30 de Marzo, 2023

0.1. Función de Green para el semiespacio

Como dijimos antes, definir la función de Green depende de que podamos resolver el problema corrector. En esta subsección resolveremos tal problema para el semiespacio

$$\mathbb{R}^n_+ := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n \colon x_n > 0\} \quad n \geq 3.$$

Concretamente, debemos resolver, para $x \in \mathbb{R}^n_+$ el problema

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x(y) = 0 & , y \in \mathbb{R}^n_+ \\ \varphi^x(y) = \Phi(y-x) & , y \in \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}.$$

Lo natural viendo las condiciones de borde, sería querer que $\varphi^x(\cdot) = \Phi(\cdot - x)$, y de hecho, tenemos que

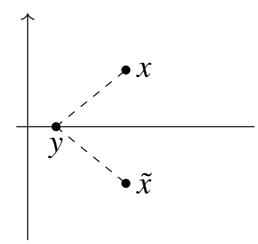
$$\Delta_y \Phi(y-x) = 0,$$

siempre y cuando $y \neq x \in \mathbb{R}^n_+$. El problema aquí es que nos falta un punto y nuestra función debe estar definida sobre todo el semiespacio. Por otro lado, la función Φ no tiene más singularidades, así que

$$\Delta_y \Phi(y - \tilde{x}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \notin \overline{\mathbb{R}^n_+}.$$

Así, si podemos encontrar un $\tilde{x}$ tal que se satisfagan las condiciones de borde habremos resuelto el problema. Y en efecto, usando las simetrías del semiespacio, se nota que si $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$ entonces los puntos $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ y $\tilde{x} = (x', -x_n) \in \mathbb{R}^n_-$ están a la misma distancia y por lo tanto

$$\varphi^x(y) = \Phi(y-x) = \Phi(y-\tilde{x}).$$



Definimos entonces $\varphi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x})$, y por lo tanto la fórmula de Green se lee

$$G(x,y) = \Phi(y-x) - \Phi(y-\tilde{x}). \tag{GS}$$

Más aún, por la fórmula de representación, cualquier solución u del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & , \text{ en } \mathbb{R}^n_+ \\ u = g & , \text{ en } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases},$$

se escribe como

$$u(x) = -\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} g(y)\partial_{n(y)} G(x,y)\, dS(y) = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} g(y) \frac{2x_n}{n\alpha(n)|x-y|^n}\, dS(y). \tag{RS}$$

Definimos el **kernel de Poisson** como

$$k(x,y) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)|x-y|^n}, \quad y \in \partial\mathbb{R}^n_+, x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{KPS}$$

Vamos a comprobar que (RS), en efecto, resuelve el problema (0.1).

Teorema 1.

Si $g \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ y u está dado por (RS), entonces

1. $u \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$;
2. $\Delta u = 0$ en el semiespacio; y
3. Si $x_0 \in \partial \mathbb{R}^n_+$ entonces
$$\lim_{\mathbb{R}^n_+ \ni x \to x_0} u(x) = g(x_0).$$