PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DOCENTE: NIKOLA KAMBUROV
AYUDANTE: MATÍAS DÍAZ

MAT2555 - Análisis Funcional

Tarea 3 - Omar Neyra, Sebastián Sánchez

PROBLEMA 1

Sea (Ω, M, μ) un espacio de medida y suponga que $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ para algún $p_0 \in [1,\infty)$. Pruebe que $f \in L^p$ para todo $p \geq p_0$ y que

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

SOLUCIÓN El caso $p = p_0$ es directo, así que supongamos que la desigualdad es estricta y denotemos $p' := p - p_0 > 0$. Notando que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ (c.t.p) tenemos que

$$\int |f|^p = \int |f|^{p_0}|f|^{p'} \leq \int |f|^{p_0} \|f\|_\infty^{p'} \leq \|f\|_\infty^{p'} \|f\|_{p_0}^{p_0} \tag{1}$$

Todas las cantidades son positivas, así que tomando raíz obtenemos que

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{p'/p} \|f\|_{p_0}^{p_0/p} < \infty, \tag{2}$$

pues la norma uniforme y p_0 están acotadas. Tomando límite se ve directamente que

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \tag{3}$$

pues $p'/p = 1 - p_0/p \to 1$ y $p_0/p \to 0$ cuando $p \to \infty$.

Para la otra dirección, consideremos $\varepsilon > 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \\
&\geq \left(\int_{\{|f|+\varepsilon > \|f\|_\infty\}} |f|^p\right)^{1/p} \\
&\geq \left(\int_{\{|f|+\varepsilon > \|f\|_\infty\}} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p\right)^{1/p} \\
&\geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(\{|f| + \varepsilon > \|f\|_\infty\})^{1/p}.
\end{aligned}$$

Notar que $\mu(\{|f|+\varepsilon > \|f\|_\infty\}) < \infty$ pues $f \in L^p$. Tomando límite tenemos que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. Como ε es arbitrario, se concluye el resultado.

PROBLEMA 2

Para todo $a \in \mathbb{R}$ construya una función $f_a \in L^\infty(\mathbb{R})$ con $\|f_a - f_b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq 1$ cuando $a \neq b$. Demuestre que esto implica que $L^\infty(\mathbb{R})$ no es separable.

SOLUCIÓN Basta considerar $f_a(x) = \chi_{[a,\infty]}(x)$. Para lo otro. Supongamos que es separable. Sea $\{x_n\}_n$ un conjunto denso y numerable. Fijemos $1/4 > \varepsilon > 0$. Luego, existe N tal que al menos para dos reales a y b se tiene que $f_a, f_b \in B(x_N, \varepsilon)$ (Un palomar, hay numerables bolas y tenemos no-numerables elementos que disponer). De esta forma:

$$1 = \|f_a - f_b\| \leq \|f_a - x_N\| + \|f_b - x_N\| \leq 2\varepsilon < 1$$

Dada la contradicción, concluimos que L^∞ no puede ser separable.

PROBLEMA 3

Suponga que el espacio de medida (Ω, M, μ) es σ-finito. Decimos que una sucesión $f_n \in L^p$ *converge débilmente* a $f \in L^p$ si $c(f_n) \to c(f)$ para todo $c \in (L^p)^*$. Escribimos $f_n \rightharpoonup f$ en L^p.

(a) Demuestre que $f_n \rightharpoonup f$ en L^p, $p \in [1,\infty)$, si y solo si

$$\int f_n g \to \int fg$$

para toda $g \in L^q$, con $1/p + 1/q = 1$.

(b) Pruebe que cuando $f_n \rightharpoonup f$ en L^p, $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$

(c) (Compacidad débil de L^p) Sea $p \in (1,\infty)$ y suponga que L^q es separable. Pruebe que si $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$, entonces existe $f \in L^p$ y una sucesión $f_{n_k} \in L^p$ tal que $f_{n_k} \rightharpoonup f$.

(d) De un contraejemplo del ítem anterior cuando $p = 1$.

SOLUCIÓN

(a) $\boxed{\Rightarrow:}$ Notamos que para todo $g \in L^q$, el mapa $\Phi\colon L^p \to \mathbb{K}$ dado por $a \mapsto \int ag$ define un funcional lineal acotado. En efecto, la linealidad es directa por la linealidad de la integral y la cota sale por Hölder:

$$|\Phi(a)| \leq \int |ag| \leq \|a\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Luego, la convergencia débil nos da que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \Phi(f) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n g = \int fg.$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ Por el teorema de representación de Riesz para espacios de funciones integrables, para todo $T \in (L^p)^*$ existe $h \geq 0$ en L^q tal que

$$T(a) = \int ah.$$

Por la hipótesis, se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n h = \int fh = T(f).$$

(b) Sea $x' \in (L^p)^*$ de norma 1 tal que $|x'(f)| = \|f\|_p$. Esto lo podemos pedir por Hahn-Banach. Por hipótesis, se cumple que $x'(f_n) \to x'(f)$. Se sigue que:

$$\|f\|_p = |x'(f)| = \left|\lim_{n\to\infty} x'(f_n)\right| \leq \liminf_{n\to\infty} |x'(f_n)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x'\| \|f_n\|_p = \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p.$$

(c) Recordemos que para $1 < p < \infty$, $L^q \cong (L^p)^*$. Luego, $(L^p)^*$ es separable. Tomemos $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(L^p)^*$ denso y numerable. Luego, $(\phi_1(f_n))_n$ define una sucesión acotada de números en el cuerpo. Se sigue que existe una subsecuencia $f_{n,1}$ tal que $\phi_1(f_{n,1}) \to c_1 \in \mathbb{K}$. De manera inductiva tenemos secuencias $(f_{n,k})_n \subset (f_{n,k-1})_n$ tal que

$$\phi_k(f_{n,k}) \to c_k \in \mathbb{K}.$$

Definamos la secuencia diagonal $f_{n_k} = f_{n_k,n_k}$. Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\phi_n(f_{n_k}) \xrightarrow{n_k\to\infty} c_n \in \mathbb{K}.$$

Definamos $f = \lim f_{n_k}$. Notar que $\phi_n(f_{n_k}) \to \phi_n(f)$. Sea $g \in (L^p)^*$. Luego,

$$|g(f) - g(f_{n_k})| \leq |g(f) - \phi_n(f)| + |\phi_n(f_{n_k} - \phi_n(f)| + |\phi_n(f_{n_k}) - g(f_{n_k})| \xrightarrow{n,n_k\to\infty} 0.$$

PROBLEMA 4

PROBLEMA 5

Sea μ_i, ν_i medidas σ-finitas en (Ω_i, M_i) tales que $\nu_i \ll \mu_i$ para $i = 1,2$. Pruebe que la medida producto $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ y que la derivada de Radon-Nikodým:

$$\left[\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}\right] = \left[\frac{d\nu_1}{d\mu_1}\right](x_1) \left[\frac{d\nu_2}{d\mu_2}\right](x_2)$$

SOLUCIÓN Denotemos por $h_i := [d\nu_i/d\mu_i]$ y por $H = [d(\nu_1 \times \nu_2)/d(\mu_1 \times \mu_2)]$. Además, pongamos $\Pi_\alpha = \alpha_1 \times \alpha_2$.

$\underline{\Pi_\nu \ll \Pi_\mu}$: Sea $E \in \Pi_M$ un medible en el producto. Supongamos que $\Pi_\mu(E) = 0$. Denotemos por $\underline{E^\bullet, E_\bullet}$ a las secciones en Ω_2 y Ω_1, respectivamente. Luego (usando que las medidas son σ-finitas):

$$\begin{aligned}
0 = \Pi_\mu(E) = \int_{\Omega_1} \mu_2(E^{x_1})\, d\mu_1(x_1) &= \int_{\Omega_2} \mu_1(E_{x_2})\, d\mu_2(x_2) \\
&\implies \mu_1(E_\bullet) = 0 \vee \mu_2(E^\bullet) = 0 \\
&\implies \nu_1(E_\bullet) = 0 \vee \nu_2(E^\bullet) = 0 \\
&\implies \Pi_\nu(E) = \int_{\Omega_1} \nu_2(E^{x_1})\, d\nu_1(x_1) = \int_{\Omega_2} \nu_1(E_{x_2})\, d\nu_2(x_2) = 0.
\end{aligned}$$

$\underline{H(x_1,x_2) = h_1(x_1)h_2(x_2)}$: Para toda $f \in L^1(\Pi_\mu)$ se tiene:

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d\Pi_\nu = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} fH\, d\Pi_\mu \tag{4}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f\, d\Pi_\nu &\overset{\text{fubini}}{=} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f\, d\nu_2 \right) d\nu_1 \\
&\overset{\text{RN}}{=} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f h_2(x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) h_1(x_1) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f h_1(x_1) h_2(x_2)\, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\
&\overset{\text{fubini}}{=} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f h_1(x_1) h_2(x_1)\, d\Pi_\mu
\end{aligned} \tag{5}$$

Restando (4) y (5) nos da que:

$$H(x_1,x_2) = h_1(x_1)h_2(x_2) \quad \text{c.t.p. en } \Omega_1 \times \Omega_2.$$

PROBLEMA 6

PROBLEMA 7

Sea $x_0(t) \in X = C([0,1])$ una función continua fija ($\|x_0\|_\infty = 1$) y $L = Gen(x_0)$. Defina L el funcional lineal:

$$f(\lambda x_0) := \lambda.$$

(a) Pruebe que $\|f\|_{L^*} = 1$.

(b) De acuerdo con el Teorema de Hahn-Banach, f se puede extender a un funcional lineal $F \in X^*$ con norma $\|F\|_{X^*} = 1$. ¿Es la extensión única en los siguientes casos?

- $x_0(t) = t$.
- $x_0(t) = 1 - 2t$.

SOLUCIÓN

(a) Apliquemos la definición:

$$\|f\|_{L^*} = \sup_{\|\lambda x_0\|=1} |f(\lambda x)| = \sup_{|\lambda|=1} |\lambda| = 1.$$

(b)
- $Gen(x_0) = \{\lambda t : t \in [0,1]\}$. El mapa f entrega las pendientes de las rectas. Sea $F \in X^*$ una extensión. Notemos que f está dominada por $x(x-2)$.

PROBLEMA 8

Suponga que X es un espacio de Banach.

(a) Pruebe que X es reflexivo si y solo si X^* es reflexivo.

(b) Demuestre que si X^* es separable, entonces X es separable. (Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$, escoja $x_n \in X$ con $\|x_n\| = 1$ y $|f_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$, donde $f_n \in X^*$ es un subconjunto contable denso, y demuestre (por contradicción) que $Gen_{\mathbb{K}_c}(\{x_n\}_n) = X$, donde $Gen_{\mathbb{K}_c}(S)$ denota el conjunto de combinaciones lineales finitas de S, con coeficientes en $\mathbb{K}_c = \mathbb{Q}$ cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K}_c = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ cuando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Note que la combinación de esta proposición y la Pregunta 2 muestra que, en general, $(L^\infty)^* \ncong L^1$.

SOLUCIÓN Denotemos $X^{(0)} := X$ y $X^{(i)} := (X^{(i-1)})^*$ para $i > 0$.

(a) $\boxed{\Longrightarrow}$: Supongamos que $X^{(0)}$ es reflexivo. Entonces, el mapa

$$\begin{aligned} J^{(0)} \colon X^{(0)} &\to X^{(2)} \\ x &\mapsto \begin{aligned} ev_x \colon X^{(1)} &\to \mathbb{K} \\ x^{(1)} &\mapsto x^{(1)}(x) \end{aligned}. \end{aligned}$$

es un isomorfismo isométrico. Queremos probar lo mismo para el mapa:

$$\begin{aligned} J^{(1)} \colon X^{(1)} &\to X^{(3)} \\ x^{(1)} &\mapsto \begin{aligned} ev_{x^{(1)}} \colon X^{(2)} &\to \mathbb{K} \\ x^{(2)} &\mapsto x^{(2)}(x^{(1)}) \end{aligned}. \end{aligned}$$

Para esto, basta probar que es sobreyectivo.

Dado que $J^{(0)}$ es sobreyectivo, todo elemento $x_0^{(2)} \in X^{(2)}$ se puede escribir como $J^{(0)}(x_0)$ para algún $x_0 \in X$. Sea $x^{(3)} \in X^{(3)}$ se tiene que

$$x^{(3)}(x_0^{(2)}) = x^{(3)}(J^{(0)}(x_0)) = (x^{(3)} \circ J^{(0)})(x_0)$$

Denotemos por $x^{(1)} := x^{(3)} \circ J^{(0)} \in X^{(1)}$. Luego,

$$x^{(3)}(x_0^{(2)}) = x^{(1)}(x_0) = J^{(0)}(x_0)(x^{(1)}) = x_0^{(2)}(x^{(1)}).$$

Y el último término lo podemos expresar como $J^{(1)}(x^{(1)})(x_0^{(2)})$. Esto demuestra la sobreyectividad. $\boxed{\Longleftarrow}$:

(b) Supongamos X^* separable. Consideremos la esfera unitaria en X^*

$$S^{(1)} := \left\{ \left\| x^{(1)} \right\| = 1 \right\}.$$

Luego, $S^{(1)}$ también es separable. Sean $\left\{ x_n^{(1)} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ elementos densos y numerables. Asociemos, para cada n, un elemento $x_n \in X$ tal que $0 < \delta \leq \left| x_n^{(2)}(x_n) \right| \leq 1$. Probaremos que esos x_n son densos (en el sentido del espacio generado) en X. Buscando una contradicción, supongamos que no lo son. Entonces existe un $x^{(1)} \in S^{(1)}$ tal que $x^{(1)}$ se anula en todo $U = Gen_{\mathbb{K}_c}(\{x_n\})$ pero no es nulo fuera de U. (equivalentemente, existe un abierto en $X \setminus U$ y podemos definir un funcional que se anule en todo menos ese abierto. Reescalando lo podemos pedir unitario). Por densidad en $S^{(1)}$, existe N tal que $\left\| x^{(1)} - x_N^{(1)} \right\| > \delta/2$. Luego,

$$\delta \leq \left| x_N^{(1)}(x_N) \right| = \left\| x_N^{(1)}(x_N) - x^{(1)}(x_N) \right\| \leq \delta/2.$$

Dada la contradicción, concluimos que $x^{(1)}$ es nulo en X y por lo tanto los $Gen_{\mathbb{K}_c}(\{x_n\})$ es denso y numerable en X.

La numerabilidad viene de la numerabilidad de los coeficientes y las sumas finitas del generado. La densidad viene de la densidad de los coeficientes y lo que acabamos de probar.