MAT 2555/255I ANÁLISIS FUNCIONAL
TAREA 1
PLAZO: EL 6 DE SEPTIEMBRE

Profesor: Nikola Kamburov `nikamburov@mat.uc.cl`
Ayudante: Matías Díaz `midiaz8@uc.cl`

El plazo para entregar Tarea 1 es el **6 de septiembre, miércoles, antes del inicio de la clase.** Note que se corregirá sólo una selección de los ejercicios enunciados.

Reading: Melrose, Functional Analysis (Lecture Notes), 1.1–1.8, 1.10–1.11, 3.1–3.9, más apuntes de la clase.

El campo de escalares $\mathbb{K}$ en las preguntas abajo es $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Pregunta 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\alpha \in (0, 1]$. Para $f \in \Omega \to \mathbb{K}$, defina su *norma de Hölder*

$$\|f\|_{C^\alpha} := \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

El espacio $C^\alpha(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : \|f\|_{C^\alpha} < \infty\}$ se llama el *espacio de Hölder* de funciones en Ω, de exponente α. Demuestre que $(C^\alpha(\Omega), \|\cdot\|_{C^\alpha})$ es un espacio de Banach.

Pregunta 2. Considere el espacio

$$c_0(\mathbb{K}) := \{\{a_k\}_{k=1}^\infty \in l^\infty(\mathbb{K}) : \lim_{k\to\infty} a_k = 0\}.$$

(a) Demuestre que $c_0(\mathbb{K})$ es cerrado en $l^\infty(\mathbb{K})$. Concluya que $c_0(\mathbb{K})$ es un espacio de Banach.

(b) Sea V el espacio cociente $V = l^\infty(\mathbb{K})/c_0(\mathbb{K})$ con la norma natural inducida

$$\|[v]\| = \inf_{w\in c_0(\mathbb{K})} \|v + w\|_{l^\infty}.$$

Demuestre que $\|[v]\| = \limsup_{k\to\infty} |a_k|$.

Pregunta 3. Dé un ejemplo de una sucesión $\{v_k\}_k$ de elementos $v_k \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, que

a) converge en l^∞, pero no en l^1;
b) converge en l^2, pero no en l^1;
c) converge en c_0, pero no en l^2.

Pregunta 4. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach.

(a) Pruebe que si $F_k := \overline{B}_{r_k}(v_k) := \{v \in V : \|v - v_k\| \leq r_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, son bolas cerradas, tales que $F_k \supseteq F_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_k F_k \neq \emptyset$.

(b) Es posible tener conjuntos cerrados F_k, tales que $F_k \supseteq F_{k+1}$ y $\bigcap_k F_k = \emptyset$?

Pregunta 5. Sea V un espacio normado y sea l un funcional lineal acotado no cero en V. Considere el espacio nulo de l:

$$L = \{v \in V : l(v) = 0\}.$$

(a) Demuestre que
$$|l(v)| = \|l\| d(v, L) \quad \text{para todo } v \in V,$$
donde $d(v, L) := \inf_{w \in L} \|v - w\|$ es la distancia entre v y L.

(b) Pruebe que si existen $v \in V \setminus L$, y $w \in L$, tales que $\|v - w\| = d(v, L)$, entonces l alcanza su norma en la esféra unitaria $\{x \in V : \|x\| = 1\}$.

Pregunta 6. Sean V, W espacios de Banach, $T \in \mathcal{B}(V, W)$, $\alpha \in (0, 1)$ y $\beta > 0$. Suponga que para todo $w \in W$, existe $v \in V$, tal que $\|v\| \le \beta \|w\|$ y
$$\|Tv - w\| \le \alpha \|w\|.$$
Pruebe que para todo $w \in W$ dado, la ecuación $Tv = w$ tiene una solución $v \in V$ con $\|v\| \le \beta/(1 - \alpha)\|w\|$.

Pregunta 7. Sea X un espacio métrico completo y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en X con valores en $\mathbb{K}$, tal que $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ existe para todo $x \in X$. En esta pregunta, demostrará que el conjunto, donde la función límite f es continua, es denso en X.

(a) Pruebe que para todo $\epsilon > 0$ y toda bola cerrada $\overline{B} \subset X$, existe una bola abierta $\tilde{B} \subset B$ y un $N \in \mathbb{N}$, tales que
$$|f_N(x) - f(x)| \le \epsilon \quad \text{para todo } x \in \tilde{B}.$$
(*Sugerencia*: Considere $E_l := \{x \in \overline{B} : \sup_{j,k \ge l} |f_j(x) - f_k(x)| \le \epsilon\}$ y note que $\overline{B} = \bigcup_l E_l$).

(b) Defina la *oscilación* de f en x,
$$\operatorname{osc}(f)(x) = \lim_{r \downarrow 0} \sup_{y,z \in B_r(x)} |f(y) - f(x)|,$$
y note que f es continua en x si y solo si $\operatorname{osc}(f)(x) = 0$. Demuestre que
$$F_t := \{x \in X : \operatorname{osc}(f)(x) \ge t\}, \quad t > 0,$$
es cerrado y denso en ninguna parte. (*Sugerencia*: $\{x \in X : \operatorname{osc}(f)(x) < t\}$ es abierto para cualquier función f).

(c) Concluya que el conjunto de discontinuidades de f es de la primera categoria en X, i.e. el conjunto donde f es continua es genérico en X.

Pregunta 8. Sean V, W espacios de Banach y sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$. Demuestre que o el operador T es sobreyectivo, o la imagen $T(V)$ es de la primera categoria en W.

Pregunta 9. Defina sobre el espacio $l^2(\mathbb{R})$ el producto interno
$$(a, b) := \sum_k \lambda_k a_k b_k, \quad \text{donde} \quad a = \{a_k\},\ b = \{b_k\} \text{ y } \lambda_k \in (0, 1).$$
Es $l^2(\mathbb{R})$, equipado con este producto interno, siempre un espacio de Hilbert?

Pregunta 10. Considere el espacio $H = C([-1, 1], \mathbb{R})$ con el producto interno L^2 sobre $\mathbb{R}$:
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f g \, dx.$$
Sea $L \subset H$ el subespacio de funciones f, tales que $f(t) = 0$ para $t \ge 0$. Describa el subespacio $L^\perp$ en H. Es verdadero que $H = L \oplus L^\perp$?