04 DE ABRIL, 2023

## 0.1. Función de Green para una bola

Consideremos la bola unitaria en $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$. Buscamos resolver el problema corrector

$$\begin{cases} \Delta\varphi^x = 0 & \text{, en } B(0,1) \\ \varphi^x = \Phi(\cdot - x) & \text{, en } \partial B(0,1) \end{cases}.$$

Nótese que si $x = 0$, entonces $\varphi^0(y) = \Phi(1)$ para $y \in \partial B(0,1)$ y el problema se satisface. Consideremos entonces $x \neq 0$; Denotamos por $\tilde{x} := \frac{x}{|x|^2}$ a su **punto dual** o inverso de $x$ con respecto a $\partial B(0,1)$. Fijando $x$, tenemos que el mapa $y \to \Phi(y - \tilde{x})$ es armónico para $y \neq \tilde{x}$. Más aún, el mapa $y \to \frac{1}{|x|^{n-2}}\Phi(y - \tilde{x})$ es armónico para $y \neq \tilde{x}$. Definimos entonces,

$$\varphi^x(y) := \Phi(|x|(y - \tilde{x})).$$

Este mapa es armónico si $y \neq \tilde{x}$. En efecto,

$$\partial_{y_i}^2 \varphi^x(y) = \partial_{y_i}(\partial_{y_i}\Phi(|x|(y - \tilde{x})|x|) =$$