Agradecimientos: Pablo Navarro.

Problema 1

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demuestre que el sistema lineal

$$\dot{x} = (\sin(t)A + e^{-t}B)x$$

es estable, es decir, que todas sus soluciones permanecen acotadas para $t \geq 0$.

Consideremos el sistema no perturbado $\dot{x} = \sin(t)Ax$. Notemos que es periódico con $T = 2\pi$ y tiene coeficientes continuos. Sabemos que las soluciones a este sistema son de la forma:

$$x(t) = \Pi(t, t_0)K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Donde $\Pi(t, t_0)$ denota al propagador. Por el teorema de Floquet se tiene:

$$\Pi(t, t_0) = P(t, t_0) \exp\left((t - t_0)Q(t_0)\right)$$

y sabemos que $\|P(t, t_0)\| \leq C_2$ para algún $C_2 \in \mathbb{R}$.

La misión entonces es acotar $\|\exp\left((t - t_0)Q(t_0)\right)\|$ pues en ese caso tenemos que

$$\int_0^\infty \left\|e^{-t}B\right\| dt \leq \int_0^\infty e^{-t}\|B\| dt < \infty$$

y por teorema se concluiría que el sistema es estable.

Para acotar $\|\exp\left((t - t_0)Q(t_0)\right)\|$ necesitamos caracterizarla un poco más. Dado que $\sin(t)A\sin(t_0)A = \sin(t_0)A\sin(t)A$, el propagador de nuestro sistema está dado por la fórmula

$$\Pi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \sin(s)Ads\right) = \exp\left((\cos(t_0) - \cos(t))A\right) = e^{-\cos(t)A}e^{\cos(t_0)A}$$

y por lo tanto

$$\|\Pi(t, t_0)\| \leq e^{2\|A\|} < \infty$$

así que comparando con la forma que nos da Floquet deducimos que

$$\left\|e^{(t-t_0)Q(t_0)}\right\| < \infty.$$

Problema 2

Considere el sistema $\dot{x} = (A + B(t))x$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^2} & \epsilon\cos(t) \\ \epsilon\sin(t) & -1/(t^2+1) \end{pmatrix} \quad , \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Demuestre que existe $\epsilon_0 > 0$, tal que si $|\epsilon| < \epsilon_0$, todas las soluciones del sistema $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Consideremos el sistema no pertubado $\dot{x} = Ax$. El propagador asociado este sistema es

$$\Pi_A(t, t_0) = \exp\left((t - t_0)A\right).$$

Notar que los valores propios de A son $z_\pm = -3 \pm \sqrt{7}$ ambos reales negativos, así que las soluciones a este sistema son asintóticamente estables.

Consideremos el sistema perturbado

$$\dot{x} = Ax + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t^2} & 0 \\ 0 & -1/(t^2+1) \end{pmatrix}}_{D(t)}.$$

Como $\|D(t)\| \xrightarrow{t\to\infty} 0$ y A es AE (y constante), el sistema entero es AE. Además, existen constantes $C, \alpha > 0$ tal que

$$\Pi_{A+D}(t,s) \leq Ce^{-\alpha(t-s)}.$$

Finalmente, llamemos $H(t) = B(t) - D(t)$. Sabemos que $\|H(t)\| < |\epsilon|$. Luego, para $|\epsilon| < \alpha/C =: \epsilon_0$ se tiene que

$$\Pi_{A+B}(t,s) \leq Ke^{-(\alpha-|\epsilon|C)(t-s)} \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Por lo tanto el sistema es AE.

Problema 3

Suponga que — Teschl. Problem 3.44

$$\int_0^\infty \|A(t)\| dt < \infty.$$

Muestre que todas las soluciones de $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ convergen a un límite, es decir, para $x(t)$ solución se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty.$$

(*Hint:* Muestre que todas las soluciones están acotadas y use la ecuación integral correspondiente.)

Sabemos que las soluciones a este sistema son de la forma

$$x(t) = \Pi(t,t_0)x_0 \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Tomando norma y usando la hipótesis vemos que las soluciones son acotadas, en efecto:

$$|x(t)| \leq \|\Pi(t,t_0)\||x_0| \leq e^{\int_{t_0}^t \|A(s)\|ds}|x_0| < \infty.$$

LLamemos M a una cota superior.

Para ver la convergencia, escribamos la ecuación integral,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s)ds,$$

y notemos que para t suficientemenete grande y $s > t$ se tiene que:

$$|x(s) - x(t)| = \left|\int_t^s A(r)x(r)dr\right| \leq M\int_t^s \|A(r)\|dr.$$

Dado que $\int_0^\infty \|A\| < \infty$, la 'cola' debe ir a cero, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un T tal que

$$\int_T^\infty \|A(r)\|dr < \epsilon/M.$$

Luego, si $t > T$ se sigue que:

$$|x(s) - x(t)| \leq M\int_t^s \|A(r)\|dr \leq M\int_T^\infty \|A(r)\|dr < \epsilon$$

y por lo tanto la solución $x(t)$ es convergente.

Problema 4

(a) Sea H un espacio de producto interno y $\{u_j\}_{j=0}^\infty \subset H$ un conjunto ortonormal (numerable). Para $f \in H$, muestre que

$$f_n = \sum_{j=0}^n \langle u_j, f\rangle u_j$$

es una secuencia de Cauchy.

(b) Muestre que si A es acotado, entonces todo valor propio α de A satisface $|\alpha| \leq \|A\|$.

(a) Por Pitágoras y la desigualdad de Bessel:

$$\|f_n\|^2 = \sum_{j=0}^{n} |\langle u_j, f\rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Así que la sucesión $\|f_n\|^2$ es convergente, pues es creciente y acotada. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} |\langle u_j, f\rangle|^2 < \infty$$

y para que la serie converja, es necesario que la cola se vaya a cero. Así para $\epsilon > 0$ existe un N tal que

$$\sum_{j=N+1}^{M} |\langle u_j, f\rangle|^2 < \varepsilon, \quad \forall M \geq N$$

es decir,

$$\|f_M - f_N\|^2 < \varepsilon$$

obteniéndose lo pedido.

(b) Sea α un valor propio de A, tomemos f un vector propio asociado de norma 1. Luego

$$\|A\| = \sup_{\|g\|=1} \|Ag\| \geq \|Af\| = \|\alpha f\| = |\alpha|.$$

Donde en la primera igualdad usamos que A es acotado.

Problema 5

Sea H un espacio de producto interno. Muestre que el conjunto de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto $\mathcal{C}_c^\infty((a,b),\mathbb{C})$ es denso en H.

(*Hint:* Reemplace P(x) en la demostración del lema 5.8 por $\int_0^x \exp((y(y-1))^{-1})dy / \int_0^1 \exp((y(y-1))^{-1})dy$)

Problema 6

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Considere el PVF

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u' = f(x) & , x \in (0,1) \\ u + \beta u' = 0 & , x = 0, 1 \end{cases},$$

donde $f \in \mathcal{C}[0,1]$.

(a) Pruebe que existe una única solución del problema si y solo si $\alpha\beta \neq -1$.

(b) Para $\alpha\beta \neq 1$, determine la *función de Green* correspondiente, i.e. la función $G\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier $f \in \mathcal{C}[0,1]$ la solución del problema es

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t) dt.$$

1. Transformemos el problema en uno de Sturm-Liouville. Multiplicando por el factor integrante $e^{-\alpha x}$ obtenemos que la EDO es equivalente a resolver el sistema:

$$Lu = (e^{-\alpha x} u')' = e^{-\alpha x} f(x)$$

con dominio las condiciones de frontera $B_0 u = B_1 u = u + \beta u' = 0$.

Para que tenga solución única, $z = 0$ no debe ser valor propio, es decir $Lu \neq 0$. Veamos cuándo se cumple esto.

$$Lu = 0 \iff -u'' + \alpha u' = 0 \iff u(x) = c_1 + c_2 e^{-\alpha x}.$$

Mirando las condiciones de frontera, tenemos que

$$\begin{cases} x=0 & c_1+c_2-\alpha\beta c_2=0 \\ x=1 & c_1+c_2e^{-\alpha}-\alpha\beta c_2 e^{-\alpha}=0 \end{cases}.$$

Despejando $1-\alpha\beta$ de la primera ecuación y poniéndola en la segunda llegamos que $c_1(1-e^{-\alpha})=0$. Dado que $\alpha>0$, $c_1=0$, se sigue que $c_2(1-\alpha\beta)=0$, así que para $c_2=0$ o $\alpha\beta=1$ se cumple la igualdad.

Concluimos entonces, que $\alpha\beta\neq 1$ para que $z=0$ no sea valor propio. En tal caso la solución de $Lu=e^{-\alpha x}f(x)$ es única.

2. Para $\alpha\beta\neq 1$, el operador L es invertible y está dado por la fórmula:

$$u(x)=\frac{1}{W}\left(u^1(x)\int_0^x u^0(t)e^{-\alpha t}f(t)dt+u^0(x)\int_x^1 u^1(t)e^{-\alpha t}f(t)dt\right)=\int_0^1 G(x,t)f(t)dt$$

donde $-WG(x,t)$ vale $u^1(x)u^0(t)$ para $x\leq t$ y $u^0(x)u^1(t)$ para $x\geq t$.

Tomemos $u^0(x)=-(1-\alpha\beta)+e^{-\alpha x}$ y $u^1(x)=-(1-\alpha\beta)+e^{\alpha(1-x)}$. Calculemos W.

$$W=\begin{vmatrix} -(1-\alpha\beta)+e^{\alpha(1-x)} & -(1-\alpha\beta)+e^{-\alpha x} \\ -\alpha e^{\alpha(1-2x)} & -\alpha e^{-2\alpha x} \end{vmatrix} \overset{x=0}{\equiv} \alpha(1-e^{\alpha}).$$

De esta forma,

$$G(x,t)=-\frac{1}{\alpha(1-e^{\alpha})}\begin{cases}\left(\alpha\beta\alpha+e^{(\alpha t)}-1\right)\left(\alpha\beta\alpha+e^{(-\alpha(x-1))}-1\right) & x\leq t \\ \left(\alpha\beta+e^{(\alpha x)}-1\right)\left(\alpha\beta+e^{(-\alpha(t-1))}-1\right) & x\geq t\end{cases}.$$

Problema 7

Encuentre los valores propios y las funciones propias del operador de Sturm-Liouville definido por

$$Ly=-y'',\quad \operatorname{dom} L := \left\{u\in\mathcal{C}^2[0,1]\colon u(0)=u'(1)=0\right\}.$$

Tenemos que resolver la ecuación $-y''-\lambda y=0$. Las soluciones a este sistema están determinadas por la ecuación característica $-z^2-\lambda=0$. Veamos los distintos casos:

- Caso $\lambda=0$: y es una función lineal y las condiciones de frontera nos dicen que $y\equiv 0$.
- Caso $\lambda<0$: $z=\pm\sqrt{|\lambda|}$ y las soluciones son de la forma $y(x)=c_1e^{xz_+}+c_2e^{xz_-}$. Aplicando las condiciones de frontera se concluye que $y\equiv 0$.
- Caso $\lambda>0$: $z=\pm\sqrt{\lambda}i$ y las soluciones son de la forma $y(x)=c_1\cos(x\sqrt{\lambda})+c_2\sin(x\sqrt{\lambda})$. Aplicando las condiciones de frontera, nos da que

$$\begin{cases}0=y(0)=c_1\cos(0)+c_2\sin(0) & \Longrightarrow c_1=0 \\ 0=y'(1)=c_2\cos(\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda} & \Longrightarrow c_2=0\vee\sqrt{\lambda}=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}$$

donde $k\in\mathbb{N}$. Luego, los valores propios son $\lambda_k=(\pi/2+k\pi)^2$ y una función propia asociada es de la forma $y_k(x)=c_2\sin(\sqrt{\lambda_k}x)$

Problema 8

1. Demuestre la *Desigualdad de Sobolev*

$$\int_0^\pi |u(x)|^2dx\leq\int_0^\pi |u'(x)|^2dx$$

Para todo $u\in\mathcal{C}^1[0,\pi]$ con $u(0)=u(\pi)=0$.

Sugerencia: Utilice el Principio de Rayleigh-Ritz para el operador $L_0=-d^2/dx^2$ en $[0,\pi]$ con condiciones homogéneas de Dirichlet.

2. Suponga que $q\in\mathcal{C}[0,\pi]$ satisface $\min_{[0,\pi]} q>-1$. Pruebe que los valores propios del operador de Sturm-

Liouville
$$Ly = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y,$$
con dominio $\mathcal{D}(L) := \{u \in \mathcal{C}^2[0,\pi], u(0) = u(\pi) = 0\}$ son positivos.

1. En primer lugar notemos que
$$\langle u, u\rangle^2 = \int_0^\pi |u(x)|^2 dx \text{ y } \langle u, -u''\rangle^2 = \int_0^\pi |u'(x)|^2 dx.$$
Así que debemos probar que $\langle u, u\rangle \leq \langle u, -u''\rangle$.

   Consideremos el operador $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ con dominio los u tal que $u(0) = u(\pi) = 0$. Estudiemos sus valores propios, es decir, la ecuación $-y'' - \lambda y = 0$ cuyas soluciones están determinadas por las raíces de la ecuación $-z^2 - \lambda = 0$.

   - Caso $\lambda = 0$: Las soluciones son lineales y las condiciones de frontera hacen que la única que cumpla sea la función nula.
   - Caso $\lambda < 0$: Las soluciones de la ecuación son $z_\pm = \pm\sqrt{|\lambda|}$ y por lo tanto y es de la forma $y(x) = c_1 e^{xz_-} + c_2 e^{xz_+}$. Aplicando las condiciones de frontera:
$$\begin{cases} x = 0 & , 0 = y(0) = c_1 + c_2 \\ x = \pi & , 0 = y(\pi) = c_1 e^{\pi z_-} + c_2 e^{\pi z_+} \end{cases}.$$
Vemos que no hay soluciones no nulas $(c_1(e^{-\pi\sqrt{\lambda}} - e^{\pi\sqrt{\lambda}}) = 0 \iff c_1 = 0)$.
   - Caso $\lambda > 0$: $z_\pm = \pm\sqrt{\lambda} i$ y las soluciones son de la forma $y(x) = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{\lambda})$. Aplicando las condiciones de frontera:
$$\begin{cases} x = 0 & , 0 = y(0) = c_1 \\ x = \pi & , 0 = y(\pi) = c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \end{cases}.$$
Aquí $\lambda_k = k^2$, y las funciones propias asociadas a λ_k son de la forma $y_k(x) = c_{2,k} \sin(xk)$

   Por el principio de Rayleigh se cumple que
$$1 = \inf_{u \in \mathcal{D}(L)} \frac{\langle u, Lu\rangle}{\langle u, u\rangle} \implies \langle u, u\rangle \leq \langle u, Lu\rangle.$$
Que es lo que queríamos probar.

2. Sea $f \in \mathcal{D}(L)$ de norma 1. Luego,
$$\begin{aligned}
\langle f, Lf\rangle &= \int_0^\pi \overline{f(x)}\left(-f''(x) + q(x)f(x)\right) dx \\
&= \underbrace{-\overline{f(x)}f'(x)\Big|_0^\pi}_{0} + \int_0^\pi \overline{f'(x)}f'(x)dx + \int_0^\pi \overline{f(x)}f(x)q(x)dx \\
&= \int_0^\pi |f'(x)|^2 dx + \int_0^\pi |f(x)|^2 q(x)dx \\
&\overset{1.}{\geq} \int_0^\pi |f(x)|^2 (1 + q(x))dx \\
&= 1 + \min_{x \in [0,\pi]} q(x) > 0
\end{aligned}$$
Por el principio de Rayleigh los valores propios son positivos.