23 DE MARZO 2023

0.1. Regularidad

Convolución y Regularización

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, definimos el conjunto

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Además, definimos $\eta \in \mathscr{C}_C^\infty(\mathbb{R}^n)$ como

$$\eta(x) := \begin{cases} C\exp(\frac{1}{|x|^2-1} & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases},$$

donde C es una constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) = 1.$$

Con esto definimos la **función regularizante**

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

La gracia de la función regularizante es que $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1$.

Para una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $x \in \Omega_\varepsilon$, definimos

$$f_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy.$$

la regularización de f en Ω_ε. Para la regularización, se cumple que

1. $f_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$;
2. $f_\varepsilon \to f$ cuando $\varepsilon \to 0$ ctp;
3. Si $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, f_ε converge uniformemente a f sobre compactos;
4. Si $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f_\varepsilon \to f$ en L^p_{loc}.