Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Docente: Carlos Román
Ayudante: Santiago González

**MAT2505 - Ecuaciones Diferenciales Parciales**

Tarea 3 - Sebastián Sánchez

`PROBLEMA 1` Sea $T > 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(U_T)$ una solución de la ecuación del calor en $U_T$. Pruebe que para todo par de enteros $k, \ell$ no negativos existen constantes $C = C(k, \ell, n)$ tales que

$$\max_{C(x,t;r/2)} \left| D_x^k D_t^\ell u \right| \leq \frac{C}{r^{k+2\ell}} \max_{C(x,t;r)} |u|,$$

para todos los cilindros $C(x,t;r/2) \subset C(x,t;r) \subset U_T$.

Deduzca que si $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ es una solución de la ecuación del calor tal que $u = \mathcal{O}(|t|^\ell + |x|^k)$, entonces $u$ es un polinomio de grado a lo más $k + 2\ell$.

`SOLUCIÓN` Por el teorema de estimación sobre las derivadas tenemos que

$$\max_{C(r/2)} \left| D_x^\alpha D_t^\ell v \right| \leq \frac{C_{k,\ell}}{r^{2\ell+k+n+2}} \|u\|_{L^1(C(r))}.$$

Dado que $u$ es continua y $C(r)$ es compacto, $u$ alcanza su máximo. Se sigue que

$$\|u\|_{L^1(C(r))} \leq r^{n+2} \alpha(n) \max_{C(r)} |u|.$$

donde $r^{n+2}\alpha(n)$ es el volumen del cilindro $C(r)$. Juntando ambas desigualdades se sigue el resultado:

$$\max_{C(r/2)} \left| D_x^\alpha D_t^\ell u \right| \leq \frac{C_{k,\ell}\alpha(n)}{r^{2\ell+k}} \max_{C(r)} |u| = \frac{C_{k,\ell,n}}{r^{2\ell+k}} \max_{C(r)} |u|.$$

Supongamos ahora que $u \in \mathcal{C}^{(1,2)}(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n)$.

`PROBLEMA 2` Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con frontera de clase $\mathcal{C}^1$ y $u \in H^1(\Omega)$.

(a) Demuestre que $|u| \in H^1(\Omega)$ y que

$$\nabla |u|(x) = \text{signo}(u(x))\, \nabla u(x) \qquad \text{c.t.p. en } \Omega,$$

donde $\text{signo}(s) = 1, 0, -1$ si $s > 0, s = 0$ o $s < 0$, respectivamente.

(b) Demuestre que $u^+(x) \coloneqq \max\{u(x), 0\}$ y $u^-(x) \coloneqq \min\{u(x), 0\}$ pertenecen a $H^1(\Omega)$.

*Sugerencia: considere la sucesión de funciones* $u_\epsilon(x) \coloneqq \sqrt{\epsilon^2 + u(x)^2} - \epsilon$.

(c) Demuestre que $\nabla u(x) = 0$ para casi todo $x \in \Omega$ tal que $u(x) = 0$, y que si $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces $|u|, u^\pm \in H_0^1(\Omega)$.

SOLUCIÓN

(a) Primero notemos que $u \in H^1(\Omega)$ si y solo si

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} < \infty.$$

Dado que $\alpha = (0, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)$ son las únicas posibilidades para $\alpha$, podemos reescribir la condición como

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

De esta forma, solo debemos mostrar que $|u|$ está controlado por las estimaciones de $u$.

Probaremos el resultado para $u \in \mathcal{C}^\infty \cap H^1(\Omega)$ y luego usaremos densidad para extenderlo. Sea entonces $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Tenemos que

$$\||u|\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 = \int_\Omega u^2 = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

y (tomando la derivada c.t.p.)

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}|u| = \text{signo}(u)\partial_{x_i} u \Rightarrow \nabla|u| &= \text{signo}(u)\nabla u\\ &\Rightarrow \||\nabla|u||\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla|u||^2\\ &= \int_\Omega |\text{signo}(u)\nabla u|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 = \||\nabla u|\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Así que $|u| \in H^1(\Omega)$ para funciones $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$, existe una sucesión de funciones suaves[1] $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que $(u_m) \to u$ en $H^1(\Omega)$. Luego,

$$\||u|\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\|\left|\lim_{m\to\infty} u_m\right|\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{m\to\infty} \||u_m|\|^2_{L^2(\Omega)} = \lim_{m\to\infty} \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

De manera análoga concluimos que $\||\nabla|u||\|^2_{L^2(\Omega)} = \||\nabla u|\|^2_{L^2(\Omega)}$.

(b) Debemos probar que $\|u^\pm\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du^\pm\|_{L^2(\Omega)} < 0$. Para ello necesitamos obtener la derivada débil de $u^\pm$.

Sea $\Omega^+$ el dominio donde $u(x) \geq 0$ o equivalentemente $u^+ = u$. Un candidato natural a derivada débil es la función

$$v = \begin{cases} Du & , \text{ en } \Omega^+ \\ 0 & , \text{ fuera de } \Omega^+. \end{cases}$$

Y en efecto, se tiene que

$$\int_\Omega u^+ D\psi = \int_{\Omega^+} uD\psi = -\int_{\Omega^+} Du\psi = -\int_\Omega v\psi \quad \forall\psi \in \mathcal{C}^\infty_C(\Omega).$$

[1] Aproximación global por funciones suaves

Así que podemos denotar con propiedad $Du^+ = v$. De manera análoga definimos $Du^-$. Para finalizar, notemos que

$$\|u^\pm\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty \quad \text{y} \quad \|Du^\pm\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Así que $u^\pm \in H^1(\Omega)$.

(c) Supongamos que $u = 0$ c.t.p. en $\Omega$. Luego,

$$0 = \int_\Omega u\, D\psi = -\int_\Omega Du\, \psi \qquad \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty_C(\Omega)$$

Así deducimos que $Du = 0$ c.t.p. en $\Omega$. Por otro lado, si $u \in H^1_0(\Omega)$, por los apartados anteriores tenemos que todas las estimaciones sobre $|u|$ y $u^\pm$ están controladas por $u$, así que necesariamente obtienen la regularidad de esta.

PROBLEMA 3 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo acotado con frontera $\mathcal{C}^1$. Demuestre la desigualdad de tipo Poincaré

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|T(v)\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{1}$$

donde $T(v)$ denota la traza de $v$ sobre $\partial\Omega$.

*Sugerencia: utilice el argumento de compacidad visto en clases. Puede usar* ***sin demostrar*** *que el operador de traza $T\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es compacto.*

SOLUCIÓN Supongamos que la desigualdad no vale. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una función $u_k \in H^1$ tal que

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)} > k\left(\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} + \|Tu_k\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)$$

Consideremos la sucesión $u'_k = u_k/\|u_k\|_{L^2(\Omega)}$. Se sigue de la desigualdad anterior que

$$\left(\|\nabla u'_k\|_{L^2(\Omega)} + \|Tu'_k\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) \leq \frac{1}{k}. \tag{$\star\star$}$$

En particular, se tiene que

$$\|\nabla u'_k\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Más aún, dado que la sucesión $(u'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H^1(\Omega)$. Dado que $H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, existe una subsucesión $(u'_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que es convergente a $u \in L^2(\Omega)$.

Queremos ver que $u \in H^1(\Omega)$. La fórmula de integración por partes nos dice que para $\psi \in \mathcal{C}^\infty_C(\Omega)$ se tiene que

$$\left|\int_\Omega u\, D\psi\right| = \left|\lim_{k_j\to\infty}\int_\Omega u'_{k_j}\, D\psi\right| = \left|\lim_{k_j\to\infty}\int_\Omega Du'_{k_j}\,\psi\right| \leq \lim_{k_j\to\infty} C\frac{1}{k_j^2} \to 0.$$

Por lo que $u \in H^1(\Omega)$ con $Du = 0$ c.t.p. en $\Omega$. Como $\Omega$ es conexo, $u$ debe ser constante. Las funciones constantes son suaves hasta la frontera, así que $Tu = u|_{\partial\Omega}$. Pero entonces

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} = \lim_{k_j\to\infty}\|Tu'_k\|_{L^2(\partial\Omega} = 0.$$

Y por lo tanto $u \equiv 0$ en $\Omega$. Esto contradice que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{k_j \to \infty} \|u'_k\|_{L^2(\Omega)} = 1$, así que la desigualdad (1) debe ser cierta y con ello concluimos el resultado.

PROBLEMA 4 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo acotado con frontera $\mathcal{C}^1$ y $f \in L^2(\Omega)$. Considere el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \text{ en } \Omega \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u + u = 0 & , \text{ en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Decimos que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil del problema si

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla v + \int_{\partial\Omega} T(u) \, T(v) = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

(a) Demuestre que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ es solución clásica de (2) si y sólo si $u$ es solución débil de (2).

(b) Demuestre que (2) posee una única solución débil en $H^1(\Omega)$.

*Sugerencia: utilice* (1).

(c) Suponga que existe $w \in H^2(\Omega)$ tal que

$$T(\nabla w) \cdot \hat{\mathbf{n}} = -T(u),$$

donde $u$ es la única solución débil de (2) en $H^1(\Omega)$. Muestre que $h \coloneqq u - w$ es solución débil de

$$\begin{cases} -\Delta h = g & , \text{ en } \Omega \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}} h = 0 & , \text{ en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $g$ es una función en $L^2(\Omega)$ tal que $\int_\Omega g = 0$.

SOLUCIÓN

(a) $\boxed{\Rightarrow:}$ Supongamos que $u$ es solución clásica. Sea $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Luego,

$$\begin{aligned} -\Delta u = f &\Rightarrow -\Delta u \, v = f v \\ &\Rightarrow -\int_\Omega \Delta u \, v = \int_\Omega f \, v \\ &\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} v \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u = \int_\Omega f v \end{aligned}$$

Usamos la condición de borde $\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u = -u$.

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} v u = \int_\Omega f v$$

Como $u$ es continua hasta la frontera, $u|_{\partial\Omega} = Tu$. Lo mismo pasa para $v$. De esta forma tenemos la formulación buscada para $v$ suave. Si $v \in H^1(\Omega)$, consideremos una aproximación $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por funciones suaves. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v_n + \int_{\partial\Omega} Tv_n\, Tu = \int_\Omega f v_n\right)\\
&\Rightarrow \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \nabla u\cdot\nabla v_n + \int_{\partial\Omega} \lim_{n\to\infty} Tv_n\, Tu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f v_n\\
&\Rightarrow \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v + \int_{\partial\Omega} Tv\, Tu = \int_\Omega f v.
\end{aligned}$$

Donde usamos que el operador de traza es continuo.

$\boxed{\Leftarrow:}$ Supongamos que vale la formulación débil.

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v + \int_{\partial\Omega} Tu\, Tv = \int_\Omega f\, v \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

Como $u\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u\,\nabla v = \int_\Omega (-\Delta u)\, v + \int_\Omega (\partial_{\hat{\mathbf{n}}} Tu)\, Tv \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

Reemplazando esto en la formulación débil nos deja con

$$\int_\Omega (-\Delta u)\, v + \int_{\partial\Omega} (\partial_{\hat{\mathbf{n}}} Tu + Tu)\, Tv = \int_\Omega f v \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

Consideremos $\Omega_\epsilon \coloneqq \{x\in\Omega\colon \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>\epsilon\}$. Luego,

$$\int_{\Omega_\epsilon} (-\Delta u)\, v = \int_{\Omega_\epsilon} f v \qquad \forall v\in\mathcal{C}^\infty \text{ tal que } \operatorname{supp}(v)\subset\Omega_\epsilon.$$

Se sigue que $-\Delta u = f$ c.t.p. en $\Omega_\epsilon$ pues podemos aproximar funciones en $H^1(\Omega_\epsilon)$ por las suaves. Dado que $-\Delta u$ es continua (por hipótesis), la igualdad se mantiene en $\Omega_\epsilon$. Tomando $\epsilon\to 0$ tenemos que la igualdad vale en todo $\Omega$. En particular se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_{\hat{\mathbf{n}}} Tu + Tu)\, Tv = 0 \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

De esta forma, $u$ resuelve el sistema $-\Delta u = f$ en $\Omega$ y $\partial_{\hat{\mathbf{n}}} u + u = 0$ en $\partial\Omega$.

(b) Sean $v$ y $u$ en $H^1$ dos soluciones. Luego, para cualquier $\psi\in H^1$ (restando ambas formulaciones) tenemos que

$$\int_\Omega (\nabla v - \nabla u)\nabla\psi + \int_{\partial\Omega} (Tv - Tu)T\psi = 0. \tag{$\star$}$$

Por (1) tenemos que

$$\|v-u\|_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|\nabla v - \nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|Tv - Tu\|_{L^2(\partial\Omega)}\right) = 0.$$

Donde la última igualdad se obtiene poniendo $\psi = u - v\in H^1(\Omega)$ en ($\star$). De esta forma, dado que las funciones y sus derivadas coinciden c.t.p. en $\Omega$, concluimos que $u = v$ en $H^1(\Omega)$.

(c) $\boxed{\text{No me salió}}$ Debemos probar la igualdad

$$\int_\Omega \nabla(u-w)\,\nabla v + \int_{\partial\Omega} T(u-w)\,Tv = \int_\Omega g\,v \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{PD}$$

Sabemos $u$ es solución débil de (2), por lo tanto:

$$\int_\Omega \nabla u\,\nabla v + \int_{\partial\Omega} Tu\,Tv = \int_\Omega f\,v \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{†1}$$

Además, tenemos que

$$\int_\Omega g = 0 \tag{†2}$$

y

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}} T(\nabla w) = -Tu. \tag{†3}$$

Por otro lado, $w \in H^2(\Omega)$, así que

$$\int_\Omega \nabla w\,\nabla v = \int_\Omega -\Delta w\,v + \int_{\partial\Omega} \partial_{\hat{\mathbf{n}}} Tw\,Tv \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{†4}$$

Notar que $w \in H^1(\Omega)$, así que poniendo $v = w$ en (†1) tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u\,\nabla w + \int_{\partial\Omega} Tu\,Tw = \int_\Omega f\,w \tag{‡1}$$

Reemplazando $v = u$ en (†4) y usando (†2)

$$\int_\Omega \nabla w\,\nabla u = \int_\Omega -\Delta w\,u - \int_{\partial\Omega} |Tu|^2 \tag{‡2}$$

Juntando (‡1) y (‡2) tenemos que

$$\int_\Omega -\Delta w\,u + \int_{\partial\Omega} (Tw - Tu)Tu = \int_\Omega fw$$