Apuntes
"MAT2505 - Ecuaciones Diferenciales Parciales"

Docente: Carlos Román

Apuntes: Sebastián Sánchez

Índice

09 de Marzo 2023

1. Preliminares: Teoría de medida

Para un conjunto X, decimos que una colección de subconjuntos M de X es una sigma álgebra si contiene a X y es cerrado bajo complementos y uniones numerables. En símbolos:

$$X \in M; \quad A \in M \implies A^c \in M; \quad A_1, A_2, \dots, M \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in M$$

El par (X, M) se dice *espacio medible* y los elementos de M son los *conjuntos medibles*.

Los espacios topológicos tienen una sigma álgebra inducida por sus abiertos (la sigma álgebra más pequeña que contiene a todos los abiertos), llamada *σ-álgebra de Borel* y denotada por $\mathscr{B}(X)$. Para X, Y espacios topológicos con sus respectivas sigma álgebras, decimos que $f : X \to Y$ es una *función medible* si $f^{-1}(A)$ es un conjunto medible para todo A abierto.

Decimos que $m : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una *función de medida* si el vacío tiene medida cero y la medida de una unión (numerable) disjunta de conjuntos medibles es la suma de la medida de los conjuntos. En símbolos:

$$m(\varnothing) = 0 \text{ y } m\left(\bigcup_{n \geq 1} A_i\right) = \sum_{n \geq 1} m(A_i) \text{ con } A_1, A_2, \dots \text{ disjuntos.}$$

A la tripleta (X, M, m) se le dice *espacio de medida*.

Casi siempre trabajaremos en $\mathbb{R}^n$ y la medida estándar para esta será la medida de Lebesgue. Esta le asigna a los intervalos su largo (en $\mathbb{R}$) y se extiende a $\mathbb{R}^n$ como la medida que le asigna a los n-cubos su volumen.

Decimos que un conjunto es despreciable si tiene medida nula. Cuando una propiedad se cumple salvo un conjunto de medida nula, decimos que la propiedad se cumple casi en todas partes o m-ctp.

Una *función indicatriz* $\chi_A : X \to [0,1]$ se define por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}.$$

Una *función simple* es una combinación lineal finita de funciones indicatrices:

$$s = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}(x), \quad A_n \in M, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Definimos la integral de una función simple como

$$\int s \, \mathrm{d}m = \sum_{n=1}^{N} a_n m(A_n).$$

Para una función positiva f la integral se define por

$$\int f \, \mathrm{d}m = \sup_{s \leq f} \int s \, \mathrm{d}m,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples menores a f.

Para una función con signo f definimos $f^+ = \text{máx}\{0, f\}$ y $f^- = \text{máx}\{0, -f\}$, de esta forma, $f = f^+ - f^-$ y la integral de f es

$$\int f \, \mathrm{d}m = \int f^+ \, \mathrm{d}m - \int f^- \, \mathrm{d}m.$$

Obsérvese que $|f| = f^+ + f^-$. Decimos que una función es integrable si $\int |f| < \infty$.

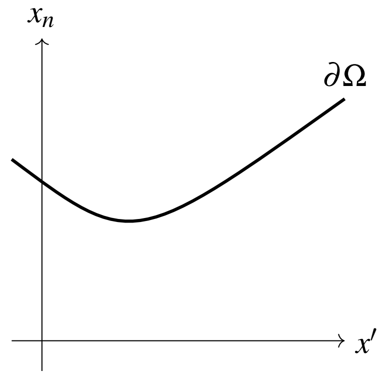
Al conjunto de funciones integrables lo denotamos por L^1 y en general el conjunto L^p se define como

$$L^p := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}m \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

2. Preliminares: Cálculo Multivariable

Empezaremos fijando notación. Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto decimos que $\partial\Omega$ es de clase $\mathscr{C}^k$ si para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe un $r > 0$ y una función $\gamma\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathscr{C}^k$ tal que

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \left\{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > \gamma(x')\right\} \cap B(x_0, r)$$



Es decir, Ω localmente se ve como la región sobre el grafo de una función k-veces continuamente diferenciable.

Si $\partial\Omega$ es de clase $\mathscr{C}^1$ podemos definir su vector normal exterior unitario mediante la fórmula:

$$\hat{\mathbf{n}}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla\gamma(x')| + 1}}(\nabla\gamma(x'), -1).$$

Para funciones $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ definimos su derivada normal por

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u(x) := \nabla u(x) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x), \quad x \in \partial\Omega$$

2.1. Fórmula de Green-Gauss

Teorema 1: Teorema de la divergencia

(1) Si $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_\Omega \partial_{x_i} u = \int_{\partial\Omega} u\, \hat{\mathbf{n}}^i$$

donde $\hat{\mathbf{n}}^i$ es la iésima coordenada del vector normal.

(2) Si $F \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_\Omega \nabla \cdot F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Corolario 1.: (Integración por partes)

Si u y v son funciones en $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_\Omega \partial_{x_i} u\, v = -\int_\Omega u\, \partial_{x_i} v + \int_{\partial\Omega} u\, v\, \hat{\mathbf{n}}^i$$

Para $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$ el Laplaciano se define por

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u$$

Corolario 2.: (Fórmulas de Green)

Para $u, v \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ se tiene que

(1) Integrar el Laplaciano sobre el volumen corresponde a integral la derivada normal sobre el contorno:

$$\int_\Omega \nabla^2 u = \int_{\partial\Omega} \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u.$$

(2) La integración por partes vale para el gradiente:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega u \nabla v + \int_{\partial\Omega} u \, \partial_{\hat{\mathbf{n}}} v.$$

(3) Esto sale de la anterior y podría ser útil.

$$\int_\Omega u \nabla v - v \nabla u = \int_{\partial\Omega} u \, \partial_{\hat{\mathbf{n}}} v - v \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u$$

En coordenadas polares tenemos que, para $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y Riemann-integrable se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} f \, \mathrm{d}S$$

En particular,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_{B(x_0,r)} f = \int_{\partial B(x_0,r)} f \, \mathrm{d}S$$

2.2. Distribuciones

Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathscr{D}$ la familia de funciones suaves con soporte compacto sobre Ω. En símbolos,

$$\mathscr{D} := \{\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathscr{C}_C^\infty(\Omega)\}.$$

Intuitivamente, estas son las funciones que se hacen cero al infinito. Además, definimos las funciones localmente integrables como:

$$L^1_{\mathrm{loc}} := \left\{ f \colon \Omega \to \mathbb{R} \mid \forall K \subset \Omega \text{ compacto, se tiene que } \int_K |f| < \infty \right\}.$$

Definición 1: (Derivada parcial débil)

Decimos que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ tiene una derivada parcial débil si existe $g \in L^1_{\mathrm{loc}}$ tal que

$$\forall \psi \in \mathscr{D} \text{ se tiene que } \int_\Omega f \partial_{x_i} \psi = -\int_\Omega g \psi.$$

Denotamos a g por $\partial_{x_i} f$.

`Definición 2: (Distribución)`

Una distribución es un funcional lineal $u\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ que es "continuo" en el sentido siguiente: En todo compacto K de Ω existe un entero no negativo j y un real no negativo C tal que para toda función φ en $\mathscr{D}$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ se cumple que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha|<j} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ es un multi-índice con $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

Anotamos $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$. Además, decimos que j es el orden de la distribución.

`EJEMPLO 1: Algunas distribuciones`

1. Toda función f localmente integrable define una distribución u_f con la forma

$$u_f(\psi) = \langle u_f, \psi \rangle = \int_\Omega f\psi$$

En efecto, para K un compacto en Ω que contiene al soporte de una función $\psi \in \mathscr{D}$ se tiene que

$$\big|\langle u_f, \psi \rangle\big| \leq \int_\Omega |f\psi| \leq \underbrace{\int_K |f|}_{C} \sup_K |\psi|$$

Notando que $\psi = \partial^0 \psi$ tenemos la fórmula de la definición. Además, vemos que esta distribución tiene orden cero.

2. Para un punto a de Ω definimos el funcional lineal δ_a como la evaluación. En símbolos:

$$\delta_a(\psi) = \langle \delta_a, \psi \rangle = \psi(a) \quad \forall \psi \in \mathscr{D}.$$

La distribución δ_a se conoce como delta de dirac. Para ver que es distribución, notemos que si K es un compacto en Ω que contiene al soporte de $\psi \in \mathscr{D}$ entonces

$$|\langle \delta_a, \psi \rangle| \leq \sup_K |\psi|$$

Esta distribución también es de orden cero.

3. Similar al anterior, definimos $\partial_{x_i}\delta_a$ como (menos) la evaluación de la derivada en el punto a. En símbolos:

$$\partial_{x_i}\delta_a(\psi) = \langle \partial_{x_i}\delta_a, \psi \rangle = -\langle \delta_a, \partial_{x_i}\delta_a \rangle = -\partial_{x_i}\psi.$$

El menos sale porque en la igualdad de enmedio usamos integración por partes. Para ver que es distribución, sea K un compacto en Ω que contenga al soporte de $\psi \in \mathscr{D}$. Luego,

$$|\langle \partial_{x_i} \delta_a, \psi \rangle| \leq \sup_K |\partial_{x_i} \psi|$$

Vemos que esta distribución es de orden uno.

Definimos el espacio de distribuciones $\mathscr{D}'$ en Ω como la colección de funcionales lineales "continuos" sobre $\mathscr{D}$ i.e. El espacio dual de $\mathscr{D}$.

`Proposición 1.`

Si u es una distribución en Ω, entonces $\partial_{x_i} u$ también lo es, donde $\partial_{x_i} u$ se define como

$$\langle \partial_{x_i} u, \psi \rangle := -\langle u, \partial_{x_i} \psi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$

Y en general, se tiene que $\partial^\alpha u \in \mathscr{D}'$ con

$$\langle \partial^\alpha u, \psi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \psi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}.$$