PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DOCENTE: NIKOLA KAMBUROV
AYUDANTE: MATÍAS DÍAZ

MAT2555 - Análisis Funcional

Tarea 3 - Omar Neyra, Sebastián Sánchez

PROBLEMA 1

Sea (Ω, M, μ) un espacio de medida y suponga que $f \in L^{p_0}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ para algún $p_0 \in [1, \infty)$. Pruebe que $f \in L^p$ para todo $p \geq p_0$ y que

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p.$$

SOLUCIÓN El caso $p = p_0$ es directo, así que supongamos que la desigualdad es estricta y denotemos $p' := p - p_0 > 0$. Notando que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ tenemos que

$$\int |f|^p = \int |f|^{p_0} |f|^{p'} \leq \int |f|^{p_0} \|f\|_\infty^{p'} \leq \|f\|_\infty^{p'} \|f\|_{p_0}^{p_0} \tag{1}$$

Todas las cantidades son positivas, así que tomando raíz obtenemos que

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty^{p'/p} \|f\|_{p_0}^{p_0/p} < \infty, \tag{2}$$

pues la norma uniforme y p_0 están acotadas. Tomando límite se ve directamente que

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty \tag{3}$$

pues $p'/p = 1 - p_0/p \to 1$ y $p_0/p \to 0$ cuando $p \to \infty$.

PROBLEMA 2

Para todo $a \in \mathbb{R}$ construya una función $f_a \in L^\infty(\mathbb{R})$ con $\|f_a - f_b\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \geq 1$ cuando $a \neq b$. Demuestre que esto implica que $L^\infty(\mathbb{R})$ no es separable.

SOLUCIÓN Consideremos $f_a(x) = \sin(ax)$. Como $-1 \leq \sin \leq 1$, $f_a \in L^\infty$ para todo a. Por otro lado, $f_a \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ para

$$x \in \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + 2\pi k + \frac{\pi}{4}\right), \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Similarmente, $f_a \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando

$$x \in \frac{1}{a}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k - \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k + \frac{\pi}{4}\right), \text{ con } k \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Llamemos a los intervalos I^a y I_a de las Ecuaciones (4) y (5), respectivamente.

PROBLEMA 3

Suponga que el espacio de medida (Ω, M, μ) es σ-finito. Decimos que una sucesión $f_n \in L^p$ *converge débilmente* a $f \in L^p$ si $c(f_n) \to c(f)$ para todo $c \in (L^p)^*$. Escribimos $f_n \rightharpoonup f$ en L^p.

(a) Demuestre que $f_n \rightharpoonup f$ en L^p, $p \in [1, \infty)$, si y solo si

$$\int f_n g \to \int f g$$

para toda $g \in L^q$, con $1/p + 1/q = 1$.

(b) Pruebe que cuando $f_n \rightharpoonup f$ en L^p, $\|f\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p$

(c) (Compacidad débil de L^p) Sea $p \in (1, \infty)$ y suponga que L^q es separable. Pruebe que si $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$, entonces existe $f \in L^p$ y una sucesión $f_{n_k} \in L^p$ tal que $f_{n_k} \rightharpoonup f$.

(d) De un contraejemplo del ítem anterior cuando $p = 1$.