Agradecimientos: Camila Guajardo Vásquez, Pablo Navarro, Felipe Gonzáles, Claudio Melendez.

Problema 1

G. Teschl - Problem 6.8

Sea $\phi(t)$ la solución a un sistema autónomo de primer orden. Suponga que $\lim_{t\to\infty}\phi(t) = x \in M$. Muestre que x es un punto fijo y que $\lim_{t\to\infty}\dot{\phi}(t) = 0$.

Dado que $\phi(t)$ es solución, sabemos que $\dot{\phi}(t) = f(\phi(t))$. Tomando límite y usando que f es continua, obtenemos que

$$\lim_{t\to\infty}\dot{\phi}(t) = \lim_{t\to\infty} f(\phi(t)) = f(x).$$

Así que si x es un punto fijo se concluye que $\lim_{t\to\infty}\dot{\phi}(t) = 0$. Supongamos que x no es un punto fijo, entonces, $\lim_{t\to\infty}\dot{\phi}(t) \neq 0$. En particular, existe un $\epsilon > 0$ y $T > 0$ tal que para todo $t \geq T$ se tiene que $\left|\dot{\phi}(t)\right| > \epsilon$. Por otro lado, $\phi(t) \xrightarrow{t\to\infty} x$, así que existe $S > 0$ tal que para todo $t, s > S$ se cumple que $|\phi(t) - \phi(s)| < \epsilon$. Luego, por TVM y para T, S suficientemente grandes tenemos que

$$\epsilon > |\phi(t) - \phi(s)| = \left|\dot{\phi}(c)\right| |t - s| \geq \epsilon |t - s|.$$

El lado derecho diverge y está acotado. Contradicción. Concluimos entonces que x debe ser un punto fijo.

Problema 2

G. Teschl - Problem 6.10

Un punto $x \in M$ se dice **no errante** si en toda vecindad U de x existe una sucesión $t_n \to \infty$ de tiempos positivos tal que $\Phi_{t_n}(U) \cap U \neq \varnothing$ para todo t_n. El conjunto de los puntos no errantes se denota por $\Omega(f)$.

(i) $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado e invariante. (*hint:* Muestre que es el complemento de un abierto)

(ii) $\Omega(f)$ contiene todas las órbitas periódicas (incluyendo los puntos fijos).

(iii) $\omega_+(x) \subseteq \Omega(f)$ para todo $x \in M$.

Encuentre el conjunto de los puntos no errantes $\Omega(f)$ para el sistema $f(x, y) = (y, -x)$.

(i) Supongamos que $x \notin \Omega(f)$. Probaremos que existe una vecindad V de x tal que $V \cap \Omega(f) = \varnothing$.

Como $x \notin \Omega(f)$, existe una vecindad V de x tal que para toda secuencia de tiempos $t_n \to \infty$ se cumple que $\Phi_{t_n}(V) \cap V = \varnothing$. Supongamos que $y \in V \cap \Omega(f)$, entonces existe una vecindad $U \subset V \cap \Omega(f)$ y una secuencia de tiempos $s_n \to \infty$ tal que $\Phi_{s_n}(U) \cap U \neq \varnothing$. En particular, $\varnothing \neq \Phi_{s_n}(V \cap U) \cap U \subset \Phi_{s_n}(V) \cap V = \varnothing$. Contradicción. Luego, $V \cap \Omega(f) = \varnothing$ y se concluye que $\Omega(f)$ es cerrado.

Para ver que es invariante, consideremos $y = \Phi_s(x) \in \gamma(x)$ y V una vecindad de y. Luego, $U = \Phi_{s-s=0}(V)$ es una vecindad de x. Dado que $x \in \Omega(f)$ entonces existe una sucesión de tiempos $t_n \to \infty$ tal que $\Phi_{t_n}(U) \cap U \neq \varnothing$. Aplicando Φ_s tenemos que $\Phi_s(\Phi_{t_n}(U) \cap U) \neq \varnothing$ y en particular $\varnothing \neq \Phi_{s+t_n}(U) \cap \Phi_s(U) = \Phi_{t_n}(V) \cap V$. Se concluye entonces que $y \in \Omega(f)$.

(ii) Supongamos que x es un punto con órbita periódica. Luego, como $\Phi\colon I_x \times \{x\} \to M$ es homeomorfismo, las imágenes de abiertos son abiertos. En particular, para toda vecindad U de x se tiene que $\Phi_{nT(x)}(U) \cap U \neq \varnothing$ para todo $n \geq 0$. Tomando $t_n = nT \to \infty$ se concluye que $\gamma(x) \subset \Omega(f)$.

Para los puntos fijos, cualquier sucesión de tiempos $t_n \to \infty$ sirve.

(iii) Sea $y \in \omega_+(x)$. Sea $y \in V$ una vecindad de y. Luego, para toda sucesión $t_n \to \infty$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\Phi_{t_n}(x) \in V$ para todo $n \geq N$. En particular, $\Phi_{t_n}(V) \cap V \neq \varnothing$ para todo $n \geq N$, así que $y \in \Omega(f)$.

Consideremos ahora el sistema dado por $(\dot{x}, \dot{y}) = (y, -x)$. El único punto fijo es el $(0, 0)$. Además, si $\dot{x} = 0$ entonces $y = x = 0$ y si $\dot{y} = 0$ entonces $y = x = 0$. Por lo tanto, no hay curvas que sean completamente verticales ni horizontales. Consideremos el sistema matricial asociado

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\pm i$, así que las soluciones son periódicas. Se concluye entonces que $\Omega(f) = \mathbb{R}^2$.

Problema 3

G. Teschl - Problem 6.16

Considere el sistema

$$\dot{x} = x - y - x(x^2+y^2) + \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\dot{y} = x + y - y(x^2+y^2) - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Muestre que $(1,0)$ no es estable aunque satisface

$$\lim_{t\to\infty} |\phi(t,x) - (1,0)| = 0 \quad \forall x \in U((1,0)).$$

Hint: Muestre que el sistema en coordenadas polares está dado por $\dot{r} = r(1-r^2)$, $\dot{\theta} = 2\sin^2(\theta/2)$.

Sea $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$. Luego,

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \dot{r}r = x\dot{x} + y\dot{y} \implies \dot{r}r = r^3 - r^4.$$

Por otro lado,

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} \Rightarrow \dot{\theta}\sec^2(\theta) = \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \Rightarrow \dot{\theta} = 1 - \cos(\theta) = 2\sin^2(\theta/2).$$

En resumen, el sistema equivalente es

$$\dot{r} = r(1-r^2) \qquad \dot{\theta} = 2\sin^2(\theta/2).$$

Evaluando en $1,0)$, vemos que es un punto fijo. Analizando las nullclinas (en las zonas de interés) tenemos que

$$\dot{r} = 0 \iff r = 0 \vee r = 1 \qquad\qquad \dot{\theta} = 0 \iff \theta = 4\pi \vee \theta = 0.$$

Miremos la vecindad del punto $(1,0)$. Si $r < 1$, $\dot{r} > 0$ así que las soluciones se alejan del origen. Lo contrario pasa para $r > 1$, aquí $\dot{r} < 0$ y las soluciones se acercan al origen. En $r = 1$ la solución se mantiene a una distancia constante. Por otro lado, $\dot{\theta} > 0$ así que las soluciones giran de manera antihoraria. La intuición es que las soluciones no son estables, pues se escapan de cualquier vecindad de $(1,0)$ pero órbitan asintóticamente a la órbita circular.

Para probar la intuición, usaremos el teorema de Poincaré-Bendixson. Consideremos la región $1 \leq r \leq 1+\epsilon$ para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, dado que $\dot{r} < 0$ las soluciones se mantienen encerradas en el anillo (no pueden pasar por $r = 1$ pues las trayectorias serían perpendiculares con el campo vectorial) y no hay puntos fijos en el interior de la región, se concluye por el teorema que las soluciones tienden a una órbita cerrada. De esta forma, las soluciones dan vuelta en anillo y vuelven al $(1,0)$. El análisis para $1-\epsilon \leq r \leq 1$ es análogo.

Problema 4

Considere el sistema

$$\dot{x} = x^2 - x - y, \quad \dot{y} = x.$$

(a) Demuestre que el origen es *asintóticamente* estable construyendo una función de Liapunov estricta.

(b) Demuestre que el origen es, de hecho, *exponencialmente* estable a través del criterio de linealización.

Consideremos una función de la forma $L(x,y) = x^2 + axy + by^2$, queremos que la función L tenga un mínimo local en el origen, por lo que

$$DL(x,y) = (2x + ay, ax + 2by) \qquad D^2L(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2b \end{pmatrix}$$

Deben cumplir con $DL(0,0) = 0$ y $D^2L(x,y)$ debe ser definida positiva. Por el criterio de Sylvester, $4b - a^2 > 0$ garantiza lo segundo. Eligiendo $a = 1$ podemos tomar $b = 3/4$ y la desigualdad sigue valiendo. Luego, una función de Liapunov es $L(x,y) = x^2 + xy + (3/4)y^2$ que es estricta por la elección de a y b.

Viendo el sistema linealizado, tenemos que

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies Df(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios son $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, que tienen parte real negativa, así que el punto fijo es exponencialmente estable.

Problema 5

El péndulo con fricción está descrito por

$$\ddot{x} = -\eta \dot{x} - \sin(x), \quad \eta > 0.$$

¿Está la energía conservada en este caso? Muestre que la energía puede ser usada como una función de Liapunov y pruebe que el punto fijo $(\dot{x}, x) = (0, 0)$ es (*asintóticamente*) estable. ¿Cómo cambia el retrato de fase?

La ecuación de la energía es

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + 1 - \cos(x).$$

Derivando con respecto a t vemos que

$$\dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\sin(x) = -\eta \dot{x}^2.$$

Como $E(0,0) = 0$ y $E(x, \dot{x}) > 0$ para $(x, \dot{x}) \neq 0$. Concluimos que E es una función de Liapunov para el sistema. Por otro lado, el computo anterior muestra que la derivada es estrictamente decreciente, así que no pueden haber órbitas periódicas regulares. Se sigue que el sistema es asintóticamente estable.

Para ver el retrato de fase, primero escribamos el sistema como uno de primer orden de la siguiente forma:

$$\dot{x} = y \qquad \dot{y} = -\eta y - \sin(x).$$

El Jacobiano del sistema es

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos(x) & -\eta \end{pmatrix} \Rightarrow Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\eta \end{pmatrix}.$$

Viendo el polinomio característico, los valores propios están dados por

$$\lambda = \frac{-\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4}}{2}.$$

Analicemos los distintos casos.

- Si $\eta \in (0, 2)$, entonces los valores propios son complejos con parte real negativa, por lo tanto el origen es un sumidero espiral.
- Si $\eta = 2$, entonces $\lambda = \pm 1$ y el origen es una silla.
- Si $\eta > 2$, entonces los valores propios son reales negativos, así que el origen es un sumidero.

Problema 6

Analice el sistema competitivo dado por

$$\begin{cases} \dot{x} &= (1 - y - \lambda x)x, \\ \dot{y} &= \alpha(1 - x - \mu y)y \end{cases} \qquad \alpha, \lambda, \mu > 0.$$

En el primer cuadrante $(x, y \geq 0)$ siguiendo la exposición dada en el capítulo 7.1 de Teschl.

1. Encuentre conjuntos invariantes.
2. Determine las dos *nullclinas* y úselas para determinar el sentido del campo vectorial en el primer cuadrante Q (note que las nullclinas dividen Q en regiones donde el signo de cada componente del campo vectorial no cambia).
3. Encuentre los puntos fijos del sistema y estudie su estabilidad (en términos de los parámetros del problema).
4. Dibuje el retrato de fase (*sugerencia:* Lema 7.2 será útil).

Comenzaremos mirando las nullclinas.

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 & \iff x = 0 \vee y = 1 - \lambda x \\ \dot{y} = 0 & \iff y = 0 \vee y = \frac{1-x}{\mu} \end{cases}.$$

Por otro lado, los puntos fijos son $(0,0), (0,1/\mu), (1/\lambda,0)$ y $(\frac{\mu-1}{\lambda\mu-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda\mu-1})$. Notemos que si $\lambda\mu > 1$, entonces $\mu > 1$ y $\lambda > 1$. Mientras que si $\lambda\mu < 1$, entonces $\mu < 1$ y $\lambda < 1$.

La derivada de f está dada por

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y-2\lambda x & -x \\ -\alpha x & \alpha(1-x-2\mu y) \end{pmatrix}.$$

Evaluando en los puntos fijos

- En $x* = (0,0)$ se tiene que
$$Df(x*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$
Como los valores propios son positivos, el punto es una fuente.

- En $x* = (0,1/\mu)$ se tiene que
$$Df(x*) = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}.$$
Aquí, si $\mu > 1$ los valores propios tienen signo opuesto y tenemos una silla. Si $\mu < 1$ los valores propios negativos y el punto es un sumidero.

- En $x* = (1/\lambda, 0)$ se tiene que
$$Df(x*) = \begin{pmatrix} -1 & -1/\lambda \\ -\alpha/\lambda & \alpha(1-1/\lambda) \end{pmatrix}.$$
Aquí la traza $T = \alpha - \alpha/\lambda - 1$ y el determinante $D = -\alpha(1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2})$. Dado que
$$D = 0 \implies \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$
Se deduce que el determinante es siempre negativo. Así que tenemos una silla.

- En $x* = (\frac{\mu-1}{\lambda\mu-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda\mu-1})$ se tiene que
$$\begin{aligned} Df(x*) &= \frac{1}{\lambda\mu-1}\begin{pmatrix} \lambda\mu - 1 - (\lambda-1) - 2\lambda(\mu-1) & -(\mu-1) \\ -\alpha(\mu-1) & \alpha((\lambda\mu-1)-(\mu-1)-2\mu(\lambda-1)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda\mu-1}\begin{pmatrix} \lambda(1-\mu) & -(\mu-1) \\ -\alpha(\mu-1) & \alpha\mu(1-\lambda) \end{pmatrix} \end{aligned}$$
Después de las manipulaciones, la traza (T) y el determinante (D) dan
$$\begin{aligned} T &= -\alpha\frac{\lambda\mu+1}{\lambda\mu-1} + \frac{\alpha\mu+\lambda}{\lambda\mu-1} \\ D &= \left(\frac{1}{\lambda\mu-1}\right)^2 \alpha\left[\lambda\mu(1-\mu)(1-\lambda) - (1-\mu)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{\lambda\mu-1}\right)^2 \alpha(1-\mu)\left[\lambda\mu(1-\lambda) - (1-\mu)\right] \end{aligned}$$

Problema 7

(`Oscilador glucolítico`) Las células vivas obtiene energía al descomponer el azúcar en un proceso llamado *glucólisis*. La glucólisis puede proceder de manera oscilatoria, con la concentración de varios compuestos químicos intermedios aumentando y disminuyendo en un período de varios minutos. El siguiente sistema es un modelo idealizado de la evolución de la concentración x_1 de ADP (adenosina difosfato) y la concentración x_2 de F6P (fructosa-6-fosfato).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + ax_2 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= b - ax_2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \qquad a, b > 0.$$

En este problema demostrará que para $a = 0{,}1$ y $b = 0{,}5$ el sistema admite una órbita periódica en el primer cuadrante $Q \coloneqq \{x_1, x_2 > 0\}$.

(a) Encuentre el único punto fijo del sistema y demuestre que es una fuente.

(b) Encuentre las nullclinas y úselas para dividir el primer cuadrante en regiones donde el campo vectorial apunta NE, SE, SO, NO.

(c) Identifique un subconjunto compacto $\mathcal{R}$ de $\overline{Q}$ que sea (+)-invariante y no tenga puntos fijos. Concluya que $\mathcal{R}$ contiene una órbita periódica. (*Sugerencia:* Note que $f(x) \cdot (1,1) = b - x_1$)

Veamos el punto fijo

$$f(x) = 0 \iff \begin{cases} -x_1 + x_2/10 + x_1^2 x_2 & = 0 \\ 1/2 - x_2/10 - x_1^2 x_2 & = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 10/7 \end{pmatrix}.$$

Viendo la derivada de f en el punto fijo $x*$ tenemos que

$$Df(x*) = \begin{pmatrix} 3/7 & 7/20 \\ -10/7 & -7/20 \end{pmatrix}.$$

La traza $T = 11/140$ y el determinante $D = 7/20$ son positivos y se cumple que $T^2 < 4D$, así que el punto es una fuente.

Ahora veamos las nulclinas,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 & \iff x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + 1/10} =: L_1 \\ \dot{x}_2 = 0 & \iff x_2 = \frac{1}{2(x_1^2+1/10)} =: L_2 \end{cases}.$$

También miremos los ejes para tener una idea del campo vectorial.

$$\begin{cases} x_1 = 0 & \implies \dot{x}_1 = x_2/10 \wedge \dot{x}_2 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{10} \\ x_2 = 0 & \implies \dot{x}_1 = -x_1 \wedge \dot{x}_2 = b \end{cases}.$$

Se sigue que en el eje vertical, el punto 5 es un punto estable (debajo de 5 el campo apunta hacia arriba y por sobre 5 apunta hacia abajo) y el campo vectorial apunta hacia la derecha. Mientras tanto, en el eje horizontal, el campo apunta a la izquierda y arriba.

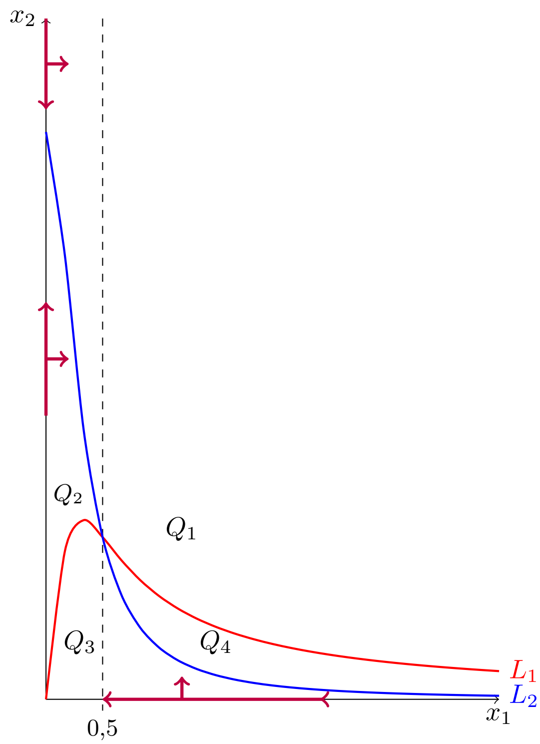

Figura 1: En la curva roja los vectores son verticales y en la curva azul son horizontales.

Veamos la dirección del campo vectorial en las distintas regiones.

- Q_1: $\dot{y} < 0$ y $\dot{x} > 0$, así que apunta SE.
- Q_2: $\dot{y} > 0$ y $\dot{x} > 0$, así que apunta NE.
- Q_3: $\dot{y} > 0$ y $\dot{x} < 0$, así que apunta NO.
- Q_4: $\dot{y} < 0$ y $\dot{x} < 0$, así que apunta SO.

Para $x_1 \to \infty$, vemos que $\dot{x}_1 \approx x_1^2$ y $\dot{x}_2 \approx -x_1^2$, así que $dx_1/dx_2 \approx -1$. Esto sugiere que el campo vectorial eventualmente apunta SE. Comprobando la intuición vemos que

$$f(x) \cdot (1,1) = (-x_1 + x_2/10 + x_1^2 x_2, 1/2 - x_2/10 - x_1^2 x_2) \cdot (1,1) = 1/2 - x_1,$$

y por lo tanto para $x_1 = 1/2$ el campo vectorial tiene pendiente SE, más aún, para $x_1 > 1/2$ las trayectorias tienen pendiente menor a -1, así que cualquier recta L de pendiente -1 que esté por sobre el punto fijo tenemos una región R atrapadora delimitada por la recta L, la vertical $x_1 = 1/2$ y la curva L_2 (en azul); La cual es compacta (cerrada y acotada), (+)-invariante, y no tiene puntos fijos. Por Poincaré-Bendixson se concluye que R contiene órbitas periodicas.