

## Espacios de Lebesgue

---

De aquí en adelante  $(\Omega, F, \mu)$  es un espacio de medida. Si se requieren más se pondrán subíndices.

Recordamos que  $\mathcal{L}^p(\mu)$  es el conjunto de funciones medibles  $p$ -integrables. La función  $\|\cdot\|_p$  define una seminorma y tomando  $\mathcal{N}(\mu)$  como las funciones que se anulan casi en todas partes podemos definir el espacio

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/\mathcal{N}(\mu)$$

que sí es un espacio normado con la norma  $\|\cdot\|_p$ . De hecho, es un espacio de Banach.

**Teorema 1** (Riesz-Fischer).  $L^p(\mu)$  es un espacio de Banach.

*Demostración.* Vamos a probar que todas las series absolutamente sumables son sumables.

Caso  $1 \leq p < \infty$ : Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $f_n \in L^p(\mu)$  tal que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p \leq M < \infty. \quad (1)$$

Consideremos las sumas parciales puntuales  $G_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|$ . Nótese que son no negativas y crecientes. Además,  $G_n$  es una suma finita de funciones medibles, así que es medible. Por otro lado,  $G_n(x) \uparrow \sum_{n \geq 1} |f_n(x)| =: G(x)$  que está dominada por la serie en (1). Así, por el Teorema de Convergencia Dominada (TCD) tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int G_n(x) d\mu = \int G(x) d\mu. \quad (2)$$

En particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int G_n(x)^p d\mu = \int G(x)^p d\mu =: I. \quad (3)$$

Y por lo tanto  $I \leq M^p$  pues basta tomar límite en la expresión:

$$\left( \int G_n(x)^p \right)^{1/p} = \|G_n\|_p \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p \leq M < \infty.$$

Esto nos dice que  $G^p \in L^1(\mu)$  y juntándolo con lo anterior concluimos que  $0 \leq G^p < \infty$   $\mu$ -ctp. De esta forma, el candidato a límite de la serie es

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) & , G(x) < \infty \\ 0 & , e.o.c \end{cases} \quad (4)$$

Dado que  $|F(x)| \leq G(x)$ ,  $F \in L^p(\mu)$ . Además,  $F$  es medible porque TODO. Queda ver la convergencia. Dado que  $|F(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)|$  está dominado por  $G$

para cada  $x$ , en particular  $|F(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)|^p$  está dominado por  $G^p$ . Luego, por TCD nos queda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |F(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x)|^p = 0. \quad (5)$$

□

## El Teorema de Representación de Riesz

Sea  $1 \leq p \leq \infty$  y  $q$  su exponente conjugado ( $1/q + 1/p = 1$ ). Definamos

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: L^p(\mu) \times L^q(\mu) &\rightarrow \mathbb{K} \\ f, g &\mapsto \int fg \, d\mu. \end{aligned} \quad (6)$$

Notar que el mapa está bien definido, en efecto, aplicando Hölder:

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Esto nos permite definir un funcional lineal en  $L^p(\mu)$  para cada elemento de  $L^q(\mu)$  dado por:

$$l_g f := \langle f, g \rangle.$$

La linealidad viene por la linealidad de la integral y  $\|l_g\|_{(L^p(\mu))'} \leq \|g\|_q$ . Más aún, el mapa  $\Phi: L^q(\mu) \rightarrow (L^p(\mu))'$  dado por  $g \mapsto l_g$  es lineal, acotado e inyectivo.

**Teorema 2** (Representación de Riesz). *Supongamos que  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  es  $\sigma$ -finito. Si  $1 \leq p < \infty$ , entonces  $\Phi$  es un isomorfismo isométrico.*

El resto de esta sección está dedicada a probar este teorema. Algunas consecuencias:

1.  $(\ell^p)' \cong \ell^q$ , esto es sale del teorema al poner el espacio de medida  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  donde  $\mu$  es la medida de contar.
- 2.

**Teorema 3** (Radon-Nikodým). *Sean  $\mu, \nu$  medidas  $\sigma$ -finitas tal que  $\nu \ll \mu$ . Entonces existe una única función  $h$  no negativa medible tal que  $\nu(E) = \int_E h \, d\mu$ .*

Recordar que como casi todo en medida, la unicidad es  $\mu$ -ctp al igual que lo es la no negatividad. Por otro lado, nótese que el teorema es válido para funciones a valores reales. No obstante, considerando la parte real e imaginaria se puede extender a valores complejos. Por último, se usa la notación  $h = [\frac{d\nu}{d\mu}]$  y se dice que  $h$  es la derivada de Radon-Nikodým.

*Demostración.* La demostración se divide en dos pasos. En primer lugar lo probaremos para medidas finitas, y luego lo extendemos para medidas  $\sigma$ -finitas. El argumento de usar la Representación de Riesz para espacios de Hilbert se atribuye a Von Neumann.

Paso I: Supongamos que  $\mu$  y  $\nu$  son finitas. Consideremos la medida  $\lambda = \mu + \nu$ . Notar que  $\lambda(E) = 0 \iff \mu(E) = 0$  pues  $\nu \ll \mu$ . Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} l: L^2(\lambda) &\mapsto \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int f d\mu. \end{aligned}$$

El mapa es lineal por la linealidad de la integral y es acotado porque  $\mu$  es finita i.e.  $\|l\| \leq \mu(\Omega)^{1/2}$ . Así, por el Teorema de Representación de Riesz para espacios de Hilbert, existe un único  $g \in L^2(\lambda)$  tal que

$$\int f d\mu = \int f g d\lambda \quad \forall f \in L^2(\lambda).$$

Como las medidas son finitas, se sigue que

$$\int f(1-g) d\mu = \int f g d\nu \quad \forall f \in L^2(\lambda). \quad (7)$$

Notar que  $0 < g \leq 1$   $\lambda$ -ctp (que es lo mismo que  $\mu$ -ctp). En efecto,

$$\begin{aligned} \mu(\{g \leq 0\}) &\leq \int \mathbb{1}_{\{g \leq 0\}} d\mu \\ &\leq \int \mathbb{1}_{\{g \leq 0\}} (1-g) d\mu \\ &\stackrel{(7)}{=} \int \mathbb{1}_{\{g \leq 0\}} g d\nu \leq 0. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$0 > \int \mathbb{1}_{\{1-g < 0\}} (1-g) d\mu = \int \mathbb{1}_{\{1-g < 0\}} g d\nu \geq 0.$$

Así que podemos tomar un representa que esté estrictamente entre  $0 < g \leq 1$  y podemos definir  $h = \frac{1-g}{g}$ . Sea  $E$  un conjunto medible y definamos la sucesión de funciones  $f_n := \mathbb{1}_{\{E \cap \{g \geq 1/n\}\}} \frac{1}{g}$ . Como la medida es finita,  $f_n \in L^2(\lambda)$  y aplicando la Ecuación (7) nos queda

$$\int f_n(1-g) d\mu = \int f_n g d\nu,$$

es decir,

$$\int_{E \cap \{g \geq 1/n\}} \frac{1-g}{g} d\mu = \int_{E \cap \{g \geq 1/n\}} d\nu.$$

Dado que  $E \cap \{g \geq 1/n\} \uparrow E$ , se sigue el resultado.

Paso 2: Supogamos ahora que  $\mu$  y  $\nu$  son  $\sigma$ -finitas. Sean  $\Omega_n$  tal que  $\Omega_n \uparrow \Omega$  y cada uno tiene medida finita. Por lo anterior, para cada  $n$  existe una función  $h_n$  tal que  $\nu(E) = \int h_n \mathbb{1}\{E\} d\mu$  con  $E \in \mathcal{F} \cap \Omega_n =: S_n$ . Además,  $\nu(E) = \int h_{n+1} \mathbb{1}\{E\} d\mu$  pues  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ . Se sigue que  $h_{n+1}|_{\Omega_n} = h_n$  (igualdad ctp). Extendamos cada  $h_n$  por cero fuera de  $\Omega_n$ . Nótese que  $h_n$  sigue siendo  $S_n$  medible. Definamos  $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$ . Es claro que  $h_n \uparrow h$  y para todo  $E \in \mathcal{F}$  medible se tiene que  $\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\Omega_n \cap E)$ . Usando TCM concluimos que

$$\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega_n} h_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E \cap \Omega} h d\mu = \int_E h d\mu.$$

□