DISPERSIÓN DE LA ONDA ACÚSTICA PLANA EN LA ESFERA HOMOGÉNEA

SOLUCIONES ANALÍTICAS Y FORMULACIÓN BEM

Sebastián Sánchez

ÍNDICE

1. Introducción

Los fenómemos oscilatorios son comunes al pertubar un sistema estable; Tal es el caso, por ejemplo, de una cuerda, un péndulo e incluso la presión del aire generada por el sonido. Todos estos fénonemos pueden ser descritos por la ecuación de ondas

$$\partial_t^2 u(t,x) = c^2 \partial_x^2 u(t,x),$$

donde $u(t,x)$ representa el desplazamiento con respecto a la posición de equilibrio para el tiempo t en la posición x y c es una constante real que compendia las propiedades físicas de los objetos.

La ruta usual para resolver esta ecuación es mediante el método de separación de variables. Este consiste en separar las dos naturalezas del fénomeno, vale decir, su naturaleza temporal y espacial. Específicamente, buscamos soluciones de la forma

$$u(t,x) = T(t)E(x)$$

De esta forma, la ecuación de ondas se lee

$$E(x)\partial_t^2 T(t) = c^2 T(t) \partial_x^2 E(x)$$

Y por lo tanto

$$\frac{\partial_t^2 T(t)}{T(t)} = c^2 \frac{\partial_x^2 E(x)}{E(x)}$$

Como las funciones y variables son independientes, ambos cocientes deben igualar alguna constante (no necesariamente real) $-\lambda^2$. Despejando para la componente espacial obtenemos la ecuación de Helmholtz

$$\partial_x^2 E(x) + k^2 E(x) = 0$$

donde $k = \lambda/c$.

2. Solución de la ecuación de Helmholtz

Para $\psi \in \mathscr{C}^2$ un campo escalar, la ecuación de Helmholtz se lee

$$\nabla^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0, \tag{2.1}$$

donde κ es una constante. En coordenadas esféricas, donde para un vector $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ denotamor por r su componente radial, por θ su componente polar y φ su componente azimutal (ver Apéndice B) nos queda:

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r \psi\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_r\left(\sin\theta\, \partial_\theta \psi\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2 \psi = -\kappa^2 \psi, \tag{2.2}$$

Para resolver la ecuación, supondremos que ψ no tiene interdependencia entre sus componentes, es decir, impondremos ψ una función separable de la forma

$$\psi = f(r)g(\theta)h(\varphi). \tag{2.3}$$

Reemplazando esta expresión en (2.2) nos deja

$$gh\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r f\right)+fh\frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta g\right)+fg\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 h=-\kappa^2 fgh$$

Multiplicando por $r^2\sin^2\theta/fgh$

$$\frac{\sin^2\theta}{f}\partial_r\left(r^2\partial_r f\right)+\frac{\sin\theta}{g}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta g\right)+\frac{1}{h}\partial_\varphi^2 h=-(\kappa r\sin\theta)^2.$$

Dado que el último sumando del lado izquierdo es el único dependiente de φ, debe ser constante para que la ecuación valga. Imponemos esto y dejamos m ser la constante tal que

$$\frac{1}{h}\partial_\varphi^2 h=-m^2.$$

Ahora la ecuación se lee

$$\frac{\sin^2\theta}{f}\partial_r\left(r^2\partial_r f\right)+\frac{\sin\theta}{g}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta g\right)-m^2=-(\kappa r\sin\theta)^2.$$

Dividiendo por $\sin^2\theta$ nos deja

$$\frac{1}{f}\partial_r\left(r^2\partial_r f\right)+\frac{1}{g\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta g\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=-(\kappa r)^2.$$

Similar a lo anterior, ahora los últimos dos sumandos del lado izquierdo son los únicos que dependen de θ, por ende, deben ser constantes. Digamos que n es la constante tal que

$$\frac{1}{g\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta g\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=-n(n+1).$$

En resumen, quedamos con tres ecuaciones desacopladas en las variables r, θ y φ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f\right)+\left((\kappa r)^2-n(n+1)\right)f=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{g\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}g\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+n(n+1)=0 \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{h}\partial_\varphi^2 h+m^2=0 \tag{2.6}$$

En (2.4): Si ponemos $x=\kappa r$, nos queda una ecuación en la forma de Bessel (esféricas)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}f+2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f+\left(x^2-n(n+1)\right)f=0.$$

Esta ecuación tiene soluciones analíticas de la forma

$$f_1(r)=A_{1,n,m}j_n(\kappa r)+B_{1,n,m}y_n(\kappa r),\ \text{o bien,} \tag{2.7}$$

$$f_2(r)=C_{1,n,m}h_n^{(1)}(\kappa r)+D_{1,n,m}h_n^{(2)}(\kappa r), \tag{2.8}$$

donde j_n es la función de Bessel esférica, y_n es la función de Bessel esférica de segundo tipo (o función de Neumann esférica) y $h_n^{(1)},h_n^{(2)}$ son las funciones de Hankel de primer y segundo tipo respectivamente.

En (2.5): Si ponemos $x = \cos\theta$, nos queda la ecuación de Legendre

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)g = 0$$

Cuyas soluciones son analíticas y de la forma

$$g_1(\theta) = A_{2,n,m}P_n^m(\cos\theta) + B_{2,n,m}P_n^m(-\cos\theta) \quad ,n \notin \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

$$g_2(\theta) = C_{2,n,m}P_n^m(\cos\theta) + D_{2,n,m}Q_n^m(\cos\theta) \quad ,n \in \mathbb{Z} \tag{2.10}$$

donde P_n^m, Q_n^m son las funciones de Legendre asociadas de primer y segundo tipo respectivamente. En (2.6): Las soluciones son de la forma

$$h_1(\varphi) = A_{3,n,m}e^{-\mathrm{i}m\varphi} + B_{3,n,m}e^{\mathrm{i}m\varphi} \tag{2.11}$$

$$h_2(\varphi) = C_{3,n,m}\cos(m\varphi) + D_{3,n,m}\sin(m\varphi) \tag{2.12}$$

3. Contexto acústico

Denotemos por Ω^{int} a la esfera abierta de radio $R > 0$ en $\mathbb{R}^3$, $\Omega^{\text{ext}} = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_1$ su exterior y $\Gamma = \partial\Omega^{\text{int}}$ su borde. Sean $c^{\text{ext/int}}, \rho^{\text{ext/int}}$ escalares representando la rapidez de propagación y la densidad del material respectivamente, en $\Omega^{\text{ext/int}}$.

Denotemos por $p_{\text{inc}} \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^3)$ el campo de presión incidente y $p_{\text{sca}} \in \mathscr{H}^2(\overline{\Omega^{\text{ext}}})$ al campo de presión dispersado por Ω^{int}. El campo total lo denotaremos por $p_{\text{tot}} = p_{\text{ext}} + p_{\text{int}} \in \mathscr{H}^2(\mathbb{R}^3)$, donde $p_{\text{ext/int}} \in \mathscr{H}^2(\Omega^{\text{ext/int}})$ denota la presión total en $\Omega^{\text{ext/int}}$ respectivamente.

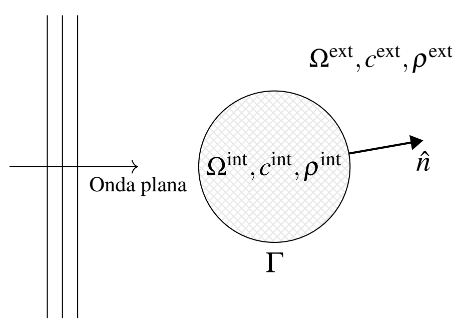

Figura 1: Contexto acústico

En lo que sigue, asumiremos que $c^{\text{ext}}, \rho^{\text{ext}}, c^{\text{int}}, \rho^{\text{int}}$ son constantes y que tenemos una onda plana (modelada por p_{inc}) propagándose en el espacio con frecuencia ω. Se sigue que

$$\nabla^2 p_{\text{inc}} + \kappa_{\text{ext}}^2 p_{\text{inc}} = 0, \text{ en } \mathbb{R}^3 \tag{3.1a}$$

donde $\kappa_{\text{ext}} = \omega/c^{\text{ext}}$ es el número de onda. Por otro lado, p_{tot} satisface la ecuación de Helmholtz en ambas regiones

$$\nabla^2 p_{\text{tot}} + \kappa_{\text{ext/int}}^2 p_{\text{tot}} = 0, \text{ en } \Omega^{\text{ext/int}} \tag{3.1b}$$

Adicionalmente, la onda dispersada debe cumplir la *condición de radiación de Sommerfeld*

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\partial_r p_{\text{sca}} - \mathrm{i}\kappa_{\text{ext}} p_{\text{sca}}\right) = 0, \text{ donde } r = \|\mathbf{x}\|. \tag{3.1c}$$

Una onda plana se puede modelar como una combinación lineal de ondas esféricas de la siguiente forma:

$$e^{\mathrm{i}\kappa_{\text{ext}}\mathbf{x}\cdot\mathbf{d}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(\kappa_{\text{ext}}\|x\|)P_n(\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{d}), \qquad \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|,$$

donde $\mathbf{x},\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ describen una posición en el espacio y la dirección de propagación (unitaria) de la onda respectivamente. La constante κ_{ext} es el número de onda en Ω^{ext}.

Dado que la esfera es simétrica, la dirección de onda incidente es indiferente, por lo tanto, tomaremos la dirección $\mathbf{d} = (0,0,1)$. Es decir, la onda incidente viaja a paralela al eje $+z$. En símbolos, la onda incidente en coordenadas esféricas se lee

$$e^{\mathrm{i}\kappa_{\text{ext}}r\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(\kappa_{\text{ext}}r)P_n(\cos\theta).$$

Esto nos da una simetría azimutal.

4. Soluciones Analíticas

4.1. Solución al Problema Exterior

Buscaremos soluciones para la dispersión en Ω^{ext}. En particular, $p_{\text{tot}} = p_{\text{ext}} = p_{\text{sca}} + p_{\text{inc}}$.

4.1.1. Condiciones de borde de Dirichlet

La condición de borde adicional es:

$$p_{\text{ext}} = 0, \text{ en } \Gamma \tag{4.1}$$

Equivalentemente

$$p_{\text{inc}} = -p_{\text{sca}}, \text{ en } \Gamma \tag{4.2}$$

Recordar que tanto p_{inc} como p_{sca} satisfacen la ecuación de Helmholtz en Ω^{ext}. En particular, asumiremos que p_{sca} es una superposición de soluciones de la forma fgh donde f,g y h representan la componente radial (Ecuaciones (2.7),(2.8)), polar (Ecuaciones (2.9),(2.10)) y azimutal (Ecuaciones (2.11),(2.12)) respectivamente, i.e.

$$p_{\text{sca}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n f_n(r)g_n(\theta)h_n(\varphi).$$

Dada la expresión de p_{inc} y con el fin de tener una base supondremos que el componente g_n es de la forma (2.10) (i.e. g_2 puesto que n es entero) con el coeficiente $D_{2,n,0}$ nulo. En resumen,

$$g_n(\theta) = C_{2,n,0}P_n(\cos\theta) \tag{4.3}$$

De esta forma, el componente azimutal debe ser constante (pues $m = 0$). Por lo tanto:

$$h_n(\varphi) = C_{3,n,0} \tag{4.4}$$

Nótese que esto es consistente con la simetría azimutal antes mencionada, pues si no fuese constante se rompería dicha simetría.

Por último, dado que p_{sca} debe satisfacer la condición de radiación de Sommerfeld (3.1c), el componente radial será de la forma (2.8) con $C_{1,n,0} = 0$ pues p_{sca} debe ser una onda viajera hacia infinito (ver Apéndice C). De esta forma, la ecuación que describe a la onda dispersada en $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^{\text{int}}$ es de la forma

$$p_{\text{sca}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{D_{1,n,0} C_{2,n,0} C_{3,n,0}}_{=:\alpha_n} h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} r) P_n(\cos\theta). \tag{4.5}$$

Por (4.1) y usando que los polinomios de Legendre son ortogonales, los coeficientes de p_{sca} son

$$\alpha_n = -\frac{(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(\kappa_{\text{ext}} R)}{h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} R)} \tag{4.6}$$

4.1.2. Condiciones de borde de Neumann

Aquí las condiciones de borde son:

$$\nabla p_{\text{ext}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \text{ en } \Gamma \tag{4.7}$$

Equivalentemente

$$\nabla p_{\text{inc}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\nabla p_{\text{sca}} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \text{ en } \Gamma \tag{4.8}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal exterior en el punto $\mathbf{x} \in \Gamma$. En coordenadas esféricas queda

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta). \tag{4.9}$$

donde $\mathbf{x} = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$. De esta forma, el operador $\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}$ se lee:

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}} = \partial_r \tag{4.10}$$

Así, la condición (4.7) en coordenadas esféricas se traduce a la siguiente expresión:

$$\partial_r p_{\text{inc}} = -\partial_r p_{\text{sca}}, \text{ en } \Gamma. \tag{4.11}$$

Aquí también buscamos expresar p_{sca} como una superposición de soluciones. Dado que solo estamos derivando el componente radial, la elección de g_n y h_n se mantiene. Más aún, por (3.1c) la preferencia de f_n también se conserva. Por lo tanto, en $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^{\text{int}}$ la expresión para la onda dispersada es:

$$p_{\text{sca}} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{D_{1,n,0} C_{2,n,0} C_{3,n,0}}_{=:\beta_n} h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} r) P_n(\cos\theta) \tag{4.12}$$

donde, por (4.7) y la ortogonalidad de los polinomios de Legendre se tiene que:

$$\beta_n = -\frac{(2n+1)\mathrm{i}^n \partial_r j_n(\kappa_{\text{ext}} R)}{\partial_r h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} R)} \tag{4.13}$$

Notar que j_n es una función univariada, por lo que $\partial_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$.

4.2. Solución al Problema de Transmisión

El problema de transmisión consiste en agregar a (3.1) las siguientes condiciones:

$$p_{\text{ext}} = p_{\text{int}} \qquad , \text{ en } \Gamma \tag{4.14a}$$

$$\frac{1}{\rho^{\text{ext}}}\nabla p_{\text{ext}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\rho^{\text{int}}}\nabla p_{\text{int}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad , \text{ en } \Gamma \tag{4.14b}$$

Por lo desarrollado en la Sección 2 sabemos que la onda disperada e interior son de la forma:

$$p_{\text{sca}}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\text{sca}}(r) g_n^{\text{sca}}(\theta) h_n^{\text{sca}}(\varphi) \tag{4.15}$$

$$p_{\text{int}}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{\text{int}}(r) g_n^{\text{int}}(\theta) h_n^{\text{int}}(\varphi) \tag{4.16}$$

Dado que p_{sca} satisface la condición de radiación de Sommerfeld (3.1c), su componente radial debe ser de la forma

$$f_n^{\text{sca}}(r) = C_{1,m,n} h_n^{(1)}(\kappa_{\text{ext}} r) + D_{1,m,n} h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} r), \tag{4.17}$$

pues necesitamos ondas viajeras.

De manera análoga, el componente radial de la onda interior debe ser de la forma

$$f_n^{\text{int}}(r) = A_{1,n,m} j_n(\kappa_{\text{int}} r) + B_{1,n,m} y_n(\kappa_{\text{int}} r), \tag{4.18}$$

que corresponde con ondas estacionarias.

Con el fin de tener una base para comparar, tomaremos $g^{\text{sca/int}}$ de la forma $g_n^{\text{sca/int}} = C_{2,n,0}^{\text{sca}} P_n + D_{2,n,0}^{\text{int}} Q_n$ y pondremos $D_{2,n,0}^{\text{sca/int}} = 0$. En consecuencia, $h_n^{\text{sca/int}} = C_{3,n,0}^{\text{sca/int}}$ una constante (pues escogemos $m = 0$). De esta forma, la onda dispersada e interior son de la forma:

$$p_{\text{sca}}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C_{1,n,0} C_{2,n,0}^{\text{sca}} C_{3,n,0}^{\text{sca}} h_n^{(1)}(\kappa_{\text{ext}} r) + D_{1,n,0} C_{2,n,0}^{\text{sca}} C_{3,n,0}^{\text{sca}} h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} r) \right] P_n(\cos\theta) \tag{4.19}$$

$$p_{\text{int}}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{1,n,0} C_{2,n,0}^{\text{int}} C_{3,n,0}^{\text{int}} j_n(\kappa_{\text{int}} r) + B_{1,n,0} C_{2,n,0}^{\text{int}} C_{3,n,0}^{\text{int}} y_n(\kappa_{\text{int}} r) \right] P_n(\cos\theta), \tag{4.20}$$

Simplificando la notación de manera correspondiente tenemos que:

$$p_{\text{sca}}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sigma_n^1 h_n^{(1)}(\kappa_{\text{ext}} r) + \sigma_n^2 h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} r) \right] P_n(\cos\theta) \tag{4.21}$$

$$p_{\text{int}}(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\iota_n^1 j_n(\kappa_{\text{int}} r) + \iota_n^2 y_n(\kappa_{\text{int}} r) \right] P_n(\cos\theta), \tag{4.22}$$

Dado que tenemos cuatro incógnitas y dos ecuaciones (4.14), impondremos $\sigma_n^1 = 0$ y $\iota_n^2 = 0$. De esta forma y por (4.14) tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(\kappa_{\text{ext}} R) + \sigma_n^2 h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} R) \right] P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \iota_n^1 j_n(\kappa_{\text{int}} R) P_n(\cos\theta) \tag{4.23}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{\text{int}}}{\rho_{\text{ext}}} \kappa_{\text{ext}} \left[(2n+1)\mathrm{i}^n \partial_r j_n(\kappa_{\text{ext}} R) + \sigma_n^2 \partial_r h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} R) \right] P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{\text{int}} \iota_n^1 \partial_r j_n(\kappa_{\text{int}} R) P_n(\cos\theta) \tag{4.24}$$

Donde usamos que $\partial_{\hat{\mathbf{n}}} = \partial_r$ en coordenadas esféricas y $\partial_r P_n(\cos\theta) = 0$. Luego, usando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre obtenemos el sistema lineal

$$(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(\kappa_{\text{ext}}R) + \sigma_n^2 h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}}R) = \iota_n^1 j_n(\kappa_{\text{int}}R) \tag{4.25}$$

$$\frac{\rho^{\text{int}}}{\rho^{\text{ext}}}\kappa_{\text{ext}}\left[(2n+1)\mathrm{i}^n \partial_r j_n(\kappa_{\text{ext}}R) + \sigma_n^2 \partial_r h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}}R)\right] = \kappa_{\text{int}}\iota_n^1 \partial_r j_n(\kappa_{\text{int}}R) \tag{4.26}$$

para cada $n \geq 0$.

Dejemos a $\rho := \rho^{\text{int}}/\rho^{\text{ext}}$ y $\kappa := \kappa_{\text{ext}}/\kappa_{\text{int}}$. Luego, resolviendo el sistema se obtiene:

$$\sigma_n^2 = \frac{(2n+1)\mathrm{i}^n\left[j_n(\kappa_{\text{ext}}R)j_n'(\kappa_{\text{int}}R) - \rho\kappa j_n(\kappa_{\text{int}}R)j_n'(\kappa_{\text{ext}}R)\right]}{\rho\kappa j_n(\kappa_{\text{int}}R)h_n^{(2)'}(\kappa_{\text{ext}}R) - j_n'(\kappa_{\text{int}}R)h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}}R)} \tag{4.27}$$

$$\iota_n^1 = \frac{(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(\kappa_{\text{ext}}R) + \sigma_n^2 h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}}R)}{j_n(\kappa_{\text{int}}R)} \tag{4.28}$$

5. Método de Elementos de Frontera

El método de elementos de frontera (*BEM* por sus siglás en inglés) consiste en reformular un problema volumétrico (de ecuaciones diferenciales parciales) como un problema integral de potenciales en la frontera.

De manera más específica, las condiciones de frontera se representarán mediante condiciones a los operadores de traza. Denotamos al operador de traza de Dirichlet como $\gamma_D^{\text{ext/int}}$, mientras que para el operador de traza de Neumann usamos la notación $\gamma_N^{\text{ext/int}}$. Los operadores se definen como:

$$(\gamma_D^{\text{ext/int}}\psi)(x) := \lim_{\Omega^{\text{ext/int}}\ni y\to x} \psi(y) \qquad x \in \Gamma \tag{5.1}$$

$$(\gamma_N^{\text{ext/int}}\psi)(x) := \lim_{\Omega^{\text{ext/int}}\ni y\to x} \partial_{\hat{\mathbf{n}}(x)}\psi(y) \quad x \in \Gamma \tag{5.2}$$

Por otro lado, los potenciales que usaremos son de la forma:

$$(\mathscr{V}_\kappa\psi)(x) := \int_\Gamma G_\kappa(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}\Gamma(y) \qquad x \in \Omega^{\text{int}} \cup \Omega^{\text{ext}} \tag{5.3}$$

$$(\mathscr{K}_\kappa\psi)(x) := \int_\Gamma \partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)}G_\kappa(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}\Gamma(y) \quad x \in \Omega^{\text{int}} \cup \Omega^{\text{ext}} \tag{5.4}$$

donde G_κ es la función de Green para el caso acústico dada por:

$$G_\kappa(x,y) = \frac{e^{\mathrm{i}\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad x \neq y. \tag{5.5}$$

Decimos que (5.3) es el *operador potencial de primera capa* y (5.4) es el *operador potencial de segunda capa*.

Para la soluciones p a la ecuación de Helmholtz con un número de onda κ dado usamos el ansatz:

$$p(x) = (\mathscr{V}f)(x) - (\mathscr{K}g)(x), \quad x \in \Omega^{\text{int}} \cup \Omega^{\text{ext}} \tag{5.6a}$$

donde

$$f = \gamma_N^{\text{int}} p - \gamma_N^{\text{ext}} p \tag{5.6b}$$

$$g = \gamma_D^{\text{int}} p - \gamma_D^{\text{ext}} p \tag{5.6c}$$

Supondremos que Γ es lo suficientemente suave como para que los siguiente operadores de frontera estén bien definidos casi en todas partes.

$$(\mathrm{V}f)(x) := \int_\Gamma G(x,y)f(y)\mathrm{d}y \qquad ,x\in\Gamma \tag{5.7a}$$

$$(\mathrm{K}g)(x) := \int_\Gamma \partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)} G(x,y)g(y)\mathrm{d}y \qquad ,x\in\Gamma \tag{5.7b}$$

$$(\mathrm{T}f)(x) := \int_\Gamma \partial_{\hat{\mathbf{n}}(x)} G(x,y)f(y)\mathrm{d}y \qquad ,x\in\Gamma \tag{5.7c}$$

$$(\mathrm{D}g)(x) := -\partial_{\hat{\mathbf{n}}(x)} \int_\Gamma \partial_{\hat{\mathbf{n}}(y)} G(x,y)g(y)\mathrm{d}y \qquad ,x\in\Gamma \tag{5.7d}$$

Así como sus relaciones de salto

$$\mathrm{V}f = \gamma_D^{\text{ext}}(\mathscr{V}f) \qquad = \gamma_D^{\text{int}}(\mathscr{V}f) \tag{5.8a}$$

$$\mathrm{K}g = \gamma_D^{\text{ext}}(\mathscr{K}g) - \frac{1}{2}g = \gamma_D^{\text{int}}(\mathscr{K}g) + \frac{1}{2}g \tag{5.8b}$$

$$\mathrm{T}f = \gamma_N^{\text{ext}}(\mathscr{V}f) + \frac{1}{2}f = \gamma_N^{\text{int}}(\mathscr{V}f) - \frac{1}{2}f \tag{5.8c}$$

$$\mathrm{D}g = -\gamma_N^{\text{ext}}(\mathscr{K}g) \qquad = -\gamma_N^{\text{int}}(\mathscr{K}g) \tag{5.8d}$$

Los operadores integrales de frontera V, K, T y D son llamados de *primera capa, segunda capa, adjunto de segunda capa* e *hipersingular* respectivamente. Nótese que los operadores dependen del número de onda.

5.1. Soluciones al Problema Exterior

Como en el caso analítico, buscaremos soluciones para el campo acústico en Ω^{ext}, en particular, $p_{\text{int}} = 0$. Una consecuencia inmediata es que $p_{\text{tot}} = p_{\text{ext}} = p_{\text{sca}} + p_{\text{inc}}$.

5.1.1. Condiciones de Borde de Dirichlet

Estamos pidiendo la condición

$$\gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{tot}} = 0, \quad \text{en } \Gamma. \tag{5.9}$$

Dado que conocemos p_{inc}, usaremos (5.6) como ansatz para p_{sca}. Se sigue (usando la continuidad de la onda incidente y las condiciones de borde e interior) que

$$g = \gamma_D^{\text{int}} p_{\text{sca}} - \gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = \gamma_D^{\text{int}} p_{\text{ext}} - \gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{ext}} + \gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{inc}} - \gamma_D^{\text{int}} p_{\text{inc}} = 0.$$

$$f = \gamma_N^{\text{int}} p_{\text{sca}} - \gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = \gamma_N^{\text{int}} p_{\text{ext}} - \gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{ext}} + \gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{inc}} - \gamma_N^{\text{int}} p_{\text{inc}} = -\gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{ext}}.$$

De esta forma y poniendo $\psi = \gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{ext}}$, la onda dispersada se lee

$$p_{\text{sca}}(x) = [\mathscr{V}f](x) = -[\mathscr{V}\psi](x), \quad x\in\Omega^{\text{ext}}. \tag{5.10}$$

Por lo que si encontramos ψ, obtenemos una expresión para p_{sca}.

Aplicando γ_D^{ext} a (5.10) y usando las relaciones de salto nos queda que $\gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = -\mathrm{V}\psi$. De manera similar, aplicando γ_N^{ext} obtenemos $\gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = -\mathrm{T}\psi + \frac{1}{2} f$. Descomponiendo $p_{\text{sca}} = p_{\text{ext}} - p_{\text{inc}}$ obtenemos las ecuaciones

$$p_{\text{inc}} = \mathrm{V}\psi \qquad \text{y} \qquad \partial_{\hat{\mathbf{n}}} p_{\text{inc}} = \mathrm{T}\psi + \frac{1}{2}\psi$$

Combinando las ecuaciones bajo un parámetro $\eta \in \mathbb{C}$ nos queda

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{I} + \mathrm{T} + \eta \mathrm{V}\right)\psi = \partial_{\hat{\mathbf{n}}} p_{\text{inc}} + \eta\, p_{\text{inc}} \tag{5.11}$$

Como p_{inc} es conocida, podemos resolver para ψ.

5.1.2. Condiciones de Borde de Neumann

Ahora la condición es

$$\gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{tot}} = 0, \ \text{en } \Gamma. \tag{5.12}$$

Como antes, esto caracteriza a las funciones f y g de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f &= \gamma_N^{\text{int}} p_{\text{sca}} - \gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = \gamma_N^{\text{int}} p_{\text{ext}} - \gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{ext}} + \gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{inc}} - \gamma_N^{\text{int}} p_{\text{inc}} = 0 \\ g &= \gamma_D^{\text{int}} p_{\text{sca}} - \gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = \gamma_D^{\text{int}} p_{\text{ext}} - \gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{ext}} + \gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{inc}} - \gamma_D^{\text{int}} p_{\text{inc}} = -\gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{ext}} \end{aligned}$$

Definamos $\phi := \gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{ext}} = -g$. Luego, la onda dispersada se lee:

$$p_{\text{sca}} = \mathscr{K}(\gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{ext}}) = \mathscr{K}\phi, \ \text{en } \Omega^{\text{ext}}. \tag{5.13}$$

Por las relaciones de salto tenemos que $\gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = \mathrm{D}\phi$ y $\gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = \mathrm{K}\phi + (1/2)\phi$. Descomponemos $p_{\text{sca}} = p_{\text{ext}} - p_{\text{inc}}$. Usando la continuidad de p_{inc} y la condición de borde obtenemos las siguientes relaciones:

$$p_{\text{inc}} = -\left(\mathrm{K} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\right)\phi \qquad \text{y} \qquad \partial_{\hat{\mathbf{n}}} p_{\text{inc}} = -D\phi.$$

Combinando las ecuaciones bajo un parámetro $\eta \in \mathbb{C}$ nos queda

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{I} - \mathrm{K} - \eta \mathrm{D}\right)\phi = p_{\text{inc}} + \eta\, \partial_{\hat{\mathbf{n}}} p_{\text{inc}} \tag{5.14}$$

De nuevo, p_{inc} es conocida, por lo que basta resolver para ϕ.

5.2. Solución al Problema de Transmisión

Consiste en agregar las condiciones:

$$\gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{tot}} = \gamma_D^{\text{int}} p_{\text{tot}} \qquad , \text{ en } \Gamma \tag{5.15a}$$

$$\frac{1}{\rho^{\text{ext}}}\gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{tot}} = \frac{1}{\rho^{\text{int}}}\gamma_N^{\text{int}} p_{\text{tot}} \qquad , \text{ en } \Gamma \tag{5.15b}$$

Equivalentemente, podemos expresar estas condiciones introduciendo el *operador traza de Cauchy*:

$$\gamma^{\text{ext/int}} = \begin{bmatrix} \gamma_D^{\text{ext/int}} \\ \gamma_N^{\text{ext/int}} \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

De esta forma, el problema de transmisión queda:

$$\mathrm{P}\gamma^{\text{ext}} p_{\text{tot}} = \gamma^{\text{int}} p_{\text{tot}} \quad , \text{ en } \Gamma \tag{5.17}$$

donde

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^{\text{int}}/\rho^{\text{ext}} \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

Para la presión acústica total dispersada usaremos el ansatz (5.6) con p_{tot}.

Por las relaciones de salto se tiene que:

$$\gamma^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = \gamma^{\text{ext}} [\mathscr{V} f - \mathscr{K} g] = \left(A^{\text{ext}} - \frac{1}{2}\mathrm{I}\right) \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

$$\gamma^{\text{int}} p_{\text{int}} = \gamma^{\text{int}} [\mathscr{V} f - \mathscr{K} g] = \left(A^{\text{int}} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\right) \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

donde $A^{\text{ext/int}}$ es el *operador multitraza* dado por:

$$A^{\text{ext/int}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{K} & \mathrm{V} \\ \mathrm{D} & \mathrm{T} \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

Notar que los operadores dependen del número de onda κ, por lo que en general $A^{\text{ext}} \neq A^{\text{int}}$.

Para las trazas exteriores, usaremos los potenciales de salto quitando la contribución de los términos interiores, es decir $f = -\gamma_N^{\text{ext}} p_{\text{tot}}$ y $g = -\gamma_D^{\text{ext}} p_{\text{tot}}$. De esta forma, se tiene que:

$$\gamma^{\text{ext}} p_{\text{sca}} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{I} - A^{\text{ext}}\right) \gamma^{\text{ext}} p_{\text{tot}}. \tag{5.22a}$$

Análogamente para las trazas interiores ignoraremos las constribuciones del exterior, es decir, $f = \gamma_N^{\text{int}} p_{\text{tot}}$ y $g = \gamma_D^{\text{int}} p_{\text{tot}}$. Teniendose que:

$$\gamma^{\text{int}} p_{\text{int}} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{I} + A^{\text{int}}\right) \gamma^{\text{int}} p_{\text{tot}}. \tag{5.22b}$$

Notése que en el interior $p_{\text{int}} = p_{\text{tot}}$, por lo que aplicando las condiciones de borde (5.15) a (5.22b) se obtiene:

$$P\gamma^{\text{ext}} p_{\text{tot}} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{I} + A^{\text{int}}\right) P\gamma^{\text{ext}} p_{\text{tot}}. \tag{5.23}$$

Definiendo $\tilde{A}^{\text{int}} = P^{-1} A^{\text{int}} P$ nos queda que

$$\gamma^{\text{ext}} p_{\text{tot}} = \left(\frac{1}{2}\mathrm{I} + \tilde{A}^{\text{int}}\right) \gamma^{\text{ext}} p_{\text{tot}}. \tag{5.24}$$

Restando (5.22a) nos da la ecuación

$$\gamma^{\text{ext}} p_{\text{inc}} = \left(A^{\text{ext}} + \tilde{A}^{\text{int}}\right) \gamma^{\text{ext}} p_{\text{tot}}. \tag{5.25}$$

6. Resumen

Problema Exterior			
Variable	Forma	Coeficientes	
p_{sca}	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} r) P_n(\cos\theta)$	Dirichlet	$a_n = -\dfrac{(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(\kappa R)}{h_n^{(2)}(\kappa R)}$
		Neumann	$a_n = -\dfrac{(2n+1)\mathrm{i}^n j_n'(\kappa R)}{h_n^{(2)'}(\kappa R)}$
Problema de Transmisión			
Variable	Forma	Coeficiente	
p_{sca}	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} r) P_n(\cos\theta)$	$a_n = (2n+1)\mathrm{i}^n \dfrac{[\rho_{\text{ext}} \kappa_{\text{int}} j_n(\kappa_{\text{ext}} R) j_n'(\kappa_{\text{int}} R) - \rho_{\text{int}} \kappa_{\text{ext}} j_n(\kappa_{\text{int}} R) j_n'(\kappa_{\text{ext}} R)]}{\rho_{\text{int}} \kappa_{\text{ext}} j_n(\kappa_{\text{int}} R) h_n'^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} R) - \rho_{\text{ext}} \kappa_{\text{int}} j_n'(\kappa_{\text{int}} R) h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} R)}$	
p_{int}	$\sum_{n=0}^{\infty} b_n j_n(\kappa_{\text{int}} r) P_n(\cos\theta)$	$b_n = \dfrac{(2n+1)\mathrm{i}^n j_n(\kappa_{\text{ext}} R) + a_n h_n^{(2)}(\kappa_{\text{ext}} R)}{j_n(\kappa_{\text{int}} R)}$	

Cuadro 1: Fórmulas para soluciones analíticas

A. NOTACIÓN

El operador del (o nabla) ∇ está definido por

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

donde $\partial_\bullet$ denotará a la derivada parcial con respecto a la variable $\bullet$. Para un campo escalar, el *Laplaciano* está definido como

$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \tag{A.2}$$

Por otro lado, se recomienda ver el Apéndice B si no se está familiarizado con las coordenadas esféricas.

Para $X \subset \mathbb{R}^3$ denotamos por X' al conjunto se sus puntos límite, X° a sus puntos interiores, $\overline{X} = X \cup X'$ a su clausura y por ∂X su frontera.

Decimos que $\mathscr{C}^k(X)$ son las funciones k-veces diferenciable con la k-ésima derivada continua sobre X. Por otro lado, $L^p(X)$ denota el espacio de las funciones medibles sobre X con norma $\|\cdot\|_p$. Por último, usamos la notación $\mathscr{H}^k(X)$ para denotar el espacio de Sobolev de orden k asociado a L^2. Si X se omite se asume que es $\mathbb{R}^3$ o bien el dominio correspondiente en caso de que ya esté definido. En todos los casos las funciones toman valores en $\mathbb{C}$.

B. COORDENADAS ESFÉRICAS

Tomando las coordenadas usuales como punto de partida, el sistema de referencia esférico expresa el espacio tridimensional con respecto a tres datos: La distancia al origen (r), el ángulo con respecto al eje z y el ángulo de la proyección en el plano xy con el eje x. De manera más precisa, las relaciones son las siguientes

$$\begin{aligned} x &= r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z &= r\cos(\theta) \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \arctan(y/x) \\ \varphi &= \arccos(z/r) \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} r &\in [0,\infty), \\ \theta &\in [0,\pi], \\ \varphi &\in [0,2\pi) \end{aligned} \tag{B.1}$$

B.1. Cambio de coordenadas y derivadas

Lidiaremos con funciones $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ expresadas en el sistema de referencia esférico. Dado que operadores como ∇ están expresados en términos de las coordenadas rectángulares, necesitamos una expresión de ∇ para funciones que usan coordenadas esféricas. En resumen, f recibe argumentos en formato (r,θ,φ) y nosotros tenemos argumentos del tipo (x,y,z), así que necesitamos una forma de comunicar ambos sistemas, y con ello sus operadores asociados.

Consideremos $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función que transforma las coordenadas rectangulares en coordenadas esféricas. Explicítamente

$$T(x,y,z) = \big(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{r}, \underbrace{\arccos(z/r)}_{\theta}\underbrace{\arctan(y/x)}_{\varphi},\big) \tag{B.2}$$

Usando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned} D(f\circ T) &= Df(T)\cdot DT \\ &= \begin{pmatrix} \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se concluye que

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\partial_\theta - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\partial_\theta + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi \\ \cos\theta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

B.2. Laplaciano escalar

En esta sección derivaremos el operador ∇^2 en coordenadas esféricas. Recordar que para $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ se define su Laplaciano como

$$\nabla^2 f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f. \tag{B.4}$$

Veamos cada sumando por separado y después juntaremos todo. Usaremos las fórmulas derivadas en la sección anterior. Por simplicidad, omitiremos la función e interpretaremos $\partial_\cdot$ como un operador.

Comenzamos con la derivada con respecto a x

$$\begin{aligned} \partial_x^2 &= \partial_x \underbrace{\left(\sin\theta\cos\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\partial_\theta - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi\right)}_{=:\zeta} \\ &= \sin\theta\cos\varphi\partial_r(\zeta) + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\partial_\theta(\zeta) - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi(\zeta) \end{aligned}$$

Aplicando los operadores a ζ nos queda

$$\begin{aligned} \partial_r(\zeta) &= \sin\theta\cos\varphi\partial_r^2 + \cos\theta\cos\varphi\left[-\frac{1}{r^2}\partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\theta\right] - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left[-\frac{1}{r^2}\partial_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\varphi\right] \\ \partial_\theta(\zeta) &= \cos\varphi\left[\cos\theta\partial_r + \sin\theta\partial_\theta\partial_r\right] + \frac{1}{r}\cos\varphi\left[-\sin\theta\partial_\theta + \cos\theta\partial_\theta^2\right] - \frac{1}{r}\sin\varphi\left[-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\partial_\varphi\right] \\ \partial_\varphi(\zeta) &= \sin\theta\left[-\sin\varphi\partial_r + \cos\varphi\partial_\varphi\partial_r\right] + \frac{1}{r}\cos\theta\left[-\sin\varphi\partial_\theta + \cos\varphi\partial_\varphi\partial_\theta\right] - \frac{1}{r\sin\theta}\left[\cos\varphi\partial_\varphi + \sin\varphi\partial_\varphi^2\right] \end{aligned}$$

Juntando todo y agrupando coeficientes se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_x^2 &= \left[\sin^2\theta\cos^2\varphi\right]\partial_r^2 + \left[\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi\right]\partial_\theta^2 + \left[\frac{1}{r^2}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\right]\partial_\varphi^2 \\
&+ \left[\frac{1}{r}\cos^2\theta\cos^2\varphi + \frac{1}{r}\sin^2\varphi\right]\partial_r + \left[-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin^2\varphi\right]\partial_\theta \\
&+ \left[\frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\theta}\right]\partial_\varphi + \left[\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right]\partial_r\partial_\theta \\
&+ \left[-\frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi\right]\partial_r\partial_\varphi + \left[-\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi\right]\partial_\theta\partial_\varphi
\end{aligned}$$

De manera similar, la derivada con respecto a y

$$\begin{aligned}
\partial_y^2 &= \partial_y \underbrace{\left(\sin\theta\sin\varphi\partial_r + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\partial_\theta + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi\right)}_{=:\eta} \\
&= \sin\theta\sin\varphi\partial_r(\eta) + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\partial_\theta(\eta) + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi(\eta)
\end{aligned}$$

Aplicamos los operadores a η.

$$\begin{aligned}
\partial_r(\eta) &= \sin\theta\sin\varphi\partial_r^2 + \cos\theta\sin\varphi\left[-\frac{1}{r^2}\partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\theta\right] + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left[-\frac{1}{r^2}\partial_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\varphi\right] \\
\partial_\theta(\eta) &= \sin\varphi\left[\cos\theta\partial_r + \sin\theta\partial_\theta\partial_r\right] + \frac{1}{r}\sin\varphi\left[-\sin\theta\partial_\theta + \cos\theta\partial_\theta^2\right] + \frac{1}{r}\cos\varphi\left[-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\partial_\varphi + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\partial_\varphi\right] \\
\partial_\varphi(\eta) &= \sin\theta\left[\cos\varphi\partial_r + \sin\varphi\partial_\varphi\partial_r\right] + \frac{1}{r}\cos\theta\left[\cos\varphi\partial_\theta + \sin\varphi\partial_\varphi\partial_\theta\right] + \frac{1}{r}\frac{1}{\sin\theta}\left[-\sin\varphi\partial_\varphi + \cos\varphi\partial_\varphi^2\right]
\end{aligned}$$

Todo junto queda

$$\begin{aligned}
\partial_y^2 &= \left[\sin^2\theta\sin^2\varphi\right]\partial_r^2 + \left[+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi\right]\partial_\theta^2 + \left[\frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\theta}\right]\partial_\varphi^2 \\
&+ \left[\frac{1}{r}\cos^2\theta\sin^2\varphi + \frac{1}{r}\cos^2\varphi\right]\partial_r + \left[-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos^2\varphi\right]\partial_\theta \\
&+ \left[-\frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{r^2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^2\theta}\right]\partial_\varphi + \left[\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\right]\partial_r\partial_\theta \\
&+ \left[\frac{2}{r}\sin\varphi\cos\varphi\right]\partial_r\partial_\varphi + \left[\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\cos\varphi\right]\partial_\theta\partial_\varphi
\end{aligned}$$

Ahora veamos la derivada con respecto a z

$$\begin{aligned}
\partial_z^2 &= \partial_z \underbrace{\left(\cos\theta\partial_r - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta\right)}_{=:\xi} \\
&= \cos\theta\partial_r(\xi) - \frac{1}{r}\sin\theta\partial_\theta(\xi)
\end{aligned}$$

Como antes, aplicamos los operadores a ξ

$$\partial_r(\xi) = \cos\theta\partial_r^2 - \sin\theta\left[-\frac{1}{r^2}\partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_r\partial_\theta\right]$$
$$\partial_\theta(\xi) = -\sin\theta\partial_r + \cos\theta\partial_\theta\partial_r - \frac{1}{r}\left[\cos\theta\partial_\theta + \sin\theta\partial_\theta^2\right]$$

Juntando todo y agrupando términos

$$\partial_z^2 = \left[\cos^2\theta\right]\partial_r^2 + \left[\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\right]\partial_\theta^2 + \left[\frac{1}{r}\sin^2\theta\right]\partial_r + \left[\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta\right]\partial_\theta + \left[-\frac{2}{r}\sin\theta\cos\theta\right]\partial_r\partial_\theta$$

Finalmente, juntamos todos los términos en $\partial_x^2, \partial_y^2$ y ∂_z^2. Agrupando por operadores nos deja

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \frac{2}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta \tag{B.5}$$

Para dejarlo de la forma estándar (sin derivadas de orden superior explícitas), notamos que por regla del producto en los términos con derivadas superiores, se tiene

$$\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r = \frac{1}{r^2}\left(r^2\partial_r\right) \tag{B.6}$$

y

$$\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\theta = \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right). \tag{B.7}$$

Por lo que el Laplaciano se puede expresar de la siguiente forma

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 \tag{B.8}$$

C. Funciones especiales

C.1. Funciones esféricas de Bessel

Son las dos soluciones j_n y y_n linealmente independientes de la ecuación

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}y + 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \left(x^2 - n(n+1)\right)y = 0.$$

La solución j_n se dice de primer tipo, mientras que y_n es la de segundo tipo (también llamada *función esférica de Neumann*).

En base a las propiedades expuestas en *Digital Library of Mathematical Functions*[1]. Tenemos que

$$j_n(z) = A_0\sin(z - \frac{1}{2}n\pi) + A_1\cos(z - \frac{1}{2}n\pi)$$
$$y_n(z) = -A_0\cos(z - \frac{1}{2}n\pi) + A_1\sin(z - \frac{1}{2}n\pi)$$

[1]https://dlmf.nist.gov/10.49

donde

$$A_0 = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{a_{2k}(n+\frac{1}{2})}{z^{2k+1}}$$

$$A_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \frac{a_{2k+1}(n+\frac{1}{2})}{z^{2k+2}}$$

$$a_k(n+\frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{(n+k)!}{2^k k!(n-k)!} & ,k=0,\ldots,n, \\ 0 & ,k=n+1,n+2,\ldots \end{cases}$$

Nótese que $j_n|_{\mathbb{R}}$ es una función real. Usando que

$$\sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2}$$

Obtenemos que para $\kappa \in \mathbb{R}$, j_n y y_n representan ondas estacionarias. En efecto,

$$j_n(\kappa r)e^{\mathrm{i}\omega t} = \frac{(A_1 + \mathrm{i}A_0)}{2} e^{\mathrm{i}(z-\frac{1}{2}n\pi+\omega t)} + \frac{(A_1 - \mathrm{i}A_0)}{2} e^{\mathrm{i}(\omega t-(z-\frac{1}{2}n\pi))}$$

y

$$y_n(\kappa r)e^{\mathrm{i}\omega t} = \frac{-A_0 - \mathrm{i}A_1}{2} e^{\mathrm{i}(\kappa r-\frac{1}{2}n\pi+\omega t)} + \frac{-A_0 + \mathrm{i}A_1}{2} e^{\mathrm{i}(\omega t-(\kappa r-\frac{1}{2}n\pi))}$$

Con esto podemos ver que $h_n^{(1)}$ y $h_n^{(2)}$ representan ondas viajeras, pues,

$$h_n^{(1)}(\kappa r)e^{\mathrm{i}\omega t} = j_n(\kappa r)e^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{i}y_n(\kappa r)e^{\mathrm{i}\omega t} = A_1 e^{\mathrm{i}(\kappa r-\frac{1}{2}n\pi+\omega t)} + \mathrm{i}A_0 e^{\mathrm{i}(\omega t-(\kappa r-\frac{1}{2}n\pi))}$$

y

$$h_n^{(2)}(\kappa r)e^{\mathrm{i}\omega t} = j_n(\kappa r)e^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{i}y_n(\kappa r)e^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{i}A_0 e^{\mathrm{i}(\kappa r-\frac{1}{2}n\pi+\omega t)} + A_1 e^{\mathrm{i}(\omega t-(\kappa r-\frac{1}{2}n\pi))}$$

Nótese que $h_n^{(1)}$ viajan a $-r$ y $h_n^{(2)}$ viajan $+r$.

C.2. Funciones de Legendre

Son las soluciones P_n^m y Q_n^m a la ecuación

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x}y - 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0.$$

Se dicen de primer y segundo tipo respectivamente. Cuando $m=0$ resultan los polinomios de Legendre, que equivalen a aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt (sin normalizar) a la base polinómica canónica (i.e. $1, x, x^2, \ldots$) con el producto interno L^2.