1. Espacios de Sobolev

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

y multipliquemos por una función test $\phi \in \mathscr{C}_C^\infty((a,b))$. Al hacer integración por partes nos queda

$$\int_a^b u'\phi' + \int_a^b u\phi = \int_a^b f\phi.$$

Esta es la formulación débil del problema y la gracia es que ahora solo necesitamos que u sea continuamente diferenciable. Con herramientas de análisis funcional buscaremos revolver el sistema para estas funciones menos regulares, y a partir de estas deducir las más regulares.

`Definición 1: Derivada débil`

Sean $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y α un multiíndice (ie. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$). Decimos que v es la α-derivada débil de u si se cumple que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \qquad \forall \phi \in \mathscr{C}_C^\infty(\Omega).$$

En tal caso denotamos $v = D^\alpha u$.

`Proposición 1.`

Si existe la α-derivada débil de una función $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, entonces es única salvo un conjunto de medida nula.