Docente: Nikola Kamburov
Ayudante: Jorge Acuña

Problema 1

1. Considere la ecuación
$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = -zy.$$
Escríbala en la forma de Sturm-Liouville
$$-(p(x)y')' + (q(x) - z\,r(x))y = 0$$
donde $z \in \mathbb{C}$.

2. Encuentre la forma del operador de Sturm-Liouville para
$$\begin{cases} -xy'' - (1-x)y' = zy & ,x \in (1,2) \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases}.$$

1. Multiplicando la ecuación por el factor integrante
$$\Phi(x) = \frac{1}{P(x)} \exp\left(\int_{t_0}^{x} \frac{Q(t)}{P(t)} dt\right)$$
la ecuación se expresa como (abusando notación para fines estéticos)
$$\begin{aligned} y''\, e^{\int Q/P} + \frac{Q}{P} e^{\int Q/P} y' + Ry\Phi &= -zy\Phi \\ (y'\, e^{\int Q/P})' + Ry\phi &= -zy\Phi \\ -(y' \underbrace{e^{\int Q/P}}_{p})' + (\underbrace{-R\phi}_{q} - z \underbrace{\Phi}_{r})y &= 0 \\ -(py')' + (q - z\,r)y &= 0 \end{aligned}$$
llegándose a lo querido.

2.

Problema 2

1. Encuentre criterio sobre los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que el problema
$$\begin{cases} y''(0) = 0 & ,t \in (0,1) \\ y'(0) = \alpha y(0) & ,y'(1) = \beta y(1) \end{cases}$$
tenga solo solución nula.

2. Suponga que se cumple el criterio de la parte anterior. Encuentre función continua $G\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $f \in \mathcal{C}[0,1]$ la solución al problema
$$\begin{cases} -y'' = f & ,t \in (0,1) \\ y'(0) = \alpha y(0) & ,y'(1) = \beta y(1) \end{cases}.$$

se escribe como

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s) ds, \quad t \in [0,1].$$

1. Como la segunda derivada de y es nula, esta debe ser una función lineal de la forma $y(t) = at + b$ que asumiremos no nula (i.e. $a \neq 0$).

   Aplicando las condiciones de frontera obtenemos que

   $$\begin{cases} a = y'(0) = \alpha y(0) = \alpha b \\ a = y'(1) = \beta y(1) = \beta(a+b) \end{cases}$$

   Notar que $\alpha \neq -1$ y $b \neq 0$, pues en esos caso a es necesariamente 0, lo cual no puede pasar ya que la suposición es que y es una función lineal no nula. Luego:

   $$\beta = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

   Así, para que y sea la función nula es necesario que $\alpha = -1$ o bien $\beta \neq \alpha/(\alpha+1)$.

2. El operador de Sturm-Liouville asociado al sistema es

   $$L = -\frac{d^2}{dx^2}; \qquad B_0 \colon y'(0) = \alpha y(0); \qquad B_1 \colon y'(1) = \beta y(1).$$

   Por la parte anterior, si $\beta \neq \alpha/(\alpha+1)$ el operador $L - 0 = L$ es invertible y la solución y está dada por la fórmula:

   $$y(t) = W^{-1} \left(\int_0^t u^1(t) u^0(s) f(s) ds + \int_t^1 u^0(t) u^1(s) f(s) ds \right).$$

   Donde W^{-1} es el Wronskiano modificado y u^i es una solución del del problema $Lu^i = 0$ con condición iniciales B_i. Resolviendo los problemas correspondientes obtenemos que $u^0(t) = \alpha t + 1$ y $u^1(t) = \beta(t-1)+1$. De esta forma:

   $$W = u^0(t) \frac{d}{dt} u^1(t) - u^1(t) \frac{d}{dt} u^0(t) \overset{t=0}{=} \beta - (1-\beta)\alpha = \beta(1+\alpha) - \alpha \neq 0.$$

   Y la función G queda definida como

   $$G(t,s) = -W^{-1} \begin{cases} u^1(t) u^0(s) & , s \leq t \\ u^0(t) u^1(s) & , s \geq t \end{cases}.$$

Problema 3

Sea $\theta \in \mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, $q = \bar{q} \in \mathcal{C}\,[0, 2\pi]$. Definamos el operador,

$$L_{q,\theta} := -\frac{d^2}{dt^2} + q$$

con dominio $\mathcal{D}(L_{q,\theta}) = \left\{ u \in \mathcal{C}^2\,[0,2\pi] : u(2\pi) = \theta u(0),\, u'(2\pi) = \theta u'(0) \right\}$.

1. Demuestre que $L_{q,\theta}$ es simétrico en $L^2\,(0, 2\pi)$.
2. Suponga que $q(t) = 1$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Halle explícitamente los valores propios de $L_{1,\theta}$ y las funciones propias correspondientes para $\theta \in \mathbb{S}^1$. Encuentre el conjunto:

   $$\left\{ \theta \in \mathbb{S}^1 \colon \text{Todos los valores propios de } L_{1,\theta} \text{ son simples} \right\}.$$

1. Sean $u, v \in \mathcal{D}(L)$, luego:

$$\begin{aligned}
\langle v, L_{q,\theta} u\rangle - \langle L_{q,\theta} v, u\rangle &= \int_0^{2\pi} \overline{v(t)}(-u''(t) + u(t)q(t))dt - \int_0^{2\pi} \overline{(-v''(t) + v(t)q(t))}u(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} -\overline{v(t)}u''(t)dt - \int_0^{2\pi} -\overline{v''(t)}u(t)dt
\end{aligned}$$