Espacios de Lebesgue

De aquí en adelante (Ω, F, μ) es un espacio de medida. Si se requieren más se pondrán subíndices.

Recordamos que $\mathcal{L}^p(\mu)$ es el conjunto de funciones medibles p-integrables. La función $\|\cdot\|_p$ define una seminorma y tomando $\mathcal{N}(\mu)$ como las funciones que se anulan casi en todas partes podemos definir el espacio

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/N(\mu)$$

que sí es un espacio normado con la norma $\|\cdot\|_p$. De hecho, es un espacio de Banach.

Teorema 1 (Riesz-Fischer)**.** *$L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Vamos a probar que todas las series absolutamente sumables son sumables.

<u>Caso $1 \leq p < \infty$</u>: Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n \in L^p(\mu)$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p \leq M < \infty. \tag{1}$$

Consideremos las sumas parciales puntuales $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$. Nótese que son no negativas y crecientes. Además, G_n es una suma finita de funciones medibles, así que es medible. Por otro lado, $G_n(x) \uparrow \sum_{n\geq 1} |f_n(x)| =: G(x)$ que está dominada por la serie en (1). Así, por el Teorema de Convergencia Dominada (TCD) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int G_n(x)\, d\mu = \int G(x)\, d\mu. \tag{2}$$

En particular,

$$\lim_{n\to\infty} \int G_n(x)^p\, d\mu = \int G(x)^p\, d\mu =: I. \tag{3}$$

Y por lo tanto $I \leq M^p$ pues basta tomar límite en la expresión:

$$\left(\int G_n(x)^p\right)^{1/p} = \|G_n\|_p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p \leq M < \infty.$$

Esto nos dice que $G^p \in L^1(\mu)$ y juntándolo con lo anterior concluimos que $0 \leq G^p < \infty$ μ-ctp. De esta forma, el candidato a límite de la serie es

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) & , G(x) < \infty \\ 0 & , e.o.c \end{cases} \tag{4}$$

Dado que $|F(x)| \leq G(x)$, $F \in L^p(\mu)$. Además, F es medible porque TODO. Queda ver la convergencia. Dado que $|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|$ está dominado por G

para cada x, en particular $|F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p$ está dominado por G^p. Luego, por TCD nos queda

$$\lim_{n\to\infty} \int |F(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p = 0. \tag{5}$$

$\square$

El Teorema de Representación de Riesz

Sea $1 \leq p \leq \infty$ y q su exponente conjuntado ($1/q + 1/p = 1$). Definamos

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \colon L^p(\mu) \times L^q(\mu) &\to \mathbb{K} \\ f, g &\mapsto \int f g \, d\mu. \end{aligned} \tag{6}$$

Notar que el mapa está bien definido, en efecto, aplicando Hölder:

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Esto nos permite definir un funcional lineal en $L^p(\mu)$ para cada elemento de $L^q(\mu)$ dado por:

$$l_g f \coloneqq \langle f, g \rangle.$$

La linealidad viene por la linelidad de la integral y $\|l_g\|_{(L^p(\mu))^*} \leq \|g\|_q$. Más aún, el mapa $\Phi\colon L^q(\mu) \to (L^p(\mu))^*$ dado por $g \mapsto l_g$ es lineal, acotado e inyectivo.

Teorema 2 (Representación de Riesz)**.** *Supongamos que* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *es* σ*-finito. Si* $1 \leq p < \infty$*, entonces* Φ *es un isomorfismo isométrico.*

El resto de esta sección está dedicada a probar este teorema. Algunas consecuencias:

1. $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, esto es sale del teorema al poner el espacio de medida $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ donde μ es la medida de contar.

2.

Teorema 3 (Radon-Nikodýn)**.** *Sean* μ, ν *medidas* σ*-finitas tal que* $\nu \ll \mu$*. Entonces existe una única función* h *no negativa medible tal que* $\nu(E) = \int_E h \, d\mu$*.*

Recordar que como casi todo en medida, la unicidad es μ-ctp al igual que lo es la no negatividad. Por otro lado, nótese que el teorema es válido para funciones a valores reales. No obstante, considerando la parte real e imaginaria se puede extender a valores complejos. Por último, se usa la notación $h = [\frac{d\nu}{d\mu}]$ y se dice que h es la derivada de Radon-Nikodýn.

Demostración. La demostración se divide en dos pasos. En primer lugar lo probaremos para medidas finitas, y luego lo extendemos para medidas σ-finitas. El argumento de usar la Representación de Riesz para espacios de Hilbert se atribuye a Von Neumann.

Paso I: Supongamos que μ y ν son finitas. Consideremos la medida $\lambda = \mu + \nu$. Notar que $\lambda(E) = 0 \iff \mu(E) = 0$ pues $\nu \ll \mu$. Consideremos el mapa

$$\begin{aligned} l \colon L^2(\lambda) &\mapsto \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int f \, d\mu. \end{aligned}$$

El mapa es lineal por la linealidad de la integral y es acotado porque μ es finita .i.e. $\|l\| \leq \mu(\Omega)^{1/2}$. Así, por el Teorema de Representación de Riesz para espacios de Hilbert, existe un único $g \in L^2(\lambda)$ tal que

$$\int f \, d\mu = \int fg \, d\lambda \quad \forall f \in L^2(\lambda).$$

Como las medidas son finitas, se sigue que

$$\int f(1-g) \, d\mu = \int fg \, d\nu \quad \forall f \in L^2(\lambda). \tag{7}$$

Notar que $0 < g \leq 1$ λ-ctp (que es lo mismo que μ-ctp). En efecto,

$$\begin{aligned} \mu(\{g \leq 0\}) &\leq \int \mathbb{1}\left(g \leq 0\right) \, d\mu \\ &\leq \int \mathbb{1}\left(g \leq 0\right)(1-g) \, d\mu \\ &\overset{(7)}{=} \int \mathbb{1}\left(g \leq 0\right) g d\nu \leq 0. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$0 > \int \mathbb{1}\left(1-g < 0\right)(1-g) \, d\mu = \int \mathbb{1}\left(1-g < 0\right) g \, d\nu \geq 0.$$

Así que podemos tomar un representa que esté estrictamente entre $0 < g \leq 1$ y podemos definir $h = \frac{1-g}{g}$. Sea E un conjunto medible y definamos la sucesión de funciones $f_n \coloneqq \mathbb{1}\left(E \cap \{g \geq 1/n\}\right) \frac{1}{g}$. Como la medida es finita, $f_n \in L^2(\lambda)$ y aplicando la Ecuación (7) nos queda

$$\int f_n(1-g) \, d\mu = \int f_n g \, d\nu,$$

es decir,

$$\int_{E \cap \{g \geq 1/n\}} \frac{1-g}{g} \, d\mu = \int_{E \cap \{g \geq 1/n\}} d\nu.$$

Dado que $E \cap \{g \geq 1/n\} \uparrow E$, se sigue el resultado.

Paso 2: Supogamos ahora que μ y ν son σ-finitas. Sean Ω_n tal que $\Omega_n \uparrow \Omega$ y cada uno tiene medida finita. Por lo anterior, para cada n existe una función h_n tal que $\nu(E) = \int h_n \mathbb{1}(E)\, d\mu$ con $E \in \mathcal{F} \cap \Omega_n =: S_n$. Además, $\nu(E) = \int h_{n+1} \mathbb{1}(E)\, d\mu$ pues $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$. Se sigue que $h_{n+1}|_{\Omega_n} = h_n$ (igualdad ctp). Extendamos cada h_n por cero fuera de Ω_n. Nótese que h_n sigue siendo S_n medible. Definamos $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Es claro que $h_n \uparrow h$ y para todo E $\mathcal{F}$ medible se tiene que $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu(\Omega_n \cap E)$. Usando TCM concluimos que

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap\Omega_n} h_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E\cap\Omega} h\, d\mu = \int_E h\, d\mu.$$

$\square$

Definición 1 (Operador Positivo)**.** Decimos que $t \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ es positivo si $t(f) \geq 0$ para todo $f \in L^p_{\mathbb{R}}$.

Teorema 4 (Descomposición de Funcionales)**.** *Sea $t \in (L^p_{\mathbb{R}})^*$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $t = t_+ - t_-$ con $t_\pm$ un funcional positivo.*

Paso 1: Definamos t_+ para funciones positivas $f \in L^p_{\mathbb{R}}$ como

$$t_+ := \sup_{0\leq g\leq f} t(g).$$

Vamos a probar que t_+ es lineal. Observemos que si $0 \leq g \leq f$ entonces $t(g) \leq t(f)$. Sean $f_1, f_2 \in L^p_{\mathbb{R}}$. Sean $0 \leq g_i \leq f_i$. Luego, $t(g_i) \leq t(f_i)$ y por lo tanto $\sup_{0\leq g_i\leq f_i} t(g_i) \leq t(f_i)$. Sumando ambos términos y tomando supremo sobre los $0 \leq h \leq f_1 + f_2$ nos queda:

$$t_+(f_1) + t_+(f_2) \leq t_+(f_1 + f_2).$$