La ecuación de Poisson sobre geometrías complicadas.

Integrantes: Andrés Díaz, Juan Pablo Flores, Sebastián Sánchez.

Proyecto para la versión 2024-2 del curso IMT3430 - Método para Ecuaciones Diferenciales, impartido por Manuel Sánchez.

En 1944 Shizuo Kakutani [1] demostró que la solución al problema de frontera

$$-\Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = g \text{ sobre } \partial\Omega$$

se puede expresar puntualmente como el valor esperado $\mathbb{E}(g(Y))$, donde Y es el primer punto en $\partial\Omega$ alcanzado por un movimiento Browniano W que comienza en el punto, x_0, donde queremos estimar la función. Usando el método de caminata en esferas [2] junto con estimaciones de Monte Carlo se puede estimar tal esperanza y por lo tanto la solución a la EDP.

La idea básica del método es que para estimar $u(x_0)$, nos basta con simular el paseo aleatorio del movimiento Browniano centrado en x_0 hasta llegar a $\partial\Omega$. Comenzamos la simulación envolviendo x_0 con una bola $B(x_0) \subseteq \Omega$. Luego, como el movimiento Browniano es simétrico, este puede escaparse por cualquier punto de la frontera de la bola de manera equiprobable. O sea, podemos estimar $u(x_0)$ con $u(X_1)$, donde $X_1 \sim \text{Unif}(\partial B(x_0))$. Al no conocerse el valor de $u(X_1)$, este también debe ser estimado. Creamos así una secuencia aleatoria $X_1, \ldots, X_N$, la cual detenemos cuando nos acercamos lo suficiente al borde de Ω; cuando $X_N \in \partial\Omega_\varepsilon$ (los puntos a distancia a lo más $\varepsilon > 0$ de $\partial\Omega$), estimamos $u(X_N)$ mediante $g(\overline{X_N})$, donde $\overline{X_N}$ es el punto de $\partial\Omega$ más cercano a X_N. Escrito más sucintamente, la simulación es:

$$\hat{u}(X_k) = \begin{cases} g(\overline{X_k}), X_k \in \partial\Omega_\varepsilon \\ \hat{u}(X_{k+1}), \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Debido a que la simulación extiende la condición de frontera a $\partial\Omega_\varepsilon$, esta se verá sesgada hacia aquellos puntos. Sin embargo, la magnitud de este sesgo estará controlada por el parámetro $\varepsilon > 0$.

Es posible refinar el algoritmo usando técnicas estándar de reducción de varianza para disminuir el error inducido por la aleatoriedad de la simulación, siendo la manera más sencilla generar múltiples estimaciones de $u(x_0)$ y luego promediarlas.

La ventaja de esta formulación es que no requiere mallados complejos sobre el dominio, a diferencia de FEM. Nuestra propuesta consiste en comparar ambos métodos sobre geometrías complicadas, entendiendo complicadas como aquellas que tienen muchas puntas y agujeros.

probando

References

[1] Kakutani, S. (1944). 143. two-dimensional brownian motion and harmonic functions. Proceedings of the Imperial Academy, 20(10), 706-714.

[2] Sawhney, Rohan, and Keenan Crane. "Monte Carlo geometry processing: A grid-free approach to PDE-based methods on volumetric domains." ACM Transactions on Graphics 39.4 (2020).