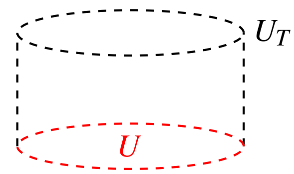
0.1. Fórmula del Valor Medio

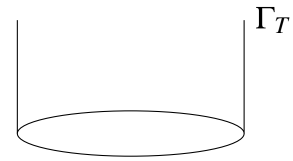
Definición 1: Cilindro y Bola de calor

Sea U abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$ y sea $T > 0$ fijo. Definimos:

1. El cilindro parabólico como
$$U_T := (0, T] \times U;$$



2. La frontera parabólica
$$\Gamma_T := \overline{U_T} - U_T;$$



3. Y la bola de calor
$$W_r(t_0, x_0) := \left\{(t, x) \colon t < t_0 \wedge \Phi(t_0 - t, x_0 - x) > r^{-n}\right\}$$
donde $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Algunas observaciones sobre la bola de calor. Primero, notemos que $(t_0, x_0) \in \partial W_r(t_0, x_0)$. De hecho, tenemos que
$$\partial W_r(t_0, x_0) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^n = \{(t_0, x_0)\}.$$
Por otro lado, la condición sobre Φ nos dice que
$$\Phi(t_0 - t, x_0 - x) > r^{-n} \iff \frac{1}{\sqrt{4\pi(t_0 - t)}^n} \exp\left(-\frac{|x_0 - x|^2}{4|t_0 - t|}\right) > \frac{1}{r^n}$$
Dado que la exponencial está acotada por 1, nos queda la siguiente estimación:
$$\frac{1}{\sqrt{4\pi(t_0 - t)}^n} > \frac{1}{r^n} \iff t > t_0 - \frac{r^2}{4\pi}.$$
Así que, si $(t, x) \in W_r(t_0, x_0)$, entonces $t \in (t_0 - \frac{r^2}{4\pi}, t_0) = I$. Esto nos dice que en la bola de calor no nos podemos ir tan atrás en el tiempo. Cabe preguntarse cómo se comporta el espacio en este trozo de tiempo I; Para investigarlo, tomemos $s \in I$. Luego,
$$W_r(t_0, x_0) \cap \{s\} \times \mathbb{R}^n$$

es una bola (en el espacio) centrada en (t_0,x_0). En efecto,

$$\begin{aligned}\Phi(t_0-s,x_0-x)>r^{-n} &\iff \frac{1}{\sqrt{4\pi(t_0-s)^n}}\exp\left(-\frac{|x_0-x|^2}{4|t_0-s|}\right)>\frac{1}{r^n}\\ &\iff \left(\frac{r}{\sqrt{4\pi(t_0-s)}}\right)^n>\exp\left(\frac{|x_0-x|^2}{4|t_0-s|}\right)\\ &\iff |x_0-x|^2<4|t_0-s|n\log\left(\frac{r}{\sqrt{4\pi(t_0-s)}}\right)=:\rho(s)^2.\end{aligned}$$

Luego, $|x-x_0|\leq\rho(s)$. Nótese que para $s\uparrow t_0$ y en $s\downarrow t_0-\frac{r^2}{4\pi}$ se tiene que $\rho(s)\to 0$. Más aún, a medida que s disminuye desde t_0 la cota $\rho(s)$ crece y luego decrece hasta llegar a $s=t_0-\frac{r^2}{4\pi}$, donde se anula.

Otras observaciones de la bola de calor incluyen:

1. Monotonía: Si $r_1<r_2$, entonces $W_{r_1}<W_{r_2}$;
2. Traslación: $W_r(t_0,x_0)=(t_0,x_0)+W_r(0,0)$;
3. Dilatación: Si $(t,x)\in W_r(0,0)$ entonces $(t/r^2,x/r)\in W_1(0,0)$;
4. Para $t_0=0$ y $x_0=0$, si $t\in(-r^2/4\pi,0)$ entonces

   $$\Phi(-t,-x)>\frac{1}{r^n}\iff\frac{|x|^2}{4t}>n\log\left(\frac{-\sqrt{4\pi t}}{r}\right).$$

   Definiendo $b_r\colon\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mediante

   $$b_r(t,x)=\frac{|x|^2}{4t}+n\log(r)-\frac{n}{2}\log(-4\pi t),$$

   tenemos que

   $$\begin{aligned}W_r(0,0)&=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^n\colon b_r(t,x)>0\right\}\\ \partial W_r(0,0)&=\left\{(t,x)\in\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^n\colon b_r(t,x)=0\right\}.\end{aligned}$$

5. $$\frac{1}{4r^r}\int_{W_r(0,0)}\frac{|x|^2}{t^2}\,d(t,x)=\frac{1}{4}\int_{W_1(0,0)}\frac{|x|^2}{t^2}\,d(t,x)=1.$$

Proposición 1.

Sean $R>0$ y $u\in\mathscr{C}^{(1,2)(W_r(0,0))}$. Definiendo

$$\begin{aligned}\phi\colon(0,R)&\to\mathbb{R}\\ r&\mapsto\frac{1}{4r^r}\int_{W_r(0,0)}u(t,x)\frac{|x|^2}{t^2}\,d(t,x)\end{aligned}$$

se cumple que

$$\phi(r) \xrightarrow{r\downarrow 0} u(0,0)$$

y

$$\phi'(r) = \frac{n}{r^{n+1}} \int_{W_r(0,0)} [-u_t(t,x) + \Delta_x u(t,x)]\, b_r(t,x)\, d(t,x)$$

DEMOSTRACIÓN

■

0.2. Principio del Máximo

Teorema 1: Ppio del Máximo

Si $u \in \mathscr{C}^{(1,2)}(U_T) \cap \mathscr{C}(\overline{U_T})$ es solución de la ecuación del calor en U_T, entonces

1. El máximo se alcanza en la frontera

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

2. Si U es conexo y el máximo se alcanza en U_T

$$\exists (t_0, x_0) : \; u(t_0, x_0) = \max_{\overline{U_T}} u,$$

entonces u es constante en $\overline{U_{t_0}}$.

El primero se conoce como la versión débil y el segundo como la versión fuerte.

DEMOSTRACIÓN Vamos a demostrar la fuerte.

■
