

Apuntes  
“MAT2505 - Ecuaciones Diferenciales Parciales”

Docente: Carlos Román

Apuntes: Sebastián Sánchez

Índice

<b>1. Preliminares: Teoría de medida</b>	<b>2</b>
<b>2. Preliminares: Cálculo Multivariable</b>	<b>3</b>
2.1. Fórmula de Green-Gauss . . . . .	3
<b>3. Distribuciones</b>	<b>4</b>
<b>4. Ecuación de Laplace</b>	<b>5</b>
4.1. Solución Fundamental . . . . .	6
4.2. Propiedades de Funciones Armónicas . . . . .	8
4.3. Regularidad . . . . .	11
4.4. Función de Green . . . . .	13
4.5. Función de Green para el semiespacio . . . . .	15
4.6. Función de Green para una bola . . . . .	17
4.7. Principio de Dirichlet o Método de energía . . . . .	18
<b>5. Estrategias para resolver EDP's</b>	<b>19</b>
5.1. La Transformada de Fourier . . . . .	19
5.2. Separación de Variables . . . . .	20
<b>6. Ecuación del Calor</b>	<b>22</b>
6.1. Solución fundamental . . . . .	22
6.2. Ecuación del Calor No Homogénea . . . . .	25
6.3. Fórmula del Valor Medio . . . . .	26
6.4. Principio del Máximo . . . . .	28
6.5. Métodos de Energía . . . . .	29
<b>7. Espacios de Sobolev</b>	<b>32</b>
7.1. Teoremas de Aproximación . . . . .	34
7.2. Teoremas de Extensión . . . . .	34
7.3. Teoremas de Traza . . . . .	35
7.4. Inyecciones de Sobolev . . . . .	35
7.4.1. Caso $1 \leq p < n$ : Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev . . . . .	35
7.4.2. Caso $n < p \leq \infty$ : Desigualdad de Morrey . . . . .	37
7.4.3. Desigualdades de Sobolev Generales . . . . .	37
7.4.4. Caso $p = n$ . . . . .	37
<b>8. Operadores Elípticos de Segundo Orden</b>	<b>38</b>
8.1. Soluciones Débiles . . . . .	39
8.2. Existencia de Soluciones Débiles . . . . .	40

09 DE MARZO, 2023

# 1. Preliminares: Teoría de medida

Para un conjunto  $X$ , decimos que una colección de subconjuntos  $M$  de  $X$  es una sigma álgebra si contiene a  $X$  y es cerrado bajo complementos y uniones numerables. En símbolos:

$$X \in M; \quad A \in M \implies A^c \in M; \quad A_1, A_2, \dots, M \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in M.$$

El par  $(X, M)$  se dice *espacio medible* y los elementos de  $M$  son los *conjuntos medibles*.

Los espacios topológicos tienen una sigma álgebra inducida por sus abiertos (la sigma álgebra más pequeña que contiene a todos los abiertos), llamada  $\sigma$ -álgebra de Borel y denotada por  $\mathcal{B}(X)$ . Para  $X, Y$  espacios topológicos con sus respectivas sigma álgebras, decimos que  $f: X \rightarrow Y$  es una *función medible* si  $f^{-1}(A)$  es un conjunto medible para todo  $A$  abierto.

Decimos que  $m: X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  es una *función de medida* si el vacío tiene medida cero y la medida de una unión (numerable) disjunta de conjuntos medibles es la suma de la medida de los conjuntos. En símbolos:

$$m(\emptyset) = 0 \text{ y } m\left(\bigcup_{n \geq 1} A_i\right) = \sum_{n \geq 1} m(A_i) \text{ con } A_1, A_2, \dots \text{ disjuntos.}$$

A la tripleta  $(X, M, m)$  se le dice *espacio de medida*.

Casi siempre trabajaremos en  $\mathbb{R}^n$  y la medida estándar para esta será la medida de Lebesgue. Esta le asigna a los intervalos su largo (en  $\mathbb{R}$ ) y se extiende a  $\mathbb{R}^n$  como la medida que le asigna a los  $n$ -cubos su volumen.

Decimos que un conjunto es despreciable si tiene medida nula. Cuando una propiedad se cumple salvo un conjunto de medida nula, decimos que la propiedad se cumple casi en todas partes o *m-ctp*.

Una *función indicatriz*  $\chi_A: X \rightarrow [0, 1]$  se define por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Una *función simple* es una combinación lineal finita de funciones indicatrices:

$$s = \sum_{n=1}^N a_n \chi_{A_n}(x), \quad A_n \in M, a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Definimos la integral de una función simple como

$$\int s \, dm = \sum_{n=1}^N a_n m(A_n).$$

Para una función positiva  $f$  la integral se define por

$$\int f \, dm = \sup_{s \leq f} \int s \, dm,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples menores a  $f$ .

Para una función con signo  $f$  definimos  $f^+ = \max\{0, f\}$  y  $f^- = \max\{0, -f\}$ , de esta forma,  $f = f^+ - f^-$  y la integral de  $f$  es

$$\int f \, dm = \int f^+ \, dm - \int f^- \, dm.$$

Obsérvese que  $|f| = f^+ + f^-$ . Decimos que una función es integrable si  $\int |f| < \infty$ .

Al conjunto de funciones integrables lo denotamos por  $L^1$  y en general el conjunto  $L^p$  se define como

$$L^p := \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \left( \int |f|^p \, dm \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

## 2. Preliminares: Cálculo Multivariable

Empezaremos fijando notación. Para  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto decimos que  $\partial\Omega$  es de clase  $\mathcal{C}^k$  si para todo  $x_0 \in \partial\Omega$  existe un  $r > 0$  y una función  $\gamma: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $\mathcal{C}^k$  tal que

$$\begin{aligned} & \Omega \cap B(x_0, r) \\ & \parallel \\ & \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : x_n > \gamma(x')\} \cap B(x_0, r). \end{aligned}$$

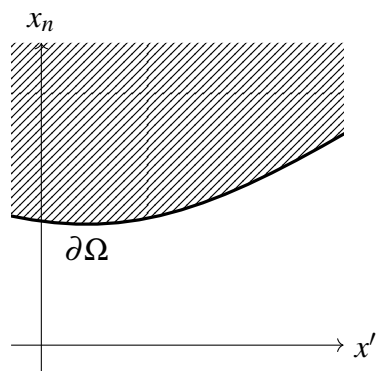
Es decir,  $\Omega$  localmente se ve como la región sobre el grafo de una función  $k$ -veces continuamente diferenciable.

Si  $\partial\Omega$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  podemos definir su vector normal exterior unitario mediante la fórmula:

$$\hat{\mathbf{n}}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla\gamma(x')|^2 + 1}} \begin{pmatrix} \nabla\gamma(x') \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para funciones  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  definimos su derivada normal por

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}}u(x) := \nabla u(x) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x), \quad x \in \partial\Omega.$$



### 2.1. Fórmula de Green-Gauss

Recordaremos algunas fórmulas del cálculo multivariable que usaremos durante el curso. En particular a continuación se muestra el Teorema de la divergencia, la fórmula de integración por partes y las fórmulas de Green. Todas estas integrales relacionan la densidad de flujo de un campo vectorial con la integral sobre el contorno de una región.

**Teorema de la divergencia:** (1) Si  $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ , entonces

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u = \int_{\partial\Omega} u \hat{\mathbf{n}}^i.$$

donde  $\hat{\mathbf{n}}^i$  es la  $i$ -ésima coordenada del vector normal.

(2) Si  $F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\partial\Omega} F \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Como consecuencia del Teorema de la Divergencia tenemos la fórmula de **Integración por partes**: Si  $u$  y  $v$  son funciones en  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ , entonces

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u v = - \int_{\Omega} u \partial_{x_i} v + \int_{\partial\Omega} u v \hat{\mathbf{n}}^i.$$

Para funciones  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  definimos el Laplaciano como:

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u.$$

De las fórmulas anteriores obtenemos las **Fórmulas de Green**: Para  $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  se tiene que la **primera fórmula de Green**:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u = \int_{\partial\Omega} \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u.$$

Además, la fórmula de integración por partes se cumple con gradientes, esto se conoce como **segunda fórmula de Green**:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v = \int_{\partial\Omega} u \partial_{\hat{\mathbf{n}}} v.$$

Más aún, tenemos la **tercera fórmula de Green**.

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u = \int_{\partial \Omega} u \partial_{\mathbf{n}} v - v \partial_{\mathbf{n}} u.$$

En coordenadas polares tenemos que, para  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua y Riemann-integrable se cumple

$$\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_0^\infty \int_{\partial B(0,r)} f \, dS.$$

En particular,

$$\frac{d}{dr} \int_{B(x_0,r)} f = \int_{\partial B(x_0,r)} f \, dS.$$

### 3. Distribuciones

Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathcal{D}$  la familia de funciones suaves con soporte compacto sobre  $\Omega$ . En símbolos,

$$\mathcal{D} := \{\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\}.$$

Intuitivamente, estas son las funciones que se hacen cero al infinito. Además, definimos las funciones **localmente integrables** como:

$$L_{\text{loc}}^1 := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall K \subset \Omega \text{ compacto, se tiene que } \int_K |f| < \infty \right\}.$$

La gracia de las funciones localmente integrables es que nos permitimos trabajar con funciones sin mucha regularidad. En este mismo sentido viene la siguiente definición.

#### Definición 1: Derivada parcial débil

Decimos que  $f \in L_{\text{loc}}^1$  tiene una derivada parcial débil si existe  $g \in L_{\text{loc}}^1$  tal que

$$\forall \psi \in \mathcal{D} \text{ se tiene que } \int_{\Omega} f \partial_{x_i} \psi = - \int_{\Omega} g \psi.$$

Denotamos a  $g$  por  $\partial_{x_i} f$ .

Para funciones diferenciables la derivada débil coincide con la derivada usual casi en todas partes. Entenderemos de aquí en adelante que cuando hablemos de derivadas siempre nos referiremos a las derivadas en el sentido débil.

#### Definición 2: Distribución

Una distribución es un funcional lineal  $u: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  que es continuo en el sentido siguiente: En todo compacto  $K$  de  $\Omega$  existe un entero no negativo  $j$  y un real no negativo  $C$  tal que para toda función  $\varphi$  en  $\mathcal{D}$  con  $\text{supp}(\varphi) \subset K$  se cumple que

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{|\alpha| \leq j} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$  es un multi-índice con  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  y

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$$

Anotamos  $u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$ . Además, decimos que  $j$  es el orden de la distribución.

#### EJEMPLO 1: Algunas distribuciones

1. Toda función  $f$  localmente integrable define una distribución  $u_f$  definida por:

$$u_f(\psi) = \langle u_f, \psi \rangle = \int_{\Omega} f \psi.$$

En efecto, para  $K$  un compacto en  $\Omega$  que contiene al soporte de una función  $\psi \in \mathcal{D}$  se

tiene que

$$|\langle u_f, \psi \rangle| \leq \int_{\Omega} |f \psi| \leq \underbrace{\int_K |f|}_C \sup_K |\psi|.$$

Notando que  $\psi = \partial^0 \psi$  tenemos la fórmula de la definición. Además, vemos que esta distribución tiene orden cero.

Cada función  $u \in L^1_{\text{loc}}$  define una única distribución (única en el sentido de medida, es decir, ctp). Así que por abuso del lenguaje a veces se hablamos de  $u$  refiriéndonos a la distribución que induce.

2. Para un punto  $a$  de  $\Omega$  definimos el funcional lineal  $\delta_a$  como la evaluación. En símbolos:

$$\delta_a(\psi) = \langle \delta_a, \psi \rangle = \psi(a) \quad \forall \psi \in \mathcal{D}.$$

La distribución  $\delta_a$  se conoce como **delta de dirac**. Para ver que es distribución, notemos que si  $K$  es un compacto en  $\Omega$  que contiene al soporte de  $\psi \in \mathcal{D}$  entonces

$$|\langle \delta_a, \psi \rangle| \leq \sup_K |\psi|.$$

Esta distribución también es de orden cero.

3. Similar al anterior, definimos  $\partial_{x_i} \delta_a$  como (menos) la evaluación de la derivada en el punto  $a$ . En símbolos:

$$\partial_{x_i} \delta_a(\psi) = \langle \partial_{x_i} \delta_a, \psi \rangle = -\langle \delta_a, \partial_{x_i} \psi \rangle = -\partial_{x_i} \psi(a).$$

El menos sale porque en la igualdad de enmedio usamos integración por partes. Para ver que es distribución, sea  $K$  un compacto en  $\Omega$  que contenga al soporte de  $\psi \in \mathcal{D}$ . Luego,

$$|\langle \partial_{x_i} \delta_a, \psi \rangle| \leq \sup_K |\partial_{x_i} \psi|.$$

Vemos que esta distribución es de orden uno.

Definimos el **espacio de distribuciones**  $\mathcal{D}'$  en  $\Omega$  como la colección de funcionales lineales continuos sobre  $\mathcal{D}$  i.e. El espacio dual de  $\mathcal{D}$ .

#### Proposición 1.

Si  $u$  es una distribución en  $\Omega$ , entonces  $\partial_{x_i} u$  también lo es, donde  $\partial_{x_i} u$  se define como

$$\langle \partial_{x_i} u, \psi \rangle := -\langle u, \partial_{x_i} \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}.$$

Y en general, se tiene que  $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'$  con

$$\langle \partial^\alpha u, \psi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}.$$

## 4. Ecuación de Laplace

En esta sección estudiaremos la *ecuación de Laplace*,

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

donde  $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  con  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Esta ecuación es un caso particular de la *ecuación de Poisson*

$$-\Delta u = f.$$

Las soluciones a la ecuación de Laplace se conocen como funciones armónicas. Notéese que el gradiente de  $u$  define un campo vectorial donde a cada punto del espacio se le asocia un vector que apunta en la dirección de máximo cambio. Ahora, que este campo tenga divergencia nula en todo punto nos dice que el campo  $u$  en cada punto tiene un valor muy parecido al promedio de los valores de los puntos cercanos.

## 4.1. Solución Fundamental

Primero analizaremos la estructura de las soluciones, dígame, si  $u$  es solución de (1) entonces ¿qué podemos decir de  $u$ ?

**Simetrías** Con simetrías nos referimos a aquellos invariantes bajo cambios en el dominio. Por ejemplo, tenemos que  $u$  es invariante bajo dilataciones/contracciones (siempre y cuando sigan en el dominio):

$$\Delta u(\lambda x) = \lambda^2 \partial_{x_1}^2 u(\lambda x) + \lambda^2 \partial_{x_2}^2 u(\lambda x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Más específicamente, si  $A$  es una transformación lineal ortogonal de  $\Omega$  en  $\Omega$  tendremos que

$$\Delta u(\lambda Ax) = \lambda^2 A^2 \partial_{x_1}^2 u(\lambda Ax) + \lambda^2 A^2 \partial_{x_2}^2 u(\lambda Ax) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Con esta idea en mente buscaremos soluciones radiales, es decir, supondremos que  $u$  es de la forma:

$$u(x) = v(\|x\|) = v(r),$$

para alguna función  $v$  de una variable. Ahora necesitamos expresar la ecuación de Laplace en términos de la nueva función. Por la regla de la cadena,

$$\partial_{x_i} v(\|x\|) = \partial_{x_i} r \partial_r v(r).$$

Como  $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  tenemos que  $\partial_{x_i} r = x_i/r$ . Derivando de nuevo,

$$\partial_{x_i}^2 v(\|x\|) = \partial_{x_i} \left( \frac{x_i}{r} \partial_r v \right) = \frac{1}{r} v' - \frac{x_i^2}{r^3} v' + \frac{x_i^2}{r^2} v''.$$

Así que la ecuación de Laplace se lee,

$$\Delta u(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n \frac{1}{r} v' - \frac{x_i^2}{r^3} v' + \frac{x_i^2}{r^2} v'' = 0 \iff (n-1) \frac{v'}{r} + v'' = 0.$$

La EDO es separable así que nos queda,

$$\frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r} \implies v' = c_0 r^{1-n} \implies v = \begin{cases} c_1 \log r + c_2 & , n = 2 \\ \frac{c_1}{(n-2)r^{n-2}} + c_2 & , n \geq 3 \end{cases}.$$

A modo de resumen, tenemos que para cualquier elección de constantes  $c_1, c_2$  la función  $v(r)$  satisface  $\Delta v(r) = 0$ .

### Proposición 2.

Podemos elegir las constantes tal que  $-\Delta v = \delta_0$ .

**DEMOSTRACIÓN** Notéase que el lado derecho y el lado izquierdo son objetos distintos, por lo que esta igualdad la entenderemos en el sentido de distribuciones. Este es el abuso de notación que mencionamos antes.

Para facilitar los cálculos, primero “normalizamos”  $v$ ,

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log r & , n = 2 \\ \frac{1}{n\alpha(n)(n-2)r^{n-2}} & , n \geq 3 \end{cases},$$

donde  $\alpha(n)$  es el volumen de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^n$ .

La afirmación es equivalente a probar que  $-\Delta_x \Phi = \delta_0$ . Primero probaremos que  $\Phi$  está en  $L_{\text{loc}}^1$  y luego mostraremos que la distribución inducida se comporta como  $\delta_0$ .

$\Phi \in L_{\text{loc}}^1$ : Primero veamos el caso  $n \geq 3$ . La función  $\Phi$  se va a cero en el infinito y de hecho está bien acotada para  $r \geq 1$ , por lo que el posible problema está cerca del origen. Así que acotando eso estamos listos.

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1)} \Phi(|x|) \, dx &= \int_0^1 \int_{\partial B(0,r)} \Phi(r) \, dS \, dr \\ &= n\alpha(n) \int_0^1 \Phi(r) r^{n-1} \, dr \\ &= \frac{1}{(n-2)} \int_0^1 \frac{1}{r} \, dr < \infty \end{aligned}$$

Puesto que  $f(x) = 1/|x|^\alpha$  es convergente en la bola unitaria si y solo si  $\alpha < n$ .

Para  $n = 2$ : Si  $r \geq 1$  estamos lidiando con una función continua así que es localmente integrable. Por lo tanto, el problema está cerca del cero.

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(0,1)} \Phi(|x|) \, dx \right| &= \left| \int_0^1 \int_{\partial B(0,1)} \Phi(r) \, dS \, dr \right| \\ &= \left| 2\pi \int_0^1 \Phi(r) r \, dr \right| \\ &= \left| - \int_0^1 \log(r) r \, dr \right| < \infty \end{aligned}$$

$-\Delta u_\Phi = \delta_0$ : Ya que  $\Phi$  es localmente integrable induce una distribución  $u_\Phi$  dada por:

$$\langle u_\Phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \Phi \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}.$$

En particular tenemos que  $\Delta_x u_\Phi$  es una distribución actuando de la siguiente forma:

$$\langle -\Delta u_\Phi, \psi \rangle = -\langle u_\Phi, \Delta \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \Delta \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} -\Delta_x \Phi = \delta_0 &\iff \langle -\Delta u_\Phi, \psi \rangle = \langle \delta_0, \psi \rangle \\ &\iff - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi \Delta \psi = \psi(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, debemos probar esto último. De nuevo tenemos que separar los casos entre  $n = 2$  y  $n \geq 3$ .

Para  $n = 2$ : Como cero es un punto problemático, separaremos la integral entre la bola de radio  $\varepsilon$  y el resto. Es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi \Delta \psi = \underbrace{\int_B \Phi \Delta \psi}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \Phi \Delta \psi}_{I_2},$$

donde  $B$  es la bola centrada en el origen de radio  $\varepsilon$ . Para  $I_1$  tenemos que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \|\Delta \psi\|_\infty \left| \int_B u \right| \\ &\leq \|\Delta \psi\|_\infty \left| \int_0^\varepsilon \log(r) r \, dr \right| \\ &\leq \|\Delta \psi\|_\infty \varepsilon^2 |\log \varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Para  $I_2$ : Consideremos  $R \gg 1$  tal que  $\text{supp}(\Delta \psi) \subset B(0, R) =: B_R$ . Luego,

$$I_2 = \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \Phi \Delta \psi = \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} (\Delta \Phi) \psi + \int_{\partial B_R \setminus B_\varepsilon} (\Phi \partial_{\hat{n}} \psi - \psi \partial_{\hat{n}} \Phi).$$

Como  $\Phi$  es armónica lejos de cero nos queda

$$I_2 = \underbrace{\int_{\partial B_R \setminus B_\varepsilon} \psi \partial_{\hat{n}} \Phi}_{J_1} + \underbrace{\int_{\partial B_R \setminus B_\varepsilon} \Phi \partial_{\hat{n}} \psi}_{J_2}.$$

Para  $J_2$ : Notemos que

$$|J_2| \leq \|\partial_{\hat{n}} \psi\|_\infty \left| \int_{\partial B_\varepsilon} \Phi \right| \leq \|\partial_{\hat{n}} \psi\|_\infty \begin{cases} |\log \varepsilon| \varepsilon & , n = 2 \\ \varepsilon & , n \geq 3 \end{cases}.$$

Para  $J_1$ : Notemos que  $\hat{n}(x) = -x/|x|$  y por lo tanto

$$\partial_{\hat{n}} \Phi = \nabla \Phi \cdot \hat{n} = \frac{1}{n\alpha(n)|x|^{n-1}}.$$

Luego,

$$J_1 = -\frac{1}{n\alpha(n)|x|^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} \psi = -\oint_{\partial B_\varepsilon} \psi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\psi(0).$$

Con esto probamos que  $\Delta_x \Phi = \delta_0$  en el sentido de las distribuciones. ■

20 DE MARZO, 2023

#### Teorema 1.

Para  $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$ , definimos su convolución como

$$\Phi * f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) dy,$$

donde  $\Phi$  es la solución fundamental de la ecuación de Laplace. Entonces,

1.  $\Phi * f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  y
2.  $-\Delta(\Phi * f) = f$ .

**DEMOSTRACIÓN** Pongamos  $u = \Phi * f$ . Haciendo un cambio de variables tenemos que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y) dy.$$

Luego,

$$\partial_{x_i} u(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[ \frac{f(x-y+he_i) - f(x-y)}{h} \right] dy.$$

Como  $f \in \mathcal{C}_c^2$ , se cumplen las hipótesis del Teorema de Convergencia Dominada (TCD). Explícitamente,

$$f_n(x) = \frac{f(x + (1/n)e_i) - f(x)}{1/n}$$

converge puntualmente a  $\partial_{x_i} f(x)$  que es continua. Además,  $f_n(x)$  es acotada y tiene soporte compacto, así que  $|f_n(x)| < C1_K(x)$  donde  $K$  es un compacto que contiene al soporte de  $f_n(x)$ ,  $1_K$  es la función indicatriz de  $K$  y  $C$  una constante positiva. Como  $C1_K(x)$  es integrable y domina a la sucesión, sigue que,

$$\partial_{x_i} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \partial_{x_i} f(x-y) dy.$$

Análogamente obtenemos que

$$\partial_{x_i}^2 u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \partial_{x_i}^2 f(x-y) dy.$$

El lado derecho es continuo para cada  $i = 1, \dots, n$ , así que  $u \in \mathcal{C}^2$ . Más aún,  $\Delta u(x)$  se ve como es una distribución de  $\Phi$  y probamos anteriormente que actúa como  $\delta_0$ , así que,

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta_x f(x-y) dy = -f(x). \quad \blacksquare$$

## 4.2. Propiedades de Funciones Armónicas

Para una función  $u$  en  $B(x, r)$  definimos

$$\oint_{B(x,r)} u(y) dy := \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u(y) dy.$$

De manera análoga, si  $u$  está definida sobre  $\partial B(x, r)$  definimos

$$\oint_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) := \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y).$$



### Teorema 2: Fórmula de la Media

Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  es armónica, entonces para toda bola  $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$  se tiene que

$$u(x) = \oint_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y) = \oint_{B(x, r)} u(y) dy.$$

Además, si pedimos que  $u$  también sea continua en la clausura de  $\Omega$  podemos tomar bolas abiertas  $B(x, r) \subset \Omega$ .

**DEMOSTRACIÓN** Sea  $x \in \Omega$ . Para  $r > 0$  denotamos por  $B_r$  a la bola centrada en  $x$  de radio  $r$ . Definimos

$$\phi(r) = \begin{cases} \oint_{\partial B_r} u(y) dS(y) & , r \neq 0 \\ u(x) & , r = 0. \end{cases}$$

Nótese que  $\phi$  es continua. Haremos un cambio de variables para que la integral esté sobre la bola unitaria. Consideremos  $T: \partial B(0, 1) \rightarrow \partial B_r$  dado por  $z \mapsto x + rz$ . El Jacobiano es

$$|\det DT(z)| = \begin{vmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{vmatrix} = r^{n-1}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B_r} u(y) dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) r^{n-1} dS(z) \\ &= \oint_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS(z). \end{aligned}$$

Ahora probaremos que  $\phi(r)$  es constante, y por lo tanto  $\phi(r) = \phi(0) = u(x)$ . Vamos a ello.

$$\begin{aligned} \phi'(r) &\stackrel{TC D}{=} \oint_{\partial B(0, 1)} \nabla u(x + rz) \cdot z dS(z) \\ &= \oint_{\partial B_r} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS(y) \\ &= \oint_{\partial B_r} \nabla u(y) \cdot \hat{n} dS(y) \\ &\stackrel{2.1}{=} \frac{1}{|\partial B_r|} \int_{B_r} \nabla^2 u(y) dS(y) = 0. \end{aligned}$$

Ahora, esto nos da la igualdad sobre las fronteras. Para pasar a la integral sobre el volumen notemos que

$$\begin{aligned} \oint_{B_r} u(y) dS(y) &= \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u(y) dS(y) \\ &= \frac{1}{|B_r|} \int_0^r \int_{\partial B(x, t)} u(y) dS(y) dt \\ &= \frac{1}{|B_r|} \int_0^r u(x) |\partial B(x, t)| dt = u(x). \end{aligned}$$

Concluyéndose la demostración. ■

21 DE MARZO, 2023

### Teorema 3: Caracterización de Funciones Armónicas

Si  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  satisface la propiedad de la media, entonces es armónica.

**DEMOSTRACIÓN** ■

#### Teorema 4: Principio del Máximo

Sea  $\Omega$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  abierto y acotado. Si  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  es una función armónica, entonces

1. El máximo de la función se alcanza en la frontera.

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

2. Si además  $\Omega$  es conexo y el máximo se alcanza dentro de  $\Omega$ , entonces  $u$  es constante.

$$\exists x \in \Omega \mid u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u \implies u(x) = c \quad c \in \mathbb{R}.$$

El primer punto es el principio débil y el segundo el fuerte. Nótese que el segundo vale incluso si  $\Omega$  no es acotado.

**DEMOSTRACIÓN** Primero veamos que el principio fuerte implica el débil. En efecto, si no fuera así, se tendría que  $\max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$ . Es decir, existiría un  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$ . Consideremos  $\Omega_0$  la componente conexa que contiene a  $x_0$ . Luego, por el principio del máximo fuerte

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega_0}} u = \max_{\partial\Omega_0} u \leq \max_{\partial\Omega} u,$$

donde la última igualdad se debe a que la frontera es conexa. Tenemos una contradicción, por lo tanto el Ppio fuerte implica el débil.

Ahora queda probar el Ppio fuerte. Sea  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u =: M$ . Consideremos el conjunto

$$A := \{x \in \Omega \mid u(x) = M\}.$$

Vamos a probar que  $A = \Omega$  mostrando que es abierto y cerrado (relativamente a  $\Omega$ ).

A cerrado: Basta notar que  $A = u^{-1}(M)$  y  $u$  es continua, así que  $A$  es cerrado.

A abierto: Sea  $x \in A$ . Como  $u$  es armónica, satisface la propiedad de la media. Se sigue que

$$M = u(x) = \oint_{B(x,r)} u(y) dy, \quad \forall r > 0 \mid \overline{B(x,r)} \subset \Omega.$$

Luego,

$$\oint_{B(x,r)} (M - u(y)) dy = 0$$

Por lo tanto  $u(y) = M$  para todo  $y \in B(x,r)$ . Se sigue que  $B(x,r) \subset A$  y por lo tanto  $A$  es abierto. ■

#### Corolario 1.: (Unicidad en Poisson para dominios acotados con datos de borde)

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado, entonces existe a lo más una solución  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, & \text{en } \Omega \\ u &= g, & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones continuas en  $\Omega$  y  $\partial\Omega$  respectivamente.

**DEMOSTRACIÓN** Supongamos que  $u_1, u_2$  son dos soluciones, entonces  $v = u_1 - u_2$  es armónica en  $\Omega$  y  $v = 0$  en  $\partial\Omega$ . Por el Ppio del máximo,  $v = 0$  en  $\Omega$ . ■

#### EJEMPLO 2

1. En  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,1)}$ , el problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{en } \Omega \\ u &= 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

No tiene solución única. En efecto,  $u = 0$  y

$$u(x) = \begin{cases} \log 1/|x| & , n = 2 \\ 1/|x|^{n-2} - 1, n \geq 3 \end{cases},$$

son dos soluciones.

2. En  $\Omega = \mathbb{R}_+^n := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+\}$ , el problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad , \text{ en } \Omega \\ u &= 0, \text{ en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

tampoco tiene solución única, pues  $u = 0$  y  $u = x_n$  son solución.

#### Teorema 5: de Liouville

Si  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función armónica y acotada, entonces es constante.

**DEMOSTRACIÓN** Asumimos que  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Obsérvese que las derivadas parciales de  $u$  son armónicas, pues

$$\Delta(\partial_{x_i} u) = \partial_{x_i} \Delta u = 0.$$

Veremos que las derivadas son nulas y por lo tanto  $u$  será constante.

Aplicando la propiedad de la media a cada derivada parcial y usando el Teorema de la Divergencia, tenemos que

$$\partial_{x_i} u(x_0) = \oint_{B(x_0, r)} \partial_{x_i} u(x) dx = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{\partial B(x_0, r)} u(x) \hat{n}^i(x) dx.$$

Y entonces

$$|\partial_{x_i} u(x_0)| \leq \|u\|_{L^\infty} \frac{|\partial B(x_0, r)|}{\alpha(n)r^n} \leq \|u\|_{L^\infty} \frac{n}{r}.$$

Tomando  $r \rightarrow \infty$  se concluye que  $\partial_{x_i} u(x) = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$  y para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto  $u$  es constante. ■

#### Corolario 2.

Para  $n \geq 3$  y  $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$ , se tiene que toda solución acotada  $u$  del problema

$$-\Delta u = f,$$

es de la forma  $u(x) = \Phi * f(x) + C$ .

**DEMOSTRACIÓN** Sabemos que  $\Phi * f$  es solución del problema. Dado que

$$|\Phi * f(x)| \leq \|f\|_K \int_K \Phi(x-y) dy < \infty \quad \text{supp } f \subset K \text{ compacto},$$

se tiene que es acotada. Luego, si  $u$  es otra solución acotada, la función  $v = \Phi * f - u$  es armónica en  $\mathbb{R}^n$  y acotada. Por Liouville, es constante. Es decir,  $u = \Phi * f + C$  con  $C \in \mathbb{R}$ . ■

23 DE MARZO, 2023

## 4.3. Regularidad

### Convolución y Regularización

Para  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto, definimos el conjunto

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Además, definimos  $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  como

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & , |x| < 1 \\ 0 & , |x| \geq 1 \end{cases},$$

donde  $C$  es una constante tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) = 1.$$

Con esto definimos la **función regularizante**

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0.$$

La gracia de la función regularizante es que  $\text{supp } \eta_\varepsilon = \overline{B(0, \varepsilon)}$  y  $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1$ .

Para una función  $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  y  $x \in \Omega_\varepsilon$ , definimos

$$f_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy.$$

la regularización de  $f$  en  $\Omega_\varepsilon$ . Para la regularización, se cumple que

1.  $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ ;
2.  $f_\varepsilon \rightarrow f$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  ctp;
3. Si  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ ,  $f_\varepsilon$  converge uniformemente a  $f$  sobre compactos;
4. Si  $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$  con  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $f_\varepsilon \rightarrow f$  en  $L^p_{\text{loc}}$ .

#### Teorema 6: Regularidad de funciones armónicas

Si  $u \in \mathcal{C}(\Omega)$  y satisface la propiedad de la media para toda bola  $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ , entonces  $u$  es  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ .

**DEMOSTRACIÓN** Vamos a probar que  $u = u_\varepsilon$  en  $\Omega_\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x, \varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x, r)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dS(y) dr \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \underbrace{\int_{\partial B(x, r)} u(y) dS(y)}_{u(x)|\partial B(x, r)|} dr \\ &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) |\partial B(x, r)| dr \\ &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x, r)} \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) dS(y) dr \\ &= \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_{B(x, \varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) dy \\ &= u(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) dy}_{=1} = u(x). \end{aligned}$$

Como  $u_\varepsilon$  es  $\mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ , también lo es  $u$ . ■

#### Teorema 7.

Las funciones armónicas son analíticas.

#### Teorema 8: Desigualdad de Harnack

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $V$  un dominio compactamente contenido en  $U$ . Si  $u$  es una función armónica no negativa en  $U$ , entonces

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

donde la constante  $C$  no depende de  $u$ . En particular, se tiene que

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y) \quad \forall x, y \in V.$$

**DEMOSTRACIÓN** Vamos a probar la última desigualdad. Sea  $r = \text{dist}(V, \partial U)$ . Como  $\bar{V}$  es compacto si cubrimos con bolas de radio  $r/2$ , existe un cubrimiento  $B_1, \dots, B_N$  finito, tal que  $V \subset B_1 \cup \dots \cup B_N$ . Además, como  $V$  es conexo, se tiene (renombrando de ser necesario) que  $B_{i-1} \cap B_i \neq \emptyset$  para todo  $i = 2, \dots, N$ .

Denotemos por  $x_1, \dots, x_N$  a los centros de  $B_1, \dots, B_N$  respectivamente. Como  $u$  es armónica, vale la propiedad de la media, así que

$$u(x_i) = \oint_{B(x_i, r)} u(y) dy = \frac{1}{|B(x_i, r)|} \int_{B(x_i, r)} u(y) dy \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Ahora, por la elección del cubrimiento, se tiene que

$$\begin{aligned} u(x_1) &= \frac{1}{|B(x_1, r)|} \int_{B(x_1, r)} u(y) dy \\ &\geq \frac{1}{|B(x_1, r)|} \int_{B(x_2, r/2)} u(y) dy = \frac{1}{2^n} \oint_{B(x_2, r/2)} u(y) dy = \frac{1}{2^n} u(x_2). \end{aligned}$$

Se sigue que  $u(x_1) \geq \frac{1}{2^{n(N-1)}} u(x_N)$ . Si  $x, y \in V$ , entonces SPG  $x \in B_i$  y  $y \in B_j$  para algún par  $i \leq j$ . Bajo el procedimiento anterior en  $x$  tenemos  $u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(x_i)$  y aplicando el procedimiento en  $x_j$  da que  $u(x_j) \geq \frac{1}{2^n} u(y)$ . Luego,

$$u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(x_i) \geq \frac{1}{2^{nN}} u(x_j) \geq \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y).$$

Las desigualdades en la otra dirección son análogas. Con esto queda demostrado el resultado. ■

28 DE MARZO, 2023

## 4.4. Función de Green

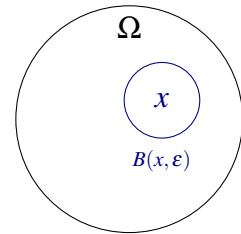
En esta sección buscaremos una representación para la solución al problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \text{ en } \Omega \\ u = g & , \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{P})$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y acotado con frontera suave.

Supongamos que  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  es solución de (P). Sea  $x \in \Omega$  y  $0 < \varepsilon \ll 1$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$ . Apliquemos una de las fórmulas de integración por partes con  $u(\cdot)\Phi(\cdot - x)$  en  $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \bar{B}(x, \varepsilon)$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)) dy \\ \parallel \\ \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u(y)\partial_{\mathbf{n}(y)}\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\partial_{\mathbf{n}(y)}u(y)) dS(y). \end{aligned} \quad (\text{H})$$



Nótese que la integral sobre el borde considera el borde de  $\Omega$  y el borde de  $B(x, \varepsilon)$ . Mirando este último, notamos que

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y)\partial_{\mathbf{n}(y)}\Phi(y-x) dS(y) = \oint_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) dS(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u(x)$$

y

$$\left| \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(y-x)\partial_{\mathbf{n}(y)}u(y) dS(y) \right| \leq C\varepsilon |\log \varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Por lo que cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  nos queda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (u(y)\Delta\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\Delta u(y)) dy &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u(y)\partial_{\mathbf{n}}\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\partial_{\mathbf{n}}u(y)) dS(y) \\ &\parallel \\ - \int_{\Omega} \Phi(y-x)\Delta u(y) dy &= u(x) + \int_{\partial\Omega} (u(y)\partial_{\mathbf{n}}\Phi(y-x) - \Phi(y-x)\partial_{\mathbf{n}}u(y)) dS(y), \end{aligned}$$

que despejando nos da

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\Omega} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} (\Phi(y-x) \partial_{\mathbf{n}} u(y) - u(y) \partial_{\mathbf{n}} \Phi(y-x)) dS(y) \\ &= \int_{\Omega} \Phi(y-x) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} (\Phi(y-x) \partial_{\mathbf{n}} u(y) - g(y) \partial_{\mathbf{n}} \Phi(y-x)) dS(y) \end{aligned}$$

En la expresión para  $u$  necesitamos remover el  $\partial_{\mathbf{n}} u$ , puesto que queremos una representación de  $u$  que no dependa directamente de  $u$ . Para lidiar con este problema introducimos el concepto de **función correctora**, esta función la denotaremos por  $\varphi^x$  y pediremos que resuelva el siguiente problema

$$\begin{cases} \Delta \varphi^x = 0 & , \text{ en } \Omega \\ \varphi^x = \Phi(y-x) & , \text{ en } \partial\Omega \end{cases} . \quad (\text{FC})$$

Suponiendo que tenemos tal solución, al aplicar la fórmula de integración por partes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(y) \Delta \varphi^x(y) - \varphi^x(y) \Delta u(y) dy \\ \parallel \\ \int_{\partial\Omega} u(y) \partial_{\mathbf{n}} \varphi^x(y) - \varphi^x(y) \partial_{\mathbf{n}} u(y) dS(y) \end{aligned} .$$

Como  $\Delta \varphi^x = 0$  en  $\Omega$  y  $\varphi^x(\cdot) = \Phi(\cdot - y)$  en la frontera, nos queda que

$$\int_{\Omega} -\varphi^x(y) \Delta u(y) dy = \int_{\partial\Omega} u(y) \partial_{\mathbf{n}} \varphi^x(y) - \Phi(y-x) \partial_{\mathbf{n}} u(y) dS(y)$$

y por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(y-x) \partial_{\mathbf{n}} u(y) dS(y) = \int_{\Omega} \varphi^x(y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} u(y) \partial_{\mathbf{n}} \varphi^x(y) dS(y).$$

El término de la izquierda es precisamente el término que queremos remover de la expresión de  $u$ , así que reemplazando obtenemos que

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} f(y) (\Phi(x-y) - \varphi^x(y)) dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \partial_{\mathbf{n}} (\Phi(y-x) - \varphi^x(y)) dS(y) \\ &= \int_{\Omega} f(y) G(x,y) dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y) dS(y). \end{aligned}$$

### Definición 3: Función de Green

La función de Green en  $\Omega$  se define como:

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \varphi^x(y) \quad x \neq y. \quad (2)$$

y satisface

$$\begin{cases} -\Delta_y G(x,y) = \delta_x & , \text{ en } \Omega \\ G(x,y) = 0 & , \text{ en } \partial\Omega \end{cases} .$$

Además, toda solución  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  del problema de Poisson (P) se puede expresar como:

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y) G(x,y) dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \partial_{\mathbf{n}(y)} G(x,y) dS(y).$$

Nótese que la definición anterior depende fuertemente de que el problema (FC) tenga solución.

### Teorema 9: La función de Green es simétrica

La función de Green es simétrica en el sentido siguiente:

$$\forall x \neq y \in \Omega \text{ se tiene que } G(x,y) = G(y,x).$$

30 DE MARZO, 2023

## 4.5. Función de Green para el semiespacio

Como dijimos antes, definir la función de Green depende de que podamos resolver el problema corrector. En esta subsección resolveremos tal problema para el semiespacio

$$\mathbb{R}_+^n := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n : x_n > 0\} \quad n \geq 3.$$

Concretamente, debemos resolver, para  $x \in \mathbb{R}_+^n$  el problema

$$\begin{cases} \Delta \varphi^x(y) = 0 & , y \in \mathbb{R}_+^n \\ \varphi^x(y) = \Phi(y - x) & , y \in \partial \mathbb{R}_+^n \end{cases}.$$

Lo natural viendo las condiciones de borde, sería querer que  $\varphi^x(\cdot) = \Phi(\cdot - x)$ , y de hecho, tenemos que

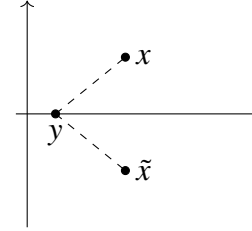
$$\Delta_y \Phi(y - x) = 0,$$

siempre y cuando  $y \neq x \in \mathbb{R}_+^n$ . El problema aquí es que nos falta un punto y nuestra función debe estar definida sobre todo el semiespacio. Por otro lado, la función  $\Phi$  no tiene más singularidades, así que

$$\Delta_y \Phi(y - \tilde{x}) = 0, \quad \forall \tilde{x} \notin \overline{\mathbb{R}_+^n}.$$

Así, si podemos encontrar un  $\tilde{x}$  tal que se satisfagan las condiciones de borde habremos resuelto el problema. Y en efecto, usando las simetrías del semiespacio, se nota que si  $y \in \partial \mathbb{R}_+^n$  entonces los puntos  $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}_+^n$  y  $\tilde{x} = (x', -x_n) \in \mathbb{R}_-^n$  están a la misma distancia y por lo tanto

$$\varphi^x(y) = \Phi(y - x) = \Phi(y - \tilde{x}).$$



Definimos entonces  $\varphi^x(y) = \Phi(y - \tilde{x})$ , y por lo tanto la fórmula de Green se lee

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}). \quad (\text{GS})$$

Más aún, por la fórmula de representación, cualquier solución  $u$  del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & , \text{ en } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & , \text{ en } \partial \mathbb{R}_+^n \end{cases}, \quad (\text{PS})$$

se escribe como

$$u(x) = - \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} g(y) \partial_{n(y)} G(x, y) dS(y) = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} g(y) \frac{2x_n}{n\alpha(n)|x - y|^n} dS(y). \quad (\text{FPS})$$

Esta fórmula es conocida como **fórmula de Poisson** para el semiespacio, además, el **kernel de Poisson** se define como:

$$k(x, y) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}, \quad y \in \partial \mathbb{R}_+^n, x \in \mathbb{R}_+^n. \quad (\text{KPS})$$

Vamos a comprobar que (FPS), en efecto, resuelve el problema (PS).

**Teorema 10.**

Si  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  y  $u$  está dado por (FPS), entonces

1.  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ ;
2.  $\Delta u = 0$  en el semiespacio; y
3. Si  $x_0 \in \partial \mathbb{R}_+^n$  entonces

$$\lim_{\mathbb{R}_+^n \ni x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0).$$

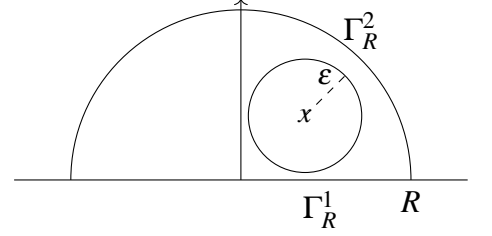
**DEMOSTRACIÓN** Sabemos que  $G(x, y)$  es tal que  $\Delta_y G(x, y) = 0$ . Ahora, como  $G(x, y)$  es simétrica, se sigue que  $\Delta_x G(x, y) = 0$ . Luego,

$$\begin{aligned}\Delta_x u(x) &= \Delta_x - \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} g(y) \partial_{n(y)} G(x, y) dS(y) \\ &= - \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} g(y) \Delta_x \partial_{n(y)} G(x, y) dS(y) \\ &= - \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} g(y) \partial_{\hat{n}(y)} \underbrace{\Delta_x G(x, y)}_{=0} dS(y) = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\Delta u = 0$  en el semiespacio y por lo tanto también es  $\mathcal{C}^\infty$ . Para ver que es integrable, basta ver que  $\partial_{\hat{n}(y)} G(x, y)$  es integrable. Vamos a ello.

Sea  $x \in \mathbb{R}_+^n$ . Tomemos  $R \gg 1$  tal que  $x \in B(0, R)$  y  $\varepsilon \ll 1$  tal que  $B(x, \varepsilon) \subset B(0, R) \cap \mathbb{R}_+^n$ . Miremos la región  $\Theta_{R, \varepsilon} := B(0, R) \cap (\mathbb{R}_+^n \setminus B(x, \varepsilon))$ . Sabemos que

$$0 = \int_{\Theta_{R, \varepsilon}} \Delta_y G(x, y) dS(y)$$



Llamemos  $\Gamma_R^2$  a la superficie de la bola que está en el semiespacio y  $\Gamma_R^1$  a la que toca el borde del subespacio. Por el Teorema de la divergencia, la expresión anterior se lee

$$0 = \int_{\Gamma_R^2} \partial_{\hat{n}(y)} G(x, y) dS(y) + \int_{\Gamma_R^1} \partial_{\hat{n}(y)} G(x, y) dS(y) + \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \partial_{\hat{n}(y)} G(x, y) dS(y)$$

Tomando  $R \rightarrow \infty$  y  $\varepsilon \rightarrow 0$  notamos que

$$\begin{aligned}(1) \quad & \int_{\Gamma_R^1} \partial_{\hat{n}(y)} G(x, y) dS(y) = \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} k(x, y) dS(y) \\ (2) \quad & \left| \int_{\Gamma_R^2} \partial_{\hat{n}(y)} G(x, y) dS(y) \right| \leq C/R \rightarrow 0 \\ (3) \quad & \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \partial_{\hat{n}(y)} G(x, y) dS(y) = \underbrace{\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \partial_{\hat{n}(y)} \Phi(y - x) dS(y)}_{\rightarrow -1} + \underbrace{\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \partial_{\hat{n}(y)} \Phi(y - \tilde{x}) dS(y)}_{\rightarrow 0}\end{aligned}$$

Así que

$$\int_{\partial \mathbb{R}_+^n} k(x, y) dS(y) = 1, \tag{3}$$

y por lo tanto  $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ .

Finalmente, probaremos el tercer punto. Sea  $x_0 \in \partial \mathbb{R}_+^n$  y  $x \in \mathbb{R}_+^n$ . Por (3) y (FPS) tenemos que

$$\begin{aligned}g(x_0) - u(x) &= g(x_0) - \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} g(y) k(x, y) dS(y) \\ &= \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} (g(x_0) - g(y)) k(x, y) dS(y).\end{aligned}$$

Sea  $\varepsilon > 0$  y tomemos  $\delta > 0$  tal que

$$|x_0 - y| < \delta \implies |g(x_0) - g(y)| < \varepsilon \quad y \in \partial \mathbb{R}_+^n.$$



Sea  $x \in B(x_0, \delta/2) \cap \mathbb{R}_+^n$ . Entonces

$$\begin{aligned}
|g(x_0) - u(x)| &= \left| \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} (g(x_0) - g(y))k(x, y) dS(y) \right| \\
&\leq \int_{\partial \mathbb{R}_+^n} |g(x_0) - g(y)| |k(x, y)| dS(y) \\
&= \underbrace{\int_{\partial \mathbb{R}_+^n \cap B(x_0, \delta)} |g(x_0) - g(y)| |k(x, y)| dS(y)}_I \\
&\quad + \underbrace{\int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{B(x_0, \delta)}} |g(x_0) - g(y)| |k(x, y)| dS(y)}_J.
\end{aligned}$$

Por la continuidad de  $g$  y (3), tenemos que  $I \leq \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ . Por otro lado, para estimar  $J$ , notemos que

$$\begin{aligned}
|x - x_0| \leq \delta/2 &\implies |y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|. \\
|y - x_0| > \delta
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$J \leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{B(x_0, \delta)}} k(x, y) dS(y) \leq \frac{2^{n+2}}{n\alpha(n)} \|g\|_{L^\infty} x_n \int_{\partial \mathbb{R}_+^n \setminus \overline{B(x_0, \delta)}} |y - x_0|^{-n} dS(y),$$

y por lo tanto  $J \rightarrow 0$  cuando  $x_n \rightarrow 0$ . Es decir, cuando  $x \rightarrow x_0$ ,  $|g(x_0) - u(x)| \rightarrow 0$ . ■

04 DE ABRIL, 2023

## 4.6. Función de Green para una bola

Consideremos la bola unitaria en  $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  con  $n \geq 3$ . Buscamos resolver el problema corrector

$$\begin{cases} \Delta \varphi^x = 0 & , \text{ en } B(0, 1) \\ \varphi^x = \Phi(\cdot - x) & , \text{ en } \partial B(0, 1) \end{cases}.$$

Nótese que si  $x = 0$ , entonces  $\varphi^0(y) = \Phi(1)$  para  $y \in \partial B(0, 1)$  y el problema se satisface. Consideremos entonces  $x \neq 0$ ; Denotamos por  $\tilde{x} := \frac{x}{|x|^2}$  a su **punto dual** o inverso de  $x$  con respecto a  $\partial B(0, 1)$ . Fijando  $x$ , tenemos que el mapa  $y \rightarrow \Phi(y - \tilde{x})$  es armónico para  $y \neq \tilde{x}$ . Más aún, el mapa  $y \rightarrow \frac{1}{|x|^{n-2}} \Phi(y - \tilde{x})$  es armónico para  $y \neq \tilde{x}$ . Definimos entonces,

$$\varphi^x(y) := \Phi(|x|(y - \tilde{x})).$$

Este mapa es armónico si  $y \neq \tilde{x}$ . En efecto,

$$\partial_{y_i}^2 \varphi^x(y) = \partial_{y_i} (\partial_{y_i} \Phi(|x|(y - \tilde{x})|x|) = \dots$$

Nótese que si  $y \in \partial B(0, 1)$  entonces,

$$\begin{aligned}
|x - y|^2 &= |x|^2 - 2y \cdot x + |y|^2 \\
&= |x|^2 \left( 1 - 2y \cdot \frac{x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) \\
&= |x|^2 (|y|^2 - 2y \cdot \tilde{x} + |\tilde{x}|^2) \\
&= |x|^2 |y - \tilde{x}|^2,
\end{aligned}$$

y tenemos que  $|x - y| = |x||y - \tilde{x}|$ . Se sigue que

$$\varphi^x(y) = \Phi(|x|(y - \tilde{x})) = \Phi(y - x)$$

pues  $\Phi$  es radial. La función de Green para la bola se lee

$$G(x, y) = \begin{cases} \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - \tilde{x})) & , x \neq y \in \overline{B(0, 1)}, x \neq 0 \\ \Phi(y) - \Phi(1) & , y \in \overline{B(0, 1)} \setminus \{0\}, x \neq 0 \end{cases}.$$

Luego, si  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  es solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & , \text{ en } \Omega \\ u = g & , \text{ en } \partial\Omega \end{cases},$$

por la fórmula de representación,

$$u(x) = - \int_{\partial B(0, 1)} g(y) \partial_{\mathbf{n}} G(x, y) dS(y)$$

Identifiquemos a  $\partial_{\mathbf{n}} G(x, y)$ ,

$$\partial_{\mathbf{n}} G(x, y) = \sum_{i=1}^n y_i \partial_{y_i} G(x, y)$$

Primero calculemos cada sumando,

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}} G(x, y) &= \partial_{y_i} \Phi(y - x) - \partial_{y_i} \Phi(|x|(y - \tilde{x})) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} - \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i |x|^2 - x_i}{(|x||y - \tilde{x}|^n)} \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n} - \frac{y_i |x|^2 - x_i}{|x - y|^n}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\partial_{\mathbf{n}} G(x, y) = - \frac{1}{n\alpha(n)} (1 - |x|^2) \frac{1}{|x - y|^n}.$$

Definimos el **kernel de Poisson** para la bola como

$$k(x, y) := -\partial_{\mathbf{n}} G(x, y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}$$

Haciendo un cambio de variables la tenemos la fórmula para cualquier bola de radio  $R$ . Esta se lee

$$u(x) = \int_{\partial B(0, R)} g(y) k(x, y) dS(y), \quad (\text{FRB})$$

con el kernel de Poisson

$$k(x, y) := \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n R} \quad (\text{KPB})$$

#### Teorema 11.

Si  $g \in \mathcal{C}(\partial B(0, R))$ , entonces la fórmula de representación (??) satisface:

1.  $u \in \mathcal{C}^\infty(B(0, R))$ ;
2.  $\Delta u = 0$  en  $B(0, R)$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = g(x_0)$  donde  $x_0 \in \partial B(0, R)$  y  $x \in B(0, R)$ .

DEMOSTRACIÓN

■

11 DE ABRIL, 2023

## 4.7. Principio de Dirichlet o Método de energía

Buscamos resolver el problema de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \text{ en } \Omega & , f \in \mathcal{C}(\Omega) \\ u = g & , \text{ en } \partial\Omega & , g \in \mathcal{C}(\partial\Omega) \end{cases}. \quad (\star)$$

Teorema 12.

Si  $\Omega$  es acotado y  $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$ , el problema tiene a lo más una solución de clase  $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ .

DEMOSTRACIÓN

■

**Principio de Dirichlet** Definimos el funcional de energía

$$\mathcal{J}w := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - wf \right)$$

con dominio  $\mathcal{A} := \{w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \mid w = g \text{ sobre } \partial\Omega\}$ .

Teorema 13.

Si  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  es solución del problema  $(\star)$  entonces

$$\mathcal{J}u = \min_{w \in \mathcal{A}} \mathcal{J}w.$$

Más aún, si  $u \in \mathcal{A}$  cumple la ecuación anterior, entonces  $u$  es solución de  $(\star)$ .

DEMOSTRACIÓN

■

## 5. Estrategias para resolver EDP's

### 5.1. La Transformada de Fourier

Definición 4: Transformada de Fourier

Sea  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Definimos su transformada de Fourier,  $\mathcal{F}(u) = u^\wedge$  como

$$u^\wedge(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} u(x) dx$$

donde  $y \in \mathbb{R}^n$ . Su inversa  $\mathcal{F}^{-1}(u) = u^\vee$  como

$$u^\vee(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot y} u(x) dx$$

Notar que la transformada y la transformada inversa están acotadas (pues  $u$  es integrable). Más aún, si pedimos que  $u$  sea cuadrado integrable, entonces las transformadas serán cuadrado integrables. Esto se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 14: Plancherel

Si  $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  es integrable y cuadrado integrable sobre  $\mathbb{R}^n$ , entonces sus transformada de Fourier (e inversa) son cuadrado integrables. Más aún,

$$\|u^\wedge\|_{L^2} = \|u^\vee\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

DEMOSTRACIÓN

■

La gracia de Plancherel es que podemos definir la transformada de Fourier para funciones  $u$  que solo son cuadrado integrables. Esto lo haremos mediante aproximaciones por funciones  $\{u_k\}_k \subset L^1 \cap L^2$  que convergen a  $u$ . En efecto, por Plancherel tenemos que

$$\|u_k^\wedge - u_j^\wedge\| = \|(u_k - u_j)^\wedge\| = \|u_k - u_j\|.$$

Así que la sucesión  $\{u_k^\wedge\}_k$  es de Cauchy en  $L^2$ . Como  $L^2$  es completo, tenemos que es convergente; Y de hecho converge a  $u^\wedge$ .

Teorema 15: Propiedades de la Transformada de Fourier

Si  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$  son cuadrado integrables, entonces

1. 
$$\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^\wedge \bar{v}^{wedge} dx.$$

2. Sea  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  un multi-índice. Entonces

$$(D^\alpha u)^\wedge = (iy)^\alpha u^\wedge,$$

donde  $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_n^{\alpha_n}$  y  $D^\alpha u \in L^2$ .

3.  $(u * v)^\wedge = (\sqrt{2\pi})^n u^\wedge v^\wedge.$

4.  $u = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} u.$

18 DE ABRIL, 2023

5.2. Separación de Variables

Consideremos el problema sobre  $I \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & , x \in I, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \\ \text{más condiciones de borde} \end{cases}$$

Las condiciones de borde más comunes son

Dirichlet	$u(0, t) = u(\ell, t)$
Neumann	$u_x(0, t) = u_x(\ell, t)$
Robin	$u_x(0, t) - a_0 u(0, t) = 0$ $u_x(\ell, t) - a_1 u(\ell, t) = 0$
Periódicas	$u(-\ell, t) = u(\ell, t)$ $u_x(-\ell, t) = u_x(\ell, t)$

Nos enfocaremos en la condiciones de tipo Dirichlet homogéneas (es decir, en la frontera ambas valen cero).

En la separación de variables buscamos desacoplar las componentes que modelan el problema. En el caso del problema que consideramos,  $u$  depende del espacio y del tiempo, así que buscamos soluciones de la forma

$$u(t, x) = T(t)E(x).$$

*Nótese que esto no quiere decir que todas las soluciones se vean así, estamos buscando un tipo muy particular de solución.*

Si reemplazamos en la ecuación tenemos que

$$\frac{T'}{kT} = \frac{E''}{E}$$

Para que la igualdad se mantenga, es necesario que ambos cocientes sean una constante (porque dependen de variables distintas). Dígamos por conveniencia que la constante es  $-\lambda$ . Luego,

$$\frac{T'}{kT} = \frac{E''}{E} = -\lambda \implies \begin{cases} E'' = -\lambda E \\ T' = -\lambda T \end{cases}.$$

Ahora tenemos un par de ecuaciones diferenciales ordinarias, que son más fáciles de resolver. Sin embargo, lo importante aquí es encontrar  $\lambda$ .

Por las condiciones de borde,  $E(0) = E(\ell) = 0$  y tenemos el problema de valores y funciones propias:

$$\begin{cases} -E''(x) = \lambda E(x) & , x \in I \\ E(0) = 0 \\ E(\ell) = 0 \end{cases}$$

Si  $\lambda$  satisface el problema anterior para  $E \neq 0$  diremos que es un valor propio del operador  $-\partial_x^2$  asociado a las condiciones de borde. De manera homóloga, diremos que  $E$  es una función propia.

Tenemos distintos casos dependiendo del signo de  $\lambda$ .

1.  $\lambda > 0$ : La solución de la EDO es una combinación lineal de la forma

$$E(x) = a_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + a_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Imponiendo las condiciones de borde tenemos que  $a_1 = 0$  y  $a_2 \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0$ . Se sigue que  $\sqrt{\lambda}\ell = n\pi$  con  $n$  un entero positivo. Esto nos da un valor propio para cada  $n$  y a su vez una función propia por cada  $\lambda_n$ . Estas son:

$$E_n(x) = A_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) \quad n \geq 1, A_n \neq 0.$$

2.  $\lambda = 0$ : La función es lineal y por las condiciones de borde debe ser la constante nula.

3.  $\lambda < 0$ : Las soluciones son de la forma

$$E(x) = a_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + a_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}x).$$

Imponiendo las condiciones de borde se concluye que  $E \equiv 0$ .

De esta forma, tenemos resuelta la parte espacial del problema y obtenido el (los)  $\lambda$  podemos resolver la parte temporal.

Como  $T' = -\lambda_n k T$  tiene por solución  $T_n(t) = B_n e^{-k\lambda_n t}$  con  $B_n \in \mathbb{R}$ . Así, la solución  $u$  con los componentes desacoplados se lee

$$u_n(t, x) = T_n(t)E_n(x) = C_n e^{-k\lambda_n t} \sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$

Y satisface el problema expuesto al inicio con condiciones de borde de dirichlet homogéneas.

Finalmente, nos queda el problema de imponer condiciones iniciales. La afirmación es que se pueden escoger coeficientes convenientes tal que la serie

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\sqrt{\lambda_n}x) = \phi(x)$$

Es solución del mismo problema anterior, pero además satisface las condiciones iniciales. Asumiremos cosas como la convergencia y mostraremos que tales coeficientes sí existen.

**Ortogonalidad de Funciones Propias** Sean  $f, g \in L^2(\Omega)$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Recordamos que el producto interno es  $L^2$  es

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx,$$

y la norma inducida es  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ . Decimos que  $f$  y  $g$  son *ortogonales* si  $\langle f, g \rangle = 0$ .

**Condiciones de Borde Simétricas** Diremos que las condiciones de borde son simétricas si para todo par  $f, g$  que las satisface se cumple que:

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \Big|_{x=0}^{x=\ell} = 0.$$

### Proposición 3.

Consideremos el problema de valores propios

$$\begin{cases} E'' + \lambda E = 0 & , x \in I \\ E \text{ satisface ciertas condiciones de borde simétricas.} \end{cases}$$

Si  $E_n$  y  $E_m$  son funciones propias asociadas a valores propios distintos, entonces son ortogonales.

Volviendo a nuestro ejemplo, teníamos que

$$\phi(x) = \sum_{n \geq 0} A_n E_n(x)$$

tiene condiciones de borde simétricas (verificar), así que

$$\langle \phi(x), E_n \rangle = A_n \langle E_n, E_n \rangle \implies A_n = \frac{\langle E_n, \phi(x) \rangle}{\langle E_n, E_n \rangle}.$$

20 DE ABRIL, 2023

## 6. Ecuación del Calor

Trabajamos en el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \end{cases} \quad (4)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función dada. Si  $f \equiv 0$  diremos que el problema es homogéneo.

### 6.1. Solución fundamental

**Simetrías** Considerando el problema homogéneo, notamos que es invariante bajo traslaciones y rotaciones en el espacio. Más aún, es invariante bajo traslaciones de la forma

$$(t, x) \mapsto (\lambda^2 t, \lambda x) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por esto último, vamos a buscar soluciones de la forma

$$u(t, x) = t^{-\alpha} v(xt^{-\beta}) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Poniendo  $y = xt^{-\beta}$  y reemplazando en la ecuación (4) se tiene que

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot \nabla v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0.$$

Tomando  $\beta = 1/2$  nos queda

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y \cdot \nabla v(y) + \Delta v(y) = 0.$$

Ahora la ecuación “solo tiene derivadas en  $y$ ”, así que es razonable (por lo discutido en la ecuación de Laplace) buscar soluciones de la forma  $v(y) = w(|y|)$ . De esta forma obtenemos,

$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w = 0.$$

Multiplicando por  $r^{n-1}$  vemos que la forma se asemeja a la regla del producto. De hecho, poniendo  $\alpha = n/2$  nos da que

$$\left( \frac{r^n}{2} w \right)' + (w' r^{n-1})' = 0 \implies r^{n-1} w' + \frac{1}{2} r^n w = C$$

donde  $C$  es una constante. Vamos a suponer que  $w$  decae de forma brutal en infinito. Específicamente,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{n-1} w' = 0 = \lim_{r \rightarrow \infty} r^n w,$$

de esta forma  $A = 0$  (¿por qué?) y podemos resolver la ecuación. Dándonos que  $w(r) = B e^{-\frac{1}{4} r^2}$  con  $B \in \mathbb{R}$  constante. Así, la ecuación (5) nos queda

$$u(t, x) = \frac{B}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

25 DE ABRIL, 2023

### Definición 5: Solución Fundamental

La solución fundamental para la ecuación del calor (4) es la función:

$$\Phi(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{(\sqrt{4\pi t})^n} e^{-|x|^2/4t} & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} . \quad (6)$$

¿Qué tipo de condición inicial satisface  $\Phi$ ? Tenemos las siguientes observaciones:

1. Si  $x \neq 0$ , entonces  $\Phi(t, x) \rightarrow 0$  cuando  $t \downarrow 0$ .
2. Si  $x = 0$ , entonces  $\Phi(t, x) \rightarrow \infty$  cuando  $t \downarrow 0$ .

Esto sugiere que “la energía” en un comienzo está concentrada en el origen. Ahora veamos que la elección de coeficientes para la solución fundamental no fue al azar, sino que está hecha de tal forma que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) dx = 1$$

En efecto, un cálculo directo nos muestra que

$$\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/4t} dx \stackrel{y=x/\sqrt{4t}}{=} \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-y_i^2} dy_i}_{\sqrt{\pi}} = 1.$$

En particular, tenemos que

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) dx = 1.$$

Vamos a probar, que en el sentido de las distribuciones, se tiene que

$$\Phi(0, x) = \delta_{x=0}.$$

Vamos a ello. Como  $\Phi(t, x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$  para todo  $t > 0$ , para cada  $t$  existe una distribución asociada  $u_\Phi^t$  dada por

$$\langle u_\Phi^t, \psi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) \psi(x) dx \quad \psi \in \mathcal{C}_C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Así que la igualdad en el sentido de las distribuciones quiere decir que

$$\begin{array}{ccc} \Phi(0, x) & = & \delta_{x=0} \\ \parallel & & \parallel \\ \lim_{t \downarrow 0} \langle u_\Phi^t, \psi \rangle & = & \langle \delta_{x=0}, \psi \rangle \\ \parallel & & \parallel \\ \lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) \psi(x) dx & = & \psi(0) \end{array}$$

Como  $\Phi$  integra uno, tenemos que

$$\psi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) \psi(0) dx \quad \forall t > 0.$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) \psi(x) dx - \psi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) (\psi(x) - \psi(0)) dx$$

Vamos a usar la regularidad de  $\psi$  para mostrar que la diferencia se va a cero. Sea  $\varepsilon > 0$ . Luego existe un  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon) > 0$  tal que

$$|\psi(x) - \psi(0)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in B(0, \sigma_0) =: B.$$

Luego,

$$\underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) (\psi(x) - \psi(0)) dx \right|}_I \leq \underbrace{\int_B \Phi(t, x) (\psi(x) - \psi(0)) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \Phi(t, x) (\psi(x) - \psi(0)) dx}_{I_2}$$

Claramente  $|I_1| \leq \varepsilon/2$ . Para acotar  $I_2$  notamos que

$$|I_2| \leq 2\|\psi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \Phi(t, x) dx \leq 2\|\psi\|_{L^\infty} \frac{1}{(4t\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} e^{-|x|^2/4t} dx$$

Notemos que  $e^{-|x|^2/4t} = e^{-|x|^2/8t} e^{-|x|^2/8t} \leq e^{-\sigma_0^2/8t} e^{-|x|^2/8t}$ . Se sigue que

$$|I_2| \leq C \underbrace{\frac{e^{-\sigma_0^2/4t}}{t^{n/2}}}_{(t \downarrow 0) \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/8t} dx}_{\leq \infty}.$$

En particular, si  $t_0$  es suficientemente pequeño podemos decir que  $|I_2| < \varepsilon/2$ . De esta forma,

$$|I| < \varepsilon.$$

#### Teorema 16.

La solución fundamental satisface

$$\begin{cases} \Phi_t(t, x) - \Delta_x \Phi(t, x) = 0 & , (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ \lim_{t \downarrow 0} \Phi(t, x) = \delta_{x=0}. \end{cases}$$

En el sentido de las distribuciones.

**Problemas de condición inicial** Consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & , \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \\ u = g & , \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde  $g$  es una función dada.

#### Teorema 17.

Supongamos que  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . La función definida por

$$u(t, x) = \Phi(t, x) *_x g = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y) g(y) dy,$$

satisface

1.  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ ;
2.  $u_t - \Delta_x u = 0$  en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ ;
3.  $\lim_{t \downarrow 0, x \rightarrow x_0} u(t, x) = g(x_0)$  para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

**DEMOSTRACIÓN** 1. (ejercicio)

Para el punto 2. notamos que por TCD (seguramente)

$$u_t - \Delta_x u = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_t(t, x - y) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_x \Phi(t, x - y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_t(t, x - y) - \Delta_x \Phi(t, x - y)) g(y) dy = 0.$$

Para el punto 3., fijando  $x_0$  notamos que

$$g(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x) g(x_0) dx$$

para todo  $t > 0$ . Sea  $\varepsilon > 0$  y tomemos  $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$  tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon/2 \quad \forall y \in B(x_0, \sigma_0) =: B.$$

Luego, si  $x \in B(x_0, \sigma_0/2)$  tenemos que

$$\begin{aligned} |u(t, x) - g(x_0)| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y) (g(y) - g(x_0)) dy \right| \\ &\leq \underbrace{\int_B \Phi(t, x - y) |g(y) - g(x_0)| dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \Phi(t, x - y) |g(y) - g(x_0)| dy}_{I_2} \end{aligned}$$



Acotar  $|I_1| < \varepsilon/2$  es directo usando la regularidad de  $g$  y que  $\Phi$  integra uno. Por otro lado, para acotar  $I_2$  notemos que si  $|x - x_0| < \sigma_0/2$ , entonces para  $|y - x_0| > \sigma_0$  se tiene que  $|y - x_0| \leq 2|y - x|$ . Así que

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \Phi(t, x - y) dy \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} e^{-|y - x_0|^2/16t} dy \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables  $z = \frac{y - x_0}{\sqrt{t}}$  tenemos que

$$\frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B} e^{-|y - x_0|^2/16t} dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \sigma_0/\sqrt{t})} e^{-|z|^2/16t} dz \leq \varepsilon/2$$

Tomando  $0 < t < t_0$  para algún  $t_0$  suficientemente pequeño. ■

27 DE ABRIL, 2023

## 6.2. Ecuación del Calor No Homogénea

Ahora tratamos con el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f, & \text{en } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u = g, & \text{en } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{NH})$$

Para resolver esto usaremos un método que es común en EDO. La idea consiste en resolver el problema homogéneo y desde ahí construir una solución del problema no homogéneo. A esta idea se le conoce como el *principio de Duhamel*.

Recordemos que en EDO, para resolver problema de la forma

$$\begin{cases} v_t + v = f & , t > 0 \\ v = g & , t = 0, \end{cases}$$

podíamos aplicar la técnica del propagador como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} v'(t) e^t + v(t) e^t &= f(t) e^t \\ (v(t) e^t)' &= f(t) e^t \\ \Rightarrow v &= e^{-t} g(t) + \int f(s) e^{s-t} ds. \end{aligned}$$

donde el propagador lo podemos interpretar como el operador  $S(t)[F] = e^{-t} F$ . De esta forma, podemos ver que  $v$  se compone de la solución del problema homogéneo ( $S(t)[g]$ ) y una solución particular del problema ( $\int S(t-s)[f]$ ) no homogéneo.

Volviendo al problema (NH), si las soluciones del problema homogéneo son de la forma  $u_h(t, x) = S(t)[g(x)]$  para algún propagador. ¿Será que  $u_h(t, x) + \int S(t-s)[f(s, x)]$  es solución del problema no homogéneo?. Simbólicamente, tendríamos que

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_x u &= [\partial_t - \Delta_x] S(t)[g(x)] + [\partial_t - \Delta_x] \int_0^t S(t-s)[f(s, x)] ds \\ &= 0 + S(t-t)[f(t, x)] + \int_0^t [\partial_t - \Delta_x] S(t-s)[f(s, x)] ds \\ &= f(t, x) \end{aligned}$$

Ahora, recordemos que

$$u_h(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x - y) g(y) dy$$

y esto se ve exactamente como un propagador, así que un candidato a solución particular es

$$u_p(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) f(s, y) dy ds.$$

El siguiente teorema dice que, en efecto, este procedimiento da una solución de (NH).

### Teorema 18.

Sea  $f \in \mathcal{C}^{(1,2)}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$  con soporte compacto. Definamos  $u = u_p$  como arriba. Entonces,

1.  $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ ,
2.  $u_t - \Delta_x u = f(t, x)$  para todo  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ ,
3. Para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow x_0, t \downarrow 0} u(t, x) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN

■

09 DE MAYO, 2023

## 6.3. Fórmula del Valor Medio

### Definición 6: Cilindro y Bola de calor

Sea  $U$  abierto y acotado en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $T > 0$  fijo. Definimos:

1. El cilindro parabólico

$$U_T := (0, T] \times U;$$

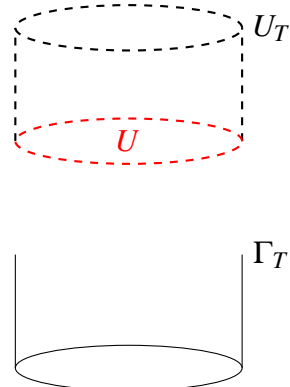
2. La frontera parabólica

$$\Gamma_T := \overline{U_T} - U_T;$$

3. Y la bola de calor

$$W_r(t_0, x_0) := \{(t, x) : t < t_0 \wedge \Phi(t_0 - t, x_0 - x) > r^{-n}\}$$

donde  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ .



Algunas observaciones sobre la bola de calor. Primero, notemos que  $(t_0, x_0) \in \partial W_r(t_0, x_0)$ . De hecho, tenemos que

$$\partial W_r(t_0, x_0) \cap \{0\} \times \mathbb{R}^n = \{(t_0, x_0)\}.$$

Por otro lado, la condición sobre  $\Phi$  nos dice que

$$\Phi(t_0 - t, x_0 - x) > r^{-n} \iff \frac{1}{\sqrt{4\pi(t_0 - t)}^n} \exp\left(-\frac{|x_0 - x|^2}{4|t_0 - t|}\right) > \frac{1}{r^n}$$

Dado que la exponencial está acotada por 1, nos queda la siguiente estimación:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi(t_0 - t)}^n} > \frac{1}{r^n} \iff t > t_0 - \frac{r^2}{4\pi}.$$

Así que, si  $(t, x) \in W_r(t_0, x_0)$ , entonces  $t \in (t_0 - \frac{r^2}{4\pi}, t_0) = I$ . Esto nos dice que en la bola de calor no nos podemos ir tan atrás en el tiempo. Cabe preguntarse cómo se comporta el espacio en este trozo de tiempo  $I$ ; Para investigarlo, tomemos  $s \in I$ . Luego,

$$W_r(t_0, x_0) \cap \{s\} \times \mathbb{R}^n$$

es una bola (en el espacio) centrada en  $(t_0, x_0)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \Phi(t_0 - s, x_0 - x) > r^{-n} &\iff \frac{1}{\sqrt{4\pi(t_0 - s)}^n} \exp\left(-\frac{|x_0 - x|^2}{4|t_0 - s|}\right) > \frac{1}{r^n} \\ &\iff \left(\frac{r}{\sqrt{4\pi(t_0 - s)}}\right)^n > \exp\left(-\frac{|x_0 - x|^2}{4|t_0 - s|}\right) \\ &\iff |x_0 - x|^2 < 4|t_0 - s|n \log\left(\frac{r}{\sqrt{4\pi(t_0 - s)}}\right) =: \rho(s)^2. \end{aligned}$$

Luego,  $|x - x_0| \leq \rho(s)$ . Nótese que para  $s \uparrow t_0$  y en  $s \downarrow t_0 - \frac{r^2}{4\pi}$  se tiene que  $\rho(s) \rightarrow 0$ . Más aún, a medida que  $s$  disminuye desde  $t_0$  la cota  $\rho(s)$  crece y luego decrece hasta llegar a  $s = t_0 - \frac{r^2}{4\pi}$ , donde se anula.

Otras observaciones de la bola de calor incluyen:

1. Monotonía: Si  $r_1 < r_2$ , entonces  $W_{r_1} < W_{r_2}$ ;
2. Traslación:  $W_r(t_0, x_0) = (t_0, x_0) + W_r(0, 0)$ ;
3. Dilatación: Si  $(t, x) \in W_r(0, 0)$  entonces  $(t/r^2, x/r) \in W_1(0, 0)$ ;
4. Para  $t_0 = 0$  y  $x_0 = 0$ , si  $t \in (-r^2/4\pi, 0)$  entonces

$$\Phi(-t, -x) > \frac{1}{r^n} \iff \frac{|x|^2}{4t} > n \log \left( \frac{-\sqrt{4\pi t}}{r} \right).$$

Definiendo  $b_r: \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$b_r(t, x) = \frac{|x|^2}{4t} + n \log(r) - \frac{n}{2} \log(-4\pi t),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} W_r(0, 0) &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n : b_r(t, x) > 0\} \\ \partial W_r(0, 0) &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^n : b_r(t, x) = 0\}. \end{aligned}$$

5.

$$\frac{1}{4r^n} \int_{W_r(0,0)} \frac{|x|^2}{t^2} d(t, x) = \frac{1}{4} \int_{W_1(0,0)} \frac{|x|^2}{t^2} d(t, x) = 1.$$

#### Proposición 4.

Sean  $R > 0$  y  $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(W_r(0,0))$ . Definiendo

$$\begin{aligned} \phi: (0, R) &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\mapsto \frac{1}{4r^n} \int_{W_r(0,0)} u(t, x) \frac{|x|^2}{t^2} d(t, x) \end{aligned}$$

se cumple que

$$\phi(r) \xrightarrow{r \downarrow 0} u(0, 0)$$

y

$$\phi'(r) = \frac{n}{r^{n+1}} \int_{W_r(0,0)} [-u_t(t, x) + \Delta_x u(t, x)] b_r(t, x) d(t, x)$$

**DEMOSTRACIÓN** Por la última propiedad de la bola de calor, tenemos que

$$u(0, 0) = \frac{1}{4r^n} \int_{W_r(0,0)} u(0, 0) \frac{|x|^2}{t^2} d(t, x).$$

Se sigue que

$$\phi(r) - u(0, 0) = \frac{1}{4r^n} \int_{W_r(0,0)} (u(t, x) - u(0, 0)) \frac{|x|^2}{t^2} d(t, x) \leq \|u(t, x) - u(0, 0)\|_{L^\infty(W_r(0,0))}$$

Cuando  $r \rightarrow 0$  el dominio colapsa a un punto. Por lo tanto la última expresión se va a cero. Con esto tenemos la primera afirmación del teorema.

Para la segunda, notemos que

$$\phi(r) = \frac{1}{4} \int_{W_1(0,0)} u(r^2 s, r y) \frac{|y|^2}{s^2} d(s, y).$$

Por TCD se sigue que

$$\phi'(r) = \frac{1}{4} \int_{W_1(0,0)} \partial_r u(r^2 s, ry) \frac{|y|^2}{s^2} d(s, y).$$

Aplicando regla de la cadena, tenemos que

$$\partial_r u(r^2 s, ry) = D_t u(r^2 s, ry) 2rs + D_x u(r^2 s, ry) \cdot y$$

donde que  $D_t u = u_t$  es una función escalar y  $D_x u = \nabla_x u$  es una función vectorial. Luego,

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{4} \int_{W_1(0,0)} [u_t(r^2 s, ry) 2rs + \nabla_x u(r^2 s, ry) \cdot y] \frac{|y|^2}{s^2} d(s, y) \\ &= \frac{1}{4r^{n+1}} \int_{W_r(0,0)} [u_t(t, x) 2t + \nabla_x u(t, x) \cdot x] \frac{|x|^2}{t^2} d(t, x) \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \int_{W_r(0,0)} u_t(t, x) \frac{|x|^2}{4t^2} + \nabla_x u(t, x) \cdot x \frac{|x|^2}{4t^2} d(t, x). \end{aligned}$$

Dado que

$$\nabla_x b_r = \frac{x}{2t} \quad y \quad \partial_t b_r = -\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}$$

tenemos que

$$\nabla_x b_r \cdot x = \frac{|x|^2}{2t} \quad y \quad x \frac{|x|^2}{4t^2} = -x \partial_t b_r - n \nabla_x b_r.$$

De esta forma,

$$\phi'(r) = \text{matracaaa}$$

### Corolario 3.

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado, y  $T > 0$ . Si  $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(U_T)$  es solución de la ecuación del calor, entonces

$$u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \int_{W_r(t_0, x_0)} u(t, x) \frac{|x - x_0|^2}{|t - t_0|^2} d(t, x),$$

para toda bola de calor  $W_r(t_0, x_0) \subset\subset U_T$ .

DEMOSTRACIÓN

## 6.4. Principio del Máximo

### Teorema 19: Principio del Máximo

Si  $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(U_T) \cap \mathcal{C}(\overline{U_T})$  es solución de la ecuación del calor en  $U_T$ , entonces

1. El máximo se alcanza en la frontera

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

2. Si  $U$  es conexo y el máximo se alcanza en  $U_T$

$$\exists(t_0, x_0) : u(t_0, x_0) = \max_{\overline{U_T}} u,$$

entonces  $u$  es constante en  $\overline{U_{t_0}}$ .

El primero se conoce como la versión débil y el segundo como la versión fuerte.

DEMOSTRACIÓN Vamos a demostrar la fuerte.

1. Velocidad infinita de propagación: Sea  $U$  es abierto conexo y acotado. Si  $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(U_T) \cap \mathcal{C}(\overline{U_T})$  satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & , \text{ en } U_T \\ u = 0 & , \text{ en } [0, T] \times \partial U \\ u = g & , \text{ en } \{0\} \times U \end{cases}$$

donde  $g \geq 0$ , entonces  $u$  es estrictamente positiva en  $U_T$  si  $g$  es estrictamente positiva en alguna parte de  $U$ .

2. Unicidad en dominios acotados: Sea  $g \in \mathcal{C}(\Gamma_T)$  y  $f \in \mathcal{C}(U_T)$ . Entonces existe a lo más una solución del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = f & , \text{ en } U_T \\ u = g & , \text{ en } \Gamma_T \end{cases} \quad (0)$$

3. Principio del máximo para el problema de Cauchy: Supongamos que  $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}((0, T] \times \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$  satisface

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0 & , \text{ en } (0, T) \times \mathbb{R}^n \\ u = g & , \text{ en } \{0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

y satisface la estimación de crecimiento

$$u(t, x) \leq A e^{\alpha |x|^2}$$

donde  $A, \alpha > 0$  son constantes. Entonces,

$$\sup_{[0, T] \times \mathbb{R}^n} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

## 6.5. Métodos de Energía

### Teorema 20: Unicidad hacia atrás

Si  $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^{(1,2)}(\overline{U_T})$  son soluciones de (0) y  $u_1(T, x) = u_2(T, x)$  para todo  $x \in U$  entonces  $u_1 = u_2$  en  $U_T$ .

**DEMOSTRACIÓN** Sea  $w = u_1 - u_2$ . Luego,  $w$  resuelve la ecuación del calor homogénea con condiciones de borde nulas. Vale decir,

$$\begin{cases} w_t - \Delta_x w = 0 & , \text{ en } U_T \\ w = 0 & , \text{ en } \Gamma_T \end{cases}$$

Definamos el funcional de energía

$$e(t) = \int_U w^2(t, x) dx \quad \text{para } 0 \leq t \leq T.$$

De la demostración anterior tenemos que

$$\dot{e}(t) = -2 \int_U |\nabla_x w|^2 dx.$$

Se sigue que

$$\ddot{e}(t) = -2 \int_U \partial_t (|\nabla_x w|^2) dx = -2 \int_U 2 |\nabla_x w| \frac{\nabla_x w \cdot \nabla_x w_t}{|\nabla_x w|} dx = -4 \int_U \nabla_x w \cdot \nabla_x w_t dx.$$

Haciendo integración por partes tenemos que

$$\ddot{e}(t) = 4 \int_U \Delta_x w w_t dx = 4 \int_U (\Delta_x w)^2 dx,$$

donde usamos que  $w_t$  se anula en  $\partial U$  y que resuelve la ecuación del calor homogénea. Por otro lado, dado que  $w$  se anula en  $\partial U$ , tenemos que

$$\int_U (\nabla_x w)^2 dx = - \int_U w \Delta_x w dx \leq \left( \int_U w^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_U (\Delta_x w)^2 dx \right)^{1/2},$$

donde la última desigualdad es por Cauchy-Schwarz. Combinando los cálculos anteriores deducimos que

$$(\dot{e}(t))^2 = 4 \left( \int_U |\nabla_x w|^2 dx \right)^2 \leq \left( \int_U w^2 dx \right)^{1/2} \left( 4 \int_U (\Delta_x w)^2 dx \right)^{1/2} = e(t) \ddot{e}(t).$$

Si  $e(t) = 0$  para todo  $0 \leq t \leq T$  el resultado se sigue de la siguiente manera: tendríamos que  $\nabla w = 0$  y por lo tanto  $w$  es una función constante. Dado que vale cero en la frontera, necesariamente tendría que ser la función constante cero (c.t.p.).

Supongamos que  $e(t) > 0$  para  $t \in [t_1, t_2) \subset [0, T]$  donde  $t_2$  es tal que  $e(t_2) = 0$  (ie.  $t_2$  podría ser  $T$ ). Definamos  $f(t) = \log(e(t))$  sobre  $[t_1, t_2)$ . Notemos que  $f$  es convexa en  $(t_1, t_2)$ , pues

$$f''(t) = \frac{\ddot{e}(t)}{e(t)} - \frac{\dot{e}(t)^2}{e(t)^2} \geq 0.$$

Luego, si  $\tau \in (0, 1)$  y  $t \in (t_1, t_2)$  tenemos que

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t).$$

Aplicando exp nos queda

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t)^\tau.$$

Y por lo tanto

$$0 < e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \leq e(t_1)^{1-\tau} e(t_2)^\tau = 0$$

Obteniéndose una contradicción. ■

16 DE MAYO, 2023

#### Definición 7: Cilindro Circular Parabólico

Sea  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ . El cilindro circular parabólico (cerrado) de radio  $r$  y altura  $r^2$  con techo centrado en  $(t, x)$  es

$$C(t, x; r) := \{(s, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n : |x - y| \leq r^2 \wedge t - r^2 \leq s \leq t\}.$$

#### Teorema 21: Regularidad de la Ecuación del Calor

Sea  $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(U_T)$  una solución de la ecuación del calor en  $U_T$ , entonces  $u \in \mathcal{C}^\infty(U_T)$ .

**DEMOSTRACIÓN** Fijemos  $(x_0, t_0) \in U_T$ . Sea  $C_1 = C(x_0, t_0; r)$  el cilindro de radio  $r$  y altura  $r^2$  contenido en  $U_T$ .

Sean  $C_2$  y  $C_3$  los cilindros contenidos en  $C_1$  que comparten el mismo techo de radio  $0.75r$  y  $0.5r$ , respectivamente. Sea  $\psi \in \mathcal{C}_C^\infty([0, t_0] \times \mathbb{R}^n)$  tal que (1)  $0 \leq \psi \leq 1$ ; (2)  $\psi = 1$  en  $C_2$  y (3)  $\psi = 0$  fuera de  $C_1$ .

Consideremos  $v^\varepsilon = \psi \cdot (\eta_\varepsilon * u) = \psi u^\varepsilon$ . Notar que  $v^\varepsilon$  está definido sobre todo  $[0, t_0] \times \mathbb{R}^n$ . Por otro lado,

$$v_t^\varepsilon = \psi_t u^\varepsilon + \psi u_t^\varepsilon$$

y

$$\nabla v^\varepsilon = \nabla \psi u^\varepsilon + \nabla u^\varepsilon \psi \Rightarrow \Delta v^\varepsilon = \Delta \psi u^\varepsilon + 2 \nabla \psi \nabla u^\varepsilon + \Delta u^\varepsilon \psi$$

Así que  $v^\varepsilon$  resuelve

$$\begin{cases} v_t^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon = \psi_t u^\varepsilon - 2 \nabla \psi \nabla u^\varepsilon - \Delta \psi u^\varepsilon = \tilde{f} & , \text{ en } (0, t_0) \times \mathbb{R}^n \\ v = 0 & , \text{ en } \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Por la unicidad del problema de Cauchy se tiene que

$$v^\varepsilon(t, x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) \tilde{f}(s, y) dy ds \quad (t, x) \in (0, t_0) \times \mathbb{R}^n$$

Sea  $(x, t) \in C_3$ . Aquí  $\psi = 1$ , por lo tanto  $v^\varepsilon = u^\varepsilon$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t, x) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) \tilde{f}(s, y) dy ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(t-s, x-y) ((\psi_t - \Delta\psi) u^\varepsilon - 2\nabla\psi \nabla u^\varepsilon) dy ds \\ &= \int_{C_1} \Phi(t-s, x-y) ((\psi_t - \Delta\psi) u^\varepsilon - 2\nabla\psi \nabla u^\varepsilon) dy ds. \end{aligned}$$

Haciendo integración por partes en el segundo sumando tenemos

$$\int_{C_1} \Phi(t-s, x-y) 2\nabla\psi \nabla u^\varepsilon dy ds = -2 \int_{C_1} (\Phi(t-s, x-y) \Delta\psi + \nabla\Phi(t-s, x-y) \nabla\psi) u^\varepsilon dy ds.$$

Volviendo a la expresión anterior

$$u^\varepsilon(t, x) = \int_{C_1} (\Phi(t-s, x-y)(\psi_t + \Delta\psi) + 2\nabla\Phi(t-s, x-y) \nabla\psi) u^\varepsilon dy ds.$$

Dado que  $\psi \equiv 1$  en  $C_2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t, x) &= \int_{C_1 \setminus C_2} (\Phi(t-s, x-y)(\psi_t + \Delta\psi) + 2\nabla\Phi(t-s, x-y) \nabla\psi) u^\varepsilon(s, y) dy ds \\ &=: \int_{C_1 \setminus C_2} \mathcal{K}(t, s, x, y) u^\varepsilon(s, y) dy ds \end{aligned}$$

Dado que  $\kappa \in \mathcal{C}^\infty$  en  $C_3$ , tenemos que  $u^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(C_3)$ . Finalmente, dado que  $u \in \mathcal{C}^2$ , se tiene que  $u^\varepsilon \rightarrow u$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  de manera uniforme. De esta forma, concluimos que  $u \in \mathcal{C}^\infty$ . ■

#### Teorema 22.

Existen constantes  $C_{k,\ell}$  con  $k, \ell = 0, 1, 2, \dots$  tal que

$$\max_{C(t,x;r/2)} \left| D_x^\alpha D_t^\ell u \right| \leq \frac{C_{k,\ell}}{r^{k+2\ell+n+2}} \|u\|_{L^1(C(t,x;r))} \quad |\alpha| = k$$

para todo cilindro  $C(t, x; r/2) \subset C(t, x; r) \subset U_T$  y toda solución  $u$  de la ecuación del calor en  $U_T$ .

**DEMOSTRACIÓN** Sin pérdida de generalidad digamos que  $(t, x) = (0, 0)$ . Primero probaremos el resultado para  $r = 1$ . Llamemos  $C_1$  y  $C_2$  a los cilindros de radio 1 y  $1/2$ , respectivamente. Por la demostración anterior, sabemos que para  $(t, x) \in C_2$  tenemos la representación:

$$u(t, x) = \int_{C_1} \mathcal{K}(t, s, x, y) u(s, y) dy ds.$$

Fijemos  $k$  y  $\ell$ . Sea  $|\alpha| = k$ . Se sigue que

$$\begin{aligned} \left| D_x^\alpha D_t^\ell u(t, x) \right| &\leq \int_{C_1} \left| D_x^\alpha D_t^\ell \mathcal{K}(t, s, x, y) \right| |u(s, y)| dy ds \\ &\leq C_{k,\ell} \|u\|_{L^1(C(1))} \quad \forall (t, x) \in C(0, 0; 1/2). \end{aligned}$$

Para el resultado general, sea  $r > 0$  y definamos

$$v(t, x) = v(r^2 t, rx) \quad (t, x) \in C(1).$$

Es claro que  $v$  es solución de la ecuación del calor. Por otro lado,

$$D_x^\alpha D_t^\ell v(t, x) = r^{2\ell+k} D_x^\alpha D_t^\ell u(r^2 t, rx)$$

y

$$\begin{aligned}\|v\|_{L^1(C_1)} &= \int_0^1 \int_{B(0,1)} |u(r^2 t, rx)| dx dt \\ &= \int_0^1 \int_{B(0,r)} |u(s, y)| r^{n+2} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+2}} \|u\|_{L^1(C(0,0;r))}.\end{aligned}$$

Aplicando el primer resultado nos queda

$$\left| D_x^\alpha D_t^\ell u(s, y) \right| \leq \frac{C_{k,\ell}}{r^{2\ell+k+n+2}} \|u\|_{L^1(C(0,0;r))} \quad \forall (s, y) \in C(0,0;r/2).$$

■

18 DE MAYO, 2023

## 7. Espacios de Sobolev

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

y multipliquemos por una función test  $\phi \in \mathcal{C}_C^\infty((a, b))$ . Al hacer integración por partes nos queda

$$\int_a^b u' \phi' + \int_a^b u \phi = \int_a^b f \phi.$$

Esta es la formulación débil del problema y la gracia es que ahora solo necesitamos que  $u$  sea continuamente diferenciable. Con herramientas de análisis funcional buscaremos revolver el sistema para estas funciones menos regulares, y a partir de estas deducir las más regulares.

### Definición 8: Derivada débil

Sean  $u, v \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $\alpha$  un multiíndice (ie.  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ). Decimos que  $v$  es la  $\alpha$ -derivada débil de  $u$  si se cumple que

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega).$$

En tal caso denotamos  $v = D^\alpha u$ .

### Proposición 5.

Si existe la  $\alpha$ -derivada débil de una función  $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ , entonces es única salvo un conjunto de medida nula.

23 DE MAYO, 2023

Fijemos  $1 \leq p \leq \infty$  y  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

### Definición 9: Espacio de Sobolev

El espacio de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  consiste de todas las funciones escalares  $k$ -veces debilmente diferenciables con derivadas  $p$ -integrables. En símbolos,

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \forall |\alpha| \leq k \quad D^\alpha u \text{ existe} \wedge D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

Denotamos  $H^k = W^{k,2}$ .



**Definición 10: Norma en  $W^{k,p}$**

Si  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ , definimos su norma por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & \text{Si } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{Si } p = \infty. \end{cases}$$

La convergencia la definimos de manera usual. Es decir, una sucesión de funciones  $(u_m)_m$  en  $W^{k,p}(\Omega)$  converge a una función  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  si  $\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0$ .

De manera análoga a los espacios  $L^p_{\text{loc}}$ , definimos  $W^{k,p}_{\text{loc}}$  y decimos que una sucesión converge si lo hace en compactos.

**Teorema 23.**

Los espacios de Sobolev son espacios de Banach.

**EJEMPLO 3**

1. Sea  $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  y  $\alpha > 0$ . Estudiaremos las derivadas débiles de

$$u(x) = \frac{1}{|x|^\alpha} \quad x \neq 0$$

y deduciremos para qué valores de  $\alpha$  está en algún espacio de Sobolev.

Dado que

$$\partial_{x_i} u(x) = -\alpha |x|^{-\alpha-1} \frac{x_i}{|x|} = -\alpha \frac{x_i}{|x|^{\alpha+2}}.$$

Se tiene que

$$Du = [\partial_{x_1} u \quad \cdots \quad \partial_{x_n} u] \implies |Du| = \frac{|\alpha|}{|x|^{\alpha+1}}.$$

Se sigue que  $|Du|$  está en  $L^1(\Omega)$  si  $\alpha + 1 < n$ .

Consideremos  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$  y  $\varepsilon > 0$ . Notese que

$$\int_{\Omega \setminus \overline{B(0, \varepsilon)}} u \phi_{x_i} = - \int_{\Omega \setminus \overline{B(0, \varepsilon)}} u_{x_i} \phi + \int_{\partial B(0, \varepsilon)} u \phi \hat{n}_i.$$

Dado que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(0, \varepsilon)} u \phi \hat{n}_i \right| &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \varepsilon^{-\alpha} \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} n \alpha(n) \varepsilon^{n-1} \varepsilon^{-\alpha} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

se tiene que (cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ )

$$\int_{\Omega} u \phi_{x_i} = - \int_{\Omega} u_{x_i} \phi$$

y por lo tanto  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  si  $\alpha + 1 < n$ .

En general, si  $(\alpha + 1)p < n$  se tiene que  $|Du| \in L^p(\Omega)$  y  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

2. Sea  $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  y  $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  un subconjunto denso y numerable de  $\Omega$ . La función definida por

$$u(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{1}{|x - r_k|^\alpha}$$

está en  $W^{1,p}(\Omega)$  para  $(\alpha + 1)p < n$  (usando el argumento del ejemplo anterior). Sin embargo,  $u$  no es acotada en todo abierto de  $\Omega$  y por lo tanto  $u \notin L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ .

### Proposición 6: Propiedades de Derivadas Débiles

En los siguientes incisos se entiende que  $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$  y que  $|\alpha| \leq k$ .

1. Sean  $\beta$  un multi-índice tal que  $|\alpha| + |\beta| \leq k$ . Entonces

$$D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega) \quad \wedge \quad D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha (D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u.$$

2. Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega) \quad \wedge \quad D^\alpha (\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$$

3. Si  $\Theta \subset \Omega$  es abierto, entonces  $u \in W^{k,p}(\Theta)$ .

4. Si  $\zeta \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ , entonces  $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$  y

$$D^\alpha (\zeta u) = \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u$$

Denotamos por  $W_0^{k,p}(\Omega)$  a la clausura de  $\mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$  en  $W^{k,p}(\Omega)$ . De esta forma, toda función en  $W_0^{k,p}(\Omega)$  se puede aproximar por funciones continuas y con soporte compacto. En símbolos:

$$u \in W_0^{k,p}(\Omega) \iff (\exists (u_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)) \mid u_m \rightarrow u \in W^{k,p}(\Omega).$$

Intuitivamente, las funciones en  $W_0^{k,p}(\Omega)$  son tales que “ $D^\alpha u = 0$  en  $\partial\Omega$ ” para  $|\alpha| \leq k-1$ .

## 7.1. Teoremas de Aproximación

### Teorema 24: Aproximación Interior por Funciones Suaves

Sea  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  con  $1 \leq p < \infty$ . La función

$$u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$$

sobre  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$  satisface:

1.  $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$  para todo  $\varepsilon > 0$ .
2.  $u_\varepsilon \rightarrow u$  en  $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Teorema 25: Aproximación Global por Funciones Suaves en $\Omega$

Supongamos que  $\Omega$  es acotado. Sea  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  con  $1 \leq p < \infty$ . Entonces existe una sucesión de funciones  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  tal que  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{k,p}(\Omega)$ .

### Teorema 26: Aproximación Global por Funciones Suaves en $\overline{\Omega}$

Supongamos que  $\Omega$  es acotado y  $\partial\Omega$  es de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  con  $1 \leq p < \infty$ . Existe una sucesión  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$  tal que  $u_m \rightarrow u$  en  $W^{1,p}(\Omega)$ .

30 DE MAYO, 2023

## 7.2. Teoremas de Extensión

### Teorema 27.

Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Supongamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto acotado con frontera  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $V \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y acotado tal que  $\Omega \subset\subset V$ . Entonces, existe un operador lineal acotado

$$E: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$$

tal que  $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$  se cumple que

1.  $E(u) = u$  c.t.p en  $\Omega$ ;

2.  $\text{supp} E(u) \subset V$  y
3. existe una constante  $C$  que sólo depende de  $p, \Omega$  y  $V$  tal que

$$\|E(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

El operador  $E$  nos da una extensión de  $u$  a  $\mathbb{R}^n$ .

### 7.3. Teoremas de Traza

La noción de traza viene a sustituir la de restringir una función a la frontera.

#### Teorema 28: Traza

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado con frontera  $\mathcal{C}^1$  y  $1 \leq p < \infty$ . Entonces existe un operador lineal acotado

$$T: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que

1. Si  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$  entonces  $T(u) = u|_{\partial\Omega}$ ;
2. Para toda función  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  existe una constante  $C = C(p, \Omega)$  tal que

$$\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

#### Teorema 29: kernel de $T$

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado con frontera  $\mathcal{C}^1$ . Si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , entonces

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \iff T(u) = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

### 7.4. Inyecciones de Sobolev

Nos preguntamos si una función en un espacio de Sobolev automáticamente pertenece a otro espacio con mayor regularidad. Si analizamos el espacio  $W^{1,p}(\Omega)$  tenemos que la respuesta es un sí y depende de los valores de  $p$ .

Recordamos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto.

#### 7.4.1. Caso $1 \leq p < n$ : Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev

Comenzamos analizando el caso  $1 \leq p < n$ . Buscamos una desigualdad de la forma:

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

donde  $1 \leq q < \infty$  y  $C > 0$  no dependen de  $u$ . Notéase que la desigualdad implica de manera directa que  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ . En efecto,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \leq C^p \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq C^p \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p + C^p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p = C^p \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}^p.$$

Miremos el caso  $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  y veamos qué condiciones de compatibilidad debe cumplir  $q$ . Vale decir, si suponemos la desigualdad cierta queremos saber qué debería cumplir  $q$ . Definamos

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x) \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$$

e insertemoslo en la desigualdad. Esto nos deja con

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\lambda^{n/p}} C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

De esta forma,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \lambda^{1-n/p-n/q} C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

y por lo tanto  $1 - n/p - n/q = 0$  o equivalentemente  $q = np/(n - p)$ . En particular,  $q > p$ .

**Definición 11: Exponente Conjugado de Sobolev**

Sea  $1 \leq p < n$ . Definimos el exponente conjugado de Sobolev como

$$p^* = \frac{np}{n-p}.$$

Notar que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad p^* > p.$$

**Teorema 30: Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev**

Sea  $1 \leq p < n$ . Entonces existe una constante  $C = C(n, p) > 0$ , que sólo depende de  $p$  y  $n$  tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^n). \quad (\text{GNS})$$

**Teorema 31: Estimaciones en  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < n$**

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado con frontera de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sean  $1 \leq p < n$  y  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Entonces  $u \in L^{p^*}(\Omega)$  y

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde  $C = C(p, \Omega) > 0$ . En particular, tenemos que

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega).$$

**DEMOSTRACIÓN** La idea será aplicar (GNS) y para ello necesitamos que la función esté definida sobre todo  $\mathbb{R}^n$ . Ahora bien, dado que  $\Omega$  tiene frontera de clase  $\mathcal{C}^1$  y es acotado, el teorema de extensión nos dice que existe un operador lineal acotado  $E$  tal que extiende  $u$  a  $\mathbb{R}^n$ . Denotemos a tal extensión  $\bar{u} = E(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Por el mismo teorema tenemos que

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Aplicando el teorema de aproximación interior por funciones suaves tenemos una sucesión de funciones  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $u_m \rightarrow \bar{u}$  en norma  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Aplicando (GNS) tenemos que

$$\|u_m - u_\ell\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D(u_m - u_\ell)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Obsérvese que el lado derecho se va a cero, pues  $(Du_m)_{m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . En consecuencia, concluimos que  $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ . A su vez, esto implica que  $u_m \rightarrow \bar{u}$  en norma  $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ , pues vive en un espacio completo. Luego,

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dado que tenemos convergencia en ambos espacios, tomando  $m \rightarrow \infty$  nos deja con

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|D\bar{u}_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\bar{u}_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\bar{u}_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

donde segunda desigualdad sale por la definición de la norma de los espacios de Sobolev y la última por el teorema de extensión. Por otro lado,

$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \geq \|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\Omega)} \geq \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}.$$

donde la primera desigualdad es porque estamos integrando en un espacio más pequeño y la última por el teorema de extensión. ■

**Teorema 32: Estimaciones en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < n$**

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado. Sean  $1 \leq p < n$  y  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Entonces

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall q \in [1, p^*]$$

donde  $C = C(p, q, \Omega) > 0$ . En particular,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall 1 \leq p < \infty.$$

Esta última se conoce como la *desigualdad de Poincaré*.

01 DE JUNIO, 2023

### 7.4.2. Caso $n < p \leq \infty$ : Desigualdad de Morrey

Terminado el caso  $1 \leq p < n$ , comenzaremos a analizar el caso  $n < p < \infty$ . Específicamente, mostraremos que si  $W^{1,p}(\Omega)$  entonces  $u$  es Hölder continua (salvo quizá, conjuntos de medida nula). Recordar que una función  $u$  es  $\alpha$ -Hölder continua si  $\|u(x) - u(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha$ . El ínfimo de los  $C$  es el *coeficiente de Hölder*. El espacio de las funciones  $\alpha$ -Hölder continuas con  $k$ -ésima derivada  $\alpha$ -Hölder continua se denota por  $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ .

#### Teorema 33: Desigualdad de Morrey

Sea  $n < p < \infty$ . Entonces existe una constante  $C = C(p, n) > 0$  tal que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$$

donde  $\gamma = 1 - (n/p)$  y

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)},$$

con

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}.$$

#### Definición 12: Versión

Diremos que  $u^*$  es una versión de  $u$  en  $\Omega$  si  $u = u^*$  c.t.p. en  $\Omega$ .

#### Teorema 34: Estimaciones en $W^{1,p}$ , $n < p \leq \infty$

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado con frontera  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $n < p \leq \infty$  y  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ . Entonces  $u$  tiene una versión  $u^* \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ , donde  $\gamma = 1 - n/p$  con

$$\|u^*\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad C = C(p, n, \Omega) > 0.$$

08 DE JUNIO, 2023

### 7.4.3. Desigualdades de Sobolev Generales

#### 7.4.4. Caso $p = n$

#### Definición 13: Compactamente Contenido

Sean  $X, Y$  espacios de Banach tal que  $X \subset Y$ . Diremos que  $X$  está compactamente contenido en  $Y$  y lo denotamos por  $X \subset\subset Y$  si

1.  $\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$ .
2. Toda sucesión acotada en  $X$  es precompacta en  $Y$ . Vale decir, si  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  es tal que  $\sup_k \|u_k\|_X < \infty$ , entonces existe una subsucesión  $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  convergente a  $u \in Y$ .

#### Teorema 35: Rellich-Kondrachov

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto y acotado con frontera de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $1 \leq p < n$ , entonces

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega) \quad \text{para } 1 \leq q < p^*.$$

DEMOSTRACIÓN

■

Dado que  $p^* > p$  y que  $p^* \rightarrow \infty$  cuando  $p \rightarrow n$ , tenemos que

$$W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega) \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

donde para  $n < p \leq \infty$  se usa la Desigualdad de Morrey y el Teorema de Arzela-Ascoli.

### Teorema 36: Desigualdad de Poincaré

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  abierto, acotado y conexo con frontera  $\mathcal{C}^1$  y  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces existe  $C = C(n, p, \Omega)$  tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega),$$

donde  $(u)_\Omega = f_\Omega u$ .

**DEMOSTRACIÓN** Vamos por contradicción. Supongamos que la desigualdad no vale. Entonces para cada  $k \in \mathbb{N}$  existe una función  $u_k \in W^{1,p}$  tal que

$$\|u - (u)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > k \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

Definamos  $v_k = (u_k - (u_k)_\Omega) / \|u_k - (u_k)_\Omega\|_{L^2(\Omega)}$ . Notar que  $\|v_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$  y que  $(v_k)_\Omega = 0$ . Se sigue que

$$\|Dv_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (\dagger)$$

Dado que la sucesión  $v_k$  es acotada y  $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ , existe una subsucesión  $(v_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  que es convergente a  $v \in L^p(\Omega)$ . Luego, para  $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v \partial_{x_i} \psi = \lim_{k_j \rightarrow \infty} \int_\Omega v_{k_j} \partial_{x_i} \psi = \lim_{k_j \rightarrow \infty} - \int_\Omega \partial_{x_i} v_{k_j} \psi = 0,$$

donde la última igualdad es por  $(\dagger)$ . De esta forma,  $v$  tiene como derivada débil  $Dv = 0$  c.t.p. en  $\Omega$  y por lo tanto  $v \in W^{1,p}(\Omega)$ . Como  $\Omega$  es conexo, concluimos que  $v$  debe ser constante. Dado que  $(v)_\Omega = \lim_{k_j \rightarrow \infty} (v_{k_j})_\Omega = 0$ , concluimos que  $v = 0$  c.t.p. en  $\Omega$ . Esto contradice que  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{k_j \rightarrow \infty} \|v_{k_j}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ . ■

### Corolario 4.: (Desigualdad de Poincaré para una Bola)

Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Entonces existe una constante  $C = C(n, p) > 0$  tal que

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr \|Du\|_{L^p(B(x,r))},$$

para toda bola  $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$  y para toda función  $u \in W^{1,p}(B(x, r))$ , donde  $(u)_{x,r} = f_{B(x,r)} u$ .

13 DE JUNIO, 2023

## 8. Operadores Elípticos de Segundo Orden

Comenzamos a estudiar el problema con condición de borde

$$\begin{cases} Lu = f & , \text{ en } \Omega \\ u = 0 & , \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es abierto y acotado,  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función incógnita,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es dada y  $L$  denota un operador diferencial de segundo orden que tiene una de las siguientes formas:

$$Lu = - \sum_{i,j}^n (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad (8)$$

$$Lu = - \sum_{i,j}^n a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u \quad (9)$$

Si  $L$  es de la forma (8), diremos que está en forma de divergencia. En el otro caso (9) diremos que está en forma de no-divergencia. En ambos casos, las funciones coeficientes  $(a^{ij}, b^i, c)$  satisfacen que:

1. están en  $L^\infty(\Omega)$ .

2.  $a^{ij} = a^{ji}$ .

3. existe  $\Theta > 0$  tal que

$$\sum_{i,j}^n a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \Theta |\xi|^2 \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Si  $L$  satisface las propiedades listadas arribas, diremos que es uniformemente elíptico.

## 8.1. Soluciones Débiles

Vamos a estudiar el problema (7) en el caso que  $L$  está en forma de divergencia (8) y  $f \in L^2(\Omega)$ . Momentáneamente supongamos que  $u \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega)$ . Al multiplicar por una función test e integrar por partes tendremos que

$$\sum_{i,j}^n \int_{\Omega} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b^i u_{x_i} v + \int_{\Omega} c v u = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in \mathcal{C}_C^\infty(\Omega). \quad (10)$$

Más aún, el resultado sigue valiendo para  $v \in H_0^1(\Omega)$ , pues podemos aproximar por funciones suaves con soporte compacto.

Por otro lado, la ecuación (10) hace sentido incluso para  $u \in H^1(\Omega)$ . No obstante, nos restringiremos a trabajar sobre  $H_0^1(\Omega)$  pues necesitamos que se satisfaga la condición de borde.

**Definición 14:** Forma Bilineal Asociada a  $L$

La forma bilineal (lineal en ambas entradas) asociada al operador lineal diferencial  $L$  en forma de divergencia (8) está definida por

$$B(u, v) := \sum_{i,j}^n \int_{\Omega} a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b^i u_{x_i} v + \int_{\Omega} c v u, \quad u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (\star_B)$$

**Definición 15:** Solución Débil,  $f \in L^2(\Omega)$

Diremos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  es una solución débil de (7) para  $f \in L^2(\Omega)$  si

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde el lado derecho es el producto interno en  $L^2(\Omega)$ . Esto se conoce como la formulación variacional de (7).

**Definición 16:** Solución Débil,  $f \in H^{-1}(\Omega)$

Diremos que  $u \in H_0^1(\Omega)$  es una solución débil de (7) para  $f \in H^{-1}(\Omega)$  si

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde el lado derecho es el producto dualidad entre  $H^{-1} \times H_0^1$ .

El concepto de solución débil para condiciones de borde no nulas se puede transformar en uno con condiciones de borde nulas de la siguiente manera: supongamos que tenemos el problema

$$\begin{cases} Lu = f & , \Omega \\ u = g & , \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $f \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $g \in T(H^1(\Omega))$  y  $\Omega$  tiene ahora frontera  $\mathcal{C}^1$ . Poniendo  $u' = u - w$ , donde  $T(w) = g$  reduce el problema a

$$\begin{cases} Lu' = f' & , \Omega \\ u' = 0 & , \partial\Omega, \end{cases}$$

donde  $f' = f - Lw \in H^{-1}(\Omega)$ .

## 8.2. Existencia de Soluciones Débiles

En esta parte  $H$  denotará un espacio de Hilbert, con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y norma  $\|\cdot\|$ .  $H'$  denota el dual de  $H$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\times$  denota el producto dual entre  $H'$  y  $H$ .

### Teorema 37: Lax-Milgram

Sea  $B: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal tal que existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  que satisfacen

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H \quad (\text{B.1})$$

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u, u) \quad \forall u \in H \quad (\text{B.2})$$

entonces para  $f \in H'$  existe un único  $u \in H$  tal que

$$B(u, v) = \langle f, v \rangle_\times.$$

La condición (B.1) hace referencia a la continuidad del operador  $B$ , mientras que la condición (B.2) se le conoce como coercividad.

**DEMOSTRACIÓN** La demostración la haremos por pasos.

**Paso 1:** Fijemos  $u \in H$ . Luego, el mapa  $v \mapsto B(u, v)$  es continuo por (B.1). Así, el teorema de representación de Riesz implica la existencia de un único  $w = w(u) \in H$  tal que

$$B(u, v) = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

Denotemos por  $A$  al operador que a cada  $u \in H$  le asigna  $w(u) \in H$ . Nótese que

$$B(u, v) = \langle Au, v \rangle \quad \forall v \in H.$$

**Paso 2:** Primero veamos  $A$  efectivamente define un operador lineal. Para ver que  $A0 = 0$ , notemos  $B(0, v) = B(\lambda \cdot 0, v) = \lambda B(0, v)$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ . En consecuencia, se sigue que  $B(0, v) = 0 = \langle 0, v \rangle$ . Por lo tanto  $A0 = 0$ . Sean ahora  $u, u' \in H$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^\times$ . Entonces

$$\begin{aligned} B(\lambda u + \mu u', v) &= \lambda B(u, v) + \mu B(u', v) \\ &= \lambda \langle w(u), v \rangle + \mu \langle w(u'), v \rangle \\ &= \langle \lambda w(u) + \mu w(u'), v \rangle \\ &= \langle w(\lambda u + \mu u'), v \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $A(u + u') = w(\lambda u + \mu u') = \lambda u + \mu u'$ .

Por otro lado, comprobamos que  $A$  es acotado (y por lo tanto continuo)

$$\langle Au, Au \rangle = \|Au\|^2 = B(u, Au) \stackrel{(\text{B.1})}{\leq} \alpha \|u\| \|Au\| \Rightarrow \|Au\| \leq \alpha \|u\|.$$

**Paso 3:** Usando (B.2) y Cauchy-Schwarz nos da que

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u, u) = \langle Au, u \rangle \leq \|Au\| \|u\| \Rightarrow \beta \|u\| \leq \|Au\|.$$

Se sigue que  $A$  es inyectiva y tiene rango cerrado. En efecto, como  $A0 = 0$  tenemos que  $\|A0\| \leq \|u\| \beta$  y por lo tanto  $u = 0$  (con esto tenemos inyectividad, y en particular podemos hablar de la inversa). Por otro lado, si  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  define una sucesión en  $T(H) \subset H$  convergente a  $u \in H$  tenemos que

$$\beta \|A^{-1}(u_k - u_m)\| \leq \|u_k - u_m\| \rightarrow 0.$$

Así que  $(A^{-1}u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $H$  y por lo tanto converge a  $A^{-1}u$ . En particular  $u \in A(H)$ .

**Paso 4:** Ahora probaremos que  $A(H) = H$ . Supongamos buscando una contradicción que  $H \setminus A(H) \neq \emptyset$ . Dado que  $A(H)$  es cerrado, tiene un complemento ortogonal y  $H = A(H) \oplus A^\perp(H)$ . Sea entonces  $w \in A^\perp(H)$ , entonces  $\langle Au, w \rangle = 0$  para cualquier  $u \in H$ . Por (B.2) tenemos que

$$\beta \|w\|^2 \leq B(w, w) = \langle Aw, w \rangle = 0.$$

Se sigue que  $w = 0$ . Pero  $w \in A(H)$ . Contradicción.



**Paso 5:** Recordamos que por el Teorema de Representación de Riesz, que si  $f \in H'$  existe un único  $w_0 \in H$  tal que  $\langle f, v \rangle_{\times} = \langle w_0, v \rangle$  para todo  $v \in H$ .

Ahora bien, tenemos que  $A$  es un operador lineal biyectivo (un endomorfismo), así que existe  $u_0 \in H$  tal que  $Au_0 = w_0$ . Se sigue que

$$B(u_0, v) = \langle Au_0, v \rangle = \langle w_0, v \rangle = \langle f, v \rangle_{\times}.$$

**Paso 6:** En los pasos anteriores mostramos la existencia de la representación. Queda ver que es única. ■

Obsérvese que si  $B$  es una forma bilineal simétrica (i.e.  $B(u, v) = B(v, u)$ ), entonces define un producto interno. Por el teorema de representación de Riesz, el resultado del teorema anterior se sigue de manera directa.

#### Proposición 7.

Existen constantes  $\alpha, \beta, \gamma \leq 0$  tal que la forma bilineal en  $(\star_B)$  satisface:

$$|B(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (\star_B.B1)$$

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B(u, u) + \gamma \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (\star_B.B2)$$

**DEMOSTRACIÓN** Para ver la condición de continuidad  $(\star_B.B1)$  basta acotar todo brutalmente

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \sum_{i,j}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |u_{x_i} v_{x_j}| + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |u_{x_i} v| + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |v| |u| \\ &\leq \sum_{i,j}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| |Dv| + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| |v| + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |v| |u| \\ &\leq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

donde  $\alpha$  tiene que ser mayor o igual a

$$\max \left( \sum_{i,j}^n \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \right).$$

Ahora vamos a mostrar la pseudo-coercividad  $(\star_B.B2)$ . Usando que el operador es uniformemente elíptico tenemos que existe  $\Theta > 0$  tal que

$$\Theta |\nabla u|^2 \leq \sum_{i,j}^n a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j}$$

integrando tenemos que

$$\begin{aligned} \Theta \int_{\Omega} |\nabla u|^2 &\leq \sum_{i,j}^n \int_{\Omega} a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \\ &= B(u, u) - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b^i(x) u_{x_i} u - \int_{\Omega} c |u|^2 \\ &\leq B(u, u) + \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u| |u| + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |u|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, recordando que  $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$  tenemos que  $ab \leq \varepsilon \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4\varepsilon}$  para cualquier  $\varepsilon > 0$ . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con esta idea nos da que

$$\int_{\Omega} |\nabla u| |u| \leq \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |u|^2 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

En particular, podemos tomar  $\varepsilon$  suficientemente pequeño para que

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \|b^i\|_{L^\infty(\Omega)} < \frac{\Theta}{2},$$

de esta forma se cumple que

$$\frac{\Theta}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq B(u, u) + C \int_{\Omega} |u|^2,$$

donde  $C \geq \max(\|c\|_{L^\infty(\Omega)}, 1/4\varepsilon)$ . Usando la desigualdad de Poincaré en  $H_0^1(\Omega)$ :

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C' \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

concluimos que

$$\frac{\Theta}{2C'} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq B(u, u) + C \|u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

■

### Teorema 38: Primer Teorema de Existencia para Soluciones Débiles

Hay un número  $\gamma \geq 0$  tal que  $\forall \mu \geq \gamma$  y  $\forall f \in L^2(\Omega)$  existe una solución débil  $u \in H_0^1(\Omega)$  del problema

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f & , \text{ en } \Omega \\ u = 0 & , \text{ en } \partial\Omega. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN

■