PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DOCENTE: NIKOLA KAMBUROV
AYUDANTE: MATÍAS DÍAZ

MAT2555 - Análisis Funcional

Tarea 4 - Omar Neyra, Sebastián Sánchez

PROBLEMA 1

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{K}$. Considere el operador $T \in B(\ell^p, \ell^p)$ definido por:

$$Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots,), \qquad x = (x_1, x_2, \dots,) \in \ell^p =: X.$$

Demuestre que T es compacto si y solo si $\lambda_n \to 0$.

SOLUCIÓN $\boxed{\Rightarrow:}$ caso $1 \leq p < \infty$: Consideremos la sucesión compuesta por $e^{(n)} = (\delta_{in})_{i\geq 1}$ los elementos en ℓ^p con todas las entradas nulas salvo la n-ésima que vale 1. Dado que $e^{(n)}$ tiene norma 1 y T es compacto, la sucesión $(T(e^{(n)}))_n$ tiene una subsucesión convergente en $\overline{T(B(0,1))}$. Sea x el límite de la sucesión. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que (renombrando)

$$\left\| x - Te^{(n)} \right\|_p^p = \sum_{i\neq n} |x_i|^p + |x_n - \lambda_n|^p < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Se sigue que $|x_n|^p < \varepsilon$ para cada n, es decir, $x = 0$. En consecuencia, $|\lambda_n| \to 0$. De esta forma, tenemos que la sucesión λ tiene una subsucesión convergente a 0. Para extender el resultado a toda la sucesión, notamos que en vez de tomar toda la sucesión $(e^{(n)})_n$, pudimos haber tomado cualquier otra subsucesión (y por lo tanto cualquier otra subsucesión de λ) y aplicar el mismo argumento anterior. De esta manera tenemos que todas las subsucesiones de λ tienen una subsucesión convergente a 0. Esto es suficiente para que toda la sucesión λ converja a 0.

caso $p = \infty$: Similarmente al caso anterior, dado $\varepsilon > 0$ existe una subsucesión de $(Te^{(n)})_n$ tal que (renombrando)

$$\left\| x - Te^{(n)} \right\|_\infty = \sup_i |x_i - \lambda_i \delta_{in}| < \varepsilon.$$

Y se tiene que $|x_i| < \varepsilon$ para cada i, es decir, $x = 0$. Esto implica que $\lambda_n \to 0$ y aplicamos el mismo argumento de la parte anterior para extender la convergencia a toda la sucesión.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Definamos el operador $T_n \colon X \to X$ dado por $x \mapsto (\lambda_i x_i)_{i=1}^n$ dejando el resto de las entradas en cero. Este operador es de rango finito y por lo tanto compacto. Probaremos que $T_n \to T$ y por lo tanto T será compacto. En efecto, tenemos que

$$\|Tx - T_n x\|^p = \sum_{i\geq n+1} |\lambda_i|^p |x_i|^p \leq \sup_{i\geq n+1} |\lambda_i|^p \cdot \underbrace{\|x\|^p}_{=1} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

caso $p = \infty$: es análogo, solo que la desigualdad es

$$\|Tx - T_n x\|_\infty = \sup_{i\geq n+1} |\lambda_i| \underbrace{\|x\|}_{=1} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

PROBLEMA 2

Sea $X = C([0,1])$ y defina el operador $T\colon X \to X$ por

$$Tx(t) := \int_0^t x(s)\,ds.$$

(a) Demuestre que T es compacto.

(b) Determine $\sigma_p(T)$ y $\sigma(T)$.

(c) Demuestre que la ecuación $x - Tx = f$ tiene única solución para cualquier $f \in C([0,1])$. Encuentre una fórmula para el operador $(I-T)^{-1}$.

SOLUCIÓN Asumimos que X tiene equipada la norma $\|\cdot\|_\infty$.

(a) Usaremos el Teorema de Arzela-Ascoli. Llamemos $Y = \overline{T(B(0,1)}$.

<u>Y acotado:</u> Como las funciones son continuas que viven sobre un compacto, alcanzan su máximo. Luego,

$$\|Tx\| = \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t x(s)\,ds\right| \le \sup_{t\in[0,1]}\int_0^t |x(s)|\,ds \le \sup_{t\in[0,1]} t\|x\| \le \|x\| = 1.$$

Y por lo tanto Y es un conjunto acotado.

<u>Y cerrado:</u> Directo porque es una clasura.

<u>Y equicontinuo:</u> Sea $\varepsilon > 0$ y $t_1 \neq t_2 \in [0,1]$. Luego, para cualquier $x \in X$ se tiene que

$$|Tx(t_1) - Tx(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} x(s)\,dt\right| \le |t_2 - t_1|\underbrace{\|x\|}_{=1}.$$

Así que tomando $|t_2 - t_1| < \varepsilon$ tenemos lo pedido.

De esta forma, por el Teorema de Arzela-Ascoli el conjunto Y es compacto.

(b) Ya que T es compacto (y X es Banach), sabemos que $0 \in \sigma(T)$ y que $\sigma_p(T)\setminus 0 = \sigma(T)\setminus 0$. Así, solo queda determinar los valores propios. Para ello, debemos resolver la ecuación:

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)\,ds = \lambda x(t) \qquad \lambda \in \mathbb{K}\setminus 0. \tag{†}$$

Como el lado izquierdo es diferenciable, también lo es el lado derecho. Derivando ambos lados con respecto a t obtenemos:

$$x(t) = \lambda \dot{x}(t).$$

De (†) obtenemos que $x(0) = 0$, así que tenemos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} &= \lambda^{-1}x \\ x(0) &= 0 \end{cases}.$$

Dado que el lado derecho es continuo, la solución es única. Más aún, dado que $x = 0$ lo soluciona concluimos no hay valores propios.

(c) Como T es compacto y $\ker(I-T)=0$, por Alternativa de Fredholm tenemos que $\operatorname{ran}(I-T)=X$ y por lo tanto $I-T$ es un isomorfismo. Se sigue de aquí que $(I-T)x=f$ tiene solución única. Ahora, para ver la fórmula explícita expresamos la ecuación como una ecuación diferencial ordinaria:

$$\dot{x}-x=f-x_0$$

donde asumimos momentáneamente que f y x son diferenciables y notamos que $x_0=x(0)=f(0)$. Usando factor integrante e^{-t}:

$$\begin{aligned}
\dot{x}e^{-t}-xe^{-t}&=e^{-t}(f-x_0)\\
\frac{d}{dt}(xe^{-t})&=e^{-t}(f-x_0)\\
\Rightarrow xe^{-t}-x_0&=\int_0^t e^{-s}(f(s)-x_0)\,ds\\
x&=x_0e^t+e^t\int_0^t e^{-s}(f(s)-x_0)\,ds
\end{aligned}$$

Que simplificando nos da como solución:

$$x=f(0)+\int_0^t e^{t-s}f(s)\,ds=(I-T)^{-1}f(t).$$

Notemos que la última fórmula hace sentido sin asumir que f ni x son diferenciables. Veamos que efectivamente resuelven el problema. Aplicando T tenemos:

$$T(I-T)^{-1}f(t)=T\left(f(0)+\int_0^t e^{t-s}f(s)\,ds\right)=tf(0)+\int_0^t\int_0^r e^{r-s}f(s)\,ds\,dr$$

Restándolo de $I(I-T)^{-1}f(t)$ no da que:

PROBLEMA 3

Sea H un espacio de Hilbert complejo.

(a) Demuestre que si $U : H \to H$ es un operador unitario, entonces $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| = 1\}$.

(b) Sea $T \in B(H,H)$ con adjunto T^*. Pruebe que $\lambda \in \sigma(T)$ si y solo si su conjungado $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

SOLUCIÓN

(a) Como U es unitario, $\|U\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ux\| = 1$ y sabemos que $\lambda \in \sigma(U)$ satisface que $|\lambda| \leq \|U\| = 1$. Por lo tanto, solo queda probar la otra desigualdad. Sea $\lambda \in \sigma(U)$ y supongamos que $|\lambda| < 1$. Luego, el operador $U - \lambda I$ no es invertible. Sin embargo, dado que tiene inversa U^{-1} continua de norma 1, podemos reescribir el operador anterior:

$$U - \lambda I = U^{-1}(I - \lambda U^{-1})$$

Y vemos que es un producto (composición) de operadores invertibles, pues U^{-1} es invertible y $I - \lambda U^{-1}$ es invertible (por series de Neumann). Esto da una contradicción y por lo tanto $\lambda = 1$.

(b) Sea $\lambda \in \sigma(T)$. Luego, $T - \lambda I$ no es invertible. Tenemos 2 posibles casos, (1) o bien $T - \lambda$ no es inyectivo o (2) lo es pero no es sobreyectivo.

(1) Si no es inyectivo, $\ker(T - \lambda I) \neq 0$ y por las relaciones de ortogonalidad, $\operatorname{ran}(T^* - \overline{\lambda} I)^{\perp} \neq 0$. Lo último dice que $T^* - \overline{\lambda}$ no es sobreyectivo, así que no es invertible. Por lo tanto $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

(2) Si es inyectivo pero no es sobreyectivo, $\operatorname{ran}(T - \lambda I) \subsetneq H$. Si la imagen no es densa, se tiene que $\operatorname{ran}(T - \lambda I)^{\perp} \neq 0$ y aplica el argumento de (1). Si la imagen es densa, XD

PROBLEMA 4

Sea H un espacio de Hilbert complejo.

(a) Suponga que A_1 y A_2 son dos operadores autoadjuntos compactos que conmutan. Demuestre que existe una base ortonormal de H que consta de vectores propios tanto para A_1 como para A_2.

(b) (*Descomposición espectral de operadores normales compactos*) Un operador $T \in B(H,H)$ se llama *normal* si $TT^* = T^*T$. Demuestre que si T es normal y compacto, entonces H posee una base ortonormal de vectores propios de T.

Sugerencia: Escriba $T = A_1 + A_2 i$ donde A_1 y A_2 son como en la parte (a) y utilice eso para concluir.

SOLUCIÓN

(a) Como A_1 es autoadjunto y compacto, por el Teorema Espectral existe una base ortonormal numerable de vectores propios. Sea λ un valor propio de A_1 y $v \in \ker(A_1 - \lambda)$. Dado que

$$A_1 A_2 v = A_2 A_1 v = A_2 \lambda v = \lambda A_2 v$$

vemos que $A_2 v$ también es vector propio de A_1 asociado a λ. Dado que A_2 tiene las mismas propiedades que A_1, podemos encontrar un vector propio de A_2, $u \in \ker(A_1 - \lambda)$. De esta forma, u es un vector propio de A_1 y A_2. Inductivamente podemos hacer este procedimiento para $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ valores propios de A_1, construyendo vectores $u_1, u_2, \dots$ y normalizando obtendremos que son base ortonormal, donde la ortonormalidad y la base vienen de que cada u_i vive en $\ker(A_1 - \lambda_i)$ que son espacios ortogonales y cubren todo.

(b) Consideremos $A_1 = (T + T^*)/2$ y $A_2 = (T - T^*)/2i$. Se verifica que ambos son compactos y autoadjuntos. Además,

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= \frac{TT - TT^* + T^*T - T^*T^*}{4i} \\ &= \frac{TT - T^*T + TT^* - T^*T^*}{4i} \\ &= \frac{(T - T^*)T + (T - T^*)T^*}{4i} = A_2 A_1. \end{aligned}$$

Así, por la parte (a) existe una base ortonormal de vectores propios tanto de A_1 como de A_2 y por lo tanto de T.