Series de Fourier

y Banach-Steinhaus

Trabajaremos con funciones en L^2 donde

$$L^2 := L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ sea medible, } 2\pi\text{-periódica y } \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

y $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ con extremos identificados .i.e. el círculo. con el producto interno de L^2

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)} \, dx.$$

Proposición 1 (Conjunto ortornormal)**.** *Las familia* $\{(2\pi)^{-1/2}e^{inx}\}_{n\geq 0}$ *es un conjunto ortonormal en* L^2*.*

Demostración. Sean $m > n > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\langle (2\pi)^{-1/2}e^{inx}, (2\pi)^{-1/2}e^{imx} \rangle &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx} \, dx \\
&= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(n-m)} \, dx \\
&= -(2\pi)^{-1}(n-m)^{-1} \left(e^{ix(m-n)} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= -(2\pi)^{-1}(n-m)^{-1}(\pm 1 \mp 1) = 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $n = 0$:

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{T}} e^{\pm inx} = 0.$$

□

Definición 1 (Serie de Fourier)**.** Sea $f \in L^2$, su serie de Fourier es

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e_n$$

donde $e_n(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{inx}$ y

$$\hat{f}(n) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-inx} \, dx$$

es el n-ésimo coeficiente de Fourier. La serie truncada

$$S_N f(x) = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)e_n(x)$$

es la suma parcial de Fourier.

Teorema 1. *Si $f \in L^2$, $S_N f \to f$ en norma L^2 cuando $N \to \infty$.*

Equivalentemente, la colección $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de L^2. Como ya tenemos la ortonormalidad, queda ver la maximalidad. Suponiendo que no es maximal, debe existir una función $f \neq 0$ tal que

$$\int_T f(x)e^{-inx}\,dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

La idea es probar que $f = 0$ c.t.p. No obstante, esto es más complejo de lo que parece. El propósito de esta sección es buscar una forma alternativa de probar el Teorema 1.

Proposición 2 (Caracterización de $S_N f$ y kernel de Dirichlet)**.** *Si $f \in L^2$, entonces*

$$S_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} D_N(x-t) f(t)\,dt = D_N * f(x)$$

donde

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{2N+1}{2\pi} & , x = 0 \\ \frac{\sin(Nx + x/2)}{2\pi \sin(x/2)} & , x \neq 0 \end{cases}$$

es el kernel de Dirichlet.

Demostración. Expandamos la definición

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-int}\,dt\, e^{inx} \\ &= \sum_{|n|\leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-in(t-x)}\,dt \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} f(t) \frac{1}{2\pi} \sum_{|n|\leq N} e^{-in(t-x)}\,dt. \end{aligned}$$

Así que basta probar que $2\pi D_N(x) = \sum_{|n|\leq N} e^{inx}$.

Caso $x = 0$:

$$\sum_{|n|\leq N} e^{in\cdot 0} = \sum_{|n|\leq N} 1 = 2N + 1.$$

Caso $x \geq 0$: Tomemos $w = e^{ix}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{|n|\leq N} w^n &= \sum_{0\leq n\leq N} w^n + \sum_{1\leq n\leq N} w^{-n} \\
&= \frac{1-w^{N+1}}{1-w} + \frac{w^{-1}-w^{-N-1}}{1-w^{-1}} \\
&= \frac{1-w^{N+1}}{1-w} + \frac{w^{-N}-1}{1-w} \\
&= \frac{w^{-N}-w^{N+1}}{1-w} \\
&= \frac{w^{-N-1/2}-w^{N+1/2}}{w^{-1/2}-w^{1/2}} \\
&= \frac{\sin\left((N+1/2)x\right)}{\sin\left(x/2\right)}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 3 (Propiedades del kernel de Dirichlet)**.** *$D_N(x)$ satisface que*

1. *es par;*
2. *es 2π-periódica;*
3. *es suave;*
4. *integra 1 sobre el círculo,*

$$\int_{\mathbb{T}} D_N(x)\,dx = 1;$$

5. *para todo $\delta > 0$ se tiene que*

$$\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} D_N(x) \to 0 \quad \textit{cuando} \quad N \to \infty.$$

Demostración. 1.

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{-\sin(-(N+1/2)x)}{-\sin(-x/2)} = D_N(-x).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
2\pi D_N(x) &= \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{-\sin((N+1/2)(x+2\pi))}{-\sin((x+2\pi)/2)} = 2\pi D_N(x+2\pi).
\end{aligned}$$

3. es cociente de funciones suaves.

4. Recordar que $2\pi D_N(x) = \sum_{|n|\leq N} e^{inx}$.

$$\int_{\mathbb{T}} \sum_{|n|\leq N} e^{inx}\,dx = \sum_{|n|\leq N} \int_{\mathbb{T}} e^{inx}\,dx = 2\pi.$$

$\square$

Definición 2 (Media de Cesàro)**.**

$$\sigma_N f = \frac{1}{N} \sum_{0\leq n<N} S_n f.$$

Proposición 4 (medias de Cesàro también convergen)**.** *Si* $S_N f \xrightarrow{L^2} f$*, entonces* $\sigma_N f \xrightarrow{L^2} f$.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\|f - \sigma_N f\|_{L^2} &= \frac{1}{N}\|Nf - \sum_{0\leq n\leq N-1} S_n f\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \|f - S_n f\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Sea N_0 tal que $\|f - S_n f\|_{L^2} \leq \epsilon$ para $n \geq N_0$. Tomando $N \gg N_0$,

$$\begin{aligned}
\|f - \sigma_N f\|_{L^2} &= \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=0}^{N_0} \|f - S_n f\|_{L^2}}_{<\infty} + \frac{1}{N} \sum_{n=N_0+1}^{N} \|f - S_n f\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{N} C + \epsilon C'
\end{aligned}$$

Tomando N lo suficientemente grande podemos hacer que $1/N < \epsilon$ de lo que se sigue el resultado. $\square$

Teorema 2 (Fejèr)**.** *Si* $\sigma_N f \to f$ *en* L^2 *y* $f \in C(\mathbb{T})$*, entonces*

$$\sigma_N f \xrightarrow{unif} f \quad en \quad \mathbb{T}.$$

Si vale el Teorema de Fejèr, entonces vale el Teorema 1 para funciones continuas. En efecto, usando la Proposición 4 tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) = 0 \quad \forall N \in \mathbb{Z} &\Rightarrow S_N f \equiv 0 \quad \forall N \in \mathbb{Z} \\
&\Rightarrow \sigma_N f \equiv 0 \quad \forall N \in \mathbb{Z} \quad \text{(por la proposición)} \\
&\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \sigma_N f = f \quad \text{(por Fejér)} \\
&\Rightarrow f = 0 \ c.t.p.
\end{aligned}$$

Así que la nueva tarea es demostrar el teorema de Fejèr.

Proposición 5 (Caracterización de la media de Cesàro y el kernel de Fejèr)**.** *Si* $f \in L^2$*, entonces*

$$\sigma_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} F_N(x-t) f(t)\, dt$$

donde

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{N}{2\pi} & , x = 0 \\ \frac{1}{2\pi N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} & , x \neq 0 \end{cases}$$

es el kernel de Fejèr.

Demostración.

$$N\sigma_N f(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t) \left(D_0(x-t) + \cdots + D_{N-1}(x-t) \right) dt$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin((k+1/2)x)}{\sin(x/2)} \\
&= \frac{1}{2\pi \sin(x/2)} \sum_{k=0}^{N-1} \sin((k+1/2)x) \\
&= \frac{1}{4\pi \sin^2(x/2)} \sum_{k=0}^{N-1} 2 \sin\left((k+\frac{1}{2})x \right) \sin(x/2) \\
&= \frac{1}{4\pi \sin^2(x/2)} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\cos\left((k+\frac{1}{2})x - x/2 \right) - \cos\left((k+\frac{1}{2})x + x/2 \right) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi \sin^2(x/2)} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\cos(kx) - \cos((k+1)x) \right) \\
&= \frac{1-\cos(Nx)}{2} \frac{1}{2\pi \sin^2(x/2)} \\
&= \frac{\sin^2(Nx/2)}{2\pi \sin^2(x/2)}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 6 (Propiedades del kernel de Fejèr)**.** $F_N(x)$ *es par,* 2π*-periódica, suave, integra* 1 *en* $\mathbb{T}$ *y es positiva. Además, para* $\delta \leq |x| \leq \pi$ *se cumple que*

$$|F_N(x)| \leq \frac{1}{2\pi N \sin^2(\delta/x)}.$$

Definición 3 (Buenos Kernels)**.** Una familia $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice de buenos kernels en L^1 si:

1. $\int_{\mathbb{T}} K_n(x)\, dx = 1$;

2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{T}} |K_n(x)|\, dx < \infty$, y

3. $\int_{\delta\leq|x|\leq\pi} |K_n(x)|\, dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$ para todo $\delta > 0$.

Por lo visto anteriormente, la familia de los kernels de Fejèr son buenos kernels.

Teorema 3 (Convolución y convergencia con buenos kernels)**.** *Si $\{K_n\}_n$ es una familia de buenos kernels en L^1 y $f \in C(\mathbb{T})$, entonces*

$$K_N * f = f * K_N \xrightarrow{unif} f \qquad \textit{en } \mathbb{T}.$$

Demostración. Hay que acotar uniformemente la diferencia

$$|K_N * f(x) - f(x)|$$

Recordando que $\int_{\mathbb{T}} K_N(y)\, dy = 1$ tenemos que

$$|K_N * f(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(x) - f(x-y)| K_N(y)\, dy =: I$$

Sea $\epsilon > 0$. Como la función f es continua, existe δ tal que $|f(x) - f(x-y)| \leq \epsilon$ si $|y| \leq \delta$. Luego,

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{|y|\leq\delta} |f(x) - f(x-y)| K_N(y)\, dy + \int_{\delta\leq|y|\leq\pi} |f(x) - f(x-y)| K_N(y)\, dy \\ &\leq \epsilon M + C \int_{\delta\leq|y|\leq\pi} |K_N(y)|\, dy \end{aligned}$$

donde M sale de que $\{K_N\}_N$ es una familia de buenos kernels (propiedad (2)) y $C \geq 2\sup_{\mathbb{T}}|f|$. Por último, usando la propiedad (3) de los buenos kernels se tiene que para N suficientemente grande

$$\int_{\delta\leq|y|\leq\pi} |K_N(y)|\, dy \leq \epsilon.$$

De esta forma se tiene que $|f(x) - K_N * f(x)| \leq \epsilon(M + C)$ independiente de x y por la arbitrariedad de ϵ se concluye la convergencia. □

Corolario 1. *Si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces $\sigma_N f \xrightarrow{unif} f$ cuando $N \to \infty$.*

Demostración. $\sigma_N f = F_N * f$ y F_N es una familia de buenos kernels. □

Corolario 2. *Si $f \in C(\mathbb{T})$ y $\hat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = 0$.*

Demostración. Si $\hat{f}(n) = 0$, entonces $S_N f = 0$ y por lo tanto $\sigma_N f = 0$. Por el corolario anterior, $f = 0$. □

Corolario 3. *Si $f \in C(\mathbb{T})$ es tal que su serie de Fourier converge absoluta y uniformemente, .i.e.*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)e_n(x)| < \infty.$$

Entonces $S_N f \xrightarrow{unif} f$.

Demostración. $\square$

Esto nos da convergencia para funciones continuas. La idea ahora es aproximar las funciones en L^2.

Proposición 7. *Si $f \in L^2$, entonces $\|\sigma_N f\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}$.*

Demostración. Usando la definición y la desigualdad de Bessel

$$\|\sigma_N f\|_{L^2} \le \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \|S_n f\|_{L^2} \le \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \|f\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}.$$

$\square$

El resultado vale para $1 \le p < \infty$.

Teorema 4. *Sea $f \in L^p(\mathbb{T})$ $(1 \le p < \infty)$, entonces $\sigma_N f \to f$ en L^p.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como C es denso en L^p, existe $g \in C$ tal que

$$\|f - g\|_{L^p} \le \epsilon.$$

Luego,

$$\|f - \sigma_N f\|_{L^p} \le \|f - g\|_{L^p} + \|g - \sigma_N g\|_{L^p} + \|\sigma_N g - \sigma_N f\|_{L^p}$$

Por existe N_0 tal que $\|g - \sigma_N g\|_{L^p} \le \epsilon$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|\sigma_N g - \sigma_N f\|_{L^p} &\le \|\sigma_N(g - f)\|_{L^p} \\ &\le \|g - f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Así, para $N > N_0$ suficientemente grande

$$\|f - \sigma_N\|_{L^p} \le 3\epsilon.$$

$\square$

Corolario 4. *Si $f \in L^2$, $S_N f \xrightarrow{L^2} f$.*

Demostración. $\square$

Lema 1 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si $f \in L^1$, entonces $\hat{f}(n) \xrightarrow{|n|\to\infty} 0$.*

Demostración. Notar que si $|n| > N$

$$\widehat{\sigma_N f}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|j|\le k}\hat{f}(j)\int_T e_j(t)e_n(t)\,dt = 0$$

Sea $\epsilon > 0$. Luego, tomando N suficientemente grande se tiene que $\|\sigma_N f - f\|_{L^1} < \epsilon$. Por lo anterior se sigue que

$$|\hat{f}(n)| = |\widehat{\sigma_N f}(n) - \hat{f}(n)| \le \|\sigma_N f - f\|_{L^1} < \epsilon.$$

$\square$

Definición 4 (Operador de Fourier)**.** Para $f \in L^1$, el operador de Fourier se define como:

$$\hat{f} \coloneqq \mathcal{F}f \coloneqq (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Proposición 8 (Inyección en $\hat{c}_0$)**.** *Si $f \in L^1$, entonces $L^1 \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{c}_0$ es una aplicación lineal, acotada e inyectiva.*

$$\hat{c}_0 \coloneqq \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \colon \lim_{|n|\to\infty} a_n = 0\}.$$

Demostración. Por Riemann-Lebesgue la aplicación está bien definida. Veamos el resto de propiedades:
lineal: se sigue por la linealidad de la integral.
acotada: se sigue porque $f \in L^1$.
inyectiva: se sigue de aplicar el Corolario 2 y aproximando por funciones continuas. $\square$

Veamos porqué la aplicación $\mathcal{F}\colon L^1 \to \hat{c}_0$ no es sobreyectiva. Supongamos, buscando una contradicción, que lo fuese. Por el resto de las propiedades, $\mathcal{F}$ es un isomorfismo continuo y en particular existe $\mathcal{F}^{-1}$ su inversa continua. Luego,

$$\|f\|_{L^1} = \|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f\|_{L^1} \le C\|\mathcal{F}f\|_{\ell^\infty}.$$

para cualquier $f \in L^1$. Consideremos $f(x) = D_N(x)$. Entonces

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & , |n| \le N \\ 0 & , |n| > N \end{cases}$$

así que $\|\mathcal{F}f\|_{\ell^\infty} = 1/\sqrt{2\pi}$. Sin embargo,

Proposición 9.

$$\|D_N\|_{L^1} \ge c\log(N).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_{L^1} &= \int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx & &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+1/2)x)|}{\sin(x/2)}\,dx \\
&\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin((N+1/2)x)|}{x}\,dx & & \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi(N+1/2)} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du & &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi N} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du & &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin(u)|\,du}_{C_1} \\
&\geq \frac{2C_1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} & &\geq C\log(N).
\end{aligned}$$

□

Vimos que para funciones $f \in L^2$ se tiene que $S_N f \to f$ en L^2. De hecho, $S_N f \to f$ puntualmente c.t.p. (Teorema de Carlerson). En lo que sigue vamos a probar que la divergencia puntual pasa en conjuntos grandes.

Teorema 5 (Banach-Steinhaus)**.** *Sea X es un espacio Banach y Y un espacio normado. Sean $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$ una familia de operadores lineales acotados de X en Y. Entonces las siguientes son mutuamente excluyentes:*

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$
2. *existe A un conjunto genérico de tipo G_δ (intersección numerable de abiertos) en X tal que*
$$\sup_n \|T_n x\| = \infty \quad \forall x \in X.$$

Demostración. Definamos $\psi(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\|$ y consideremos el conjunto abierto

$$U_n = \{x \in X \colon \psi(x) > n\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in X \colon \|T_k x\| > n\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k^{-1}\left(Y \setminus B(0,n)\right).$$

Si la familia de conjuntos U_n es densa en X, entonces el conjunto

$$A \coloneqq \bigcap_{n\geq 1} U_n$$

es G_δ y satisface que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|T_k x\| = \infty \quad \forall x \in A.$$

por lo tanto la condición (1) no es posible.

Por otro lado, si al menos uno no es denso, dígase, U_n, entonces el complemento $X \setminus U_n$ contiene una bola $B(u,r)$ para algún $r > 0$ y $u \in X \setminus U_n$. Luego, para todo $x \in B(u,r)$ se tiene que

$$n \geq \psi(x) \geq \|T_k x\| \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Haciendo el cambio de coordenadas $x = u + y$ con $y \in B(0,r)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|T_k(u+y)\| \leq n \\
&\quad \Rightarrow \|T_k y\| \leq \|T_k u\| + \|T_k(u-y)\| \leq 2n \\
&\quad \Rightarrow \|T_k y\| \leq \frac{2n}{r}\|y\| \quad \forall y \in B(0,1).
\end{aligned}$$

Se sigue que $\|T_k\| < \frac{2n}{r}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, $\|T_k x\| < \infty$ para todo $x \in X$. □

Corolario 5. *Sea X un espacio de Banach y Y un espacio normado. Sean $\{T_k\}_k$ operadores lineales acotados de X a Y. Supongamos que*

$$\forall x \in X: \quad Tx := \lim_{k\to\infty} T_k x \in Y$$

entonces $T \in B(X,Y)$ y $\|T\| \leq \liminf_{k\to\infty}\|T_k\| < \infty$.

Demostración. Como los operadores son acotados y el límite puntual existe, por Banach-Steinhaus

$$\sup_k \|T_k\| < \infty.$$

Es sencillo verificar que T es lineal. Por otro lado,

$$\|Tx\| = \lim_{k\to\infty}\|T_k x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n}\|T_k x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n}\|T_k\|\|x\|$$

Diviendo por $\|x\|$ tenemos lo pedido. □

Teorema 6 (Divergencia Puntual)**.** *Para todo $x \in \mathbb{T}$, existe un conjunto genérico $A_x \in C(\mathbb{T})$ tal que $\sup_N |S_N f(x)| = \infty$ para todo $f \in A_x$.*

Demostración. Basta demostrar para el caso $x = 0$ pues... Consideremos $S_N^0 : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ la evaluación de la suma parcial de fourier en $x = 0$ .i.e.

$$S_N^0 f = S_N f(0).$$

Notar que $S_N^0 f = \int_{\mathbb{T}} D_N(y) f(y)\, dy$, así que

$$\|S_N^0\| \leq \|D_N\|_{L^1}.$$

Notar que la igualdad se alcanza en $f(y) = sgn(D_N(y))$ y en tal caso

$$\|S_N^0\| = \|D_N\|_{L^1} \geq C \log N \xrightarrow{N\to\infty} \infty.$$

El problema es que $f(y)$ no es continua, no obstante, $f(y) \in L^1$ y podemos aproximar por funciones continuas. Así, por Banach-Steinhaus, existe un conjunto genérico en $C(\mathbb{T})$ donde el operador S_N^0 diverge. □

Problema 1. *Sea $f \in L^2$ una función Lipschitz continua en $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Demuestre que su serie de Fourier $S_N f$ converge puntualmente a f en $x = x_0$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Queremos probar que para N suficientemente grande se tiene que

$$E = |f(x_0) - S_N f(x_0)| < \epsilon.$$

Usando la caracterización con el kernel de Dirichlet tenemos que

$$E = |\int_{\mathbb{T}} (f(x_0) - f(x_0 - t)) D_N(t)\, dt|.$$

Dado que f es Lipschitz continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|t| < \delta \implies |f(x_0) - f(x_0 - t)| < \epsilon.$$

Por otro lado, por las propiedades del kernel de Dirichlet, para N suficientemente grande se cumple que

$$\int_{|t| \geq \delta} |D_N(t)|\, dt < \epsilon.$$

Así, separando la integral tenemos que

$$E \leq \epsilon \int_{|t| \leq \delta} |t D_N(t)|\, dt + \epsilon 2 \operatorname{esssup}_{\mathbb{T}} |f| \leq C\epsilon.$$

$\square$

Problema 2. *Usando la serie de Fourier de $|x|$ en $[-\pi, \pi]$, demuestre que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Demostración. Calculemos los coeficientes. Para $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
2\pi \hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx}\, dx \\
&= \int_{-\pi}^{0} -x e^{-inx}\, dx + \int_{0}^{\pi} x e^{-inx}\, dx \\
&= \int_{0}^{\pi} x(e^{-inx} + e^{inx})\, dx \\
&= 2 \int_{0}^{\pi} x \cos(nx)\, dx \\
&= 2 \left(\left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx \right) \\
&= 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2}
\end{aligned}$$

Mientras que para $n = 0$ nos da $\hat{f}(0) = \pi/2$. De esta forma, dado que $|x|$ es Lipschitz en 0, se tiene que

$$
\begin{aligned}
|0| &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}. \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Despejando tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

y despejando se obtiene el resultado. □

Problema 3. *Sea $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Demuestre que la serie de Fourier en $[0, 2\pi]$ de*

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

está dada por

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{n+\alpha}.$$

Concluya, usando la identidad de Parseval, que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi\alpha))^2}.$$

Demostración. Denotemos a la función por $f(x)$ y computemos los coeficientes.

$$
\begin{aligned}
2\pi\hat{f}(n) &= \frac{e^{i\pi\alpha}\pi}{\sin(\pi\alpha)} \int_0^{2\pi} e^{-ix(\alpha+n)}\, dx \\
&= -\frac{e^{i\pi\alpha}\pi}{i(\alpha+n)\sin(\pi\alpha)}(e^{-i2\pi(\alpha+n)} - 1) \\
&= \frac{\pi e^{i\pi\alpha}(e^{-i2\pi(\alpha+n)} - 1)}{i(\alpha+n)\sin(\pi\alpha)} \\
&= \frac{2\pi\sin(\pi\alpha)}{(\alpha+n)\sin(\pi\alpha)}.
\end{aligned}
$$

Así, la serie de Fourier es

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}}{\alpha+n}.$$

Aplicando Parseval tenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+n)^2} = \|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^2}{\sin(\pi\alpha)^2}\int_0^{2\pi} 1\,dx = \frac{\pi^2}{\sin(\pi\alpha)^2}$$

□

Problema 4. *1. Demuestre que*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sugerencia: use que $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1$ y note que $(1/\sin(x/2)) - (2/x)$ es continuo en $[-\pi,\pi]$. Use el lema de Riemann-Lebesgue.

Problema 5. *Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que para todo $x \in c_0$ se tiene que $\sum_{n\geq 1}|a_n x_n|$ converge. Demuestre que $a \in \ell^1$.*

Demostración. Debemos probar que $\sum_{n\geq 1}|a_n| < \infty$. Consideremos el operador

$$\begin{aligned} S_N\colon c_0 &\to \ell^\infty \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^N a_n x_n. \end{aligned}$$

Como son sumas finitas es lineal y acotado. Además, por la propiedad de a está bien definido. Por otro lado, $\sup_{N\in\mathbb{N}} S_N x < \infty$ pues es la propiedad de a. Luego, por Banach-Steinhaus, $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N x\| < \infty$. Dado que

$$S_N(sng(a_n))_{n\leq N} = \sum_{n\leq N}|a_n|$$

se concluye lo pedido. □

Problema 6. *Sean V, W espacios de Banach y $a\colon V\times W \to$ bilineal tal que*

- *para todo $v \in V$, la función $w \to a(v,w)$ es continua en W*
- *para todo $w \in W$, la función $v \to a(v,w)$ es continua en V*

Demuestre que existe $C \geq 0$ tal que para todo $v\in V$ y $w \in W$ se tiene que

$$|a(v,w)| \leq C\|v\|\|w\|.$$

Concluya que a es continua.

Demostración.

$$\|a(v,w)\| \leq \|a(,w)\|\|w\| \leq \|a\|\|v\|\|w\|.$$

Directo de la cota. □