11 DE ABRIL, 2023

0.1. Principio de Dirichlet o Método de energía

Buscamos resolver el problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{, en } \Omega \quad , f \in \mathscr{C}(\Omega) \\ u = g & \text{, en } \partial\Omega \quad , g \in \mathscr{C}(\partial\Omega) \end{cases} . \tag{$\star$}$$

Teorema 1.

Si Ω es acotado y $\partial\Omega \in \mathscr{C}^1$, el problema tiene a lo más una solución de clase $\mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega})$.

DEMOSTRACIÓN

■

Principio de Dirichlet Definimos el funcional de energía

$$\mathscr{I} w := \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - wf)$$

con dominio $\mathscr{A} := \{w \in \mathscr{C}^2(\Omega) \mid w = g \text{ sobre } \partial\Omega\}$.

Teorema 2.

Si $u \in \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathscr{C}(\overline{\Omega})$ es solución del problema $(\star)$ entonces

$$\mathscr{I} u = \min_{w \in \mathscr{A}} \mathscr{I} w.$$

Más aún, si $u \in \mathscr{A}$ cumple la ecuación anterior, entonces u es solución de $(\star)$.