

Colaboradores: Felipe González, Pablo Navarro, Camila Guajardo Vasquéz

**Problema 1**

- (a) Sea  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y sea  $\phi = \phi(t, x)$  la función del flujo asociada a la ecuación autónoma  $\dot{u} = f(u)$ . Defina

$$J(t, x_0) := \det \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x_0) \right).$$

Demuestre que  $J \in \mathcal{C}^1(I \times B)$  para algún cilindro  $I \times B$  en torno de  $(0, x_0)$  y que  $J(\cdot, x_0)$  resuelve el PVI

$$\dot{J} = \operatorname{div} f(\phi(t, x_0)) J, \quad t \in I \quad ; \quad J(0, x_0) = 1.$$

- (b) Considere el sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_p H(x, p), & \dot{p} = -\partial_x H(x, p) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, & p(0) = p_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

con  $H(u) := |x|^4 + |p|^4$ , definida para  $u = (x, p) \in \mathbb{R}^{n+n}$  (sistemas de esta forma se llaman *sistemas Hamiltonianos*). Denote con  $\phi(t, x, p)$  su función flujo. Demuestre que  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+n}, \mathbb{R}^{n+n})$  está definida para todos  $t \in \mathbb{R}$  y que

$$\operatorname{Vol}(\phi(t, B)) = \operatorname{Vol}(B)$$

para todos  $t \in \mathbb{R}$  y todas bolas  $B \subset \mathbb{R}^{n+n}$

- (a) En primer lugar, notemos que tenemos las hipótesis para que valgan las ecuaciones variacionales, es decir:

$$\partial_t \partial_x \phi(t, x) = \partial_x f(\phi(t, x)) \cdot \partial_x \phi(t, x). \quad (\text{EV})$$

Sea  $J$  como en el enunciado. Por la fórmula de Jacobi sabemos que:

$$\dot{J} = J \cdot \operatorname{tr}((\partial_x \phi)^{-1} \cdot \partial_t \partial_x \phi) \quad (\star)$$

para una vecindad  $I \times B \in \mathbb{R}^{1+n}$  donde el teorema de la función inversa nos garantice la existencia de  $(\partial_x \phi)^{-1}$  (que por el mismo teorema es continuamente diferenciable). Por otro lado, las ecuaciones variacionales (EV) nos dicen que:

$$(\star) = J \cdot \operatorname{tr}((\partial_x \phi)^{-1} \partial_x f(\phi) \partial_x \phi)$$

y recordando que  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \in \mathbb{R}$  obtenemos la EDO pedida:

$$(\star) = J \cdot \operatorname{tr}(\partial_x f(\phi) \partial_x \phi (\partial_x \phi)^{-1}) = \operatorname{tr}(\partial_x f(\phi)) J = \left( \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i(\phi(t, x_0)) \right) J = \operatorname{div} f(\phi(t, x_0)) J.$$

Veamos ahora la condición inicial. Notemos que  $\phi(0, x_0) = x_0$ , luego

$$\partial_x x_0 = (\partial_{x_1} x_0 \quad \dots \quad \partial_{x_n} x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_{n \times n}$$

así que el determinante da 1.

- (b)

**Problema 2**

Sea  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$  y considere el PVI

$$\dot{x} = A(t)x \quad , \quad x(0) = x_0.$$

Suponga que para todo  $t \geq 0$ ,  $A(t) = \lambda(t)\mathbb{I} + B(t)$ , donde  $\lambda \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  y  $B(t)$  es anti-simétrica.

(a) Denote con  $\Pi(t, 0)$  el propagador asociado (aka “la matriz principal”). Demuestre que

$$\|\Pi(t, 0)\| = \exp \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right).$$

(b) Dada la matriz de coeficientes

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{2 \times 2}),$$

dé condiciones suficientes sobre  $a(t)$  y  $b(t)$  para que

- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ;
- $|x(t)| = |x_0|$  para todo  $t \geq 0$ .

(a) En primer lugar notemos que  $A(t)$  conmuta con  $\int_0^t A(s) ds$ , en efecto:

$$\begin{aligned} A(t) \int_0^t A(s) ds &= (\lambda(t)\mathbb{I} + B(t)) \left( \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} + B(s) ds \right) \\ &= \lambda(t)\mathbb{I} \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} ds + \lambda(t)\mathbb{I} \int_0^t B(s) ds + B(t) \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} ds + B(t) \int_0^t B(s) ds \end{aligned}$$

LLamemos  $S_i$  al sumando respectivo, entonces

- $S_1$  es producto de matrices diagonales, así que conmuta;
- $S_2$  y  $S_3$  es un producto de una matriz diagonal con diagonal constante (aka “matriz escalar”) y otra matriz, así que conmutan;
- $S_4$

Ya con esto, sabemos que una matriz fundamental del PVI está dada por:

$$X(t) = \exp \left( \int_0^t A(s) ds \right) = \exp \left( \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} + B(s) ds \right)$$

así que el propagador está dado por:

$$\Pi(t, 0) = X(t)X^{-1}(0) = \exp \left( \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} + B(s) ds \right) \exp \left( - \int_0^0 A(s) ds \right) = \exp \left( \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} + B(s) ds \right) \mathbb{I}.$$

Como ya vimos,  $\int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} ds$  conmuta con cualquier matriz (es una matriz escalar), así que en particular conmuta con  $B$ . Luego:

$$\Pi(t, 0) = \exp \left( \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} ds \right) \exp \left( \int_0^t B(s) ds \right).$$

Queremos sacar la norma, notemos que:

$$\exp \left( \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} ds \right) = \exp \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right) \mathbb{I} \implies \left\| \exp \left( \int_0^t \lambda(s)\mathbb{I} ds \right) \right\| = \exp \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right)$$

y que:

$$\exp \left( \int_0^t B(s) ds \right) = \begin{pmatrix} \cos \int_0^t b(s) ds & \sin \int_0^t b(s) ds \\ -\sin \int_0^t b(s) ds & \cos \int_0^t b(s) ds \end{pmatrix} \implies \left\| \exp \left( \int_0^t B(s) ds \right) \right\| = 1$$

así concluimos la igualdad pedida:

$$\|\Pi(t, 0)\| = \exp \left( \int_0^t \lambda(s) ds \right).$$

(b) Para el primer caso necesitamos que -todos- los valores propios tenga parte real negativa, mientras que para el segundo es necesario que la parte real sea nula.

Veamos las condiciones en más detalle:

$$\det \lambda I - A = \det \begin{pmatrix} \lambda - a(t) & -b(t) \\ b(t) & \lambda - a(t) \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2a(t)\lambda + a(t)^2 + b(t)^2 = 0$$

aplicando la fórmula cuadrática obtenemos que:

$$\lambda = \frac{2a(t) \pm \sqrt{4a(t)^2 - 4(a(t)^2 + b(t)^2)}}{2} = a(t) \pm 2i|b(t)|.$$

Como dijimos antes, para el primer caso necesitamos que la parte real sea negativa, así que  $a(t) < 0$  es condición suficiente; Vale notar que si  $b(t) = 0$  en las soluciones aparecerá un  $te^{\lambda t}$  que también se va a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ , así que tampoco hay problemas ahí.

Por otro lado, si queremos que las soluciones estén a la misma distancia del origen, basta con que el valor propio sea complejo puro, es decir,  $a(t) = 0$  para todo  $t \geq 0$ . También sirve  $a(t) = b(t) = 0$ .

### Problema 3

Encuentre la solución general de

- (a)  $\dot{x} = Ax$ , donde  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ ;
- (b)  $\ddot{x} + 4x = 2\sin(2t)$ ;
- (c)  $\ddot{x} - 2\dot{x} = -x + t - 1 + 2e^t$ ;
- (d)  $t\ddot{x} - 2(t+1)\dot{x} + (t+2)x = 0$ ,  $\phi_1(t) = e^t$ .

- (a) Busquemos los valores propios de la matriz  $A$ :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -8 & -1 & -7 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (5 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ -1 & -7 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -8 & -7 - \lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 - \lambda \\ -8 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda)(1 - \lambda)(-7 - \lambda) + 32(1 - \lambda) \end{aligned}$$

Igualando a 0 vemos que  $\lambda = 1$  sirve. Dividiendo por el término  $(1 - \lambda)$  tenemos que

$$(5 - \lambda)(-7 - \lambda) + 32 = 0 \implies \lambda = 1, \lambda = -3.$$

En resumen, los valores propios son 1, 1 y  $-3$ .

Veamos la multiplicidad geométrica (m.g) de cada valor propio. Ciertamente  $\lambda = -3$  tiene m.g 1; Por otro lado, para  $\lambda = 1$  vemos que  $\dim \ker(A - I) = 1$ , así que la m.g es 1. Se sigue que la matriz  $A$  no es diagonalizable, sin embargo, podemos calcular su forma de jordan.

Para calcular la forma de jordan necesitamos los vectores propios generalizados, para los valores propios distintos tenemos:

$$\begin{aligned} (A - I)v_1 &= 0 \rightarrow v_1 = (1, 0, -1) \\ (A + 3I)v_3 &= 0 \rightarrow v_3 = (1, 0, -2) \end{aligned}$$

para obtener  $v_2$  necesitamos una solución de sistema  $(A - I)v_2 = v_1$  y una inspección arroja que  $v_2 = (-1/4, 1, 0)$  sirve. Luego, si  $V = (v_1 \ v_2 \ v_3)$  es la matriz con columnas los vectores propios tenemos que:

$$A = V \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A_J} V^{-1}.$$

Volviendo al sistema, sabemos que las soluciones son de la forma:

$$x(t) = \exp(tA) K = V \exp(tA_J) V^{-1} K$$

donde  $K$  es una constante que depende las condiciones iniciales y la exponencial de la matriz de jordan es:

$$\exp(tA_j) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

(b) Primero debemos resolver el sistema homogéneo asociado:

$$\ddot{x} + 4x = 0$$

que es equivalente al sistema de primer orden  $\dot{y} = Ay$  con

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \quad y \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora seguimos el procedimiento usual:

■ **Valores propios:**

$$\det \lambda I - A = \lambda^2 + 4 \implies \lambda = \pm 2i$$

Como los valores propios son imaginarios, esperamos un sistema de tipo “centro”.

■ **Vectores propios:**

$$\begin{aligned} Av = 2iv &\implies v = (1, 2i) \\ Av = -2iv &\implies v = (1, -2i) \end{aligned}$$

■ **Solución general:** Por los pasos anteriores sabemos que:

$$y(t) = e^{2it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} + e^{-2it} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema  $\dot{y} = Ay$ . Además:

$$\begin{aligned} e^{2it} &= \cos(2t) + i \sin(2t) \\ e^{-2it} &= \cos(2t) - i \sin(2t) \end{aligned}$$

así que

$$y(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos(2t) \\ -4 \sin(2t) \end{pmatrix}$$

y por lo tanto la solución es real y nos sirve. Luego, las soluciones generales al sistema homogéneo están dadas por:

$$y_h(t) = \alpha y(t) \iff x = 2\alpha \cos(2t), \dot{x} = -4\alpha \sin(2t) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

que es lo mismo que poner  $x_h(t) = 2\alpha \cos(2t)$ .

Ahora volvemos al sistema no homogéneo:

$$\ddot{x} + 4x = 2 \sin(2t)$$

que sabemos tiene soluciones de la forma:

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t)$$

donde  $x_h$  es la solución al sistema homogéneo que ya investigamos y  $x_p$  es una solución particular del caso no homogéneo, experimentar un rato nos arroja que  $x_p(t) = -t \cos(2t)/2$  funciona, así que las soluciones generales son de la forma

$$x(t) = \cos(2t) \left( -\beta \frac{t}{2} + 2\alpha \right).$$

(c) Primero resolvemos el sistema homogéneo, que es equivalente al sistema de primer orden  $\dot{y} = Ay$  donde

$$y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Empezamos buscando los valores propios:

$$\det \lambda I - A = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1.$$

luego,  $\lambda = 1$  es el único valor propio. Veamos ahora su multiplicidad geométrica:

$$A(v_1, v_2) = (v_1, v_2) \iff v_1 = v_2$$

así que la m.g. es de 1 pues  $\dim \ker I - A = 1$ . Esperamos un sistema de tipo “estrella inestable”.

La matriz de jordan de  $A$  es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, las soluciones al sistema  $\dot{z} = Mz$ , donde  $z = V^{-1}y$  y  $V$  es la matriz de cambio de coordenadas asociada a la forma de jordan de la matriz  $A$ , son de la forma:

$$z(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

así que debemos encontrar  $V$  para obtener las soluciones de sistema en coordenadas  $y$ .

Tomemos  $v = (1, 1)$ , que es un vector propio de  $A$ . Dejemos a  $w = (1, 0)$  y como es linealmente independiente con  $v$  se tiene que:

$$Aw = (0, -1) = \mu v + \lambda w = \mu(1, 1) + (1, 0) \implies \mu = -1.$$

Luego, la matriz  $V = (v \quad -w)$  cumple con:

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$

y por lo tanto las soluciones del sistema  $\dot{y} = Ay$  están dadas por:

$$y_h(t) = Vz(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}$$

que en términos de  $x$  nos da:

$$\begin{cases} x(t) &= \alpha e^t + \beta e^t(t-1) \\ \dot{x}(t) &= \alpha e^t + \beta e^t t \end{cases}$$

y es suficiente expresar  $x_h(t) = \alpha e^t + \beta e^t(t-1)$

Así, las soluciones son de la forma:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

y sólo debemos encontrar  $x_p(t)$ . Matraquear un rato nos arroja que  $x_p(t) = t + 1 + t^2 e^t$  funciona. Así que las soluciones generales son de la forma:

$$x(t) = 1 + t + \alpha e^t + \beta t e^t + t^2 e^t.$$

(d) Dado que tenemos una solución  $x_1(t) = e^t$ , usaremos el método de reducción de order.

Buscaremos otra solución del estilo  $x_2(t) = c(t)e^t$ . Calculamos sus derivadas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= e^t(\dot{c}(t) + c(t)) \\ \ddot{x}_2(t) &= e^t(\ddot{c}(t) + 2\dot{c}(t) + c(t)) \end{aligned}$$

Metiendo estos datos en la ecuación obtenemos:

$$te^t(\ddot{c} + 2\dot{c} + c) - 2(t+1)e^t(\dot{c} + c) + (t+2)e^t c = te^t \ddot{c} + \dot{c}(te^t - 2(t+1)e^t) = 0.$$

Donde usamos que  $e^t$  soluciona la ecuación. Haciendo el cambio de variables  $w = \dot{c}$  y dividiendo por  $e^t$  la ecuación anterior se transforma en:

$$t\dot{w} - 2w = 0 \iff t\dot{w} = 2w.$$

Suponiendo que  $t > 0$  la podemos dividir por  $t$  y por lo tanto  $w(t) = w_0 t^2 = \dot{c}$ , de esta forma  $c = w_0 t^3/3 + K$  entregándonos que

$$x_2(t) = \frac{t^3}{3} e^t.$$

(tomando  $w_0 = 1$  y  $K = 0$ ), y por lo tanto las soluciones de la ecuación son de la forma

$$x(t) = \alpha e^t + \beta \frac{t^3}{3} e^t.$$

#### Problema 4

Sea  $A$  la matriz constante asociada a la EDO homogénea de orden  $n$ :

$$x^{(n)} + q_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + q_1\dot{x} + q_0x = 0$$

(tal que el sistema equivalente de primer orden es  $\dot{y} = Ay$ , donde  $y = (x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ ).

(a) Demuestre que el polinomio característico de  $A$  es

$$\chi(z) := \det(zI - A) = z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \dots + q_1z + q_0.$$

(b) Pruebe que la multiplicidad geométrica de cada valor propio de  $A$  es 1, i.e. cada valor propio de  $A$  es asociado con sólo un bloque de Jordan.

(c) Demuestre que la ecuación, o equivalentemente, el sistema  $\dot{y} = Ay$  es estable si y sólo si todos los valores propios tienen parte real no positiva, y todos los valores propios imaginarios son simples.

(a) En primer lugar veamos cómo se ve la matriz  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_0 & -q_1 & -q_2 & \dots & q_{n-1} \end{pmatrix} \implies zI - A = \begin{pmatrix} z & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ q_0 & q_1 & q_2 & \dots & z + q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Haremos la prueba por inducción.

■ Para  $n = 2$  tenemos que:

$$\det zI - A = \begin{pmatrix} z & -1 \\ q_0 & z + q_1 \end{pmatrix} = z^2 + zq_1 + q_0.$$

■ Supongamos que la igualdad vale para todo  $k \leq n$  y veamos que se cumple para  $n + 1$ .

La hipótesis nos dice que para la  $A$  de la forma ya discutida tenemos:

$$\det zI - A = \begin{pmatrix} z & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ q_0 & q_1 & q_2 & \dots & z + q_{n-1} \end{pmatrix} = z^n + q_{n-1}z^{n-1} + \dots + q_1z + q_0.$$

Consideremos entonces  $A$  una matriz de la misma forma pero con una dimensión más, es decir:

$$zI - A = \begin{pmatrix} z & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ q_0 & q_1 & \dots & q_{n-1} & z + q_n \end{pmatrix}.$$

Usando la regla de Laplace tenemos que:

$$\det zI - A = z \begin{vmatrix} z & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ q_1 & q_2 & \dots & z + q_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & -1 \\ q_0 & q_2 & \dots & q_{n-1} & z + q_n \end{vmatrix}$$

Usando la hipótesis inductiva tenemos que

$$z \begin{vmatrix} z & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ q_1 & q_2 & \dots & z + q_n \end{vmatrix} = z^{n+1} + z^n q_n + \dots + z q_2 + z q_1.$$

Para el otro sumando usamos la regla de Laplace para obtener que:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & -1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & -1 \\ q_0 & q_2 & \dots & q_{n-1} & z + q_n \end{vmatrix} = |(-1)^n q_0| = q_0.$$

Se concluye entonces que:

$$\det zI - A = z^{n+1} + z^n q_n + \dots + z q_2 + z q_1 + q_0.$$

(b) Supongamos que  $\alpha$  es un valor propio de  $A$  y veamos la dimensión de  $\ker \alpha I - A$ :

$$\begin{aligned} v \in \ker \alpha I - A &\iff Av = \alpha v \\ &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -q_0 & -q_1 & -q_2 & \dots & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} \\ &\implies v_k = \alpha^{k-1} v_1 \quad k \in \{2, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Luego, como  $v_1$  determina todo lo demás, la dimensión del subespacio propio es 1.

(no es relevante, pero del mismo computo se concluye que  $\det \alpha I - A = 0$ ).

(c) Sea  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  los valores propios de  $A$  y  $d_1, \dots, d_k$  sus respectivas multiplicidades algebraicas. Sean  $A_j, V$  la matriz de Jordan y la matriz de cambio de coordenadas asociadas a  $A$ .

Sabemos que las soluciones al sistema  $\dot{z} = V A_j V^{-1} z$  están dadas por:

$$z(t) = V \exp(A_j) V^{-1}$$

y por lo tanto, para  $1 \leq k \leq n$  se tiene que:

$$z_k(t) = c_{k,1} e^{\lambda_k t} + c_{k,2} t e^{\lambda_k t} + c_{k,3} \frac{t^2}{2} e^{\lambda_k t} + \dots + c_{k,d_k} \frac{t^{d_k-1}}{(d_k-1)!} e^{\lambda_k t}.$$

En este punto no es necesario hacer un cambio de coordenadas para volver al sistema original puesto que no cambiaría el comportamiento asintótico. Dicho esto, seguiremos el análisis de estabilidad en el sistema  $z$ .

$\boxed{\Leftarrow}$ : Si  $\Re \lambda_k \leq 0$  para todo  $k$  entonces hay dos casos, para  $\Re \lambda_k$  no nulo,  $e^{\lambda_k t}$  tiende a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$  y para  $\Re \lambda_k = 0$  el comportamiento es de “centro”, es decir, las soluciones giran alrededor del origen de manera periódica.

$\boxed{\Rightarrow}$ : Supongamos que el sistema es estable, es decir, ninguna solución explota cuando  $t \rightarrow \infty$ . Sabemos que las soluciones son de la forma:

$$z_k(t) = c_{k,1} e^{\lambda_k t} + c_{k,2} t e^{\lambda_k t} + c_{k,3} \frac{t^2}{2} e^{\lambda_k t} + \dots + c_{k,d_k} \frac{t^{d_k-1}}{(d_k-1)!} e^{\lambda_k t}$$

### Problema 5

Considere el sistema lineal homogéneo  $\dot{x} = A_b x$ , donde  $A = \begin{pmatrix} b & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Encuentre la solución general del sistema cuando  $b = -4$  y *dibuje* el retrato de fase.
- (b) Determine los valores de  $b$  para los cuales el origen es, respectivamente, una fuente, una fuente espiral, un sumidero, un sumidero espiral, una silla y un centro.

- (a) Seguiremos el procedimiento de siempre, es decir, buscaremos los valores propios, seguido de los vectores propios y finalmente usaremos esa información para armar la solución general.

Vamos con los valores propios:

$$\det \lambda I - A_{-4} = \det \begin{pmatrix} \lambda + 4 & -3 \\ 3 & \lambda - 2 \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

así que el único valor propio es  $\lambda = -1$ . Para seguir analizando necesitamos determinar su multiplicidad geométrica.

$$\begin{aligned} A_{-4}v = -v &\iff \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -4v_1 + 3v_2 = -v_1 \\ -3v_1 + 2v_2 = -v_2 \end{cases} \\ &\iff v_1 = v_2 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que la multiplicidad geométrica es 1 (pues  $\dim \ker(A_{-4} + I) = 1$ ). Luego, la matriz  $A_{-4}$  diagonalizada se como:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así que las soluciones al sistema  $\dot{y} = My$ , donde  $y = V^{-1}x$  y  $V$  es la matriz cambio de coordenadas, son de la forma:

$$y(t) = \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora necesitamos sacar  $V$ , dado que la multiplicidad geométrica es 1, todos los vectores propios están sobre la misma recta así que debemos trabajar un poco más para obtener  $V$ . La primera columna es fácil de obtener, pues  $(1, 1)$  sirve ( $A_{-4}(v_1, v_2) = (-v_1, -v_2) \iff v_1 = v_2$ ). Consideremos el vector  $w = (1, 0)$  que es linealmente independiente de  $v$ , luego:

$$A_{-4}w = \mu_1 v + \mu_2 w \implies \mu_1 = -3 \quad \wedge \quad \mu_2 = -1 = \lambda.$$

así que definiendo  $v_2 = -w/3$  tenemos que  $V = (v_1 v_2)$  cumple con:

$$V^{-1}A_{-4}V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = M$$

y por lo tanto, las soluciones en las coordenadas originales se ven como

$$x(t) = Vy(t) = \alpha e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t} \begin{pmatrix} t - 1/3 \\ t \end{pmatrix}.$$

Podemos observar que el sistema es estable, pues para  $t \rightarrow \infty$  se tiene que  $x(t) \rightarrow 0$ .



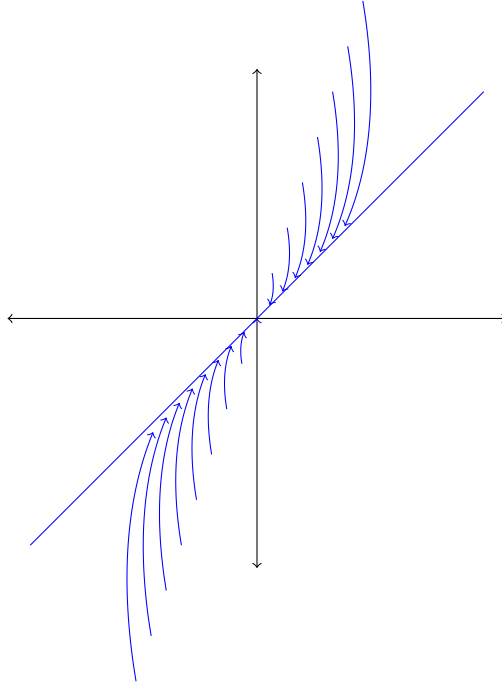


Figura 1: Retrato de fase del sistema  $\dot{x} = A_{-4}x$

(b) Veamos los valores propios:

$$\det \lambda I - A = \lambda^2 - (2+b)\lambda + 2b+9 \implies \lambda = \frac{(2+b) \pm \sqrt{(2+b)^2 - 4(2b+9)}}{2}.$$

Luego, para:

- **sumidero:** necesitamos que los valores propios sean reales y negativos, es decir:

$$\Delta = (2+b)^2 - 4(2b+9) > 0 \quad \wedge \quad \frac{(2+b) \pm \sqrt{\Delta}}{2} < 0.$$

Notar que  $(2+b) < 0$  pues ambos valores propios deben ser negativos, así que la segunda desigualdad nos queda como:

$$|2+b| > \sqrt{\Delta} \implies b > -9/2.$$

y de la primera tenemos que  $b < -4$  y que  $b > 8$ , así se concluye que  $b \in (-4, 5, -4)$ .

- **sumidero espiral:** necesitamos que los valores propios tengan parte imaginaria no nula y que su parte real sea negativa.

$$\Delta = (2+b)^2 - 4(2b+9) < 0 \quad \wedge \quad \frac{2+b}{2} < 0.$$

De la primera desigualdad  $b < 8$  y  $b > -4$ . De la segunda obtenemos que  $b < -2$  así que para  $b \in (-4, -2)$  tenemos un sumidero espiral.

- **fuelle:** aquí necesitamos que los valores propios sean reales y positivos.

$$\Delta = (2+b)^2 - 4(2b+9) = 0 \quad \wedge \quad \frac{2+b}{2} > 0.$$

De la primera  $b = 8$  o  $b = -4$ . De la segunda  $b > -2$ . Concluimos que  $b = 8$ .

- **fuelle espiral:** aquí los valores propios deben ser complejos con parte real positiva.

$$\Delta = (2+b)^2 - 4(2b+9) < 0 \quad \wedge \quad \frac{2+b}{2} > 0.$$

la primera desigualdad nos dice que  $b < 8$  y  $b > -4$ . La segunda, como antes,  $b > -2$ . Concluimos que  $b \in (-2, 8)$

- **silla:** aquí necesitamos que los valores propios sean reales y con signo opuesto.

$$\Delta = (2+b)^2 - 4(2b+9) > 0 \quad \wedge \quad \frac{2+b}{2} < \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \right|.$$

Luego,  $b < -9/2 = -4,5$  sirve.

- **centro:** aquí necesitamos complejos puros, así que  $b = -2$ .

### Problema 6

Considere el sistema  $\dot{x} = Ax$  donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre todos los datos iniciales  $x_0 = x(0)$  tales que la solución correspondiente  $x(t)$

- (a) es acotada para  $t \geq 0$ ;
- (b) crece linealmente;
- (c) crece más rápidamente que linealmente, i.e.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|x(t)|}{t} = \infty$ .

### Problema 7

Considere el sistema lineal homogéneo  $\dot{x} = A(t)x$ , para  $t > 0$ , donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 3/t & -1 \\ 2/t^2 & -1/t \end{pmatrix}.$$

- (a) Verifique que  $x_1(t) = (t^2, t)$  resuelve el sistema para  $t > 0$ .
- (b) Sea  $x_2(t)$  otra solución, tal que el Wronskiano  $W(t) := \det(x_1, x_2)$  satisface  $W(1) = 1$ . Encuentre  $W(t)$ .
- (c) Use el conocimiento de  $W(t)$  para determinar una posible solución  $x_2$ .
- (d) Resuelva el PVI

$$\dot{x} = A(t)x + \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}, \quad t > 0 \quad \text{con} \quad x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Basta evaluar,

$$A(t)x_1(t) = (2t, 1) = (t^2, t) = \dot{x}_1(t).$$

- (b) Sea  $x_2 = (u, v)$ . Necesitamos resolver el PVI

$$\dot{W} = \text{tr} \begin{pmatrix} 3/t & -1 \\ 2/t^2 & -1/t \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} t^2 & u \\ t & v \end{pmatrix} = (2/t)(t^2v - tu) = 2tv - 2u \quad ; \quad W(1) = 1 = v(1) - u(1).$$

Sabemos que las soluciones vienen dadas por:

$$W(t) = W(1) \exp \left( \int_1^t \text{tr} A(s) ds \right) = \exp(2 \log(t)) = t^2.$$

- (c) De la parte anterior y usando la misma notación tenemos que:

$$2t = \dot{W} = 2tv - 2u \iff u = t(v - 1) \quad \wedge \quad 1 = v(1) - u(1).$$

Si ponemos  $u = t$  entonces  $v = 2$  y se cumple la EDO

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/t & -1 \\ 2/t^2 & -1/t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (d) De la parte anterior sabemos que

$$X = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & 2 \end{pmatrix}$$

es solución de la EDO

$$\dot{X} = A(t)X.$$

Para resolver la no homogénea, necesitamos una solución particular, y para encontrarlas buscaremos soluciones del estilo

$$x_p(t) = Xc(t) \implies X\dot{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}}_{G(t)}.$$

Aplicando regla de Cramer tenemos que

$$\dot{c}_1 = \frac{\det X_1}{\det X} \quad \dot{c}_2 = \frac{\det X_2}{\det X}$$

Donde  $X_i$  es la matriz  $X$  reemplazando la columna  $i$ -ésima por  $G(t)$ . Haciendo el cálculo obtenemos que  $\dot{c}_1 = 2$  y  $\dot{c}_2 = -2t$  e integrando (eligiendo las constantes adecuadas) tenemos que  $c_1 = 2t$  y  $c_2 = -t^2$ . Luego, la solución particular es

$$x_p(t) = Xc = \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, las soluciones generales están dadas por

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

como queremos  $x(1) = (1, 1)$  las constantes adecuadas son  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$ .

### Problema 8

Suponga que  $f = f(t, x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  satisface  $f(t, 0) = 0$  y

$$\partial_x f(t, x) v \cdot v \leq M(t) |v|^2 \quad \text{para todos } x, v \in \mathbb{R}^n,$$

para alguna función continua  $M \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ . Pruebe que toda solución  $\dot{x} = f(t, x)$  está definida globalmente.

Notemos que por el TFC

$$f(t, x) = f(t, 0) + \int_0^1 \partial_s f(t, sx) ds = \int_0^1 \partial_x f(t, sx) x ds.$$

y la última igualdad se debe a la regla de la cadena y la hipótesis ( $f(t, 0) = 0$ ). Luego

$$f(t, x) \cdot x = \int_0^1 \partial_x f(t, sx) x \cdot x ds \leq \int_0^1 M(t) |x|^2 ds$$

y

$$\frac{d}{dt} |x(t)|^2 \leq 2x\dot{x} = 2xf(t, x) \leq 2 \int_0^1 M(t) |x|^2 ds$$

integrando obtenemos que

$$|x(t)|^2 \leq 2|x(0)|^2 + 2 \int_0^t M(s) |x(s)|^2 ds$$

y aplicando Grönwall se tiene que

$$|x(t)|^2 \leq 2|x(0)|^2 \exp \left( \int_0^t 2M(s) ds \right).$$

Dado que la cota es continua para todo  $t$  concluimos que  $x(t)$  no explota en tiempo finito.