PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DOCENTE: CARLOS ROMÁN
AYUDANTE: SANTIAGO GONZÁLEZ

MAT2505 - Ecuaciones Diferenciales Parciales

Tarea 1 - Sebastián Sánchez

$\boxed{\text{AVISO}}$ El vector normal lo denoto por $\hat{\mathbf{n}}$ en vez de ν.

PROBLEMA 1 Pruebe que $u(x) = \dfrac{e^{-|x|}}{4\pi|x|}$ satisface, en el sentido de las distribuciones,

$$-\Delta u + u = \delta_0 \text{ en } \mathbb{R}^3.$$

SOLUCIÓN La igualdad en el sentido de distribuciones significa que:

$$\langle -\Delta f_u + f_u, \psi \rangle = \psi(0) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),$$

donde f_u es la distribución asociada a u. Debemos probar esto (que existe y vale la igualdad).

En primer lugar, veamos que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Como u es continua lejos de cero, en particular es acotada y por lo tanto su integral es finita en cualquier compacto. Así que en realidad basta ver que la integral es finita cerca de cero. Consideremos B_1 la bola unitaria abierta. Luego,

$$\int_{B_1} |u(x)| dx \leq \int_{B_1} \frac{1}{4\pi|x|^1} dx.$$

Recordamos que $f(x) = 1/|x|^\alpha$ tiene integral finita sobre la bola unitaria si y solo si $\alpha < n$. En este caso $\alpha = 1$ y $n = 3$, así que la integral es finita. Con esto tenemos que u es localmente integrable en $\mathbb{R}^3$.

Dado que u es la localmente integrable, existe una distribución f_u asociada. Más aún, existen $\partial_{x_i} f_u$ distribuciones asociadas para cada $i = 1, \ldots, n$ definidas como

$$\langle \partial_{x_i} f_u, \psi \rangle = -\langle f_u, \partial_{x_i} \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Se sigue que Δf_u satisface,

$$\langle -\Delta f_u, \psi \rangle = -\langle f_u, \Delta \psi \rangle.$$

Y de hecho, $(-\Delta f_u + f_u)$ también es una distribución definida como,

$$\langle -\Delta f_u + f_u, \psi \rangle \coloneqq \langle f_u, -\Delta \psi + \psi \rangle.$$

En efecto, si K es un compacto y $\psi \in \mathcal{D}$ es tal que $\operatorname{supp}\psi \subset K$, entonces:

$$|\langle -\Delta f_u + f_u, \psi\rangle| \leq \int_K |(-\Delta\psi + \psi)u| \leq \sup_K|-\Delta\psi + \psi| \underbrace{\int_K |u|}_{<\infty}.$$

Nótese que la distribución es de orden 2 con constante $\int_K |u|$.

Ahora debemos probar que $-\Delta f_u + f_u$ opera como δ_0. Es decir, debemos probar que

$$\langle -\Delta f_u + f_u, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta\psi + \psi)u = \psi(0) = \langle \delta_0, \psi\rangle.$$

Vamos a ello. Sea $1 > \epsilon > 0$ un real positivo menor uno y $B \coloneqq B(0,\epsilon)$ la bola centrada en el origen de radio ϵ. Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta\psi + \psi)u = \underbrace{\int_B (-\Delta\psi + \psi)u}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n\setminus B} (-\Delta\psi + \psi)u}_{I_2}.$$

Primero lidiemos con I_1.

$$\begin{aligned}
\|I_1\| &\leq \|-\Delta\psi + \psi\|_\infty \left|\int_B u\right| \\
&\leq \|-\Delta\psi + \psi\|_\infty \left|\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\epsilon u(r,t_1,t_2) r^2 \, dr \, dt_1 \, dt_2\right|.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\|I_1\| &\leq \|-\Delta\psi + \psi\|_\infty \left|2\pi^2 \int_0^\epsilon \frac{e^{-r}}{4\pi r} r^2 \, dr\right| \\
&= \|-\Delta\psi + \psi\|_\infty \left|\frac{\pi}{2} \int_0^\epsilon e^{-r} r \, dr\right| \\
&= \frac{\pi}{2} \|-\Delta\psi + \psi\|_\infty \big(e^{-\epsilon}(\epsilon + 1) - 1\big).
\end{aligned}$$

Cuando $\epsilon \to 0$ la expresión se va a 0.

Ahora veamos I_2. Consideremos $R \gg 1$ tal que $\operatorname{supp}\psi \subset B(0,R) =: B_R$. Luego,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{B_R\setminus B} (-\Delta\psi + \psi)u \\
&= \int_{B_R\setminus B} -u\Delta\psi + \int_{B_R\setminus B} u\psi \\
&= \int_{B_R\setminus B} -\Delta u\psi + \int_{\partial B_R\setminus B} \psi\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u - u\partial_{\hat{\mathbf{n}}}\psi + \int_{B_R\setminus B} u\psi.
\end{aligned}$$

Notando que $-\Delta u + u = 0$ nos queda

$$I_2 = \underbrace{\int_{\partial B_R\setminus B} \psi\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u}_{J_2} - \underbrace{\int_{\partial B_R\setminus B} u\partial_{\hat{\mathbf{n}}}\psi}_{J_1}.$$

Comenzamos por J_1.

$$|J_1| \leq \|\partial_{\hat{\mathbf{n}}}\psi\|_\infty \left|\int_{\partial B_R \setminus B} u\right|.$$

Ya vimos que la integral sobre la bola se va a cero si $\epsilon \to 0$, en particular lo hace su borde. Además, el borde exterior es donde ψ se anula, así que $J_1 \to 0$

Para J_2. Primero notamos el borde exterior es donde ψ se anula, así que solo quedamos con el borde interior. Ahora debemos observar que $\hat{\mathbf{n}}(x) = -x/|x|$ y $\partial_{x_i} u(x) = -\frac{e^{-|x|}(|x|+1)}{4\pi|x|^2}\frac{x_i}{|x|}$, así que

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u = \nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{e^{-|x|}(|x|+1)}{4\pi|x|^2}\frac{x_i^2}{|x|^2} = \frac{e^{-|x|}(|x|+1)}{4\pi|x|^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\partial B} \frac{e^{-|x|}(|x|+1)}{4\pi|x|^2}\psi(x)\, dS(x) \\ &= \frac{e^{-\epsilon}(\epsilon+1)}{4\pi\epsilon^2}\int_{\partial B}\psi \\ &= e^{-\epsilon}(\epsilon+1)\fint_{\partial B}\psi \\ &\xrightarrow{\epsilon\to 0} \psi(0). \end{aligned}$$

En conclusión, tenemos que

$$\langle -\Delta f_u + f_u, \psi\rangle = \psi(0).$$

Que es lo que queriamos probar.

PROBLEMA 2 Sea u una función armónica en un conjunto Ω abierto y conexo en $\mathbb{R}^n$. Sean $a \leq b \leq c$, con $b^2 = ac$ y suponga que $\overline{B(x_0, c)} \subset \Omega$. Demuestre que

$$\int_{|w|=1} u(x_0 + aw)u(x_0 + cw)\, dw = \int_{|w|=1} u(x_0 + bw)^2\, dw.$$

Deduzca de lo anterior que si u es constante en algún subconjunto abierto de Ω, entonces u es constante en Ω.

Sugerencia: Considere a como un parámetro.

SOLUCIÓN Consideremos $f(a) = \int_{|w|=1} u(x_0 + aw)u(x_0 + \frac{b^2}{a}w)dw$. De esta forma si f es una función constante tendremos lo pedido. En específico, probaremos que $f' = 0$.

Como $u \in L^1\left(\overline{B(x_0, c)}\right)$ y es de hecho $\mathcal{C}^2$ por ser armónica. En particular, se cumple el TCD, así que podemos intercambiar límites entre la derivadas y la integral. Especificamente, se tiene que:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \int_{|w|=1} (\nabla u(x_0 + aw)\cdot w)u(x_0 + \frac{b^2}{a}w) - (\nabla u(x_0 + \frac{b^2}{a}w)\cdot w)\frac{b^2}{a^2}u(x_0 + aw)\, dw \\ &= \underbrace{\int_{|w|=1} u(x_0 + \frac{b^2}{a}w)(\nabla u(x_0 + aw)\cdot w)\, dw}_{I_1} - \underbrace{\int_{|w|=1} \frac{b^2}{a^2}u(x_0 + aw)(\nabla u(x_0 + \frac{b^2}{a}w)\cdot w)\, dw}_{I_2}. \end{aligned}$$

Considerando la región de integración como la bola unitaria vemos que w juega el papel del vector normal exterior, sin embargo, en I_1 por ejemplo $\nabla u(x_0 + aw) \cdot w$ no es la derivada normal, pues falta un factor a. Lo análogo pasa para I_2, en este caso falta el factor b^2/a. Agregando dichos factores, podemos aplicar una identidad de Green.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{a}\int_{|w|<1} \nabla u(x_0 + \frac{b^2}{a}w) \cdot \nabla u(x_0 + aw) + u(x_0 + \frac{b^2}{a}w)\Delta u(x_0 + aw)\, dw \\
&= \frac{1}{a}\int_{|w|<1} \nabla u(x_0 + \frac{b^2}{a}w) \cdot \nabla u(x_0 + aw)\, dw \\
I_2 &= \frac{1}{a}\int_{|w|<1} \nabla u(x_0 + \frac{b^2}{a}w) \cdot \nabla u(x_0 + aw) + u(x_0 + aw)\Delta u(x_0 + \frac{b^2}{a}w)\, dw \\
&= \frac{1}{a}\int_{|w|<1} \nabla u(x_0 + \frac{b^2}{a}w) \cdot \nabla u(x_0 + aw)\, dw.
\end{aligned}$$

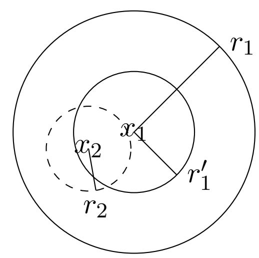
Luego,

$$f'(a) = I_1 - I_2 = 0.$$

Como a era un real positivo arbitrario, concluimos que f es constante (en los positivos) y por lo tanto

$$f(a) = \int_{|w|=1} u(x_0 + aw)u(x_0 + cw)\, dw = \int_{|w|=1} u(x_0 + bw)^2\, dw = f(b).$$

Para ver lo segundo, denotemos por A a una componente conexa de Ω donde la función u se anula. Probaremos que A es todo Ω mostrando que es A es cerrado. En efecto, si no lo fuera, existiría un punto límite $x_1 \in \partial A$ tal que $x_1 \notin A$. Sea $r_1 > 0$ algún real positivo. Consideremos la bola de radio $r_1' < r_1/2$ centrada en x_1 y sea $x_2 \in A \cap B(x_1, r_1')$. Se sigue que para $r_2 < r_1'$ se cumple que $B(x_2, r_2) \subset A \cap B(x_1, r_1)$. Por la igualdad anterior, tendremos que



$$\int_{|w|=1} u(x_1 + r_2 w)u(x_1 + r_1' w) = \int_{|w|=1} u^2(x_1 + \sqrt{r_1' r_2}\, w).$$

La integral de la izquierda da cero, puesto que la bola de radio r_2 está completamente contenida en A. Se sigue que u se anula sobre $\partial B(x_2, \sqrt{r_1' r_2})$. Si tomamos $r_2 \to r_1'$, por continuidad tendremos que

$$\int_{|w|=1} u^2(x_1 + r_1' w) = 0.$$

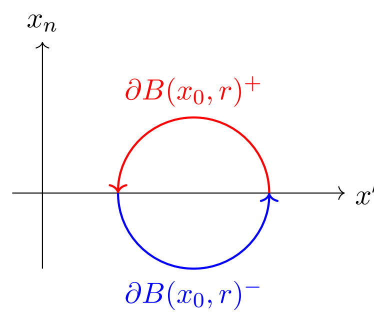
De lo que se sigue que $u = 0$ en $\partial B(x_2, r_1')$ y por lo tanto $x_1 \in A$ (contradicción). Se concluye así que A es abierto y cerrado a la vez en un conjunto conexo, por lo que $A = \Omega$.

PROBLEMA 3 Sea $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Suponga que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ es armónica en $\mathbb{R}^n_+$ y tal que $u = 0$ sobre $\partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$. Demuestre que la función

$$v(x) := \begin{cases} u(x) & \text{, Si } x_n \geq 0 \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & \text{, Si } x_n < 0 \end{cases}$$

es de clase $\mathcal{C}^2$ y armónica en $\mathbb{R}^n$.

SOLUCIÓN



Primero notemos que v es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_0$ donde $\mathbb{R}^n_0 = \{(x',x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times 0\}$, por lo que para probar el resultado basta ver que es armónica en $\mathbb{R}^n_0$. Como $u \in \mathcal{C}^2$ hasta la frontera, es claro que v es continua (de hecho, $\mathcal{C}^2$) en $\mathbb{R}^n$. Veremos que v cumple la propiedad de la media y con eso concluiremos que es armónica.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n_0$ y $r > 0$ arbitrario. Luego,

$$\int_{\partial B(x_0,r)} v(y)\, dS(y) = \int_{\partial B(x_0,r)^+} v(y)\, dS(y) + \int_{\partial B(x_0,r)^-} v(y)\, dS(y)$$

donde $\partial B(x_0,r)^\pm$ es el borde superior/inferior de la bola. Notando que

$$\int_{\partial B(x_0,r)^-} v(y)\, dS(y) = \int_{\partial B(x_0,r)^+} -u(y)\, dS(y),$$

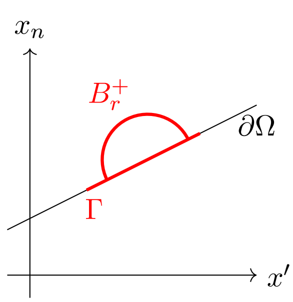
vemos que la integral sobre el borde de la bola se anula. Es decir, para cualquier bola con centro en $\mathbb{R}^n_0$ se cumple que la integral sobre el borde da cero. En particular vale para las integrales promedio, por lo tanto, vale la propiedad de la media, pues

$$0 = v(x_0) = \fint_{\partial B(x_0,r)} v(y)\, dS(y), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n_0 \quad \forall r > 0^1$$

Por lo tanto, v es armónica en $\mathbb{R}^n$ y de paso $\mathcal{C}^2$.

PROBLEMA 4 Sea u una función armónica en un conjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Suponga que $\partial\Omega$ posee una porción abierta Γ (en la topología relativa) de clase $\mathcal{C}^1$, tal que $u = \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u = 0$ en Γ. Demuestre que u es idénticamente nula en Ω.

SOLUCIÓN



Sea $x_0 \in \Gamma$. Para $0 < r < R := \operatorname{dist}(x, \partial\Omega \setminus \Gamma)$, consideremos la región $B_r := B(x_0,r) \cap \Omega$. Luego, por la primera fórmula de Green tenemos que

$$\int_{B_r} \Delta u(y)\, dy = \int_{\partial B_r} \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u(y)\, dS(y).$$

Como u es armónica en Ω, la integral de la izquierda es nula. Por otro lado, la frontera de B_r se puede descomponer en la porción que toca a Γ y la que está contenida en Ω. La primera es nula por hipótesis. Si denotamos a ∂B_r^+ la región del borde que no es Γ, nos queda

$$\int_{\partial B_r^+} \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u(y)\, dS(y) = 0. \tag{\dagger}$$

[1] Mientras sigan en el dominio.

Si ahora usamos la tercera fórmula de Green, obtenemos que

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dy = \int_{\partial B_r^+} u \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u \, dS(y) \leq \sup_{B_r} \|u\| \int_{\partial B_r^+} \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u \, dS(y) = 0,$$

de donde deducimos que $\nabla u = 0$ en B_r. Ahora, tenemos una función constante y armónica en un abierto B_r que es conexo y acotado, así que aplica el principio del máximo. En particular tenemos que $u = 0$ en B_r (pues debe ser menor al máximo y mayor al mínimo, que es cero). De esta forma, por el Problema 2 concluimos que $u \equiv 0$ en Ω (pues es cero en una abierto contenido y Ω es conexo).