Espacios de Lebesgue

De aquí en adelante (Ω, F, μ) es un espacio de medida. Si se requieren más se pondrán subíndices.

Recordamos que $\mathcal{L}^p(\mu)$ es el conjunto de funciones medibles p-integrables. La función $\|\cdot\|_p$ define una seminorma y tomando $\mathcal{N}(\mu)$ como las funciones que se anulan casi en todas partes podemos definir el espacio

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/N(\mu)$$

que sí es un espacio normado con la norma $\|\cdot\|_p$. De hecho, es un espacio de Banach.

Teorema 1 (Riesz-Fischer)**.** *$L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Vamos a probar que todas las series absolutamente sumables son sumables.

Caso $1 \leq p < \infty$: Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n \in L^p(\mu)$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p \leq M < \infty. \tag{1}$$

Consideremos las sumas parciales puntuales $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$. Nótese que son no negativas y crecientes. Además, G_n es una suma finita de funciones medibles, así que es medible. Por otro lado, $G_n(x) \uparrow \sum_{n\geq 1} |f_n(x)| =: G(x)$ que está dominada por la serie en (1). Así, por el Teorema de Convergencia Dominada (TCD) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int G_n(x)\, d\mu = \int G(x)\, d\mu. \tag{2}$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \int G_n(x)^p\, d\mu = \int G(x)^p\, d\mu =: I. \tag{3}$$

Y por lo tanto $I \leq M^p$ pues basta tomar límite en la expresión:

$$\left(\int G_n(x)^p\right)^{1/p} = \|G_n\|_p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p \leq M < \infty.$$

Esto nos dice que $G^p \in L^1(\mu)$ y juntándolo con lo anterior concluimos que $0 \leq G^p < \infty$ μ-ctp. De esta forma, el candidato a límite de la serie es

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) & , G(x) < \infty \\ 0 & , e.o.c \end{cases} \tag{4}$$

Dado que $|F(x)| \leq G(x)$, $F \in L^p(\mu)$. Además, F es medible porque TODO. Queda ver la convergencia. Dado que $|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|$ está dominado por G

para cada x, en particular $|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p$ está dominado por G^p. Luego, por TCD nos queda

$$\lim_{n\to\infty} \int |F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p = 0. \tag{5}$$

□

El Teorema de Representación de Riesz

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y q su exponente conjuntado $(1/q + 1/p = 1)$. Definamos

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle \colon L^p(\mu) \times L^q(\mu) &\to \mathbb{K} \\ f, g &\mapsto \int f g \, d\mu. \end{aligned} \tag{6}$$

Notar que el mapa está bien definido, en efecto, aplicando Hölder:

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Esto nos permite definir un funcional lineal en $L^p(\mu)$ para cada elemento de $L^q(\mu)$ dado por:

$$l_g f := \langle f, g\rangle.$$

La linealidad viene por la linelidad de la integral y $\|l_g\|_{(L^p(\mu))^*} \leq \|g\|_q$. Más aún, el mapa $\Phi\colon L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$ dado por $g \mapsto l_g$ es lineal, acotado e inyectivo.

El teorema de Representación de Riesz afirma que el mapa Φ es un isomorfismo isométrico para medidas σ-finitas y $1 \leq p < \infty$.

El resto de esta sección está dedicada a probar este teorema. Algunas consecuencias:

1. $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, esto es sale del teorema al poner el espacio de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ donde μ es la medida de contar.

2.

Teorema 2 (Radon-Nikodýn)**.** *Sean μ, ν medidas σ-finitas tal que $\nu \ll \mu$. Entonces existe una única función h no negativa medible tal que $\nu(E) = \int_E h \, d\mu$.*

Recordar que como casi todo en medida, la unicidad es μ-ctp al igual que lo es la no negatividad. Por otro lado, nótese que el teorema es válido para funciones a valores reales. No obstante, considerando la parte real e imaginaria se puede extender a valores complejos. Por último, se usa la notación $h = [\frac{d\nu}{d\mu}]$ y se dice que h es la derivada de Radon-Nikodýn.

Demostración. La demostración se divide en dos pasos. En primer lugar lo probaremos para medidas finitas, y luego lo extendemos para medidas σ-finitas. El argumento de usar la Representación de Riesz para espacios de Hilbert se atribuye a Von Neumann.

Paso I: Supongamos que μ y ν son finitas. Consideremos la medida $\lambda = \mu+\nu$. Notar que $\lambda(E) = 0 \iff \mu(E) = 0$ pues $\nu \ll \mu$. Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} l\colon L^2(\lambda) &\mapsto \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int f\, d\mu. \end{aligned}$$

El mapa es lineal por la linealidad de la integral y es acotado porque μ es finita .i.e. $\|l\| \leq \mu(\Omega)^{1/2}$. Así, por el Teorema de Representación de Riesz para espacios de Hilbert, existe un único $g \in L^2(\lambda)$ tal que

$$\int f\, d\mu = \int fg\, d\lambda \quad \forall f \in L^2(\lambda).$$

Como las medidas son finitas, se sigue que

$$\int f(1-g)\, d\mu = \int fg\, d\nu \quad \forall f \in L^2(\lambda). \tag{7}$$

Notar que $0 < g \leq 1$ λ-ctp (que es lo mismo que μ-ctp). En efecto,

$$\begin{aligned} \mu(\{g \leq 0\}) &\leq \int \mathbb{1}\left(g \leq 0\right)\, d\mu \\ &\leq \int \mathbb{1}\left(g \leq 0\right)(1-g)\, d\mu \\ &\overset{(7)}{=} \int \mathbb{1}\left(g \leq 0\right) g d\nu \leq 0. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$0 > \int \mathbb{1}\left(1-g < 0\right)(1-g)\, d\mu = \int \mathbb{1}\left(1-g < 0\right) g\, d\nu \geq 0.$$

Así que podemos tomar un representa que esté estrictamente entre $0 < g \leq 1$ y podemos definir $h = \frac{1-g}{g}$. Sea E un conjunto medible y definamos la sucesión de funciones $f_n \coloneqq \mathbb{1}\left(E \cap \{g \geq 1/n\}\right) \frac{1}{g}$. Como la medida es finita, $f_n \in L^2(\lambda)$ y aplicando la Ecuación (7) nos queda

$$\int f_n(1-g)\, d\mu = \int f_n g\, d\nu,$$

es decir,

$$\int_{E\cap\{g\geq 1/n\}} \frac{1-g}{g}\, d\mu = \int_{E\cap\{g\geq 1/n\}} d\nu.$$

Dado que $E \cap \{g \geq 1/n\} \uparrow E$, se sigue el resultado.

Paso 2: Supogamos ahora que μ y ν son σ-finitas. Sean Ω_n tal que $\Omega_n \uparrow \Omega$ y cada uno tiene medida finita. Por lo anterior, para cada n existe una función h_n tal que $\nu(E) = \int h_n \mathbb{1}(E)\, d\mu$ con $E \in \mathcal{F} \cap \Omega_n =: S_n$. Además, $\nu(E) = \int h_{n+1} \mathbb{1}(E)\, d\mu$ pues $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$. Se sigue que $h_{n+1}|_{\Omega_n} = h_n$ (igualdad ctp). Extendamos cada h_n por cero fuera de Ω_n. Nótese que h_n sigue siendo S_n medible. Definamos $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Es claro que $h_n \uparrow h$ y para todo E $\mathcal{F}$ medible se tiene que $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(\Omega_n \cap E)$. Usando TCM concluimos que

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap\Omega_n} h_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap\Omega} h \, d\mu = \int_E h \, d\mu.$$

$\square$

Definición 1 (Operador Positivo)**.** Decimos que $t \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ es positivo si $t(f) \geq 0$ para todo $f \in L^p_{\mathbb{R}}$.

Teorema 3 (Descomposición de Funcionales)**.** *Sea $t \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $t = t_+ - t_-$ con $t_\pm$ un funcional positivo.*

Demostración. Paso 1: t_+ para funciones no negativas. Definamos t_+ para funciones no negativas $f \in L^p_{\mathbb{R}}$ como

$$t_+ := \sup_{0\leq g\leq f} t(g).$$

Vamos a probar que t_+ es lineal. Observemos que si $0 \leq g \leq f$ entonces $t(g) \leq t(f)$. Sean $f_1, f_2 \in L^p_{\mathbb{R}}$. Sean $0 \leq g_i \leq f_i$. Luego, $t(g_i) \leq t(f_i)$ y por lo tanto $\sup_{0\leq g_i \leq f_i} t(g_i) \leq t(f_i)$. Sumando ambos términos y tomando supremo sobre los $0 \leq h \leq f_1 + f_2$ nos queda:

$$t_+(f_1) + t_+(f_2) \leq t_+(f_1 + f_2).$$

Para la otra igualdad, notemos que si $0 \leq g \geq f_1 + f_2$, entonces podemos escribir $g = g_1 + g_2$ con $g_1 = \min(g, f_1)$ y $g_2 = g - g_1$. Es directo $g_1 \leq f_1$, ¿es cierto que $g_2 \leq f_2$? sí, basta ver los casos para $g_2 = g$ y $g_2 = f_1$. En el primero tenemos que $g_2 = 0 \leq f_2$ mientras que para el segundo $g_2 = g - f_1 \leq f_2$ por cómo tomamos a g. De esta forma, concluimos que:

$$t(g) \leq t_+(f_1) + t_+(f_2) \therefore t(f_1 + f_2) \leq t_+(f_1) + t_+(f_2).$$

Paso 2: t_+ para funciones con signo. Recordamos que $f \in L^p$ se pude escribir como $f = f_+ - f_-$ donde $f_+ = \max(0, f)$ y $f_- = \max(0, -f)$. Definimos entonces $t_+(f) := t_+(f_+) - t_+(f_-)$.

Paso 3: verificar que t_+ es lineal. Sean $f, g \in L^p$. Luego,

$$\begin{aligned}
t_+(f+g) &= t_+((f+g)_+) - t_+((f+g)_-) \\
&= t_+(f_+ + g_+) - t_+(f_- + f_-) \\
&= t_+(f_+) - t_+(f_-) + t_+(g_+) - t_+(f_-) \\
&= t_+(f) + t_+(g).
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $c > 0$ las propiedes de sup nos da que

$$t_+(cf) = ct_+(f_+) - ct_+(f_-) = ct_+(f)$$

y

$$\begin{aligned} t_+(-cf) &= t_+(c(-f)) = ct_+(f_- - f_+) \\ &= c(t_+(f_-) - t_+(f_+)) = -ct_+(f). \end{aligned}$$

Paso 4: verificar que t_+ es acotado.

$$\begin{aligned} |t_+(f)| &\leq |t_+(f_+)| + |t_+ f_-| \\ &\leq 2\|t_+\|\|f\|_p. \end{aligned}$$

Paso 5: definir t_-. $t_- \coloneqq t_+ - t \geq 0$. □

Ahora tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema de Representación de Riesz para espacios L^p.

Teorema 4 (Representación de Riesz)**.** *Supongamos que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ es σ-finito. Si $1 \leq p < \infty$, entonces Φ es un isomorfismo isométrico, es decir, para todo $T \in (L^p)^*$ existe un único $h \in L^q$ tal que*

$$T(f) = \langle f, h \rangle \quad \forall f \in L^p.$$

Demostración. La demostración la haremos para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. La extensión la haremos tomando parte real y imaginaria.

Paso I: $\mu < \infty$ y $T \in (L^p)^*$ positivo. Definamos $\nu \colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ por la regla:

$$\nu(A) = T(\mathbb{1}\,(A)).$$

Vamos a probar que $\nu \ll \mu$ y así poder aplicar el Teorema de Radon-Nikodýn. En primer lugar, hay que verificar que ν define una medida y que esta es finita.

1. Como T es positivo, $\nu \geq 0$. Por otro lado,

   $$|\nu(\Omega)| = |T(\mathbb{1}\,(\Omega))| \leq \|T\|\|\mathbb{1}\,(\Omega)\|_p = \|T\|\mu(\Omega) < \infty.$$

   Cambiando Ω por un conjunto de medida nula obtenemos que $\nu \ll \mu$.

2. $\nu(\emptyset) = T(0) = 0$.

3. Sean $E = \sqcup E_n$ disjuntos a pares. Luego,

   $$\nu(E) = T\left(\mathbb{1}\,(E)\right).$$

   Notar que $T(\sum_{n \leq N} \mathbb{1}\,(E_n))$ está dominada por $\|T\|\mu(\Omega)$ y es creciente. Además, converge puntualmente a $T(\mathbb{1}\,(E))$. Así, por TCD concluimos que:

   $$T\left(\mathbb{1}\,(E)\right)) = T\left(\sum_{n \geq 1} \mathbb{1}\,(E_n)\right) = \sum_{n \geq 1} T\left(\mathbb{1}\,(E_n)\right) = \sum_{n \geq 1} \nu(E_n).$$

   donde la igualdad de en medio es por continuidad de T.

Luego, por R-N tenemos que existe único h tal que

$$\nu(E) = T(\mathbb{1}(E)) = \int \mathbb{1}(E)\, h\, d\mu.$$

La igualdad que importa es la T. Con esta base se sigue la misma igualdad para funciones simples y por continuidad para cualquier función positiva en L^p.

Paso 2: μ σ-finita. Sean $\Omega_n \uparrow \Omega$ tal que $\mu(\Omega_n) < \infty$. Por el paso anterior, existe h_n tal que

$$T(f \cdot \mathbb{1}(\Omega_n)) = \int_{\Omega_n} f \cdot h_n\, d\mu \quad \forall f \geq 0 \in L^p.$$

Extendamos cada h_n por 0 fuera de Ω_n. De esta forma,

$$\sum_{n=1}^{N} f \cdot \mathbb{1}(\Omega_n) \xrightarrow{L^p} f.$$

Luego,

$$T(f) = T(\sum_{n\geq 1} f \cdot \mathbb{1}(\Omega_n)) = \sum_{n\geq 1} T(f \cdot \mathbb{1}(\Omega_n)) = \sum_{n\geq 1} \int_{\Omega_n} f h_n\, d\mu.$$

Tomando $h \coloneqq \sum_{n\geq 1} h_n$, por TCM tenemos que

$$T(f) = \int f h\, d\mu.$$

Paso 3: funciones con signo. Sea $f \in L^p_{\mathbb{R}}$ y $T \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ positivo. Dado que

$$T(f) = T(f_+ - f_-) = T(f_+) - T(f_-),$$

aplican los pasos anteriores en cada sumando.

Paso 4: funcionales con signo. Sea $T \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ con signo. Por la descomposición de funcionales podemos escribir $T = T_+ - T_-$ y aplicar los pasos anteriores a cada sumando. Esto nos deja con $h_\pm$ tal que $fh_\pm \in L^1$ para todo $f \in L^p$. Basta tomar $h = h_+ - h_-$ y entonces:

$$T(f) = \int f h\, d\mu = \int f h_+\, d\mu - \int f h_-\, d\mu = T_+(f) - T_-(f)$$

para todo $f \in L^p$.

Paso 5: extender a $\mathbb{C}$. Sea $T \in (L^p_{\mathbb{C}})^*$. Luego, $T = \Re T + i\Im(T)$. Como la parte real e imaginaria son operadores lineales acotados, la composición con T también lo es. Por los pasos anteriores (aplicado a funciones reales) existen h_1, h_2 tales que

$$\Re T = \langle \cdot, h_1 \rangle \qquad \Im T = \langle \cdot, h_2 \rangle$$

Y tomando $h = h_1 + ih_2$ tenemos que $T = \langle \cdot, h \rangle$, de nuevo, para funciones reales. En el caso de funciones complejas basta tomar parte real e imaginaria y usar la linealidad de la integral.

Paso 6: verificar que $h \in L^q$ y $\|T\| = \|h\|_q$. La desigualdad $\|T\| \leq \|h\|_q$ siempre se cumple por Hölder:

$$|T(f)| \leq \int |fh| \leq \|f\|_p \|h\|_q.$$

Para el converso separamos los casos $p = 1$ y el resto.
Caso $1 < p < \infty$: Definamos $B_n = \Omega_n \cap \{|h| \leq n\}$ donde $\Omega_n \uparrow \Omega$ y tienen medida finita. Denotando $sgn(z) = |z|/z$ definamos

$$f_n = |h|^{q-1} sgn(h) \mathbb{1}\left(B_n\right).$$

Notar que $f_n \in L^p$, pues $\int f_n^p \leq \int_{B_n} |h|^q < \infty$, donde la última igualdad se debe a que Ω_n tiene medida finita y h está acotada por n. Escrito de otra forma:

$$\|f_n\|_p^p \leq \|h\|_{L^q(B_n)}^q.$$

Dado que

$$\begin{aligned} T(f_n) &= \int f_n h \, d\mu \\ &= \int_{B_n} |h|^{q-1} sgn(h) h \, d\mu \\ &= \int_{B_n} |h|^q = \|h\|_{L^q(B_n)}^q \end{aligned}$$

Se tiene que $\|h\|_{L^q(B_n)}^q \leq \|T\| \|f_n\|_p$, donde la última desigualdad se debe a que T es un funcional. Despejando obtenemos que

$$\|h\|_{L^q(B_n)} \leq \|T\|,$$

y tomando límite llegamos a lo buscado.
Caso $p = 1$: $\square$