Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Docente: Carlos Román
Ayudante: Santiago González

MAT2505 - Ecuaciones Diferenciales Parciales

Tarea 2 - Sebastián Sánchez

PROBLEMA 1 (Fórmula de Poisson para la bola) Sea $g \in \mathcal{C}(\partial B(0,r))$ y u definida por

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} \, dS(y) \qquad x \in B^\circ(0,r).$$

Demuestre que

1. $u \in \mathcal{C}^\infty(B(0,r)^\circ)$,
2. $\Delta u = 0$ en $B(0,r)^\circ$,
3. $\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0)$ para todo $x_0 \in \partial B(0,r)$.

SOLUCIÓN Denotemos por $B_r := B(0,r)$. Notando que

$$\partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)} G(x,y) = -\frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \frac{1}{|x-y|^n}$$

podemos reescribir u como

$$u(x) = -\int_{\partial B_r} g(y) \partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)} G(x,y) \, dS(y).$$

Dado que la función de Green es simétrica (sim) y $\mathcal{C}^\infty$, tenemos que (usando TCD para intercambiar límites):

$$\begin{aligned}
\Delta_x u(x) &= \Delta_x \left(-\int_{\partial B_r} g(y) \partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)} G(x,y), dS(y) \right) \\
&\overset{TCD}{=} -\int_{\partial B_r} g(y) \partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)} \Delta_x G(x,y), dS(y) \\
&\overset{\text{sim}}{=} -\int_{\partial B_r} g(y) \partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)} \underbrace{\Delta_y G(x,y)}_{=0}, dS(y) = 0.
\end{aligned}$$

Es decir, la función u es armónica y por lo tanto $\mathcal{C}^\infty(B_r^\circ)$.

Falta ver que al acercarse al borde nos acercamos a g. Fijemos $y_0 \in \partial B_r$. Queremos ver que

$$\lim_{B_r^\circ \ni x \to y_0} |u(x) - g(y_0)| = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$. Como g es continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|g(y_0) - g(y)| < \epsilon \quad \forall y \in \underbrace{B(y_0, \delta)}_{=: B_\delta} \cap \partial B.$$

Usando que

$$\int_{\partial B_r} k(x, y)\, dS(y) = 1, \tag{$\star$}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(y_0)| &= \left| \int_{\partial B_r} k(x, y)(g(y) - g(y_0))\, dS(y) \right| \\
&\leq \left| \int_{\partial B_r \cap B_\delta} k(x, y)(g(y) - g(y_0))\, dS(y) \right| + \left| \int_{\partial B_r \setminus B_\delta} k(x, y)(g(y) - g(y_0))\, dS(y) \right|
\end{aligned}$$

Llamemos a las integrales I_1 e I_2 respectivamente. Por la continuidad de g y dado que el kernel integra uno podemos acotar I_1 por ϵ. En símbolos:

$$|I_1| \leq \epsilon \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0.$$

Para acotar I_2, tomemos $x \in B_{\delta/2}$. Se sigue que para $y \in \partial B_r \setminus B_\delta$,

$$|y - x| \geq \frac{1}{2} |y - y_0|.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \|g\|_\infty \int_{\partial B_r \setminus B_\delta} k(x, y)\, dS(y) \\
&= \|g\|_\infty \int_{\partial B_r \setminus B_\delta} \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n) r} \frac{1}{|y - x|^n}\, dS(y) \\
&\leq \|g\|_\infty \int_{\partial B_r \setminus B_\delta} \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n) r 2^n} \frac{1}{|y_0 - y|^n}\, dS(y) \\
&\leq \underbrace{\|g\|_\infty \frac{1}{n\alpha(n) r 2^n} \int_{\partial B_r \setminus B_\delta} \frac{1}{|y_0 - y|^n}\, dS(y)}_{\text{constante en } x} (r^2 - |x|^2)
\end{aligned}$$

Tomando $x \to y_0$ en particular no da que $|x| \to r$ y por lo tanto $|I_2| \to 0$. Concluimos entonces que

$$\lim_{B_r^\circ \ni x \to y_0} |u(x) - g(y_0)| = 0.$$

$\boxed{\text{Demostración de } \star\text{:}}$ Sea $r > 0$ y denotemos por B_r a la bola centrada en el origen de radio r.

Llamemos $\mathcal{K}$ a la integral del kernel de poisson sobre ∂B_r. Expadiendo $\mathcal{K}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_r} k(x,y)\,dS(y) &= -\int_{\partial B_r} \partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)} G(x,y)\,dS(y) \\
&= \int_{\partial B_r} \frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r}\frac{1}{|x-y|^n}\,dS(y) \\
&= \frac{r^2-|x|^2}{n\alpha(n)r}\int_{\partial B_r}\frac{1}{|x-y|^n}\,dS(y).
\end{aligned}$$

Consideremos ahora $s<r$. Nótese que si $x \in \partial B_s$, entonces el integrando es constante $|s-r|^{-n}$ y por lo tanto $\mathcal{K}=1$ en la frontera de B_r.

Por otro lado, $\mathcal{K}$ resuelve el siguiente problema (usando TCD, la simetría y la suavidad de la función de Green),

$$\begin{cases} \Delta_x \mathcal{K}(x) = 0 & , \text{ para } x \in B_s \\ \mathcal{K}(x) = \alpha & , \text{ para } x \in \partial B_s \end{cases}$$

donde α es una constante. Por la unicidad del problema de Poisson se sigue que $\mathcal{K}=\alpha$ en $\overline{B_s}$. Más aún, $\mathcal{K}(0)=1$, así que $\mathcal{K}=1$ en $\overline{B_s}$. Basta tomar $s \uparrow r$ y obtenemos el resultado o bien para cada x repetir el procedimiento tomando $s=|x|$.

`PROBLEMA 2` Sea $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<a^2\}$. Denotando por (r,θ) las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$, consideramos el problema

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy} &= 0 \qquad , (x,y)\in\Omega \\ u(x,y) &= h(\theta) \quad , (x,y)\in\partial\Omega, \end{aligned}$$

donde h es una función (suave) definida sobre el círculo de radio a. La idea de esta pregunta es resolver este problema utilizando coordenadas polares. Para ello, proceda de la siguiente forma:

(a) Escriba la ecuación en coordenadas polares. Para ello, escriba $u=u(r,\theta)$, y muestre que

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0.$$

(b) A continuación debe resolver esta ecuación utilizando separación de variables. Para ello, busque una solución de la forma $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$, y deduzca las ecuaciones que deben satisfacer R y Θ.

(c) Note que Θ satisface las condiciones de borde periódicas para $r=a$. Usando esto, encuentre las soluciones (λ_n,Θ_n) del problema de auto-valores y auto-funciones asociado a la función Θ.

(d) Usando los auto-valores λ_n encontrados en la parte anterior, resuelva la EDO lineal con coeficientes variables satisfecha por $R=R_n$ para cada uno de estos auto-valores.

(e) Escriba un candidato a solución de la EDP como una combinación lineal infinita (serie), a partir de las soluciones de las EDOs resueltas en las partes anteriores, **descartando** aquellas que revientan cuando $r\downarrow 0$ (¿por qué?), y encuentre los coeficientes de la serie en términos de h.

(f) Usando que

$$\cos(n\phi)\cos(n\theta)+\sin(n\phi)\sin(n\theta)=\cos(n(\theta-\phi)),$$

expresando $\cos(n(\theta-\phi))$ en término de exponenciales complejas, y la convergencia de la serie geométrica, muestre que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\theta-\phi)+r^2}\,d\phi.$$

(g) Finalmente, pasando a coordenadas cartesianas, muestre que la solución encontrada satisface la fórmula de Poisson para un disco.

SOLUCIÓN

(a) El cambio desde coordenadas rectangulares a coordenadas polares viene dado por:

$$T\colon \Omega\setminus\{(0,0)\} \to (0,a)\times[0,2\pi)$$
$$(x,y)\mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \begin{cases} \arctan(y/x) & ,y\geq 0, x\neq 0 \\ -\arctan(y/x) & ,y\leq 0, x\neq 0 \\ \pi/2 & ,x=0 \end{cases}\right).$$

Por simetría del disco basta considerar el caso del plano superior, esto es $y>0$ y $x\neq 0$. Además, para no andar anotando la u en todas partes trabajaré con los operadores.

La derivada de la transformación es

$$DT(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\frac{1}{r}\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \frac{1}{r}\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Al aplicar regla de la cadena tenemos

$$D(u\circ T) = Du(T)\cdot DT = \begin{pmatrix}\partial_r & \partial_\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{r}\sin(\theta) & \frac{1}{r}\cos(\theta)\end{pmatrix},$$

y por lo tanto los operadores se leen

$$\partial_x = \cos(\theta)\partial_r - \frac{1}{r}\sin(\theta)\partial_\theta$$
$$\partial_y = \sin(\theta)\partial_r + \frac{1}{r}\cos(\theta)\partial_\theta.$$

Dado que (aplicando regla del producto)

$$\partial_r\partial_x = \cos(\theta)\partial_r^2 - \frac{1}{r^2}\sin(\theta)\partial_\theta - \frac{1}{r}\sin(\theta)\partial_r\partial_\theta$$
$$\partial_\theta\partial_x = (-\sin(\theta)\partial_r) + (\cos(\theta)\partial_\theta\partial r) - \frac{1}{r}\cos(\theta)\partial_\theta - \frac{1}{r}\sin(\theta)\partial_\theta^2,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_x^2 &= \cos\theta\left[\cos\theta\partial_r^2 - \frac{1}{r^2}\sin\theta\partial_\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_r\partial_\theta\right] \\ &\quad - \frac{1}{r}\sin\theta\left[-\sin(\theta)\partial_r + \cos\theta\partial_\theta\partial r - \frac{1}{r}\cos\theta\partial_\theta - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta^2\right] \\ &= \cos^2\theta\partial_r^2 + \frac{1}{r}\sin^2\theta\partial_r + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\partial_\theta^2.\end{aligned}$$

Donde para simplificar usamos la regularidad de la función (que las derivadas parciales cruzadas conmutan). Ahora hacemos lo mismo con ∂_y.

$$\begin{aligned}
\partial_r\partial_y &= \sin(\theta)\partial_r^2 - \frac{1}{r^2}\cos\theta\partial_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\partial_r\partial_\theta \\
\partial_\theta\partial_y &= \cos\theta\partial_r + \sin\theta\partial_\theta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\partial_\theta^2,
\end{aligned}$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned}
\partial_y^2 &= \sin(\theta)\left[\sin(\theta)\partial_r^2 - \frac{1}{r^2}\cos\theta\partial_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\partial_r\partial_\theta\right] \\
&+ \frac{1}{r}\cos\theta\left[\cos\theta\partial_r + \sin\theta\partial_\theta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\partial_\theta^2\right] \\
&= \sin^2\theta\partial_r^2 + \frac{1}{r}\cos^2\theta\partial_r + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\partial_\theta^2.
\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 + \partial_y^2 &= \cos^2\theta\partial_r^2 + \frac{1}{r}\sin^2\theta\partial_r + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\partial_\theta^2 \\
&+ \sin^2\theta\partial_r^2 + \frac{1}{r}\cos^2\theta\partial_r + \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\partial_\theta^2 \\
&= \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2.
\end{aligned}$$

Aplicando el operador a u y usando la hipótesis tenemos lo pedido.

(b) Buscamos soluciones de la forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Poniéndolas en la ecuación tenemos que

$$\Theta(\theta)\partial_r^2 R(r) + \Theta(\theta)\frac{1}{r}\partial_r R(r) + R(r)\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2\Theta(\theta) = 0.$$

Equivalentemente (suponiendo que $R,\Theta \not\equiv 0$),

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Como ambos lados dependen de variables distintas, es necesario que igualen una constante. Denotemos tal constante por $-\lambda$. Luego, R y Θ deben resolver,

$$\begin{aligned}
0 &= r^2R''(r) + rR'(r) + \lambda R(r) \\
0 &= \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta).
\end{aligned}$$

(c) Dado que

$$R(a)\Theta(\theta) = h(\theta).$$

tenemos que problema es periódico en el siguiente sentido,

$$0 = \Theta''(\theta) - \lambda\Theta(\theta) \tag{1a}$$
$$0 = \Theta(0) - \Theta(2\pi) \tag{1b}$$
$$0 = \Theta'(0) - \Theta'(2\pi) \tag{1c}$$

.

La ecuación característica de la EDO (1a) es

$$0 = z^2 - \lambda.$$

Si $\lambda = 0$: entonces $\Theta(\theta) = m\theta + n$. Por las condiciones de borde periódicas,

$$(1b) \implies \Theta(0) = n = 2\pi m + n = \Theta(2\pi) \iff m = 0$$

Así que la solución es constante.
Si $\lambda > 0$: entonces $0 = (z - \sqrt{\lambda})(z + \sqrt{\lambda})$. Así, las soluciones son de la forma

$$\Theta(\theta) = A\exp(\sqrt{\lambda}\theta)) + B\exp(-\sqrt{\lambda}\theta).$$

Por las condiciones de periocidad,

$$\begin{aligned}(1b) &\implies \Theta(0) = A + B = A\,e^{\sqrt{\lambda}2\pi} + B\,e^{-\sqrt{\lambda}2\pi} = \Theta(2\pi)\\ (1c) &\implies \Theta'(0) = A\sqrt{\lambda} - B\sqrt{\lambda} = A\sqrt{\lambda}\,e^{\sqrt{\lambda}2\pi} - B\sqrt{\lambda}\,e^{-\sqrt{\lambda}2\pi} = \Theta'(2\pi).\end{aligned}$$

Como $\lambda > 0$ podemos dividir la segunda ecuación por λ. Sumando ambas nos deja que,

$$2A = 2Ae^{\sqrt{\lambda}2\pi}.$$

Si $A \neq 0$, entonces $\lambda = 0$. Por lo tanto, $A = 0$. De manera similar concluimos que $B = 0$. Así, la solución es la nula y por lo tanto no hay valores propios.
Si $\lambda < 0$: La ecuación característica queda

$$0 = (z - i\sqrt{-\lambda})(z + i\sqrt{-\lambda})$$

Luego,

$$\Theta(\theta) = Ae^{i\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-i\sqrt{-\lambda}\theta} = (A + B)\cos(\sqrt{-\lambda}\theta) + (A - B)i\sin(\sqrt{-\lambda}\theta).$$

Imponiendo las condiciones de periocidad tenemos que,

$$\begin{aligned}(1b) &\implies \Theta(0) = A + B = (A + B)\cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) + (A - B)i\sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) = \Theta(2\pi)\\ (1c) &\implies \Theta'(0) = (A - B)i\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}\theta)\\ &= -(A + B)\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) + (A - B)i\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}2\pi) = \Theta'(2\pi).\end{aligned}$$

En la última ecuación podemos dividir por $\sqrt{-\lambda}$ y multiplicar por i. Sumando ambas obtenemos (ignorando el argumento de las funciones para ahorrar notación),

$$2B = 2B\cos - 2Bi\sin.$$

Si $B \neq 0$, entonces $1 = \cos - i\sin$ lo cual (comparando parte imaginaria y real) solo puede pasar si $\sqrt{-\lambda}2\pi = 2\pi k$ con $k \geq 1$; Vale decir, los valores propios son:

$$\lambda_n = -n^2.$$

Se sigue que las autofunciones vienen dadas por

$$\Theta_n(\theta) = A_n e^{\theta ni} + B_n e^{-\theta ni}.$$

(d) Volviendo a la ecuación de R tenemos que para cada λ_n se debe satisfacer:

$$0 = r^2 R_n''(r) + rR_n'(r) - n^2 R_n(r).$$

Tomemos como ansatz $R_n = r^N$ para algún N. Luego,

$$\begin{aligned}0 &= r^2 N(N-1)r^{N-2} + rNr^{N-1} - n^2 r^N \\ &= N(N-1)r^N + Nr^N - n^2 r^N \\ &= r^N(N^2 - n^2) \\ &= r^N(N-n)(N+n).\end{aligned}$$

y las soluciones son de la forma

$$R_n = Ar^n + Br^{-n}.$$

(e) Recordamos que las soluciones desacopladas son de la forma

$$R_n = a_n r^n + b_n r^{-n}$$

y

$$\Theta_n(\theta) = c_n e^{\theta ni} + d_n e^{-\theta ni},$$

para cada $n \geq 0$ (recordar que las constantes también son solución).

Queremos aplicar el Ppio de superposición con las soluciones $u_n = R_n \Theta_n$. El problema es que la primera relación sobre R_n no está completamente definida en todo nuestro dominio. Sin embargo, por el mismo Ppio podemos imponer que $b_n = 0$ y la relación seguirá resolviendo la ecuación. El candidato a solución entonces es de la forma

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} r^n (x_n\, e^{\theta ni} + y_n\, e^{-\theta ni}).$$

De ser solución, por las condiciones de borde se tiene que

$$u(a,\theta) = \sum_{n\geq 0} a^n (x_n\, e^{\theta ni} + y_n\, e^{-\theta ni}) = h(\theta).$$

Usando la ortogonalidad de las autofunciones tenemos que al aplicar $\langle \cdot, \pm e^{\theta ni}\rangle$ nos deja

$$x_n = \frac{1}{a^n}\frac{\langle h(\theta), e^{in\theta}\rangle}{\langle e^{in\theta}, e^{in\theta}\rangle} = \frac{\langle h(\theta), e^{in\theta}\rangle}{2\pi\, a^n} \quad \text{y} \quad y_n = \frac{1}{a^n}\frac{\langle h(\theta), e^{-in\theta}\rangle}{\langle e^{-in\theta}, e^{-in\theta}\rangle} = \frac{\langle h(\theta), e^{-in\theta}\rangle}{2\pi\, a^n}.$$

Denotemos por $h_n(\theta) = \langle h(\theta), e^{in\theta}\rangle$ y $\tilde{h}_n(\theta) = \langle h(\theta), e^{-in\theta}\rangle$. De esta forma, el candidato a solución se ve

$$u(r,\theta) = \sum_{n\geq 0} \frac{r^n}{2\pi\, a^n}(h_n e^{\theta ni} + \tilde{h}_n e^{-\theta ni}).$$

(f) Expandiendo el término anterior nos queda

$$\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \sum_{n\geq 0} \frac{r^n}{2\pi\, a^n}(h_n e^{\theta n i} + \tilde{h}_n e^{-\theta n i}) \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{r^n}{2\pi\, a^n}\left[\int_0^{2\pi} h(\phi)\left(e^{in(\theta-\phi)} + e^{-in(\theta-\phi)}\right)\, d\phi\right].
\end{aligned}$$

Intercambiando la sumatoria con la integral donde se puede nos deja

$$u(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{2a^n}\left(e^{in(\theta-\phi)} + e^{-in(\theta-\phi)}\right)\right]\, d\phi.$$

Dado que,

$$\sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{a^n}\left(e^{in(\theta-\phi)} + e^{-in(\theta-\phi)}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{a^n}e^{in(\theta-\phi)} + \sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{a^n}e^{-in(\theta-\phi)},$$

con las últimas series geométricas convergentes (el módulo del argumento de la serie es menor a 1). Se sigue que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{a^n}e^{in(\theta-\phi)} = \frac{(r/a)e^{i(\theta-\phi)}}{1-\frac{r}{a}e^{i(\theta-\phi)}} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{a^n}e^{-in(\theta-\phi)} = \frac{(r/a)e^{-i(\theta-\phi)}}{1-\frac{r}{a}e^{-i(\theta-\phi)}}.$$

Al volverlas a sumar nos queda,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\frac{r^n}{2a^n}\left(e^{in(\theta-\phi)} + e^{-in(\theta-\phi)}\right) &= \frac{1}{2}\frac{(r/a)e^{i(\theta-\phi)} - (r/a)^2 + (r/a)e^{-i(\theta-\phi)} - (r/a)^2}{1-(r/a)e^{i(\theta-\phi)} - (r/a)e^{-i(\theta-\phi)} + (r/a)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{are^{-i(\theta-\phi)} - are^{i(\theta-\phi)} - 2r^2}{a^2 - are^{-i(\theta-\phi)} - are^{i(\theta-\phi)} + r^2} \\
&= \frac{ar\cos(\theta-\phi) - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2}.
\end{aligned}$$

De esta forma, el integrando queda

$$\frac{1}{2} + \frac{ar\cos(\theta-\phi) - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2} = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2}.$$

Juntando todo nos da que

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta-\phi) + r^2}\, d\phi.$$

(g) Haciendo el cambio a coordenadas cartesianas sobre los parámetros de la función

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta,$$

nos deja que

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2-2a(x\cos\phi+y\cos\phi)+x^2+y^2}\,d\phi.$$

Por la simetría basta derivar con respecto a una variable. Dígamos x. Por TCD podemos intercambiar la integral con la derivada y solo enforcanos en la fracción que tiene x.

$$\begin{gathered}
\partial_x\left(\frac{a^2-x^2-y^2}{a^2-2a(x\cos\phi+y\cos\phi)+x^2+y^2}\right) \\
\| \\
\frac{(-2x)\left(a^2-2a(x\cos\phi+y\cos\phi)+x^2+y^2\right)+\left(a^2-x^2-y^2\right)(-2a\cos\phi+2x)}{(a^2-2a(x\cos\phi+y\cos\phi)+x^2+y^2)^2} \\
\| \\
\frac{2a\cos\phi(2x^3+2xy-a^2+x^2+y^2)-4x(x^2+y^2)}{(a^2-2a(x\cos\phi+y\cos\phi)+x^2+y^2)^2}.
\end{gathered}$$

(*Respiro profundo*) Derivando de nuevo

$$\begin{gathered}
\partial_x\left(\frac{2a\cos\phi(2x^3+2xy-a^2+x^2+y^2)-4x(x^2+y^2)}{(a^2-2a(x\cos\phi+y\cos\phi)+x^2+y^2)^4}\right) \\
\| \\
\frac{(2a\cos\phi(6x^2+2y+2x)-4(3x^2+y^2))(\downarrow)+2(\downarrow)(-2a\cos\phi+2x)}{(a^2-2a(x\cos\phi+y\cos\phi)+x^2+y^2)^4}.
\end{gathered}$$

PROBLEMA 3 Use la transformada de Fourier para resolver

$$u_t - \kappa u_{xx} = -u \quad ,(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \tag{2a}$$
$$u(0,x) = \phi(x), x\in\mathbb{R} \tag{2b}$$

SOLUCIÓN Aplicamos la tranformada de Fourier $\mathcal{F}$ (en el espacio) a la ecuación (2a). Esto nos deja,

$$\mathcal{F}(u_t-\kappa u_{xx}) = \mathcal{F}(u_t-\kappa D^{(0,2)}u) = \widehat{u_t} - \kappa(ix)^2\widehat{u} = -\widehat{u} = \mathcal{F}(-u).$$

Reordenando (notar que intercambiamos los operadores $\mathcal{F}$ y ∂_t)

$$\widehat{u}_t = -(1+\kappa x^2)\widehat{u}.$$

Esto es una EDO en tiempo. La solución general es $\widehat{u} = Ae^{-t(1+\kappa x^2)}$. Aplicando $\mathcal{F}$ a las condiciones iniciales (2b) nos da que $\widehat{u} = \widehat{\phi}$ para $t=0$. Por lo tanto, la solución es

$$\widehat{u} = \widehat{\phi}e^{-t(1+\kappa x^2)}.$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa tenemos que

$$u = \frac{\phi * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t(1+\kappa x^2)})}{\sqrt{2\pi}}.$$

Por lo que solo basta calcular $\mathcal{F}^{-1}(e^{-t(1+\kappa x^2)})$. Vamos a ello,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(e^{-t(1+\kappa x^2)})(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy} e^{-t(1+\kappa y^2)}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n e^t} \int_{\mathbb{R}} e^{ixy - t\kappa y^2}\, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^t} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t\kappa}}\, e^{-\frac{x^2}{4t\kappa}} \\
&= \exp\left(-\frac{x^2}{4t\kappa}\right) \frac{1}{e^t \sqrt{2t\kappa}}.
\end{aligned}$$

De esta forma, la solución se lee

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \phi * \mathcal{F}^{-1}(e^{-t(1+\kappa x^2)}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi t\kappa e^t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t\kappa}} \phi(y)\, dy.
\end{aligned}$$

PROBLEMA 4 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un abierto acotado con frontera $\mathcal{C}^1$. Demuestre que el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u + u = 0 & ,(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u = 0 & ,(t,x) \in \{0\} \times \Omega \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u + au = 0 & ,(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{cases},$$

donde $a \geq 0$ es una constante, posee una única solución.

Sugerencia: Considere el funcional de energía

$$E(t) = \int_\Omega u^2(t,x)\, dx,$$

y estudie el comportamiento de su derivada.

SOLUCIÓN Supongamos que u_1 y u_2 son dos soluciones. Denotemos por $u = u_1 - u_2$. Luego, u satisface el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u + u = 0 & ,(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u = 0 & ,(t,x) \in \{0\} \times \Omega \\ \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u + au = 0 & ,(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \end{cases}.$$

Consideremos el funcional de energía dado por la sugerencia. Por TCD tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} E'(t) &= \int_\Omega u\, u_t\, dx \\
&= \int_\Omega u\, (\Delta_x u - u)\, dx \\
&= \int_\Omega u\, \Delta_x u - u^2\, dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \int_{\partial\Omega} u \partial_{\hat{\mathbf{n}}} u\, dx - \int_\Omega u^2\, dx \\
&= -\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_{\partial\Omega} a u^2\, dS(x) - \int_\Omega u^2\, dx.
\end{aligned}$$

Notando que todos los integrandos son no negativos, concluimos que

$$E'(t) \leq 0, \qquad \forall t \geq 0.$$

Dado que u se anula en $t = 0$, tenemos que

$$0 \leq E(t) = E(0) = 0, \qquad \forall t \geq 0$$

Así que la solución $u = u_1 - u_2 = 0$. Con esto concluimos que el problema tiene a lo más una solución.