Colaboladores: Felipe González, Claudio Meléndez, José Cuevas, Sebastián Lepe, Pablo Navarro, Mathias Luengo, Camila Guajardo Vásquez.

Problema 1

Resuelva las siguientes EDO's:

(a) $\dot{x} = x(1-x)$.

(b) $\dot{x} = x\sin(t)$.

(c) $\dot{x} = \frac{3x-2t}{t}$.

(d) $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$.

(e) $y' = \frac{y}{x} - \tan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Solución.

(a) $\dot{x} = x(1-x)$.

La ecuación es lineal y autónoma de primer orden. Consideremos las diferentes condiciones iniciales $x(0) = x_0$.

- Si $x_0 = 0$ la derivada de la solución es cero y por lo tanto concluimos que $\varphi \equiv 0$ es la única solución.
- Si $x_0 = 1$, $\dot{x}$ es nula y por lo tanto la solución $\varphi(t)$ es constante y vale 1.
- Si $0 < x_0 < 1$ se tiene que $0 < \dot{x}(0) < 1$, por lo tanto la solución $\varphi(t)$ es creciente. Los valores de x donde $\dot{x}$ no se anula van desde van desde $x_1 = 0$ hasta $x_1 = 1$. Despejando la ecuación e integrando obtenemos la inversa de la solución

$$F(x;x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{u\,(1-u)} = \int_{x_0}^{x} \frac{1 \pm u}{u\,(1-u)} du = \log\left(\frac{x}{1-x}\right) - \log\left(\frac{x_0}{1-x_0}\right).$$

Luego, el intervalo máximo de la solución está dado por

$$T_+ = \lim_{x\uparrow 1} F(x;x_0) = \infty \qquad T_- = \lim_{x\downarrow 0} F(x;x_0) = -\infty.$$

Además, podemos calcular la inversa explícitamente. Así, la solución $x(t)$ es

$$x(t) = \frac{e^t x_0}{1 - x_0 + e^t x_0}.$$

- Si $x_0 > 1$ entonces para $x > 1$ la derivada $\dot{x}(x) < 0$ y por lo tanto esperamos una solución decreciente. Dado que en $x = 1$ la derivada se anula, deducimos que (de existir) una solución se debe ver como una función decreciente con asíntota en $x = 1$. De lo anterior también deducimos que el intervalo máximo donde $x(1-x)$ no se desvanece va desde $x_1 = 1$ y $x_2 = \infty$.

  Como antes, podemos computar la inversa de la solución, dandonos la expresión

$$F(x;x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{u - u^2} = \log\left(\frac{x}{x-1}\right) - \log\left(\frac{x_0}{x_0-1}\right).$$

Dado que $1/(u-u^2)$ es negativa en (x_1, x_2) la función $F(x;x_0)$ es monótona decreciente. Luego, para obtener el intervalo máximo de la solución basta evaluar en los límites.

$$T_- = \lim_{x\uparrow\infty} F(x;x_0) = -\log\left(\frac{x_0}{x_0-1}\right) \qquad T_+ = \lim_{x\downarrow 1} F(x;x_0) = +\infty.$$

Despejando la ecuación explícita obtenemos la misma que antes.

$$x = \frac{e^t x_0}{1 - x_0 + e^t x_0}.$$

- Si $x_0 < 0$, la derivada es negativa por lo que esperamos una solución decreciente. Los valores dónde $\dot{x}$ no se anula va desde $x_1 = -\infty$ hasta $x_2 = 0$. Dado que la derivada decrece a medida que nos acercamos a $x = 0$, esperamos que la solución tenga una asíntota en este valor (a medida que retrocedemos en el tiempo).

Como antes, la inversa de la solución nos da que

$$F(x;x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{u(1-u)} = \log\left(\frac{x}{x-1}\right) - \log\left(\frac{x_0}{x_0-1}\right).$$

Dado que tenemos argumentos negativos, vemos que $F(x;x_0)$ es decreciente y monótona. Luego, los intervalos máximos son

$$T_- = \lim_{x\uparrow 0} F(x;x_0) = -\infty \qquad\qquad T_+ = \lim_{x\downarrow -\infty} F(x;x_0) = -\log\left(\frac{x_0}{x_0-1}\right).$$

La solución explota en tiempo finito en el futuro. La fórmula explícita es idéntica a las anteriores.

(b) $\dot{x} = x\sin(t)$.

La ecuación es de primer orden y separable. Definamos $x_0 = x(t_0)$.

Veamos las diferentes condiciones iniciales. Dado que la función seno es periódica, esperamos soluciones periodicas.

- Si $x_0 = 0$, entonces una solución es $x \equiv 0$ y vale para todo $t \in \mathbb{R}$.
- Si $x_0 > 0$. El intervalo máximo dónde x no se anula va de $x_1 = 0$ hasta $x_2 = \infty$. Despejando e integrando tenemos que la inversa de la solución es

$$F(x;x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{u} = \log(x) - \log(x_0) = \cos(t_0) - \cos(t).$$

Donde $x \in (0,\infty)$. Así, el intervalo máximo de la solución es

$$T_+ = \lim_{x\uparrow\infty} F(x;x_0) = \infty \qquad\qquad T_- = \lim_{x\downarrow 0} F(x;x_0) = -\infty.$$

Y la podemos calcular explícitamente, obteniendo

$$x(t) = x_0 \exp\left(\cos(t_0) - \cos(t)\right).$$

- Si $x_0 < 0$ el procedimiento es similar y de hecho nos da la misma expresión y los mismos tiempos.

(c) $\dot{x} = \frac{3x-2t}{t} = 3\frac{x}{t} - 2$.

Es una ecuación de primer orden no homogénea. Notar que $t \neq 0$. Tomemos $y = \frac{x}{t}$, de esta forma nos queda el sistema separable

$$\dot{y} = \frac{\dot{x}}{t} - \frac{x}{t^2} = \frac{2}{t}\left(y-1\right).$$

Ahora debemos analizar los distintos PVI. Llamemos $y_0 \coloneqq y(t_0) = x(t_0)/t_0$.

- Si $y_0 = 1$, una solución es la función constante $y \equiv 1$.
- Si $y_0 > 1$, entonces la imagen de la solución va desde $y_1 = 1$ a $y_2 = \infty$. Dado que $t \neq 0$, debemos analizar los casos de t positivo y negativo. Sin perjuicio de lo enterior, trataremos de posponerlo hasta que sea necesario, pues por la forma de la ecuación se puede decir que hay una simetría 'refleja' con respecto al tiempo.

  Despejando la ecuación de la manera usual para obtener la inversa.

$$F(y;y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{du}{u-1} = \log(y-1) - \log(y_0-1).$$

Así, el intervalo máximo de la solución está dado por

$$T_+ = \lim_{y\uparrow\infty} F(y;y_0) = \infty \qquad\qquad T_- = \lim_{y\downarrow 1} F(y;y_0) = -\infty.$$

Además, podemos computar explicitamente la solución donde se aprecia la simetría con respecto a t.

$$\begin{aligned} \log(y-1) - \log(y_0-1) &= \log(t^2) - \log(t_0^2) \\ \Rightarrow y(t) &= (y_0-1)\frac{t^2}{t_0^2} + 1 \end{aligned}$$

(d) $y' = y^2 - \frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$.

La ecuación es de Ricatti, por lo que necesitamos saber una solución particular $y_p(x)$. Una inspección arroja que $y_p = 1/x$ funciona. Luego, con el cambio de variable $u = 1/(y - y_p)$ nos queda el sistema lineal equivalente

$$\dot{u} = -\frac{1}{x}u - 1. \tag{$\star$}$$

Usaremos el método del propagrador. Tenemos que

$$P(v; w) = \exp\left(\int_w^v -\frac{dz}{z}\right) = \exp\left(\log(w/v)\right) = \frac{w}{v}.$$

Por lo tanto la solución es

$$u(x) = u_0 P(x; x_0) + \int_{x_0}^x -P(x; s)ds = u_0\frac{x_0}{x} - \frac{1}{x}\int_{x_0}^x sds = u_0\frac{x_0}{x} - \frac{1}{2x}\left(x^2 - x_0^2\right).$$

Del sistema original ya vemos que $x_0, x \neq 0$ así que el propagador no se anula. Por el cambio de variables es claro que $u \neq 0$ y en particular $u_0 \neq 0$. Así, $x_0 \in (0, \pm\infty$ y $u_0 \in (0, \pm\infty$.

(e) $y' = \frac{y}{x} - \tan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Definiendo $w = \frac{y}{x}$ nos queda la ecuación separable:

$$\dot{w} = \frac{\dot{y}}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{w - \tan(w)}{x} + \frac{w}{x} = -\frac{\tan(w)}{x}.$$

Como tangente se anula en $k\pi$ y se indefine en $k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Debemos analizar estos distintos casos.

- Si $w_0 = w(x_0) = y(x_0)/x_0 = 0$, entonces la función constante $w \equiv 0$ es una solución.
- Si $w_0 \in \left(k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces el intervalo máximo dónde tangente no se anula va desde $w_1 = k\pi$ hasta $w_2 = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

  Despejando e integrando, la inversa de la solución nos da

  $$F(w; w_0) = \int_{w_0}^w \frac{du}{\tan(u)} = \log(|\sin(w)|) - \log(|\sin(w_0)|).$$

  Notar que sin importar la paridad de k, la tangente es positiva y por lo tanto la integral es creciente. Luego, como el dominio de la solución es la imagen de la inversa, basta evaluar en los extremos. De esta forma el tiempo máximo y mínimo respectivamente son

  $$T_+ = \lim_{w \uparrow k\pi + \frac{\pi}{2}} F(w; w_0) = -\log(|\sin(w_0)|) \qquad T_- = \lim_{w \downarrow k\pi} F(w; w_0) = -\infty.$$

  Finalmente, despejando la siguiente expresión (que salió de haber integrado)

  $$\log(|\sin(w)|) - \log(|\sin(w_0)|) = \log(|x_0|) - \log(|x|).$$

  Podemos encontrar la ecuación explícita de la solución (en términos de w)

  $$w = \arcsin\left(\frac{x_0}{x}\sin(w_0)\right).$$

  Deshaciendo el cambio, la solución en términos de y es

  $$y = x\arcsin\left(\frac{x_0}{x}\sin(y_0/x_0)\right).$$

- Si $w \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right)$ la tangente es negativa y por lo tanto $F(w; w_0)$ es decreciente. Luego, lo único que cambia es el intervalo máximo de la solución, siendo este delimitado por

  $$T_- = \lim_{w \uparrow k\pi} F(w; w_0) = -\infty \qquad T_+ = \lim_{w \downarrow k\pi + \frac{\pi}{2}} F(w; w_0) = \log(|\sin(w_0)|).$$

$\square$

Problema 2

Investigue la unicidad de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \begin{cases} -t\sqrt{|x|} & , x \geq 0 \\ t\sqrt{|x|} & , x \leq 0 \end{cases}.$$

Muestre que el PVI $x(0) = x_0$ tiene una única solución global para cada $x_0 \in \mathbb{R}$. Sin embargo, muestre que las soluciones globales de todas formas se intersectan.

Hint: Note que si $x(t)$ es una solución, también lo es $x(-t)$ y $-x(t)$. Así que solo hace falta considerar los casos $x_0 \geq 0$ y $t_0 \geq 0$.

Demostración. La ecuación es separable. Analicemos las condiciones iniciales.

- Si $x_0 = 0$ entonces $x(t) = -x(t) = x(-t) \equiv 0$ es una solución global.
- Si $x_0 > 0$ el IM es $(x_1, x_2) = (0, \infty)$. Despejando e integrando de la manera usual tenemos que la solución es

$$x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t_0^2 - t^2}{4}\right)^2 \qquad -2\sqrt{x_0} < t < \infty.$$

  Dado que las apariciones del tiempo son cuadráticas identificamos la simetría $t \to -t$, así que $x(-t)$ también es solución. Además, la solución es única puesto que $F(x; x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{\sqrt{u}}$ es estrictamente creciente en (x_1, x_2).

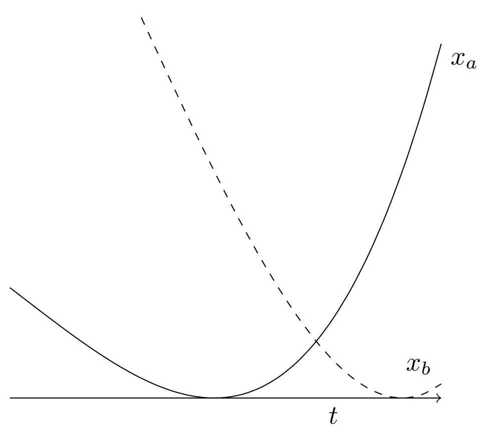
- Si $x_0 < 0$ el IM es $(x_1, x_2) = (-\infty, 0)$. Luego, la solución es

$$x(t) = -\left(\sqrt{-x_0} + \frac{t_0^2 - t^2}{4}\right)^2 \qquad -\infty < t < 2\sqrt{-x_0}.$$

  Dado que $-x_0 > 0$ tenemos la misma solución que antes pero reflejada con respecto al eje t (es decir, $-x(t)$ también es solución). Por otro lado, podemos observar la misma simetría con respecto a t. Finalmente, la solución es única dado que $F(x; x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{du}{\sqrt{-u}}$ es estrictamente creciente en (x_1, x_2).

Notadas las simetrías, seguiremos en análisis considerando $x_0, t_0 \geq 0$. Como la solución una cuártica con múltiplicidad 2 y las raíces existen (podemos despejar t explícitamente) hay dos intersecciones con la solución $x \equiv 0$, ahora, bajo las restricciones de t sólo una es parte de la solución particular para ese x_0 y en nuestro análisis es la raíz positiva.

Para ver que intersecta con otras soluciones no nulas, consideremos x_0 fijo. Para un tiempo inicial t_a, el área de interés es el trozo que va desde $-2\sqrt{x_0}$ hasta la primera raíz positiva de la solución (llamemosla T_a) ya que aquí podrían intersectarse. Y en efecto, si $a < b$ entonces $T_a < T_b$, y por lo tanto la curva que sube desde el tiempo T_a debe intersectar a la curva que baja y que toca el 0 en el tiempo T_b.



$\square$

Problema 3

Considere la ecuación
$$F(x,y)=0, \qquad F\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2).$$
Suponga que $y(x)$ soluciona esta ecuación. Muestre que $y(x)$ satisface
$$p(x,y)y'+q(x,y)=0 \tag{$\star$}$$
Donde
$$p(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \qquad q(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}.$$
Muestre que tenemos
$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}.$$

Para el recíproco, una ecuación diferencial de primer orden como la de arriba ($\star$) (con coeficientes arbitrareos $p(x,y)$ y $q(x,y)$) que satisface la última ecuación es llamada **exacta**. Muestre que si la ecuación es exacta, entonces existe una función F (como la de arriba) correspondiente. Encuentre una fórmula explícita para F en términos de p y q. ¿Está F determinada de manera única por p y q?

Muestre que
$$(4bxy+3x+5)y'+3x^2+8ax+2by^2+3y=0$$
es exacta. Encuentre F y las soluciones.

Demostración. Supongamos que $y(x)$ es solución del sistema. Dado que $F(x,y)\equiv 0$, la derivada también debe ser nula. Luego, por la regla de la cadena tenemos que
$$0=d_xF(x,y(x))=\partial_xF(x,y)+\partial_yF(x,y)y'=q(x,y)+p(x,y)y'.$$

Como F es de clase C^2, el teorema de Clairaut nos dice que el orden de las segundas derivadas es intercambiable. El resultado es directo pues
$$\partial_yq(x,y)=\partial_y\partial_xF(x,y)=\partial_x\partial_yF(x,y)=\partial_xp(x,y).$$

Ahora veamos el converso. Supongamos que tenemos funciones $p(x,y),q(x,y)$ que satisfacen
$$\partial_yq(x,y)=\partial_xp(x,y) \quad \text{ y } \quad p(x,y)y'+q(x,y)=0.$$

Reexpresando la segunda ecuación como
$$p(x,y)dy+q(x,y)dx=0$$
e integrando sobre un camino cerrado con interior (C°) acotado y simplemente conexo (muchas hipótesis, pero como tenemos todo $\mathbb{R}^2$ para elegir, le damos nomás) tenemos que (por Green)
$$\int_C p(x,y)dy+q(x,y)dx=\int_{C^\circ}\partial_xp(x,y)-\partial_yq(x,y)dxdy=0.$$
Definamos entonces
$$F(x,y)=\int_C p(x,y)dy+q(x,y)dx.$$
De esta forma,
$$\partial_yF(x,y)=.$$

Veamos que el sistema
$$\underbrace{(4bxy+3x+5)}_{p(x,y)}y'+\underbrace{3x^2+8ax+2by^2+3y}_{q(x,y)}=0$$
es exacto. Basta comparar derivadas parciales
$$\partial_xp(x,y)=4by+3=\partial_yq(x,y).$$
Así que es exacta. Luego,
$$F(x,y)=\int 4bxy+3x+5dx=2byx^2+\frac{3}{2}x^2+5x+C(y).$$

Donde $C(y)$ es una constante dependiendo de y. Finalmente, las soluciones están dadas por (usando que $F(x, y) = 0$)

$$y(x) = -\frac{(3/2)x^2 + 5x - C(y)}{2bx^2}.$$

□

Problema 4

Sean $\tau > 0$ y $\gamma > 0$ constantes. Considere el problema de valor inicial

$$\dot{x} = \gamma\sqrt{|x|} - \tau x, \qquad x(0) = x_0.$$

(a) Resuelva el problema. (*Sugerencia*: La EDO es de tipo Bernoulli).

(b) Analice la unicidad de la solución y determine el intervalo máximo de definición. Si hay falla de unicidad, explique por qué esto no contradice el teorema de Picard-Lindelöf.

(c) Analice el comportamiento a largo plazo ($t \to \infty$) cuando $x_0 > 0$.

Demostración.

(a) En primer lugar notemos que el sistema es autónomo.

Para $x_0 = 0$, la función $x \equiv 0$ es una solución.

Para $x_0 > 0$, la ecuación queda

$$\dot{x} = \gamma x^{1/2} - \tau x.$$

La cual es Bernoulli con $n = 1/2$. Luego, el cambio de variables $y = x^{1/2}$ nos da el sistema lineal

$$\dot{y} = \frac{\gamma - \tau y}{2}.$$

Con intervalo máximal en y de $y_2 = \frac{\tau}{\gamma}$ y $y_1 = -\infty$.

Usando el método del propagador obtenemos que la solución es

$$y = x_0 \exp\left(-\frac{\tau}{2}\int_0^t ds\right) + \frac{\gamma}{2}\int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{2}\int_s^t ds\right) ds = x_0 e^{-\frac{\tau t}{2}} + \frac{\gamma}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau t}{2}}\right).$$

Como el sistema es autónomo y lineal, vale para todo tiempo t (ya que los coeficientes del sistema son continuos).

Para $x_0 < 0$ el mismo cambio de variables nos arroja la misma solución (reemplazando x_0 con $-x_0$).

(b) Primero reescribamos la ecuación en términos de x

$$x = \pm\left(|x_0| e^{-\frac{\tau t}{2}} + \frac{\gamma}{\tau}\left(1 - e^{-\frac{\tau t}{2}}\right)\right)^2.$$

Podemos notar múltiples soluciones para $x_0 = 0$, esto no contradice Picard-Lindelöf pues la función $f(t, x) = \gamma\sqrt{|x|} - \tau x$ no es Lipschitz en x cerca de 0, en efecto $\frac{\gamma\sqrt{|x|} - \tau x - 0}{x - 0}$ no es acotada.

(c) Para $x_0 > 0$, tomando el límite vemos que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \pm\left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^2.$$

Así que dependiendo de la solución que escogamos, esta se pegará a $(\gamma/\tau)^2$ o $-(\gamma/\tau)^2$.

□

Problema 5

Considere el problema de valor inicial

$$\dot{x} = x^3 - e^{t^2}x^2, \qquad x(0) = \xi \qquad\qquad (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}.$$

(a) Identifique y dibuje la 0-isoclina de la ecuación.

(b) Demuestre que para $\xi \in [0, 1]$, la solución $x(t)$ está definida para todos $t \geq 0$ y que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

(c) Pruebe que cuando $\xi \geq \xi_0$ es suficientemente grande, $x(t)$ explota en tiempo finito. (*Sugerencia:* Construya una subsolución de la forma $y(t) = e^{t^2} g(t)$ que explota en tiempo finito).

Demostración. (a) LLamemos $f(t, x)$ al lado derecho de la ecuación. Luego, la 0-isoclina corresponde a la curva de nivel $f(t, x) = 0$.

$$\{f(t, x) = 0\} = \{x = 0\} \cup \left\{x = e^{t^2}\right\}.$$

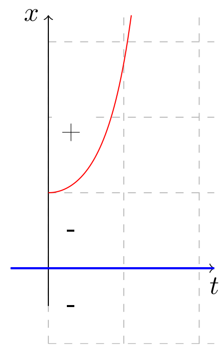


Figura 1: En rojo la curva $x = e^{t^2}$ y en azul $x = 0$

(b) Primero veamos los bordes. Para $\xi = 0$, la derivada es nula en toda la vecindad y no tiene escapatoria así que se queda dentro de la solución $x = 0$. Para $\xi = 1$, la derivada también es nula, sin embargo, en la vecindad la derivada es negativa, luego, la solución que pasa por aquí debe bajar. Así mismo, para $\xi \in (0, 1)$ la derivada es negativa así que la solución debe bajar. Dado que en $x = 0$ tenemos una 0-isoclina/asíntota, las soluciones se estancan en este valor, esto a su vez no asegura que ninguna solución explota en tiempo finito.

(c) Consideremos $\xi \geq \xi_0 \gg 1$ (muy sobre la zona roja), aquí la derivada es positiva y la curva e^{t^2} es una subsolución. Necesitamos una subsolución que explote en tiempo finito. Consideremos

$$y(t) = -\xi_0 \frac{e^{t^2}}{t-1} \qquad 0 \leq t < 1.$$

Luego, $y(0) = \xi_0$ y

$$\dot{y} = -\xi_0 e^{t^2} \left(\frac{2t}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2} \right) < f(t, y) = -\xi_0 e^{t^2} \left(\frac{\xi_0^2 e^{2t^2}}{(t-1)^3} - \frac{e^{2t^2}}{(t-1)^2} \right).$$

Así que, en efecto, es una subsolución y explota en $t = 1$, por lo tanto cualquier otra solución con PVI sobre ξ_0 explota en tiempo finito.

□

Problema 6

[Bifurcaciones] Describa cómo cambia el retrato de fase correspondiente a la ecuación dada cuando varía el parámetro $r \in \mathbb{R}$ (ie. dibuje el diagrama de bifurcaciones). Clasifique las bifurcaciones que ocurren y calcule el(los) valor(es) de bifuración de r:

(a) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x^2}$.

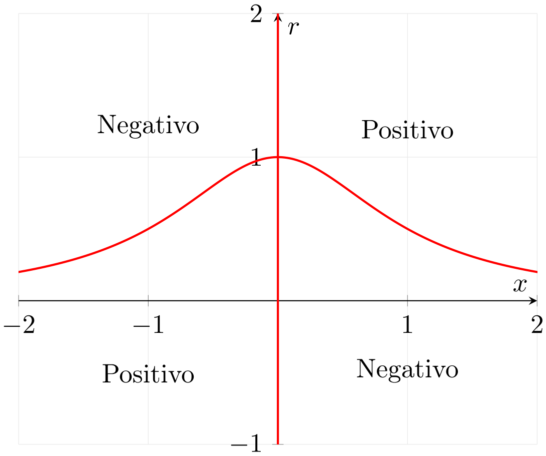
(b) $\dot{x} = x^3 - 2x^2 - 3x - rx$.

Demostración. (a) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x^2}$

Grafiquemos la curva de nivel $f(x, r) = 0$. Esto es, el conjunto

$$\left\{rx - \frac{x}{1+x^2} = 0\right\} = \{x = 0\} \cup \left\{r = \frac{1}{1+x^2}\right\}.$$

Figura 2: Gráfico de la curva de nivel $f(x, y) = 0$.



Luego la clasificación de puntos es

- Si $r \leq 0$ hay un solo punto de equilibrio y es estable.
- Para $0 < r < 1$ hay tres puntos de equilibro. De izquierda a derecha (según el gráfico) tenemos la secuencia *inestable-estable-inestable.*
- Para $r \geq 1$ tenemos un solo punto de equilibrio y es inestable.

La bifurcación es de tipo Pitchfork con $r_c = 1$.

(b) $\dot{x} = x^3 - 2x^2 - 3x - rx$. Graficamos la curva de nivel de $f(x, r)$.

$$\{f(x, r) = 0\} = \{x = 0\} \cup \{r = (x - 3)(x + 1)\}.$$

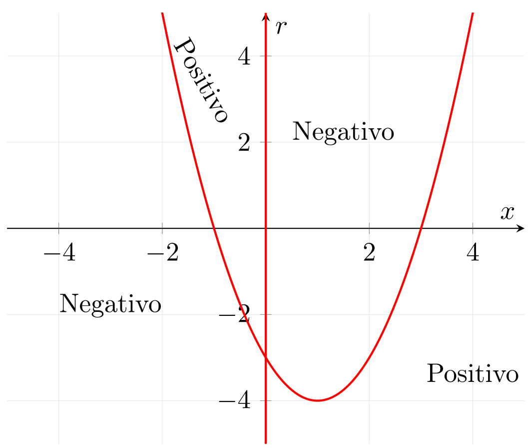


Figura 3: Gráfico de la curva de nivel $f(x, y) = 0$.

Luego, la clasificación de puntos es

- Si $r < -4$ hay un solo punto de equilibrio y es *inestable.*
- Si $r = -4$ hay dos puntos de equilibrio y ambos son *inestables.*
- Si $-4 < r < -3$ hay tres puntos de equilibrio y siguen la secuencia *inestable-estable-inestable.*
- Si $r = -3$ hay dos puntos de equilibrio y son *semiestable-inestable.*
- Si $r > -3$ hay tres puntos de equilibrio y siguen la secuencia *inestable-estable-inestable.*

La bifurcación es de tipo transcrítico con $r_c = -3$.

□

Problema 7

[Efecto Alle] Para ciertas especies de animales, la razón de crecimiento efectiva de su población, $\dot{x}/x$, es máximal cuando la población llega a cierto nivel positivo $x = b > 0$. Una manera de modelar este fenómeno es por la ecuación

$$\frac{\dot{x}}{x} = r\left(a - (x/b - 1)^2\right), \qquad a, b, r > 0.$$

Determine las condiciones necesarias y suficientes para los parámetros positivos r, a, b para que exista un crítico nivel de población inicial $x_c > 0$ tal que si $0 < x(0) < x_c$, la población se extingue a largo plazo.

Demostración. Llamemos $f(x, r, a, b)$ a la función del lado derecho. Veamos cuando es cero.

$$\left\{r\left(a - \left(\frac{x}{b} - 1\right)^2\right) = 0\right\} \overset{r \geq 0}{=} \left\{a = \left(\frac{x}{b} - 1\right)^2\right\}.$$

Los puntos fijos están dados por la intersección de la recta a y la parábola $((x/b) - 1)^2$.

Vemos que para $a > 0$ y $b > 0$ siempre habrán dos puntos fijos, llamemoslos x^- y x^+ respectivamente ($x^- \leq x^+$). Luego,

- Para $x < x^-$, la parabola está sobre la recta, así que la derivada es negativa.
- Para $x^- < x < x^+$, la recta está sobre la parábola, así que la derivada es positiva.
- Para $x > x^+$, de nuevo la recta está bajo la parábola, así que la derivada es negativa.

Concluimos entonces que x^- es un punto inestable y x^+ es un punto estable.
Despejando obtenemos x^- explícitamente ($x^- = b(1-\sqrt{a})$) y por el análisis anterior vemos que para $x(0) < x^- = x_c$ la población decrecerá hasta extinguirse. La condición necesaria es que el sistema tenga dos soluciones positivas distintas, esto para si y solamente si $\sqrt{a} < 1$.

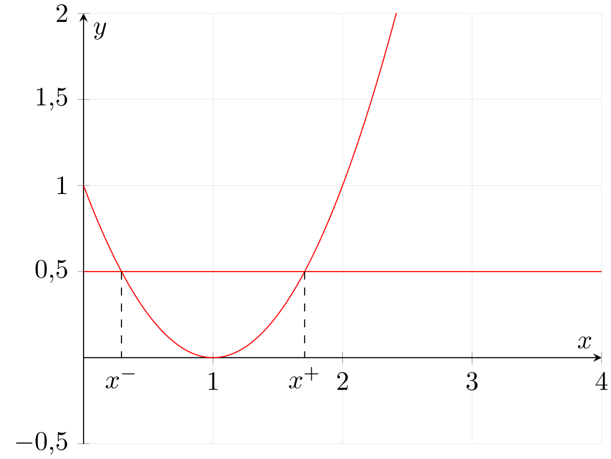


Figura 4: Puntos fijos de la curva de nivel $f(x, r, a, b) = 0$ para $a = ,5, b = 1$.

□

Problema 8

Sean $T > 0$, $M \geq 1$, y sea $a\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ una función continua con valores en matrices $n \times n$, que satisface

$$|a(t)v| \leq M|v| \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]\,.$$

Demuestre que si $x \in C^2\left([0,T], \mathbb{R}^n\right)$ es una solución de problema de segundo orden

$$\begin{cases} \ddot{x} = a(t)x & , (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0 & , x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

entonces $x(t)$ satisface la estimación

$$|x(t)| \leq \sqrt{|x_0|^2 + |y_0|^2}e^{Mt} \qquad \forall t \in [0,T].$$

Demostración. Poniendo $u = (u_1 = x, u_2 = \dot{x})$ nos queda el sistema equivalente

$$\dot{u} = (\dot{x}, a(t)x) = f(u) \quad , \quad u(0) = (x_0, y_0) = u_0 \tag{†}$$

Notemos que $|u_0| = \sqrt{|x_0|^2 + |y_0|^2}$. Luego, por el TFC tenemos que

$$u - u_0 = \int_0^t \dot{u}(s)ds.$$

Tomando norma tenemos que

$$|u| \leq |u_0| + \int_0^t |\dot{u}(s)|ds.$$

Notemos que

$$|\dot{u}(s)| = \sqrt{|\dot{x}(s)|^2 + |a(t)x|^2}.$$

Y si dios quiere de aquí sale usando Grönwell en algún momento.

□