\infty)^* \ncong L^1$.

SOLUCIÓN Denotemos $X^{(0)} := X$ y $X^{(i)} := (X^{(i-1)})^*$ para $i > 0$.

(a) $\boxed{\Longrightarrow}$: Supongamos que $X^{(0)}$ es reflexivo. Entonces, el mapa

$$\begin{aligned} J^{(0)} \colon X^{(0)} &\to X^{(2)} \\ x &\mapsto \begin{aligned} ev_x \colon X^{(1)} &\to \mathbb{K} \\ x^{(1)} &\mapsto x^{(1)}(x) \end{aligned}. \end{aligned}$$

es un isomorfismo isométrico. Queremos probar lo mismo para el mapa:

$$\begin{aligned} J^{(1)} \colon X^{(1)} &\to X^{(3)} \\ x^{(1)} &\mapsto \begin{aligned} ev_{x^{(1)}} \colon X^{(2)} &\to \mathbb{K} \\ x^{(2)} &\mapsto x^{(2)}(x^{(1)}) \end{aligned}. \end{aligned}$$

Para esto, basta probar que es sobreyectivo.

Dado que $J^{(0)}$ es sobreyectivo, todo elemento $x_0^{(2)} \in X^{(2)}$ se puede escribir como $J^{(0)}(x_0)$ para algún $x_0 \in X$. Sea $x^{(3)} \in X^{(3)}$ se tiene que

$$x^{(3)}(x_0^{(2)}) = x^{(3)}(J^{(0)}(x_0)) = (x^{(3)} \circ J^{(0)})(x_0)$$

Denotemos por $x^{(1)} := x^{(3)} \circ J^{(0)} \in X^{(1)}$. Luego,

$$x^{(3)}(x_0^{(2)}) = x^{(1)}(x_0) = J^{(0)}(x_0)(x^{(1)}) = x_0^{(2)}(x^{(1)}).$$

Y el último término lo podemos expresar como $J^{(1)}(x^{(1)})(x_0^{(2)})$. Esto demuestra la sobreyectividad.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Supongamos que $X^{(1)}$ es reflexivo. Definamos $J^{(0)}, J^{(1)}$ de la misma manera. Supongamos por contradicción que $J^{(0)}(X) \neq X^{(2)}$. Por Hahn-Banach, existe $f \in X^{(3)}$ no nulo con

$f(x) \equiv 0$ para todo $x \in J^{(0)}(X)$. Como $X^{(1)}$ es reflexivo, el mapa $J^{(1)}$ es un isomorfismo isométrico, por lo que existe $g \in X^{(1)}$ con $f = J^{(1)}(g)$. Luego, para todo $X \in X^{(0)}$

$$\begin{aligned} 0 &= f(J^{(0)}(x)) \\ &= J^{(1)}(g)\left(J^{(0)}(x)\right) \\ &= J^{(0)}(x)(g) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Luego, $g \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$, lo que es una contradicción.

(b) Supongamos X^* separable. Consideremos la esfera unitaria en X^*

$$S^{(1)} := \left\{ \left\| x^{(1)} \right\| = 1 \right\}.$$

Luego, $S^{(1)}$ también es separable. Sean $\left\{ x_n^{(1)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ elementos densos y numerables. Asociemos, para cada n, un elemento $x_n \in X$ tal que $0 < \delta \leq \left| x_n^{(1)}(x_n) \right| \leq 1$. Probaremos que esos x_n son densos (en el sentido del espacio generado) en X. Buscando una contradicción, supongamos que no lo son. Entonces existe un $x^{(1)} \in S^{(1)}$ tal que $x^{(1)}$ se anula en todo $U = \mathrm{Gen}_{\mathbb{K}_c}(\{x_n\})$ pero no es nulo fuera de U. (equivalentemente, existe un abierto en $X \setminus U$ y podemos definir un funcional que se anule en todo menos ese abierto. Reescalando lo podemos pedir unitario). Por densidad en $S^{(1)}$, existe N tal que $\left\| x^{(1)} - x_N^{(1)} \right\| > \delta/2$. Luego,

$$\delta \leq \left| x_N^{(1)}(x_N) \right| = \left\| x_N^{(1)}(x_N) - x^{(1)}(x_N) \right\| \leq \delta/2.$$

Dada la contradicción, concluimos que $x^{(1)}$ es nulo en X y por lo tanto los $\mathrm{Gen}_{\mathbb{K}_c}(\{x_n\})$ es denso y numerable en X.

La numerabilidad viene de la numerabilidad de los coeficientes y las sumas finitas del generado. La densidad viene de la densidad de los coeficientes y lo que acabamos de probar.