Operadores Compactos y Teoría Espectral.

Denotamos por B^X a la bola cerrada de un espacio normado X.

Definición 1 (Operador Compacto)**.** Sean X e Y espacios de Banach. Decimos que $T \in B(X,Y)$ es compacto si $\overline{T(B^X)}$ es compacto en Y. Denotamos por $B_c(X,Y)$ a la colección de operadores compactos.

Proposición 1. *$B_c(X,Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Basta probar que es cerrado en $B(X,Y)$. Sean $(T_n) \in B_c(X,Y)$ tal que $T_n \to T \in B(X,Y)$. Debemos probar que $T \in B_c(X,Y)$. Recordar que en espacios métricos, tenemos la equivalencia

$$\text{compacidad} \iff \text{secuencialmente compacto.}$$

Por lo tanto, probaremos que toda sucesión en $\overline{T(B^X))}$ tiene una subsucesión convergente.

Sea $\epsilon > 0$. Por la convergencia $T_n \to T$, existe $N > 0$ tal que

$$\|T - T_N\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, por la compacidad de T_N, existen $y_1, \ldots, y_k$ tal que

$$\overline{T_N(B^X)} = \bigcup B(y_i, \epsilon/2).$$

Se sigue que $T(B^X) \subset \bigcup B(y_i, \epsilon)$. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en B^X. Luego, una subsucesión que está contenida en alguna de las finitas bolas. Vale decir, existe $z_1 \in \{y_i\}$ tal que

$$T(x_{n,1}) \subset B(z_1, \epsilon).$$

De esta subsucesión podemos tomar otra tal que $T(x_{n,2}) \subset B(z_2, \epsilon/2)$, donde z_2 sale de cubrir la bola $B(z_1, \epsilon)$ y elegir alguna que tenga infinitos miembros de la sucesión. Inductivamente, tendremos sucesiones

$$T(x_{n,k}) \subset B(z_k, \epsilon/k).$$

y tomando $\bar{x}_n = x_{n,n}$ concluimos que $T(\bar{x}_n)$ es convergente y por lo tanto T es secuencialmente compacto. $\square$

Definición 2 (Operador de Rango Finito)**.** Un operador $T\colon X \to Y$ se dice de rango finito si $\operatorname{rank} T$ tiene dimensión finita.

Proposición 2. *Todo operador de rango finito es compacto.*

Demostración. Sea T de rango finito y $n = \dim \operatorname{rank} T$. Luego, $\operatorname{rank} T \cong \mathbb{K}^n$ bajo el isomorfismo

$$\phi\colon \mathbb{K}^n \to \operatorname{rank} T$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \sum a_i e_i$$

donde $(e_i)_{i=1}^n$ es base de $\operatorname{rank} T$. Luego, ϕ^{-1} es isomorfismo continuo y por lo tanto $\phi^{-1}(\overline{T(B^X)})$ es cerrada y acotada en $\mathbb{K}^n$. Por Heine-Borel $\phi^{-1}(\overline{T(B^X)})$ es compacto y aplicando ϕ tenemos que $\overline{T(B^X)}$ es compacto. $\square$

Teorema 1. *Sea X Banach y Y Hilbert. Si $T \in B_c(X, Y)$, entonces existe una sucesión $(T_n)_n$ de operadores de rango finito tal que $T_n \to T$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por compacidad, existen $y_1, \ldots, y_k$ tal que $\overline{T(B^X)} \subset \bigcup B(y_i, \epsilon)$. Definamos $F \coloneqq Gen(y_1, \ldots, y_k)$ que es cerrado en Y. Luego, existe la proyección ortogonal a F, $P \colon Y \to Y$. Definamos el mapa $T_\epsilon = P \circ T$, que es de rango finito y por lo tanto compacto. Luego, si $x \in B^X$ tiene imagen $Tx \in B(y_i, \epsilon)$, $\|Tx - y_i\| \leq \epsilon$, se tiene que

$$\|P(Tx) - P(y_i)\| \leq \|Tx - y_i\| \leq \epsilon.$$

Así, para cualquier $x \in B^X$, se cumple que

$$\|Tx - T_\epsilon x\| \leq \|Tx - y_j\| + \|y_j - T_\epsilon x\| \leq 2\epsilon$$

donde y_j es tal que $Tx \in B(y_j, \epsilon)$. $\square$

Ejemplo: Operadores de Hilbert-Schmidt: Consideremos dos espacios medibles $X_i = (\Omega_i, S_i, \mu_i)$ y $K(x, y)$ en $L^2_{\mathbb{R}}(X_1 \times X_2)$. Suponga que $L^2(X_i)$ es separable. Mostraremos que el mapa

$$T_K f(x) \coloneqq \int_{\Omega_2} K(x_1, x_2) f(x_2)\, d\mu_2(x_2),$$

donde $f \in L^2(X_2)$ es compacto. En primer lugar, veamos que es un operador lineal acotado de $L^2(X_2) \to L^2(X_1)$. La linealidad sale de la linealidad de la integral. Por otro lado

$$\begin{aligned}
|T_K f(x)|^2 &\leq \int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)||f(x_2)|\, d\mu_2(x_2) \\
&\leq \int_{\Omega_2} |K(x_1, x_2)|^2\, d\mu_2(x_2) \int_{\Omega_2} |f(x_2)|^2\, d\mu_2(x_2) \\
&\leq \|K\|^2_{L^2(X_1 \times X_2)} \|f\|_{L^2(X_2)} \leq \infty.
\end{aligned}$$

Así que $T_K f \in L^2(X_1)$ y T_K es un operador acotado. Ahora veamos que es compacto. Sea $(e^i_n)_n$ una base ortonormal de $L^2(X_i)$ y definamos $e_{n,m}(x_1, x_2) = e^1_n(x_1) e^2_n(x_2)$. Afirmamos que $e_{n,m}$ es una base ortonormal de $L^2(X_1 \times X_2)$.

Proposición 3. *$S \circ T$ es compacto si $S \colon Y \to Z$ es continuo y $T \colon X \to Y$ es compacto o viceversa.*

Demostración. Supongamos que S es continuo y T es compacto. Debemos probar que $S \circ T$ es compacto. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en B^X. Luego, existe una sucesión x_{n_k} tal que $Tx_{n_k} \to y$. Por continuidad de S se tiene que $S(Tx_{n_k}) \to S(y)$.

Supongamos que S es compacto y T es continuo. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en B^X. Luego, Tx_n es una sucesión en Y y $y_n \coloneqq Tx_n/\|T\|$ es una sucesión en B^Y. Como S es compacto, existe una subsucesión y_{n_k} tal que $Sy_{n_k}/ \to z$. Es decir, $S(Tx_{n_k}) \to z\|T\|$, donde $Tx_{n_k} = y_{n_k}\|T\|$. $\square$

Teorema 2 (Schauder)**.**

$$T \in B_c(X,Y) \iff T^* \in B_c(Y^*, X^*).$$

La teoría de Riesz-Fredholm

Teorema 3 (Alternativa de Fredholm)**.** *Sea X Banach y $T \in B_c(X,X)$. Entonces el operador $I - T\colon X \to X$ satisface:*

1. $\ker(I-T)$ *tiene dimensión finita.*
2. $\operatorname{rank}(I-T)$ *es cerrado en X y* $\operatorname{rank}(I-T) = \ker(I-T^*)^\perp$.
3. $\ker(I-T) = (0) \iff \operatorname{rank}(I-T) = X$.
4. $\dim\ker(I-T) = \dim\ker(I-T^*)$.

Antes de probar el teorema, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1 (Riesz)**.** *Si X es un espacio normado y $F \subset X$ es cerrado y propio, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $u \in X$ unitario tal que $d(u,F) \geq 1-\epsilon$.*

Demostración. Sea $v \in X \setminus F$. Luego, $d(v,F) > 0$ y por lo tanto existe $v_0 \in F$ tal que $d(v,F) \leq \|v - v_0\| \leq \frac{d(v,F)}{1-\epsilon}$. Sea $u \coloneqq \frac{v-v_0}{\|v-v_0\|}$. Luego,

$$\|u-f\| = \frac{1}{\|v-v_0\|}\|v - \underbrace{(v_0 + f\|v-v_0\|)}_{\in F}\| \geq 1-\epsilon$$

$\square$