MAT 2555/255I ANÁLISIS FUNCIONAL
TAREA 4
PLAZO: EL 1 DE DICIEMBRE

Profesor:	Nikola Kamburov	`nikamburov@mat.uc.cl`
Ayudante:	Matías Díaz	`midiaz8@uc.cl`

El plazo para entregar Tarea 4 es el **1 de diciembre, viernes, antes del inicio de la ayudantía.** Note que se corregirá sólo una selección de los ejercicios enunciados.

Reading: Brezis, "Functional Analysis, Sobolev Spaces and PDE," 6.1–6.4, más apuntes de clase.

Pregunta 1. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{K}$. Considere el operador $T \in \mathcal{B}(l^p, l^p)$, definido por

$$Tx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2 \ldots,), \qquad x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p.$$

Demuestre que T es compacto si y solo si $\lambda_n \to 0$.

Pregunta 2. Sea $X = C([0,1])$ y defina el operador $T : X \to X$ por

$$Tx(t) := \int_0^t x(s)\, ds.$$

(a) Demuestre que T es compacto.

(b) Determine $\sigma_p(T)$ y $\sigma(T)$.

(c) Demuestre que la ecuación $x - Tx = f$ tiene una única solución para cualquier $f \in C([0,1])$. Encuentre una fórmula para el operador $(I-T)^{-1}$.

Pregunta 3. Sea H un espacio de Hilbert complejo.

(a) Demuestre que si $U : H \to H$ es un operador unitario, entonces $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

(b) Sea $T \in \mathcal{B}(H,H)$ con adjunto T^*. Pruebe que $\lambda \in \sigma(T)$ si y solo si su conjugado $\bar{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

Pregunta 4. Sea H un espacio de Hilbert complejo.

(a) Suponga que A_1 y A_2 son dos operadores autoadjuntos compactos que conmutan: $A_1A_2 = A_2A_1$. Demuestre que existe una base ortonormal de H que consta de autovectores tanto para A_1 como para A_2.

(b) (*Descomposición espectral de operadores normales compactos*) Un operador $T \in \mathcal{B}(H,H)$ se llama *normal* si $TT^* = T^*T$. Demuestre que si T es normal y compacto, entonces H posee una base ortonormal de autovectores de T. (*Sugerencia*: Escriba $T = A_1 + iA_2$, donde A_1, A_2 son autoadjuntos, compactos y conmutan; luego, utilice a)).