Apuntes
“Boundary Element Methods”

Sauter SA, Schwab C

Sebastián Sánchez

Índice

1. Ecuaciones Diferenciales Elípticas

1.1. Preliminares: Análisis Funcional

1.1.1. Espacios de Banach y Espacios de Hilbert

`Definición 1: Espacio normado`

Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y sea $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$ una función tal que

$$\forall x \in X: \qquad \|x\| = 0 \implies x = 0 \tag{1a}$$
$$\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}: \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \tag{1b}$$
$$\forall x, y \in X: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \tag{1c}$$

Decimos que $\|\cdot\|$ es una norma y la tupla $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado. Si X no es claro del contexto, denotamos a la norma $\|\cdot\|_X$.

Al definir una norma sobre X, dotamos al espacio de una topología: Un conjunto $A \subset X$ se dice abierto si existe $\varepsilon > 0$ constante tal que para todo $x \in X$ la bola $\{y \colon \|x-y\| < \varepsilon\}$ está contenida en A. Más aún, para una sucesión $(x_n)_n \subset X$ decimos que $x_n \to x$ si

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \iff \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$$

Por otro lado, cualquier norma es continua. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ y $x, y \in X$, por la desigualdad triangular inversa

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|,$$

tomando $\|x-y\| \leq \varepsilon$ se concluye la continuidad.

`Definición 2: Operadores`

Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados, un mapa $T: X \to Y$ se dice *operador*. Definimos la norma de un operador T como:

$$\|T\|_{Y \leftarrow X} := \sup_{0_X \neq x \in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} < \infty.$$

Si no hay ambigüedad, usaremos la notación $\|T\|$. Al conjunto de todos los operadores (de X a Y) que son lineales y acotados los denotamos por $L(X,Y)$. Este último con la norma operador es un espacio normado. Si $X = Y$ y definimos $(T_1 T_2)x := T_1(T_2 x)$ entonces $L(X)$ es un álgebra.

EJERCICIOS

1. Muestre que para todo $x \in X$ y $T \in L(X,Y)$ se tiene que
$$\|Tx\|_Y \leq \|T\|\|x\|_X.$$
SOLUCIÓN Supongamos que $x \neq 0$, entonces
$$\|Tx\|_Y = \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\|x\|_X \leq \|T\|\|x\|_X.$$
Para $x = 0_X$, $Tx = 0_Y$ y por lo tanto $\|Tx\|_Y = 0 \leq 0 = \|T\|\|x\|_X$.

2. Muestre que si $T_1 \in L(Y,Z)$ y $T_2 \in L(X,Y)$ entonces $T_1T_2 \in L(X,Z)$ y
$$\|T_1T_2\|_{Z\leftarrow X} \leq \|T_1\|_{Z\leftarrow Y}\|T_2\|_{Y\leftarrow X}.$$
SOLUCIÓN Para lo primero: si $x \in X$ entonces $T_2x \in Y$ y por lo tanto $T_1T_2x = T_1(T_2x) \in Z$. Para lo segundo, ocuparemos el ejercicio anterior (omitiremos subindices para ahorrar notación).
$$\|T_1T_2\| = \sup_{0_X \neq x \in X} \frac{\|T_1(T_2x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{0_X \neq x \in X} \|T_1\|\frac{\|T_2x\|}{\|x\|} = \|T_1\|\|T_2\|.$$

Definición 3: Convergencia de operadores

La sucesión $(T_n)_n \subset L(X,Y)$ converge uniformemente a T si
$$T_n \to T \iff \|T - T_n\|_{Y\leftarrow X} \to 0, \quad n \to \infty.$$
Por otro lado, la convergencia es puntual si
$$\forall x \in X: \|Tx - T_nx\|_Y \to 0, n \to \infty.$$

Definición 4: Espacio de Banach

Una sucesión $(x_n)_n$ de un espacio normado X se dice de Cauchy si
$$\sup_{m,n\geq k} \|x_n - x_m\| \to 0, \quad k \to \infty.$$
Obsérvese que esto no implica convergencia en mismo espacio X. De hecho, si todas las sucesiones de Cauchy son convergentes, X se dice un espacio de Banach.

Proposición 1: $L(X,Y)$ es un espacio Banach

Si X es un espacio normado cualquiera y Y es un espacio de Banach, entonces $L(X,Y)$ es un espacio de Banach

DEMOSTRACIÓN Sea $(T_n)_n \subset L(X,Y)$ una sucesión de Cauchy, es decir,
$$\sup_{n,m\geq k} \|T_n - T_m\| \to 0, \quad k \to \infty.$$
Fijando $x \in X$, la sucesión $(T_nx)_n \subset Y$ es de Cauchy y como Y es un espacio de Banach, la sucesión converge a un $y_x := \lim_{n\to\infty} T_nx \in Y$. Definamos $T: X \to Y$ como la aplicación $Tx := y_x$, debemos probar que es lineal y acotada.

Para la linealidad: Si $x = 0_X$ entonces $T_nx = 0_Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así que $Tx = 0_Y$. Por otro lado, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x_1, x_2 \in X$, entonces
$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x_1 + \beta x_2) = \lim_{n\to\infty} \alpha T_nx_1 + \beta T_nx_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2,$$
concluyéndose la linealidad. Para la cota:
$$\|T\| = \sup_{0_X \neq x \in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{0_X \neq x \in X} \frac{\|\lim_{n\to\infty} T_nx\|}{\|x\|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{0 \neq x \in X} \frac{\|T_nx\|}{\|x\|} < \infty,$$
donde en la última igualdad usamos la continuidad de la norma.

■

`Definición 5: Espacio cociente`

Sea X un espacio de Banach y $Z \subset X$ un subespacio cerrado. El espacio cociente X/Z consiste de la clases

$$\tilde{x} := \{x + z \colon z \in Z\} \quad \forall x \in X.$$

`Proposición 2.`

El espacio cociente X/Z con la norma $\|\tilde{x}\| := \inf_{z \in Z} \|x + z\|$, es un espacio de Banach.

`DEMOSTRACIÓN` Primero veamos que es una norma:

- Definida positiva:

$$\forall x \in X \colon \|\tilde{x}\| = 0 \iff \inf_{z \in Z} \|x + z\| = 0.$$

  Se sigue que $x + z = 0$ para algún $z \in Z$, se sigue que $x \in Z$, es decir, $\tilde{x} = \tilde{0}$. La positividad es directa porque estamos tomando el ínfimo de una norma.

- Homogeneidad absoluta:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X \colon \|\lambda \tilde{x}\| = \inf_{z \in Z} \|\lambda(x + z)\| = |\lambda| \inf_{z \in Z} \|x + z\| = |\lambda| \|\tilde{x}\|.$$

- Desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X \colon \|\tilde{x} + \tilde{y}\| &\leq \inf_{z, w \in Z} \|(x + z) + (y + w)\| \\ &\leq \inf_{z, w \in Z} \|x + z\| + \|y + w\| \\ &\leq \inf_{z \in Z} \|x + z\| + \inf_{w \in Z} \|y + w\| \\ &= \|\tilde{x}\| + \|\tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Ahora veremos que es completo. Sea $(\tilde{x}_n)_n \subset X/Z$ una sucesión de Cauchy y $\tilde{x}$ su límite. Queremos probar que $\tilde{x} \in X/Z$, es decir, que existe $x \in X$ tal que $x + Z = \tilde{x}$.

Nótese que si para cada n denotamos por x_n a un representante de $\tilde{x}_n$, entonces que la última sea una sucesión de Cauchy no implica que la primera lo sea. Sin embargo, dado que X es un espacio de Banach, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que es convergente a un $x \in X$. Se sigue que $(\tilde{x}_{n_k})_k$ converge a $\tilde{x}$. Como la sucesión es $(\tilde{x}_n)_n$ es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, concluimos que $\tilde{x}_n$ es convergente.

■

Recordamos que un conjunto $A \subset X$ es *denso* en X si $\overline{A} = X$. En particular, esto nos dice que para todo elemento x de X existe una sucesión en A que converge a x. Un espacio de Banach se dice *separable* si contiene un subconjunto contable y denso.

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ no es un espacio de Banach pero X es denso en $\tilde{X}$, entonces $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$ es un espacio de Banach llamado la *completación* de X donde $\|x\|_{\tilde{X}} = \|x\|_X \forall x \in X$. La completación es única salvo isomorfismo. Más aún, los operadores con dominio en X se extienden de manera única a $\tilde{X}$. La siguiente proposición entrega más detalles.

`Proposición 3.`

Sea X un espacio normado y X_0 un subcojunto denso de X. Un operador $T_0 \in L(X_0, Y)$ tiene una única extensión $T \in L(X, Y)$ y satisface

1. $T|_{X_0} = T_0$;
2. Para toda sucesión $(x_n)_n \subset X_0$ tal que $x_n \to x \in X$ se tiene que $Tx = \lim_{n \to \infty} T_0 x_n$;
3. $\|T\|_{Y \leftarrow X} = \|T_0\|_{Y \leftarrow X_0}$.

`DEMOSTRACIÓN` Definamos $Tx = T_0 x$ si $x \in X_0$ y $Tx = \lim_{n \to \infty} T_0 x_n$ para alguna sucesión $x_n \to x$. Como $L(X, Y)$ es Banach y x_n es de Cauchy, el mapa T está bien definido, pues

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T_0(x_n - x_m)\| \to 0,$$

para $n,m\to\infty$. Por otro lado, la definición de T es independiente de la sucesión escogida. En efecto, sea $Sx = \lim_{n\to\infty} T_0 y_n$ para $y_n \to x$ una sucesión distinta de la que toma Tx. Luego,

$$\|Tx - Sx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_0(x_n - y_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} \left(\|T_0(x_n - x)\| + \|T_0(x - y_n)\|\right) \to 0, \quad n\to\infty.$$

Finalmente, vemos la doble desigualdad

$$\|T_0\|_{Y\leftarrow X_0} = \sup_{x\neq 0\in X_0} \frac{\|T_0 x\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0\in X_0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|_{Y\leftarrow X}$$

y

$$\|T\|_{Y\leftarrow X} = \sup_{x\neq 0\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x_n\to x\neq 0\subset\in X_0} \lim_{n\to\infty} \frac{\|T_0 x_n\|}{\|x_n\|} \leq \sup_{x\neq 0\in X_0} \frac{\|T_0 x_n\|}{\|x_n\|} = \|T_0\|_{Y\leftarrow X_0}.$$

■

`Teorema 1.`

Sean X,Y espacios de Banach y $T\in L(X,Y)$. Si T es biyectiva, entonces su inversa T^{-1} existe y $T^{-1}\in L(Y,X)$.

`DEMOSTRACIÓN` Recordar que $T^{-1}y = \{x\in X : Tx = y\}$. Como T es biyectiva, T^{-1} está bien definida sobre todo Y. Además, T^{-1} es lineal. En efecto,

- $T^{-1}0 = 0$ pues T es lineal e inyectiva.
- Sea $x_1,x_2\in X$ y $\alpha\in\mathbb{K}$. Luego, $\alpha x_1 + x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2$ para algún par $y_1,y_2\in Y$. Aplicando T y usando su linealidad nos deja

  $$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha y_1 + y_2$$

  Si ahora aplicamos T^{-1} queda

  $$\alpha x_1 + x_2 = T^{-1}(\alpha y_1 + y_2)$$

  Juntando todas las ecuaciones se obtiene lo buscado

  $$T^{-1}(\alpha y_1 + y_2) = \alpha x_1 + x_2 = \alpha T^{-1}(y_1) + T^{-1}(y_2).$$

Que T^{-1} esté acotado es una consecuencia del Teorema del Mapeo Abierto.

■

`Corolario 1.`

Si X,Y son espacios de Banach y $T\in L(X,Y)$ es inyectiva, las siguientes condiciones son equivalentes

1. $Y_0 := \{Tx : x\in X\}$ con la norma $\|\cdot\|_Y$ es un subespacio cerrado de Y.
2. T^{-1} existe en Y_0. Más aún, $T^{-1}\in L(Y_0,X)$.

`DEMOSTRACIÓN` Asumiendo 1. tenemos que la imagen de T es un espacio de Banach y por lo tanto aplica el Teorema anterior. Asumiendo 2. y en busca de una contradicción, si Y_0 es abierto, tomamos $y\in\partial Y_0$ y una sucesión $(y_n)_n\subset Y_0$ que converge a y. Como T es biyección, existe una sucesión $(x_n)_n\in X$ tal que $x_n = T^{-1}y_n$. Más aún. Dado T,T^{-1} son lineales, la sucesión x_n es de Cauchy y por lo tanto convergente a $T^{-1}y$. Luego, $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y\notin Y_0$. Contradicción.

■

`Definición 6: Incrustación`

Sean X,Y espacios de Banach. Si existe $\imath\in L(X,Y)$ inyectiva, esta se dice *incrustación* o *encaje* de X en Y. Si $\imath$ es continua y $\imath(X)$ es denso en Y, decimos que X está *continua y densamente incrustado* en Y.

`Definición 7: Espacio de Hilbert`

Sea X un espacio vectorial y $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{K}$ un producto interno en X, es decir, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ satisface

$$\begin{aligned} \forall x\in X\setminus\{0\}: &\quad \langle x,x\rangle > 0, && (2a)\\ \forall x,y,z\in X,\lambda\in\mathbb{K}: &\quad \langle\lambda x+y,z\rangle = \lambda\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle, && (2b)\\ \forall x,y\in X: &\quad \overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle. && (2c)\end{aligned}$$

Si la norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida por $\|x\| := \langle x,x\rangle^{1/2}$ hace a X un espacio de Banach, decimos que X es un espacio de Hilbert.

De la definición anterior se tiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\forall x,y\in X: |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|. \tag{3}$$

`Definición 8: Ortogonalidad`

Sea $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Los vectores $x,y\in X$ se dicen ortogonales, denotado por $x\perp y$, si $\langle x,y\rangle = 0$. Extendemos la definición para subespacios A de X como

$$A^\perp := \{x\in X: \forall a\in A,\ \langle x,a\rangle = 0\,\forall x\in X\}.$$

`Proposición 4.`

Si $A\subset X$ entonces $A^\perp$ es un subespacio cerrado de X.

`DEMOSTRACIÓN` Que sea subespacio es directo por la bilinealidad del producto interno, así que probaremos que es cerrado. Sea $(x_n)_n\subset A^\perp$ tal que $x_n\to x\in X$. Queremos ver que $x\in A^\perp$. Dado que

$$\forall a\in A: \langle x,a\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, a\rangle.$$

Basta probar que el mapa $\langle\cdot,a\rangle$ es continuo para todo $a\neq 0\in A^\perp$. Esto es directo de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En efecto, sea $\varepsilon>0$ y $y,z\in X$ tal que $\|y-z\| < \varepsilon/\|a\|$. Luego

$$|\langle y,a\rangle - \langle z,a\rangle| = |\langle y-z,a\rangle| \le \|y-z\|\,\|a\| < \varepsilon.$$

De esta forma tenemos que

$$\forall a\in A: \langle x,a\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, a\rangle. = \lim_{n\to\infty}\langle x_n,a\rangle = 0.$$

■

`Proposición 5: Descomposición Ortogonal`

Sea X un espacio de Hilbert y U un subespacio cerrado de X. Luego, $X = U\oplus U^\perp$.

`DEMOSTRACIÓN` Sea $x\in X$. Sea $u\in U$ y definamos $\lambda = \langle x,u\rangle/\|u\|$ y $u^\perp = x-\lambda u$. Nótese que

$$\langle x-\lambda u, u\rangle = 0.$$

De esta forma, $x = \lambda u + u^\perp \in U\oplus U^\perp$.

■

`Definición 9: Base Ortonormal`

Una base ortonormal de un espacio de Hilbert X, es una sucesión de vectores $(v_j)_{j\in I}$ tales que la expansión de Fourier en cada punto es convergente, en símbolos:

$$\forall x\in X: x = \sum_{j\in I}\langle x,v_j\rangle v_j \tag{4}$$

Teorema 2.

Todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal

DEMOSTRACIÓN

■

1.1.2. Espacios Duales

En esta parte X denotará un espacio vectorial normado sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$.

Definición 10: Espacio Dual

El espacio dual X se define como el conjunto de los mapas lineales acotados de X a su campo escalar $\mathbb{K}$.

$$X' = L(X, \mathbb{K}).$$

Los elementos de X' son llamados funcionales lineales.

Proposición 6.

X' es un espacio de Banach con la norma $\|x'\|_{X'} := \|x'\|_{\mathbb{K}\leftarrow X}$.

DEMOSTRACIÓN Una aplicación de Proposición 1.

■

Nótese que $x'(x)$ se puede escribir como

$$x'(x) = \langle x, x'\rangle_{X\times X'} = \langle x', x\rangle_{X'\times X}.$$

Estas son llamadas *formas duales* o *pares duales*.

Proposición 7.

Si X está continuamente incrustado en Y, entonces Y' está continuamente incrustado en X'.

DEMOSTRACIÓN Sea $\imath$ la incrustación de X en Y. Definamos $j\colon Y' \to \imath(X)'$ por $y' = y' \circ \imath$. El mapa está bien definido pues para $x \in X$, $\imath(x) \in Y$ y por lo tanto $y'(\imath(x)) \in \mathbb{K}$. El mapa es lineal y continuo por ser composición de mapas lineales y continuos.

■

Definición 11: Espacio Bidual

El espacio bidual de X está definido como

$$X'' = L(X', \mathbb{K})$$

En general $X \cong X''$. En tales casos X se dice *reflexivo*.

Proposición 8.

Todos los espacios de Hilbert son reflexivos.

DEMOSTRACIÓN Para cada $x' \in X'$ tenemos el mapeo evualuación $E_x\colon X' \to \mathbb{K}$ dado por $E_x(x') = x'(x)$. Notése que $E_x \in X''$. Debemos ver que el mapa $x \mapsto E_x$ es inyectivo y sobreyectivo.

Para la inyectividad supogangamos que $x_1 \neq x_2 \in X$ y que $E_{x_1} = E_{x_2}$. Luego,

$$\forall x' \in X' : x'(x_1) = x'(x_2) \implies x'(x_1 - x_2) = 0,$$

es decir, $x_1 - x_2 \in \ker x'$ para todo $x' \in X'$. Afirmamos que $X_0 = \bigcap_{x'\in X'} \ker x' = 0$. En efecto, si $x_0 \neq 0 \in X_0$, entonces definamos $x_0'(x) = \langle x, x_0\rangle$. Dado que X es un espacio de Hilbert, x_0' es un mapa lineal y continuo, además, $x'(x_0) > 0$. Por lo tanto, $X_0 = 0$.

Para la sobreyectividad, tomemos $x'' \in X''$. Queremos ver que $x'' = E_x$ para algún $x \in X$.

■

Teorema 3: Hanh-Banach para espacios de Banach

Sea X un espacio de Banach y M un subespacio de X. Si f_0 es un funcional lineal continuo sobre M, entonces existe un funcional lineal continuo f definido sobre X tal que

$$(1)\ f|_M = f_0 \quad \text{y} \quad (2)\ \|f_0\|_{\mathbb{C}\leftarrow M} = \|f\|_{\mathbb{C}\leftarrow X}.$$

DEMOSTRACIÓN Momentáneamente supondremos que X es un espacio normado real.

En primer lugar, consideremos $x_1 \in X \setminus M$ y el subespacio $M_1 = \operatorname{span}\{M, x_1\}$. Nótese que $x \in M_1$ se puede escribir de manera única como $x = x_M + \lambda x_1$ con $x_M \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Para que f_1 sea una extensión lineal de f_0 a M_1, es necesario que

$$f_1(x) = f_0(x_M) + \lambda f_1(x_1),$$

Por lo que $f_1(x_1)$ determina al mapa. Más aún, para que sea continuo, es necesario que sea acotado. Como queremos mantener la norma, es necesario que $|f_1(x)| \leq \|f_0\|\|x\|$ para todo $x \in M_1$. La pregunta yace entonces en si existe una asignación $f_1(x_1)$ que cumpla con lo que queremos.

Para $\lambda = 0$ la elección de $f_1(x_1)$ es indiferente, por lo tanto, supondremos $\lambda \neq 0$. Para $\lambda > 0$ tenemos que

$$|f_0(x_M/\lambda) + f_1(x_1)| \leq \|f_0\|\|x_M/\lambda + x_1\|$$

mientras que para $\lambda < 0$ se tiene

$$|f_0(x_M/(-\lambda)) - f_1(x_1)| \leq \|f_0\|\|x_M/(-\lambda) - x_1\|$$

Como M es subespacio, las condiciones anteriores para $f_1(x_1)$ se reducen a cumplir

$$f_0(m_1) - \|f_0\|\|m_1 - x_1\| \leq f_1(x_1) \leq \|f_0\|\|m_2 + x_1\| - f_0(m_2 x) \qquad \forall m_1, m_2 \in M.$$

Luego, es suficiente para $f_1(x_1)$ cumplir con:

$$\sup_{m_1 \in M} f_0(m_1) - \|f_0\|\|m - x_1\| \leq f_1(x_1) \leq \inf_{m_2 \in M} \|f_0\|\|m_2 + x_1\| - f_0(m_2)$$

Tal elección es posible, pues

$$f_0(m_1) + f_0(m_2) = f_0(m_1 + m_2) \leq \|f_0\|\|m_1 + m_2\| \leq \|f_0\|\left(\|m_1 - x_1\| + \|m_2 + x_1\|\right)$$

En resumen, hemos probado que existe una extensión de f_0 que es lineal, continua y mantiene la norma.

Si X es finito dimensional, basta aplicar inductivamente el procedimiento. El caso infinito dimensional es un poco más trabajoso; Debemos definir un order parcial sobre las extensiones de f_0 y usar el Lema de Zorn para concluir que el elemento máximal es el espacio X.

Con lo primero, decimos que $h \succ g$ si h es una extensión de g. Luego, por el Lema de Zorn existe un elemento máximal f que extiende a f_0 y tiene por dominio el espacio X. En efecto, si el dominio no fuera todo X podemos aplicar el procedimiento de arriba y concluir que hay un elemento F que extiende a f, lo cual contradice la máximalidad del último.

■

Corolario 2.

Sea X un espacio de Banach y $x_0 \neq 0 \in X$. Entonces existe un funcional lineal continuo f_0 sobre X tal que

$$f_0(x_0) = \|x_0\|_X \quad \text{y} \quad \|f_0\|_{X'} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN Consideremos $M = \operatorname{span}(x_0)$. Definamos $f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$ para $\alpha \in \mathbb{C}$. Se verifica que f_0 es un funcional lineal continuo y que $\|f_0\|_{X'} = 1$. Lo demás es directo por el Teorema 3.

■
