Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Docente: Nikola Kamburov
Ayudante: Matías Díaz

MAT2555 - Análisis Funcional

Tarea 1 - Omar Neyra, Sebastián Sánchez

PROBLEMA 1 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\alpha \in (0,1]$. Para $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$, define su *norma de Hölder*

$$\|f\|_{C^\alpha} \coloneqq \sup_{x\in\Omega}|f(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

El espacio $C^\alpha(\Omega) \coloneqq \{f\colon \Omega \to \mathbb{K} \mid \|f\|_{C^\alpha} < \infty\}$ se llama el *espacio de Hölder* de funciones en Ω, de exponente α. Demuestre que $(C^\alpha(\Omega), \|\cdot\|_{C^\alpha})$ es un espacio de Banach.

SOLUCIÓN Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ usa sucesión de Cauchy en $X = C^\alpha(\Omega)$. Debemos probar que su límite está en X.

Candidato a límite: En primer lugar, notemos que fijado $x \in \Omega$ tenemos que la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $\mathbb{K}$. En efecto,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{x\in\Omega}|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_X \to 0$$

para m, n suficientemente grandes. Así, el candidato a límite es:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Pertenencia del límite: Usando la definición de f y la continuidad de $|\cdot|$ tenemos:

$$\begin{aligned}\|f\|_X &= \sup_{x\in\Omega}|f(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \\ &= \sup_{x\in\Omega} \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega} \lim_{n\to\infty} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|}\end{aligned}$$

Usando propiedades de supremo y límites nos queda:

$$\|f\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in\Omega}|f_n(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|f_n(x)-f_n(y)|}{|x-y|^\alpha} \right)$$

Covergencia: Finalmente, queda probar que $f_n \to f$ en norma $\|\cdot\|_\infty$. En efecto, usando el cálculo de la parte anterior tenemos:

$$\|f - f_n\|_X \leq \liminf_{k\to\infty} \left(\sup_{x\in\Omega}|f_k(x) - f_n(x)| + \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|f_k(x) - f_n(x) + f_n(y) - f_k(y)|}{|x-y|^\alpha} \right)$$

Aplicando desigualdad triangular en el último sumando y tomando un n suficientemente grande tenemos que cada sumando se va a 0. Concluyéndose lo buscado.

`PROBLEMA` 2 Considere el espacio

$$c_0(\mathbb{K}) \coloneqq \{(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ en } \ell^\infty(\mathbb{K})\colon \lim_{k\to\infty} a_k = 0\}.$$

(a) Demuestre que $c_0(\mathbb{K})$ es cerrado en $\ell^\infty(\mathbb{K})$. Concluya que $c_0(\mathbb{K})$ es un espacio de Banach.

(b) Sea V el espacio cociente $V = \ell^\infty/c_0$ con la norma inducida

$$\|[v]\| = \inf_{w\in c_0} \|v + w\|_{\ell^\infty}.$$

Demuestre que $\|[v]\| = \limsup_{k\to\infty} |a_k|$.

`SOLUCIÓN` $\boxed{\text{(a)}}$ Sea $a = (a_k)_k$ en ℓ^∞ tal que $(a^m)_m \to a$. Debemos probar que $a \in c_0$. Observemos que

$$|a_k| = |a_k - a_k^m| + |a_k^m|.$$

El primer sumando satisface

$$|a_k - a_k^m| \leq \sup_k |a_k - a_k^m| = \|a - a^m\|_{\ell^\infty} \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

pues $a^m \to a$. Por otro lado, $|a_k^m| \to 0$ pues $a^m \in c_0$. Con ambas convergencias se sigue el resultado.

$\boxed{\text{(b)}}$ Expandamos la definición de la norma cociente:

$$\|[v]\| = \inf_{w\in c_0} \|v + w\|_{\ell^\infty} = \inf_{w\in c_0} \sup_{k\in\mathbb{N}} |v_k + w_k|$$

En particular, para $w^n = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n, 0, 0, \ldots, 0) \in c_0$ se tiene que

$$\|[v]\| \leq \sup_{k>n} |v_k| \Rightarrow \|[v]\| \leq \inf_n \sup_{k>n} |v_k| = \limsup_{k\to\infty} |v_k|.$$

La otra desigualdad es directa:

$$\inf_n \sup_{k>n} |v_k| \leq \inf_n \sup_k |v_k + w_k| \leq \|[v]\|.$$

`PROBLEMA` 3 De un ejemplo de una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}, a_k \in$ que,

(a) converge en ℓ^∞, pero no en ℓ^1;

(b) converge en ℓ^2, pero no en ℓ^1;

(c) converge en c_0, pero no en ℓ^2.

SOLUCIÓN $\boxed{\text{(a)}}$ Definir $a = (a_k)_k = (e^{ik})_k$. Luego, $\|a\|_{\ell^\infty} = 1$ y $\|a\|_{\ell^1} \to \infty$.

$\boxed{\text{(b)}}$ Considerar $a = (a_k)_k = (1/k)_k$. Luego, $\|a\|_{\ell^2} < \infty$ y $\|a\|_{\ell^1} \to \infty$.

$\boxed{\text{(c)}}$ Considerar $a = (a_k)_k = (1/\sqrt{k})_k$. Luego, $\|a\|_{\ell^2} \to \infty$ y $\|a\|_{\ell^\infty} \leq 1$ y $a_k \to 0$.

PROBLEMA 4 Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach.

1. Pruebe que si $F_k \coloneqq \overline{B}_{r_k}(v_k) \coloneqq \{v \in V \colon \|v - v_k\| \leq r_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, son bolas cerradas, tales que $F_k \supseteq F_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_k F_k \neq \varnothing$.

2. ¿Es posible tener conjuntos cerrados F_k, tales que $F_k \supseteq F_{k+1}$ y $\bigcap_k F_k = \varnothing$?

SOLUCIÓN

(a) En primer lugar, notemos que si los radios se estancan (es decir, $r_k = r_j$ para todo $j \geq k$ y k fijo) entonces necesariamente $v_k = v_j$ para todo $k \geq k$ y por lo tanto la intersección de todos es no vacía (v_k está en todos).

Por otro lado, si los radios no se estancan, necesariamente deben ir decreciendo, es decir, $r_k \downarrow c$. Mostraremos que la sucesión de los centros $(v_k)_k$ es Cauchy.

En efecto, sea $\epsilon > 0$. Luego, existe k tal que $r_k - c < 2^{-k}\epsilon$. Sea $j > k$, luego,

$$\|v_k - v_j\| \leq \sum_{i=k}^{j-1} \|v_i - v_{i+1}\| \leq \sum_{i=k}^{j-1} \epsilon 2^{-i} = \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^{j-1}} \to 0$$

Así, la sucesión $(v_k)_k$ es Cauchy y como V es Banach, el límite existe. Se sigue que $v = \lim_{k\to\infty} v_k$ está en la intersección.

(b) Basta considerar $F_k = \varnothing$ para todo k.

PROBLEMA 5 Sea V un espacio normado y sea l un funcional lineal acotado no cero en V. Considere el espacio nulo de l:

$$L = \{v \in V \colon l(v) = 0\}.$$

(a) Demuestre que

$$|l(v)| = \|l\| d(v, L) \text{ para todo} v \in V,$$

donde $d(v, L) \coloneqq \inf_{w\in L} \|v - w\|$ es la distancia entre v y L.

(b) Pruebe que si existen $v \in V \setminus L$, $w \in L$, tal que $\|v - w\| = d(v, L)$, entonces l alcanza su norma en la esfera unitaria $\{x \in V \colon \|x\| = 1\}$.

SOLUCIÓN

(a) Para una desigualdad, notemos que:

$$|l(v)| = |l(v - w + w)| = |l(v - w)| \leq \|l\|\|v - w\|,$$

dado que la desigualdad vale para todo w, basta tomar el ínfimo para que se siga el resultado. Para la otra dirección, supongamos que $|l(v)| > \|l\|d(v, L)$. Como $0 \in L$ (pues l es un funcional lineal), se sigue que

$$|l(v)| > \|l\|d(v, L) \geq \|l\|\|v\|,$$

contradiciendo que l sea un funcional lineal acotado.

(b) Sean v y w como en el enunciado. Definamos $u = (v - w)/\|v - w\| = (v - w)/d(v, L)$. Por la parte anterior se tiene que

$$|l(u)| = \|l\|d(u, L) = \|l\|,$$

pues

$$d(u, L) = \inf_{w' \in L} \|u - w'\| = \frac{1}{d(v, L)} \inf_{w' \in L} \|v - w'\| = \frac{d(v, L)}{d(v, L)} = 1.$$

`PROBLEMA 6` Sean V, W espacios de Banach, $T \in B(V, W)$, $\alpha \in (0, 1)$ y $\beta > 0$. Supongamos que para todo $w \in W$, existe $v \in V$ tal que $\|v\| \leq \beta\|w\|$ y

$$\|Tv - w\| \leq \alpha\|w\|.$$

Pruebe que para todo $w \in W$ dado, la ecuación $Tv = w$ tiene una solución $v \in V$ con $\|v\| \leq \beta/(1 - \alpha)\, \|w\|$.

`SOLUCIÓN` Sea v_0 el vector asociado con w según el enunciado. Luego,

$$\|v_0\| \leq \beta\|w\| \text{ y } \|Tv_0 - w\| \leq \alpha\|w\|.$$

Consideremos v_1 el vector asociado a $w_1 = Tv_0 - w$. Luego,

$$\|v_1\| \leq \beta\|Tv_0 - w\| \text{ y } \|Tv_1 - (Tv_0 - w)\| \leq \alpha\|Tv_0 - w\|.$$

Descomponiendo todo para dejarlo en términos de w tenemos que

$$\|v_1\| \leq \beta\alpha\|w\| \text{ y } \|Tv_1 - w_1\| \leq \alpha^2\|w\|$$

Ahora consideremos v_2 el vector asociado a $w_2 = Tv_1 - w_1$. Se sigue que

$$\|v_2\| \leq \beta\alpha^2\|w\| \text{ y } \|Tv_2 - w_2\| \leq \alpha^3\|w\|.$$

Siguiendo el procedimiento tendremos

$$\|v_n\| \leq \beta\alpha^n\|w\| \text{ y } \|Tv_n - w_n\| \leq \alpha^{n+1}\|w\|.$$

Definamos $v = \sum_{n\geq 0} v_n$. Afirmamos que v existe y que $Tv = w$. Para lo primero, basta ver que la serie es absolutamente convergente porque estamos en un espacio de Banach:

$$\|v\| \leq \sum_{n\geq 0} \|v_n\| \leq \beta\|w\| \sum_{n\geq 0} \alpha^n \leq \beta\|w\| \frac{1}{1-\alpha} < \infty,$$

pues $\alpha \in (0,1)$. Para lo segundo, debemos probar que la imágenes de las sumas parciales convergen a w.

$$\begin{aligned}
\left\| w - \sum_{n=0}^{N} Tv_n \right\| &= \left\| (w - Tv_0) - \sum_{n=1}^{N} Tv_n \right\| \\
&= \left\| w_1 - \sum_{n=1}^{N} Tv_n \right\| \\
&= \left\| (w_1 - Tv_1) - \sum_{n=2}^{N} Tv_n \right\| \\
&= \left\| w_2 - \sum_{n=2}^{N} Tv_n \right\| \\
&\vdots \\
&= \|w_N - Tv_N\| \leq \alpha^{N+1}\|w\|.
\end{aligned}$$

Tomando $N \to \infty$ tenemos que $Tv = w$.

`PROBLEMA` 7 Sea X un espacio métrico completo y sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones continuas en X con valores en $\mathbb{K}$, tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para todo $x \in X$. En esta pregunta, demostrará que el conjunto donde la función límite f es continua, es denso en X.

(a) Pruebe que para todo $\epsilon > 0$ y toda bola cerrada $\overline{B} \subset X$, existe una bola abierta $\tilde{B} \subset B$ y un $N \in \mathbb{N}$, tales que

$$|f_N(x) - f(x)| \leq \epsilon \qquad \text{para todo } x \in \tilde{B}.$$

(*Sugerencia:* Considere $E_l \coloneqq \{x \in \overline{B} \colon \sup_{j,k\geq l} |f_j(x) - f_k(x)| \leq \epsilon\}$ y note que $\overline{B} = \bigcup_l E_l$).

(b) Defina la oscilación de f en x,

$$osc(f)(x) = \lim_{r\downarrow 0} \sup_{y,z\in B_r(x)} |f(y) - f(z)|,$$

y note que f es continua en x si y solo si $osc(f)(x) = 0$. Demuestre que

$$F_t \coloneqq \{x \in X \colon osc(f)(x) \geq t\}, t > 0,$$

es cerrado y denso en ninguna parte. (*Sugerencia*: $\{x \in X \colon osc(f)(x) < t\}$ es abierto para cualquier función f)

(c) Concluya que el conjunto de discontinuidades de f es de la primera categoría en X, i.e. el conjunto donde f es continua es genérico en X.

`SOLUCIÓN`

(a) Definamos E_l como en la sugerencia. En primer lugar, notemos que son cerrados. En efecto, sea x un punto límite de E_l, entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en E_l tal que $x_n \to x$. Para ver que $x \in E_l$ notemos que descomponiendo el límite y usando la continuidad de f_i se tiene que

$$\sup_{j,k \leq l} |f_j(x) - f_k(x)| = \sup_{j,k \leq l} \lim_{n \to \infty} |f_j(x_n) - f_k(x_n)| \leq \epsilon.$$

Así, llegamos que la bola cerrada es unión de conjuntos cerrados y por Baire (la bola es completa al ser cerrada) se sigue existe N tal que E_N tiene interior no vacío. Sea $\tilde{B}$ una bola abierta en E_N, entonces se sigue que

$$|f_N(x) - f_j(x)| \leq \epsilon \qquad \forall x \in \tilde{B}.$$

Tomando $j \to \infty$ se concluye lo pedido.

(b)